Chương 15

Tích phân bội

Các nhà địa chất nghiên cứu sự hình thành của các dãy núi và công cần để nâng chúng lên khỏi mặt nước biển. Trong chương này người đọc sẽ tìm một tích phân bội ba để tính công để tạo ra núi Phú Sĩ ở Nhật Bản.

Trong chương này chúng ta mở rộng các ý của tích phân thành tích phân bội hai và bội ba cho hàm hai và ba biến. Các ý này được dùng để tính thể tích, khối lượng, tâm khối lượng của nhiều miền hơn các chương trước. Ta cũng dùng tích phân bội hai để tính xác suất khi có hai biến ngẫu nhiên.

Ta sẽ thấy tọa độ cực có ích khi tính một số tích phân bội hai. Tương tự ta sẽ giới thiệu hai hệ tọa độ mới trong không gian ba chiều – tọa độ cầu và tọa độ trụ – giúp đơn giản hóa tính toán một số tích phân bội ba.

15.1 Tích phân bội hai trên hình chữ nhật

Giống như nỗ lực để giải bài toán diện tích dẫn ta tới tích phân xác định, nỗ lực tính thể tích dẫn ta tới định nghĩa tích phân bội hai.

Ôn lại tích phân xác định

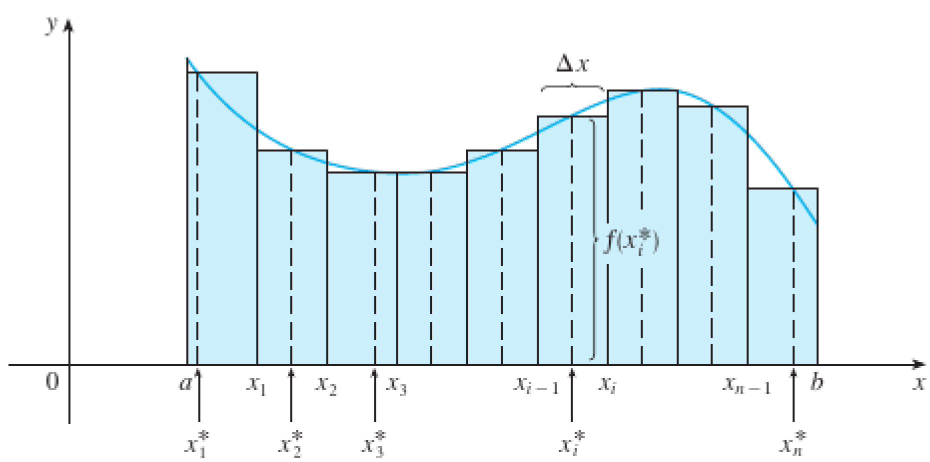
Trước hết hãy nhắc lại những sự kiện cơ bản về tích phân xác định của hàm một biến. Nếu hàm $f(x)$ được xác định trên đoạn $a \leq x \leq b$ ta bắt đầu bằng cách chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ có chiều dài bằng nhau $\Delta x = (b-a)/n$ và chọn một điểm x_i^* trong mỗi khoảng đó. Rồi viết tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \qquad (15.1.1)$$

và lấy giới hạn của tổng này khi $n \to \infty$ để được tích phân xác định của f từ a tới b:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \qquad (15.1.2)$$

Trong trường hợp $f \geq 0$ tổng Riemann có thể được giải thích như là tổng của diện tích các hình chữ nhật như trong Hình 15.1.1 và $\int_a^b f(x)\ dx$ là diện tích bên dưới đường cong $y = f(x)$ từ a tới b.



Hình 15.1.1:

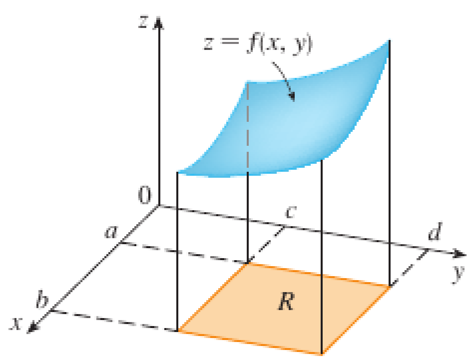
Thể tích và tích phân bội hai

Một cách tương tự xét hàm hai biến f xác định trên hình chữ nhật đóng

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

và trước tiên ta giả sử $f(x, y) \ge 0$. Đồ thị của f là mặt với phương trình $z = f(x, y)$. Gọi S là khối trên R và dưới đồ thị của f, nghĩa là

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$



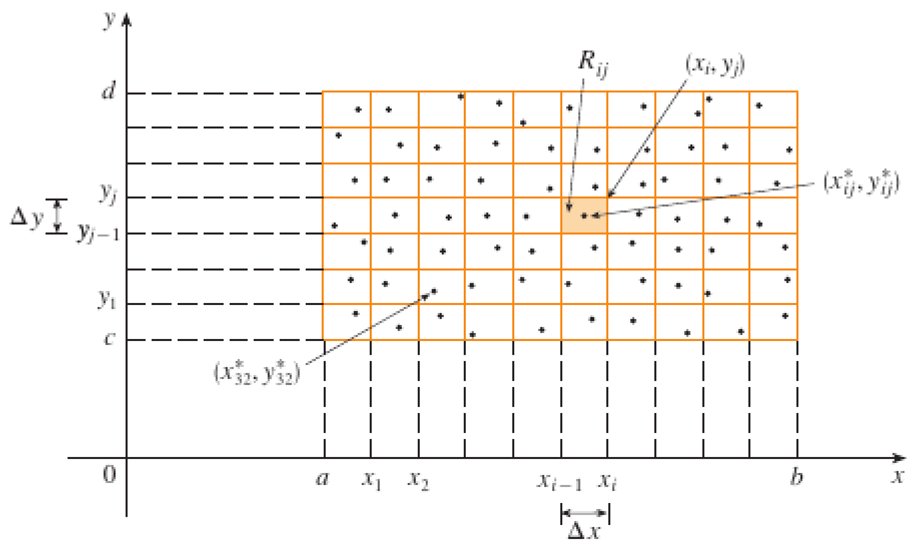
Hình 15.1.2:

(xem Hình 15.1.2). Mục tiêu của ta là tìm thể tích của S.

Bước đầu tiên là chia R thành các hình chữ nhật con. Chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ có chiều rộng bằng nhau $\Delta x = (b - a)/m$ và chia đoạn $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ có chiều rộng bằng nhau $\Delta y = (d - b)/n$. Bằng cách vẽ các đường thẳng song song với trục tọa độ đi qua các điểm đầu mút của các khoảng con đó, như trong Hình 15.1.3, ta được các hình chữ nhật con

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}$$

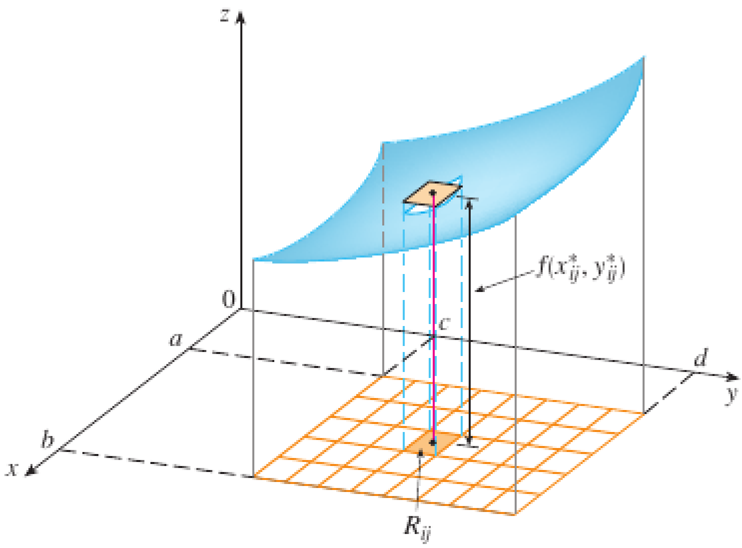
mỗi cái có diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$.



Hình 15.1.3: Chia nhỏ R.

Nếu ta chọn một điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong mỗi hình chữ nhật con R_{ij} thì ta có thể xấp xỉ phần thể tích bên dưới mặt S bên trên R_{ij} bằng một hộp chữ nhật với chiều cao $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ và đáy R_{ij} như trong Hình 15.1.4 (so sánh với Hình 15.1.1). Thể tích của hình hộp này bằng diện tích đáy nhân chiều cao:

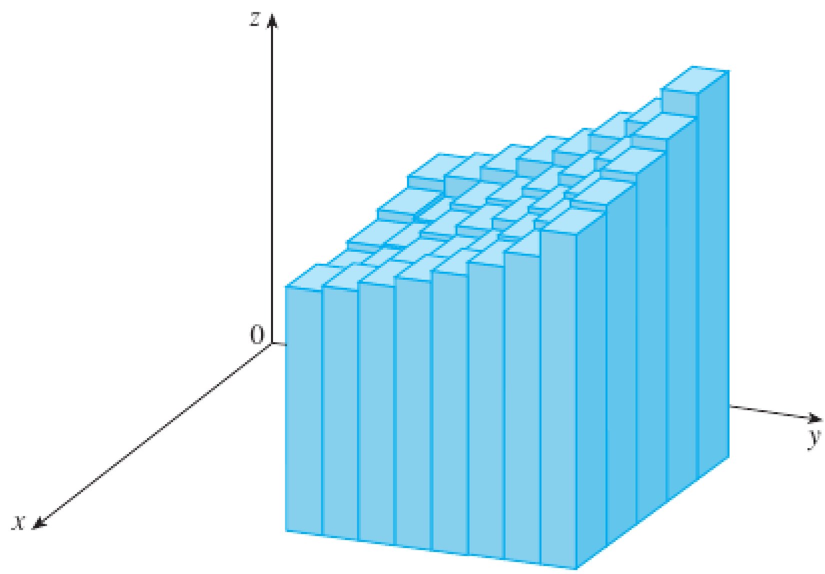
$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$



Hình 15.1.4:

Nếu ta làm theo cách này và cộng thể tích của các hộp tương ứng ta được một xấp xỉ của tổng thể tích của S:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \tag{15.1.3}$$



Hình 15.1.5:

(Xem Hình 15.1.5.) Tổng này có nghĩa là với mỗi hình chữ nhật con ta tính giá trị của f ở điểm mẫu rồi nhân với diện tích của hình chữ nhật con và cộng các kết quả lại.

Trực giác nói với ta rằng tổng ở 15.1.3 trở nên tốt hơn khi m và n lớn hơn vì vậy ta chờ đợi rằng

$$V = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \tag{15.1.4}$$

Chúng ta dùng công thức 15.1.4 để định nghĩa *thể tích* của khối S bên dưới đồ thị của f bên trên hình hộp R. (Có thể chứng tỏ công thức này tương thích với công thức thể tích ở mục 5.2).

Giới hạn như trong công thức 15.1.4 xuất hiện thường xuyên, không chỉ trong tính thể tích mà còn ở nhiều chỗ khác – như ta sẽ thấy trong mục 15.5 – kể cả khi f không phải là hàm dương. Vì vậy ta đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 15.1.1. Tích phân của hàm f trên hình chữ nhật R là

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Ý nghĩa chính xác của giới hạn trong Định nghĩa 15.1.1 là với mọi $\epsilon > 0$ có một số nguyên dương N sao cho

$$\left| \iint_R f(x,y)\, dA - \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A \right| < \epsilon$$

với mọi m và n lớn hơn N và với mọi cách chọn điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong R_{ij}.

Hàm f được gọi là *khả tích* nếu giới hạn trong Định nghĩa 15.1.1 tồn tại. Trong môn học Giải tích Nâng cao sẽ có chứng minh rằng các hàm liên tục là khả tích. Thực ra một hàm f sẽ khả tích nếu nó "không quá không liên tục". Đặc biệt, nếu f bị chặn [nghĩa là có M sao cho $|f(x,y)| \leq M$ với mọi $(x,y) \in R$] và f liên tục trên R trừ ra trên hữu hạn đường cong trơn thì f khả tích trên R.

Điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) có thể là điểm bất kì trên R_{ij} nhưng nếu ta chọn đó là đỉnh trên bên phải của R_{ij} thì biểu thức cho tích phân bội hai trở nên đơn giản hơn

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$$

So sánh Định nghĩa 15.1.4 và 15.1.1 ta thấy thể tích có thể được viết như một tích phân bội hai:

Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì thể tích V của khối bên trên hình hộp R bên dưới mặt $z = f(x,y)$ là

$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

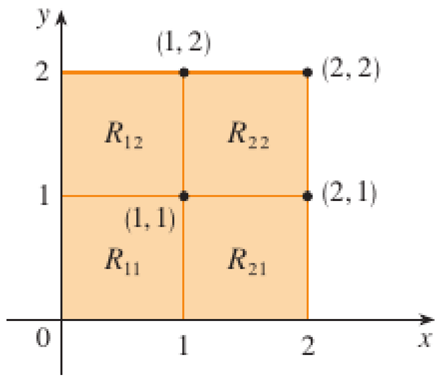
Tổng trong Định nghĩa 15.1.1

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

được gọi là *tổng Riemann* và được dùng để xấp xỉ giá trị của tích phân. [Để ý nó giống với tổng Riemann trong 15.1.1 cho hàm một biến.] Nếu f dương thì đó là tổng của các hộp như trong Hình 15.1.5 và được dùng để xấp xỉ diện tích bên dưới đồ thị của f.

Ví dụ 15.1.2. Ước tính thể tích của khối bên trên hình chữ vuông $R = [0,2] \times [0,2]$ và bên dưới mặt elliptic paraboloid $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Chia R thành 4 hình vuông con và chọn đỉnh trên bên phải cho mỗi hình vuông con R_{ij}. Vẽ khối này và các hình hộp xấp xỉ.

Giải. Hình chữ vuông được vẽ ở Hình 15.1.6.

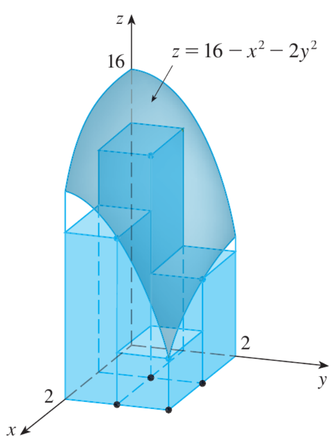


Hình 15.1.6:

Mặt parapolic là đồ thị của hàm $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ và diện tích của mỗi hình vuông là $\Delta A = 1$. Xấp xỉ tổng Riemann với $m = 2$ và $n = 2$ ta được

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A \\ &= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A \\ &= 13(1) + 10(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

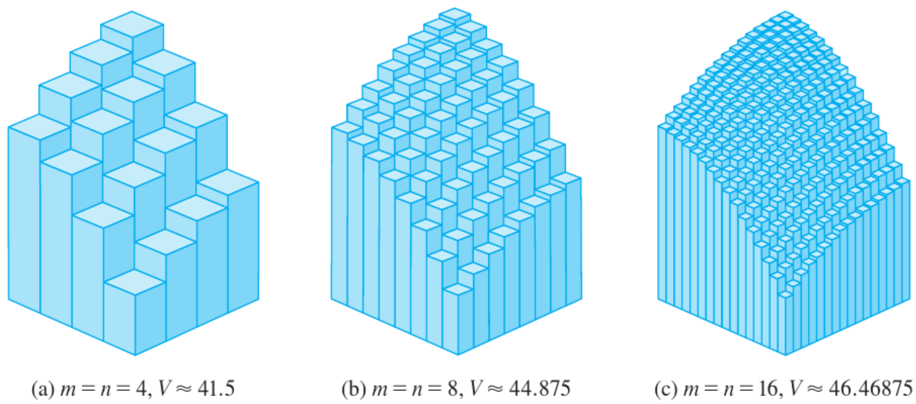
Đây là thể tích của các khối hộp chữ nhật xấp xỉ trong Hình 15.1.7.



Hình 15.1.7:

□

Ta sẽ được xấp xỉ tốt hơn nếu tăng số hình vuông con. Hình 15.1.8 cho thấy các cột bắt đầu trông giống hơn một khối và các xấp xỉ tương ứng trở nên chính xác hơn nếu ta dùng 16, 64 và 256 hình vuông. Trong bài tới (xem 15.2.5) ta sẽ chỉ được là thể tích đúng bằng 48.

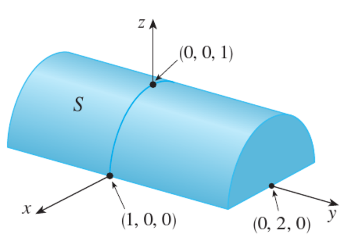


Hình 15.1.8:

Ví dụ 15.1.3. Nếu $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\}$, tính tích phân

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

Giải. Sẽ khó mà tính tính phân này trực tiếp từ Định nghĩa 15.1.1 nhưng vì $\sqrt{1 - x^2} \ge 0$ ta có thể tính tích phân này bằng cách giải thích nó như một thể tích. Vì $z = \sqrt{1 - x^2}$ nên $x^2 + z^2 = 1$ và $z \ge 0$, vì thế tích phân đã cho đại diện cho thể tích của khối S nằm bên dưới mặt trụ tròn $x^2 + z^2 = 1$ bên trên hình chữ nhật R.



Hình 15.1.9:

(Xem Hình .) Thể tích của S bằng diện tích nửa hình tròn bán kính 1 nhân chiều dài mặt trụ. Vậy

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2 4 = 2\pi$$

$\square$

Luật điểm giữa

Các phương pháp mà ta dùng để xấp xỉ tính phân một biến (Luật điểm giữa, Luật hình thang, Luật Simpson) đều có tương ứng trong tích phân bội hai. Ở đây ta chỉ nói về Luật điểm giữa. Ta sẽ xấp xỉ tích phân bằng cách dùng tổng Riemann mà ở đó điểm mẫu (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong mỗi hình chữ nhật con R_{ij} là điểm giữa $(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})$. Nói cách khác $\bar{x}_{ij}$ là điểm giữa của $[x_{i-1}, x_i]$ và $\bar{y}_{ij}$ là điểm giữa của $[y_{i-1}, y_i]$.

Định nghĩa (Luật điểm giữa cho tích phân bội hai)**.**

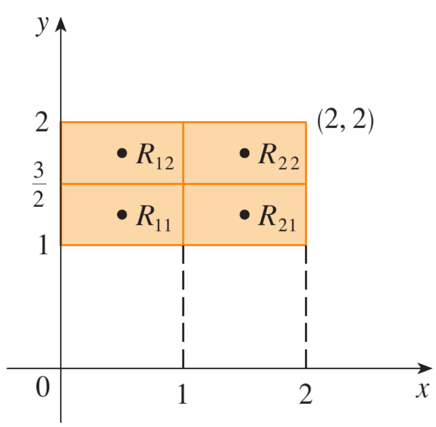
$$\iint_R f(x,y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta A$$

với $\bar{x}_{ij}$ là điểm giữa của $[x_{i-1}, x_i]$ và $\bar{y}_{ij}$ là điểm giữa của $[y_{i-1}, y_i]$.

Ví dụ 15.1.4. Dùng luật điểm giữa với $m = 2$, $n = 2$ để ước lượng giá trị của tích phân $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$ với $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$.

Giải. Dùng luật điểm giữa với $m = n = 2$ ta tính $f(x,y) = x - 3y^2$ tại tâm của bốn hình chữ nhật con như Hình 15.1.10. Vậy $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$, $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. Diện tích của mỗi hình chữ nhật con là $\Delta A = \frac{1}{2}$. Vậy

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij})\Delta A \\ &= -11.875\end{aligned}$$



Hình 15.1.10:

□

Ghi chú. Trong các bài tiếp theo ta sẽ phát triển các phương pháp hiệu quả để tính tích phân bội và ta sẽ thấy giá trị chính xác của tích phân trong Ví dụ 15.1.4 là -12. (Nhớ rằng cách giải thích tích phân như thể tích chỉ đúng khi hàm là *dương*. Ở bài sau ta sẽ có cách giải thích tích phân của hàm không luôn dương bằng thể tích.) Nếu ta tiếp tục chia nhỏ hơn nữa các hình chữ nhật con trong Hình 15.1.10 ta sẽ được xấp xỉ như trong bảng. Hãy để ý rằng giá trị xấp xỉ dần tới giá trị đúng -12.

Số hình chữ nhật con	Xấp xỉ theo luật điểm giữa
1	-11.5000
4	-11.8750
16	-11.9687
64	-11.9922
256	-11.9980
1024	-11.9995

Giá trị trung bình

Nhắc lại từ các chương trước giá trị trung bình của hàm một biến f trên đoạn $[a.b]$ là

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Một cách tương tự ta định nghĩa *giá trị trung bình* của hàm hai biến f xác định trên hình chữ nhật R là

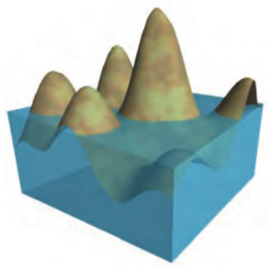
$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

với $A(R)$ là diện tích của hình hộp R.

Nếu $f(x,y) \geq 0$ thì phương trình

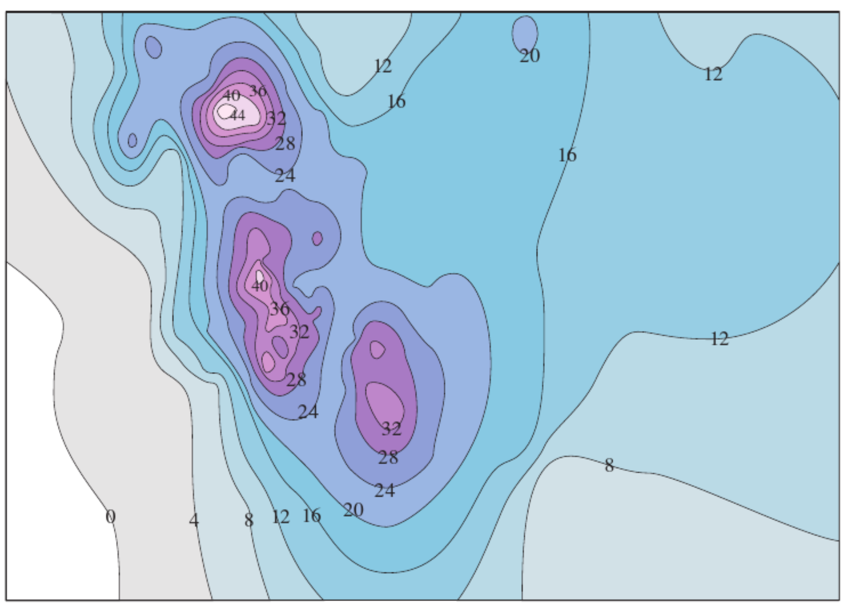
$$f_{\text{ave}} \times A(R) = \iint_R f(x,y)\,dA$$

nói rằng hình hộp với đáy R và chiều cao f_{ave} có cùng thể tích với với khối bên dưới đồ thị của f bên trên R. [Nếu ta cắt các đỉnh núi một miền đồi núi ở mức cao trung bình thì ta có thể lấp đầy các thung lũng để miền trở thành phẳng hoàn toàn. Xem Hình 15.1.11.]



Hình 15.1.11:

Ví dụ 15.1.5. Bản đồ đường mức trong Hình 15.1.12 thể hiện lượng tuyết, đo bằng inch, rơi trên bang Colorado ngày 20 và 21 tháng 12 năm 2006. (Bang này có hình chữ nhật với kích thước 388 dặm từ tây sang đông và 276 dặm từ nam lên bắc.) Dùng bản đồ này để ước tính lượng tuyết rơi trung bình trên bang này trong hai ngày trên.



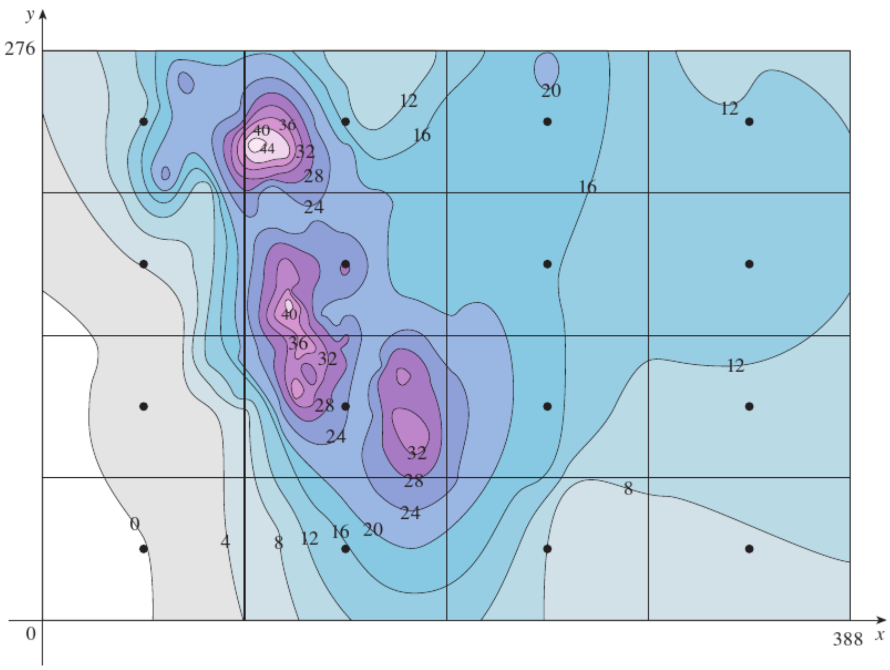
Hình 15.1.12:

Giải. Đặt gốc tọa độ ở góc tây nam của bang. Như thế $0 \leq x \leq 388$, $0 \leq y \leq 276$, và $f(x, y)$ là lượng tuyết rơi, đo bằng inch, ở vị trí x dặm phía đông và y dặm phía bắc gốc tọa độ. Nếu R là hình chữ nhật đại diện cho Colorado, thì lượng mưa trung bình trong hai ngày 20 và 21 tháng 12 năm 2006 là

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

với $A(R) = (388)(276)$. Để ước lượng tích phân bội hai trên, ta dùng luật điểm giữa với $m = n = 4$. Nói cách khác, ta chia R thành 16 hình chữ nhật nhỏ đều nhau có cùng diện tích là

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6693$$



Hình 15.1.13:

Dùng bản đồ đường mức để ước lượng giá trị của f tại các điểm tâm của các hình chữ nhật con, ta được

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &\approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_{ij},\bar{y}_{ij})\Delta A \\
&= \Delta A[0+15+8+7+25+18.5+11+ \\
&\quad +4.5+28+17+13.5+12+15+17.5+13] \\
&= (6693)(207)
\end{aligned}$$

Vậy

$$f_{\text{ave}} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} = 12.9$$

Vào hai ngày 20 và 21 tháng 12 Colorado nhận trung bình khoảng 12.9 inch tuyết. □

Tính chất của tích phân bội hai

Ta liệt kê dưới đây ba tính chất của tích phân. Các tính chất này có thể được chứng minh như đối với tích phân hàm một biến. Ta giả sử các hàm đều khả tích. Các tính chất 15.1.5 và 15.1.6 được gọi là *tính tuyến tính* của tích phân.

$$\iint [f(x,y)+g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\ dA + \iint_R g(x,y)\ dA \tag{15.1.5}$$

$$\iint_R cf(x,y)\ dA = c\iint_R f(x,y)\ dA \qquad \text{với } c \text{ là một hằng số} \tag{15.1.6}$$

Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ trên R thì

$$\iint_R f(x,y)\ dA \geq \iint_R g(x,y)\ dA \tag{15.1.7}$$

Bài tập

15.1.1. (a) Ước lượng thể tích của khối dưới mặt $z = xy$ trên hình chữ nhật

$$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 6,\ 0 \leq y \leq 4\}$$

Dùng tổng Riemann với $m = 3$, $n = 2$ và lấy điểm mẫu ở góc trên bên phải mỗi hình vuông.

(b) Dùng luật điểm giữa để ước lượng thể tích của khối trong phần (a).

15.1.2. Với $R = [0,4] \times [-1,2]$ dùng tổng Riemann với $m = 2$, $n = 3$ để ước lượng tích phân $\iint_R (1 - xy^2)\ dA$, dùng điểm mẫu là (a) góc phải bên dưới (b) góc trái bên trên của các hình chữ nhật.

15.1.3. (a) Dùng tổng Riemann với $m = 2$, $n = 2$, ước lượng thể tích của khối dưới mặt $\iint_R (xe^{-xy})\ dA$ trên hình chữ nhật $R = [0,2] \times [0,1]$. Lấy điểm mẫu ở góc trên bên phải mỗi hình vuông.

(b) Dùng luật điểm giữa để ước lượng thể tích của khối trong phần (a).

15.1.4. (a) Ước lượng thể tích của khối dưới mặt $z = 1 + x^2 + 3y$ trên hình chữ nhật $R = [1,2] \times [0,3]$. Dùng tổng Riemann với $m = 3$, $n = 2$ và lấy điểm mẫu ở góc trên bên phải mỗi hình vuông.

(b) Dùng luật điểm giữa để ước lượng thể tích của khối trong phần (a).

15.1.5. Một bảng giá trị cho hàm $f(x,y)$ xác định trên hình chữ nhật $R = [0,4] \times [2,4]$.

(a) Ước lượng tích phân $\iint_R f(x,y)\ dA$, dùng luật điểm giữa với $m = 2$, $n = 2$ và lấy điểm mẫu ở góc trên bên phải mỗi hình vuông.

(b) Ước lượng tích phân bằng cách dùng $m = n = 4$ và điểm mẫu gần nhất với

x \ y	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	−3	−5	−6	−4	−1
1	−1	−2	−3	−1	1
2	1	0	−1	1	4
3	2	2	1	3	7
4	3	4	2	5	9

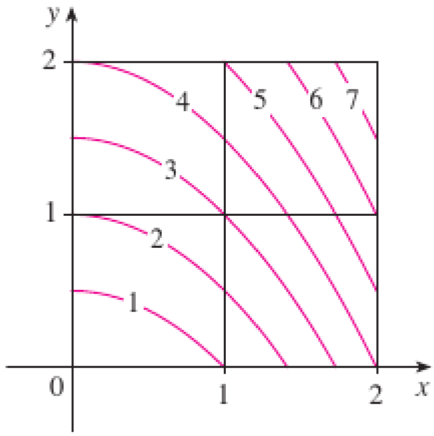
gốc tọa độ.

15.1.6. Một hồ nước có kích thước 20 nhân 30 (foot) chứa đầy nước. Độ sâu được đo ở những đoạn 5 (foot) khởi đầu từ một góc của hồ và các giá trị được ghi trong bảng. Hãy ước lượng thể tích nước trong hồ.

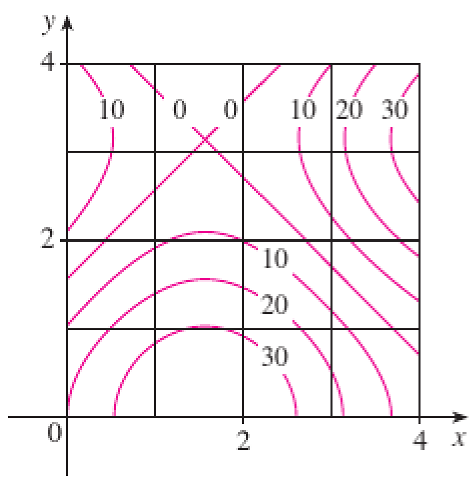
	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

15.1.7. Gọi V là thể tích của khối dước mặt $z = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ trên hình chữ nhật $2 \le x \le 4$, $2 \le y \le 6$. Ta dùng các đường $x = 3$ và $y = 4$ để chia R thành các hình chữ nhật nhỏ hơn. Gọi L và U là các tổng Riemann ứng với góc trái dưới và góc phải trên. Không tính V, L, U hãy sắp xếp chúng theo thứ tự tăng và giải thích lí do.

15.1.8. Hình sau cho thấy các đường mức của hàm f trên hình vuông $R = [0,2] \times [0,2]$. Dùng luật điểm giữa với $m = n = 2$ để ước lượng $\iint_R f(x,y)\, dA$. Có thể làm cách này để cải tiến ước lượng?



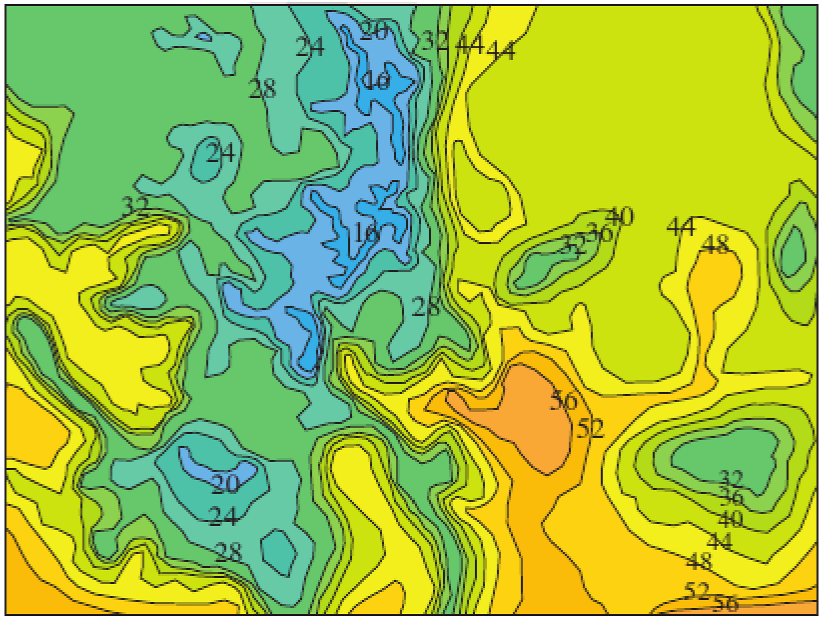
15.1.9. Hình sau cho thấy các đường mức của hàm f trên hình vuông $R = [0,4] \times [0,4]$.



(a) Dùng luật điểm giữa với $m = n = 2$ để ước lượng $\iint_R f(x,y)\, dA$.

(b) Ước lượng giá trị trung bình của f.

15.1.10. Bản đồ sau cho nhiệt độ theo Fahrenheit vào lúc 4 giờ chiều ngày 26 tháng 2 năm 2007 ở bang Colorado. (Bang này có kích thước 388 nhân 276 dặm). Dùng luật điểm giữa với $m = n = 4$ để ước lượng nhiệt độ trung bình của bang trong ngày đó.



Hãy tính các tích phân bằng cách giải thích chúng như thể tích của khối.

15.1.11. $\iint_R 3\, dA$, $R = [-2, 2] \times [1, 6]$.

15.1.12. $\iint_R (5 - x)\, dA$, $R = [0, 5] \times [0, 3]$.

15.1.13. $\iint_R (4 - 2y)\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

15.1.14. Tích phân $\iint_R (9 - y^2)\, dA$ cho thể tích của một khối. Hãy vẽ khối đó.

15.1.15. Dùng một máy tính cầm tay hoặc một chương trình máy tính để tính tích phân

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}}\, dA$$

với $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Dùng luật điểm giữa với số lượng các hình vuông con: 1, 4, 16, 64, 256, 1024.

15.1.16. Lập lại bài tập trên với $\iint_R \sin(x + \sqrt{y})\, dA$.

15.1.17. Với $f(x, y) = k$ là hàm hằng và $R = [a, b] \times [c, d]$ chứng tỏ

$$\iint_R f(x, y)\, dA = k(b - a)(d - c)$$

15.1.18. Dùng bài tập trên để chứng tỏ

$$0 \leq \iint_R \sin \pi x \cos \pi y\, dA \leq 32$$

với $R = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

15.2 Tích phân lặp

Nhớ lại rằng rất khó tính tích phân hàm một biến từ định nghĩa, Định lí cơ bản của phép tính vi tích phân (công thức Newton-Leibniz) cho một phương pháp dễ dàng hơn nhiều. Tính tích phân bội từ định nghĩa càng khó hơn, nhưng ở mục này ta sẽ thấy việc tính tích phân bội hai có thể đưa về việc tính hai tích phân một biến.

Cho hàm f xác định trên hình chữ nhật $R = [a, b]\times[c, d]$. Kí hiệu $\int_c^d f(x, y)\, dy$ có nghĩa là x được giữ cố định và y được lấy tích phân từ c tới d. Phép toán này được gọi là lấy *tích phân riêng phần* theo biến y (chú ý sự tương tự với đạo hàm riêng phần). Bây giờ $\int_c^d f(x, y)\, dy$ là một số thực phụ thuộc vào x, do đó xác định một hàm theo biến x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Nếu giờ ta lấy tích phân của hàm $A(x)$ với x từ atới b thì ta được

$$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx \tag{15.2.1}$$

Tích phân bên vế phải được gọi là tích phân lặp. Thường thì cặp móc vuông được bỏ đi, như thế:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx \tag{15.2.2}$$

nghĩa là ta lấy tích phân theo y từ c tới d rồi theo x từ a tới b. Tương tự

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy \tag{15.2.3}$$

có nghĩa là ta lấy tích phân theo x từ a tới b, giữ y cố định, rồi lấy tích phân theo y từ c tới d. Chú ý là trong cả hai tích phân lặp trên ta tính *từ trong ra ngoài*.

Ví dụ 15.2.1. Tính các tích phân lặp sau: (a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ và (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

Giải. (a) Xem x là hằng ta được

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{3}{2}x^2$$

Như vậy hàm A mà ta thảo luận ở trên trong trường hợp này là $A(x) = \frac{3}{2}x^2$. Giờ ta lấy tích phân hàm theo x này từ 0 tới 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy\right] dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\, dx = \frac{27}{2}$$

(b) Ta lấy tích phân theo x trước:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2y\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{3}x^3y\right]_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9y\,dy = \frac{27}{2}$$

□

Chú ý rằng hai tích phân trong ví dụ trên bằng nhau. Chúng ta sẽ thấy dưới đây là tích phân trong 15.2.2 và 15.2.3 luôn bằng nhau, tức là thứ tự lấy tích phân không ảnh hưởng. (Chú ý sự tương tự với sự không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm trong đạo hàm riêng.)

Định lí 15.2.2 (Định lí Fubini)**.** *Cho f là hàm liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$. Khi đó:*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Tổng quát hơn, các đẳng thức trên xảy ra nếu f bị chặn trên R, f chỉ không liên tục trên hữu hạn đường cong trơn, và các tích phân lặp tồn tại. [1]

Chứng minh của Định lí Fubini quá khó để trình bày trong sách này, nhưng ít ra chúng ta cũng có thể đưa ra một giải thích trực giác cho trường hợp $f(x,y)\geq 0$. Ta biết nếu f là hàm dương thì tích phân của f là thể tích V của khối S dưới đồ thị của f bên trên R. Nhưng trước đây ta đã có một công thức khác

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

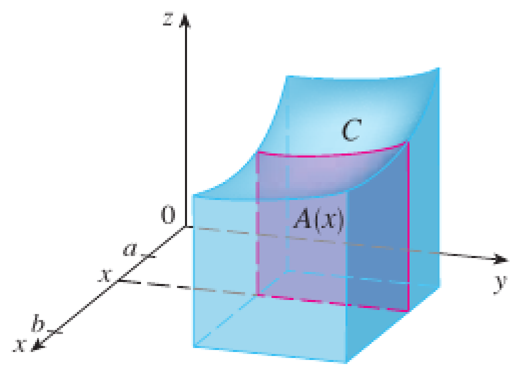
trong đó $A(x)$ là diện tích của mặt cắt của khối S bởi mặt phẳng đi qua x vuông góc với trục x. Từ Hình 15.2.1 ta có thể thấy $A(x)$ là diện tích bên dưới đường $z=f(x,y)$ với x cố định và y thay đổi từ c tới d. Vì thế

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

và

$$\iint_R f(x,y)\,dA = V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

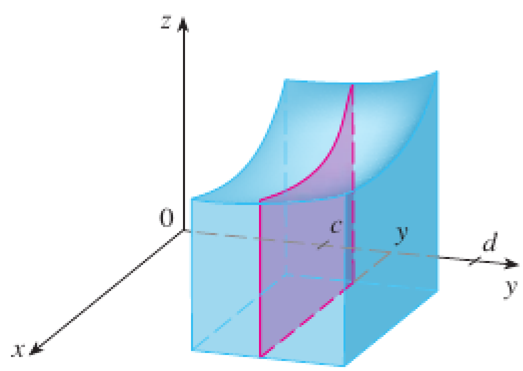
[1]Định lí này được mang tên nhà toán học người Ý Guido Fubini (1879-1943), người đã chứng minh một dạng rất tổng quát định lí này vào năm 1907. Dựng dạng cho hàm liên tục đã được biết bởi nhà toán học Pháp Agustin-Louis Cauchy gần một thế kỉ trước đó.



Hình 15.2.1:

Một lập luận tương tự, dùng mặt cắt vuông góc trục y như Hình 15.2.2 cho ta

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$



Hình 15.2.2:

Ví dụ 15.2.3. Tính tích phân bội hai $\iint_R (x-3y^2)\ dA$ với $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ (So sánh với Ví dụ 15.1.4.)

Giải. Định lí Fubini cho

$$\begin{aligned}\iint_R (x-3y^2)\ dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x-3y^2)dy\ dx = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2}\ dx \\ &= \int_0^2 (x-7)\ dx = -12\end{aligned}$$

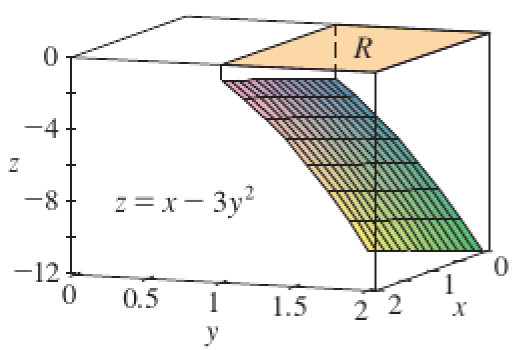
□

Giải. Cũng áp dụng Định lí Fubini, nhưng lấy tích phân theo x trước, ta được

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\ dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\ dx\ dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2 - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2}\ dx \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2)\ dx = -12\end{aligned}$$

□

Ghi chú. Trong ví dụ trên chú ý là giá trị của tích phân là số âm. Điều này không có gì sai. Hàm được lấy tích phân không phải là hàm dương, nên giá trị của tích phân không biểu diễn một thể tích. Ta thấy hàm f luôn âm trên R nên tích phân của f biễu diễn giá trị đối của tích thể tích của khối dưới R bên trên đồ thị của f.



Hình 15.2.3:

Ví dụ 15.2.4. Tính $\iint_R y\sin(xy)\ dA$ với $R = [1,2] \times [0,\pi]$.

Giải. Lấy tích phân theo x trước, ta được

$$\begin{aligned}\iint_R (y\sin(xy))\ dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (y\sin(xy))\ dx\ dy = \int_0^\pi \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2}\ dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y)\ dy = 0\end{aligned}$$

□

Giải. Nếu ta đổi thứ tự tích phân thì ta được

$$\iint_R (x - 3y^2)\ dA = \int_1^2 \int_0^\pi (y\sin(xy))\ dy\ dx$$

Để tích tích phân bên trong ta dùng tích phân từng phần:

$$\begin{aligned} u &= y \qquad dv = \sin(xy)\ dy \\ du &= dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x} \end{aligned}$$

Như thế

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (y\sin(xy))\ dy &= -\left.\frac{y\cos(xy)}{x}\right|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^\pi \cos(xy)\ dy \\ &= -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\sin(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x} + \frac{\sin(\pi x)}{x^2} \end{aligned}$$

Giờ nếu ta lấy tích phân biểu thức đầu bằng tích phân từng phần với $u - -1/x$, $dv = \pi\cos(\pi x)dx$ ta được

$$\int -\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}\ dx = -\frac{\sin(\pi x)}{x}$$

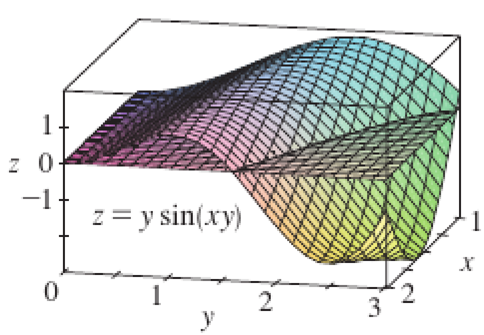
và như vậy

$$\int_1^2\int_0^\pi (y\sin(xy))\ dy\ dx = \left[-\frac{\sin(\pi x)}{x}\right]_1^2 = 0$$

□

Ghi chú. Trong ví dụ trên hai lời giải đều đơn giản, nhưng lời giải thứ nhất dễ hơn lời giải thứ hai nhiều. Do đó khi tính tích phân bội hai nên khôn ngoan chọn thứ tự lấy tích phân để có tích phân dễ hơn.

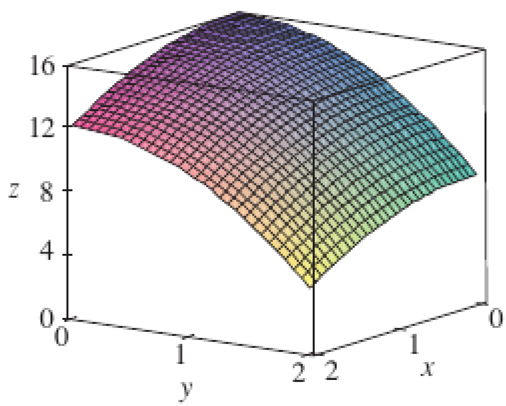
Ghi chú. Với hàm f có giá trị cả âm lẫn dương trên R thì giá trị của tích phân của f là $V_1 - V_2$ trong đó V_1 là thể tích của khối bên dưới đồ thị của f bên trên R và V_2 là thể tích của khối bên trên đồ thị của f bên dưới R. Trong ví dụ trên tích phân của f bằng 0 có nghĩa là $V_1 = V_2$. Xem hình.



Hình 15.2.4:

Ví dụ 15.2.5. Tìm thể tích của khối S bị chặn bởi mặt elliptic paraboloid $x^2 + 2y^2 + z = 6$, mặt phẳng $x = 2$ và $y = 2$, và ba mặt phẳng tọa độ.

Giải. Trước tiên ta quan sát rằng S là khối dưới mặt $z = 16 - x^2 - 2y^2$ bên trên hình vuông $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Xem Hình 15.2.5).



Hình 15.2.5:

Khối này đã được xét ở Ví dụ 15.1.2, nhưng giờ ta có thể tính tích phân bội hai dùng Định lí Fubini. Như thế

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2 x \right]_{x=0}^{x=2} dy = 48 \end{aligned}$$

□

Trong trường hợp đặc biệt khi $f(x, y)$ có thể được phân tích thành tích của một hàm của chỉ x và một hàm của chỉ y thì tích phân bội của f có thẻ được viết ở một dạng đặc biệt đơn giản. Để cụ thể, giả sử là $f(x, y) = g(x)h(y)$ và $R = [a, b] \times [c, d]$. Khi đó Định lí Fubini cho

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx \right] dy$$

Với tích phân phía trong y là một hằng số, do đó $h(y)$ là một hằng số và ta có thể viết

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y \int_a^b g(x)\, dx \right] dy = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

vì tích phân $\int_a^b g(x)\ dx$ là hằng số. Vì thế trong trường hợp này tích phân bội của f có thể được viết như là tích của hai tích phân một biến:

$$\iint_R g(x)h(y)\ dA = \int_a^b g(x)\ dx \int_c^d h(y)\ dy \qquad R = [a,b] \times [c,d] \tag{15.2.4}$$

Ví dụ 15.2.6. Nếu $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ thì theo công thức trên

$$\iint_R \sin x \cos y\ dA = \int_0^{\pi/2} \sin x\ dx \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy = 1$$

Bài tập

Tìm $\int_0^5 f(x,y)\ dx$ và $\int_0^1 f(x,y)\ dy$.

15.2.1. $f(x,y) = 12x^2y^3$

15.2.2. $f(x,y) = y + xe^y$

Tính tích phân lặp.

15.2.3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x)\ dy\ dx$

15.2.4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\ dy\ dx$

15.2.5. $\int_0^2 \int_0^4 y^3e^{2x}\ dy\ dx$

15.2.6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\ dx\ dy$

15.2.7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x)\ dx\ dy$

15.2.8. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy}\ dy\ dx$

15.2.9. $\int_1^4 \int_1^2 (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})\ dy\ dx$

15.2.10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\ dx\ dy$

15.2.11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u+v^2)^4\ du\ dv$

15.2.12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\ dy\ dx$

15.2.13. $\int_0^2 \int_0^\pi r \sin^2\theta\ d\theta\ dr$

15.2.14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t}\ ds\ dt$

Tính tích phân bội.

15.2.15. $\iint_R \sin(x-y)\ dA$, $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\}$

15.2.16. $\iint_R (y + xy^{-2})\ dA$, $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$

15.2.17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3\}$

15.2.18. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

15.2.19. $\iint_R \frac{x}{1+xy}\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

15.2.20. $\iint_R \frac{1}{1+x+y}\, dA$, $R = [1, 3] \times [1, 2]$

15.2.21. $\iint_R ye^{-xy}\, dA$, $R = [0, 2] \times [0, 3]$

15.2.22. $\iint_R \frac{1}{1+x+y}\, dA$, $R = [1, 3] \times [1, 2]$

Phác họa khối mà thể tích được cho bởi tích phân lặp sau.

15.2.23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dx\, dy$

15.2.24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

15.2.25. Tìm thể tích của khối nằm dưới mặt phẳng $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ bên trên hình chữ nhật $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}$.

15.2.26. Tìm thể tích của khối nằm dưới mặt hyperbolic parabolid $z = 3y^2 - x^2 + 2$ bên trên hình chữ nhật $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

15.2.27. Tìm thể tích của khối nằm dưới mặt elliptic parabolid $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ bên trên hình chữ nhật $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

15.2.28. Tìm thể tích của khối nằm dưới mặt $z = 1 + e^x \sin y$ và mặt phẳng $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$, và $z = 0$.

15.2.29. Tìm thể tích của khối được bao bởi mặt $z = x \sec^2 y$ và mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \pi/4$.

15.2.30. Tìm thể tích của khối trong góc phần tám thứ nhất được bao bởi mặt trụ $z = 16 - x^2$ và mặt phẳng $y = 5$.

15.2.31. Tìm thể tích của khối được bao bởi mặt paraboloid $z = 2+x^2+(y-2)^2$ và mặt phẳng $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 1$.

15.2.32. Hãy vẽ khối nằm giữa mặt $z = 2xy/(x^2 + 1)$ và được bao bởi mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$. Sau đó tìm thể tích của nó.

15.2.33. Dùng hệ tính toán đại số máy tính để tìm giá trị chính xác của tích phân $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, với $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Sau đó dùng CAS để vẽ khối mà thể tích được cho bởi tích phân này.

15.2.34. Hãy vẽ khối nằm giữa mặt $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ và $z = 2 - x^2 - y^2$ với $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Dùng hệ tính toán đại số máy tính để xấp xỉ thể tích của khối này đúng tới 4 chữ số thập phân.

Tìm giá trị trung bình của f trên hình chữ nhật.

15.2.35. $f(x,y) = x^2y$, R có các đỉnh $(-1,0)$, $(-1,5)$, $(1,5)$, $(1,0)$

15.2.36. $f(x,y) = e^y\sqrt{x+e^y}$, $R = [0,4]\times[0,1]$

Dùng sự đối xứng để tính tích phân.

15.2.37. $\iint_R \frac{xy}{1+x^4}\, dA$, $R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

15.2.38. $\iint_R (1 + x^2\sin y + y^2\sin x)\, dA$, $R = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$

15.2.39. Dùng CAS để tính các tích phân lặp

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\, dx$$

và

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy$$

Kết quả có mâu thuẫn với Định lí Fubini hay không? Hãy giải thích.

15.2.40. (a) Định lí Fubini và Clairaut tương tự như thế nào?

(b) Nếu $f(x,y)$ là liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ và

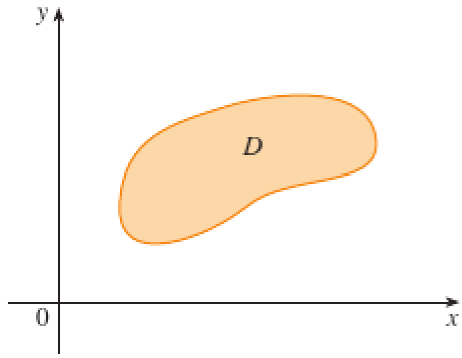
$$g(x,y) = \int_a^x\int_c^y f(s,t)\, dt\, ds$$

với $a < x < b$, $c < y < d$, chứng tỏ $g_{xy} = g_{yx} = f(x,y)$.

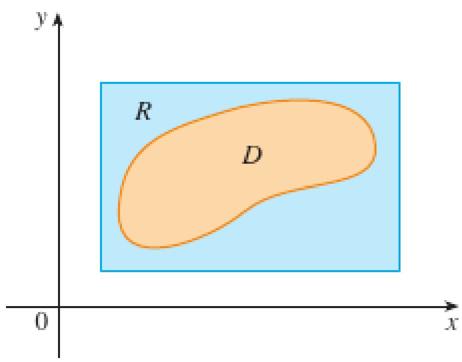
15.3 Tích phân bội hai trên miền tổng quát

Đối với tích phân một biến, miền trên đó ta lấy tích phân luôn luôn là một khoảng. Nhưng đối với tích phân bội hai, ta muốn có thể lấy tích phân một hàm f không chỉ trên hình chữ nhật mà còn trên miền D có hình bất kì, như được minh họa trong Hình 15.3.1. Ta giả sử D là miền bị chặn, có nghĩa là D có thể được đặt bên trong một hình chữ nhật R như trong Hình 15.3.2. Khi đó ta định nghĩa một hàm mới F với miền xác định R bằng

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{nếu } (x,y) \text{ trong } D \\ 0 & \text{nếu } (x,y) \text{ trong } R \text{ nhưng ngoài } D \end{cases} \tag{15.3.1}$$



Hình 15.3.1:



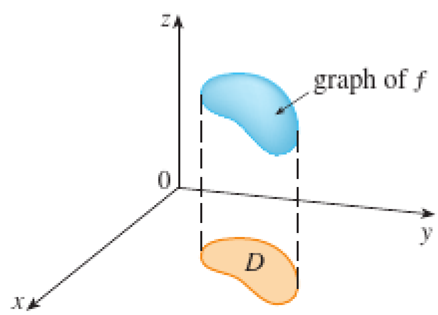
Hình 15.3.2:

Định nghĩa 15.3.1. Nếu F khả tích trên R thì ta định nghĩa *tích phân bội hai* của f trên D là

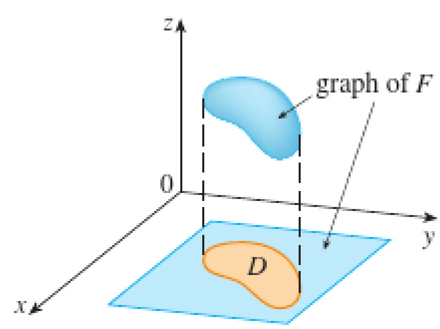
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA \qquad \text{với } F \text{ được cho trong Phương trình 15.3.1} \tag{15.3.2}$$

Định nghĩa trên có nghĩa vì R là một hình chữ nhật và như vậy $\iint_R F(x,y)\,dA$ đã được định nghĩa trong mục trước. Cách làm của ta là hợp lí vì các giá trị của $F(x,y)$ là 0 khi (x,y) nằm ngoài D và như thế chúng không đóng góp gì cho tích phân. Điều này có nghĩa là ta dùng hình chữ nhật R nào không có ảnh hưởng gì chỉ cần nó chứa D.

Trong trường hợp $f(x,y) \geq 0$ ta vẫn có thể giải thích $\iint_D f(x,y)\,dA$ như là thể tích của của khối bên trên D và bên dưới mặt $z = f(x,y)$ (đồ thị của f). Bạn có thể thấy điều này là hợp lí bằng cách so đồ thị của f và F trong Hình 15.3.3 và 15.3.4 và nhớ rằng $\iint_D F(x,y)\,dA$ là thể tích dưới đồ thị của F.



Hình 15.3.3:



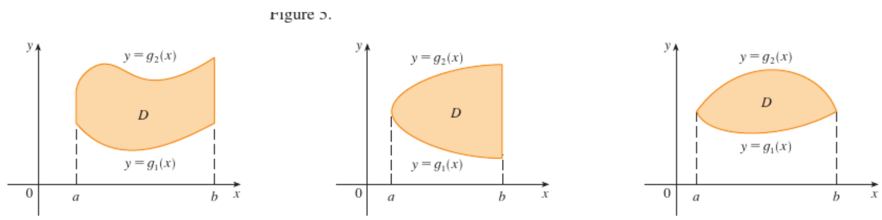
Hình 15.3.4:

Hình 15.3.4 cũng chứng tỏ F có thể có không liên tục ở các điểm biên của D. Tuy vậy, nếu f liên tục trên MD và biên của D là "tốt" (theo một nghĩa bên ngoài phạm vi của sách này), thì có thể chứng tỏ rằng $\iint_R F(x,y)\, dA$ tồn tại và vì thế $\iint_D f(x,y)\, dA$ tồn tại. Đặc biệt, đây là trường hợp của hai loại miền dưới đây.

Một miền phẳng D được gọi là thuộc *loại I* nếu nó nằm giữa hai đồ thị của hai hàm liên tục theo x, nghĩa là,

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

với g_1 và g_2 liên tục trên $[a,b]$. Vài ví dụ của miền loại I được vẽ ở Hình 15.3.5.



Hình 15.3.5:

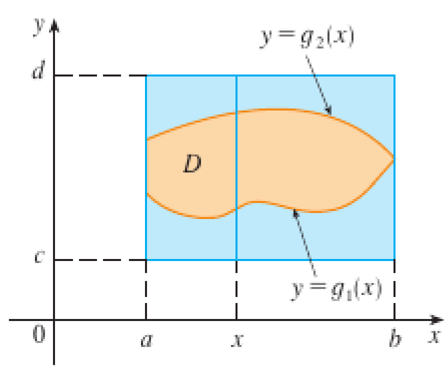
Để tính $\iint_D f(x,y)\,dA$ với D là một miền loại I, ta chọn một hình chữ nhật $R = [a,b] \times [c,d]$ chứa D, như trong Hình 15.3.6, và ta gọi F là hàm cho trong Phương trình 15.3.1; tức là F trùng với f trên D và F bằng 0 ngoài D. Khi đó theo Định lí Fubini,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx$$

Chú ý rằng $F(x,y) = 0$ nếu $y < g_1(x)$ hoặc $y > g_2(x)$ bởi vì (x,y) nằm ngoài D. Vì thế

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

bởi vì $F(x,y) = f(x,y)$ khi $g_1(x) \le y \le g_2(x)$.



Hình 15.3.6:

Như vậy ta có công thức sau cho phép ta tính tích phân bội hai như là tích phân lặp.

Mệnh đề. *Nếu f là liên tục trên một miền loại I D sao cho*

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

thì

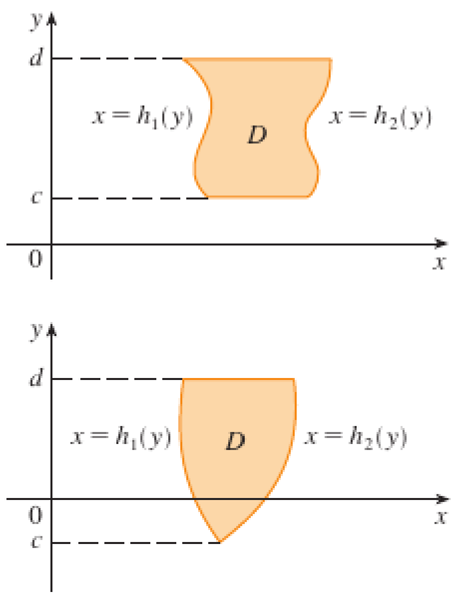
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \tag{15.3.3}$$

Tích phân bên vế phải của công thức trên là một tích phân lặp tương tự với các tích phân trong phần trước, chỉ có điều ở tích phân bên trong ta coi x là hằng không chỉ trên $f(x,y)$ mà còn trên cận của tích phân, $g_1(x)$ và $g_2(x)$.

Ta cũng xét miền phẳng loại II, là miền có thể được miêu tả như

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\} \tag{15.3.4}$$

với h_1 và h_2 là hàm liên tục. Hai miền như vậy được minh họa trong Hình 15.3.7.



Hình 15.3.7:

Dùng cùng cách như trên, ta có thể chứng tỏ

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{15.3.5}$$

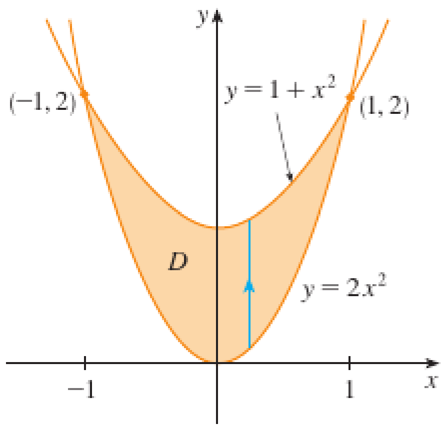
với D là miền loại II cho trong Phương trình 15.3.4.

Ví dụ 15.3.2. Tính $\iint_D (x+2y)\,dA$ trong đó D là miền được bao bởi các đường parabola $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Giải. Hai parabola cắt nhau khi $2x^2 = 1 + x^2$, tức là khi $x = \pm 1$. Chú ý rằng miền D được vẽ trong Hình 15.3.8 là miền loại I nhưng không phải miền loại

II, và ta có thể viết

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$



Hình 15.3.8:

Vì phần biên bên dưới là $y = 2x^2$ và phần biên bên trên là $y = 1 + x^2$, Phương trình 15.3.3 cho

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

□

Chú ý. Khi thiết lập tích phân như trong ví dụ trên, nhất thiết phải vẽ một sơ đồ. Thường sẽ giúp ích nếu vẽ các mũi tên thẳng đứng như trong Hình 15.3.8. Khi đó các cận của tích phân bên trong có thể được lấy như sau: Các mũi tên xuất phát từ biên dưới $y = g_1(x)$ cho cận dưới của tích phân, và các mũi tên dừng ở biên trên $y = g_2(x)$, cho cận trên của tích phân. Với miền loại II mũi tên được vẽ nằm ngang từ biên trái sang biên phải.

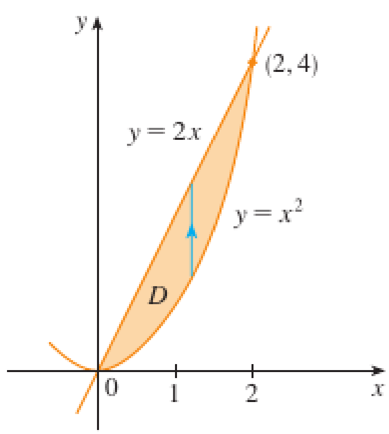
Ví dụ 15.3.3. Tìm thể tích của khối nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và trên miền D trong mặt phẳng xy bị chặn bởi các đường $y = 2x$ và parabola $y = x^2$.

Giải. Từ Hình 15.3.9 ta thấy D là một miền loại I và

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Vì thế thể tích bên dưới $z = x^2 + y^2$ và bên trên D là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right] dx = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

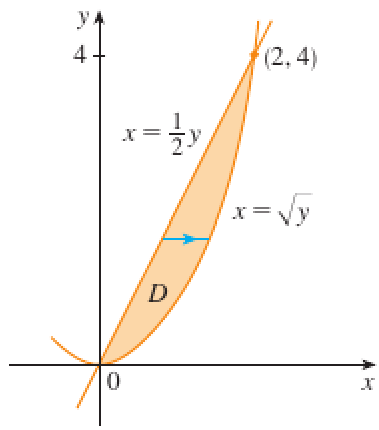


Hình 15.3.9:

□

Giải. Từ Hình ta thấy D cũng có thể được viết như là miền loại II

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4,\ \frac{1}{2} y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$



Hình 15.3.10:

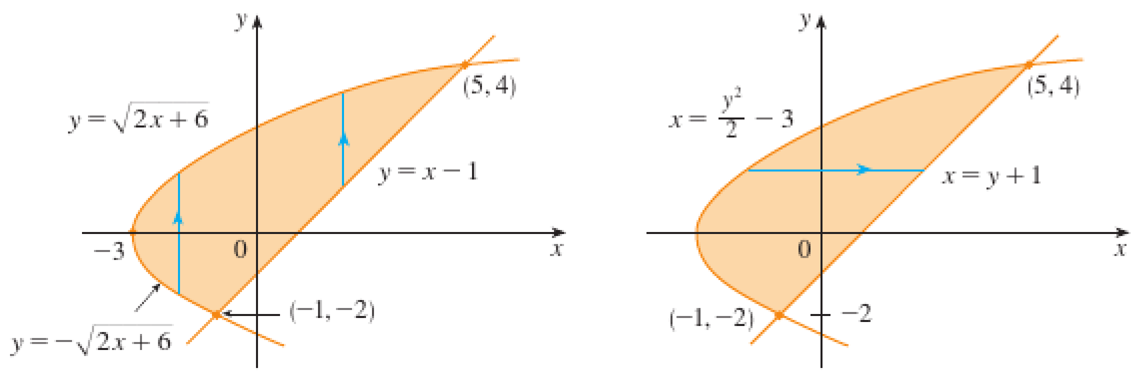
Vì thế một biểu thức khác cho V là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2+y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy \\ &= \frac{216}{35} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 15.3.4. Tính $\iint_D xy\, dA$ với D là miền được bao bởi các đường $y = x - 1$ và parabola $y^2 = 2x + 6$.

Giải. Miền D được vẽ trong Hình 15.3.11.



Hình 15.3.11:

Miền D là loại I lẫn loại II, nhưng miêu tả D như miền loại I là phức tạp hơn vì biên dưới gồm hai phần. Vì thế ta ưu tiên chọn biểu diễn D như miền loại II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4,\ \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$

Khi đó Phương trình 15.3.5 cho

$$\begin{aligned} \iint_D xy\ dA &= \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\ dx\ dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) dy = 36. \end{aligned}$$

Nếu ta miêu tả D như miền loại I ta sẽ được

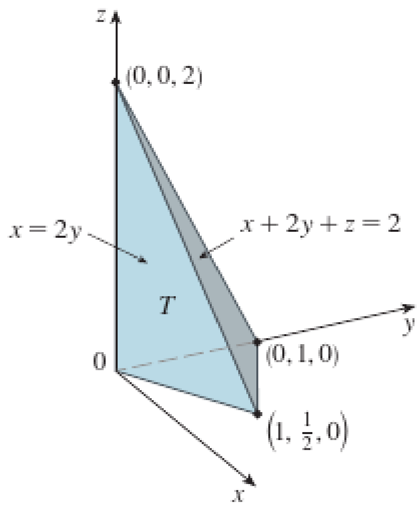
$$\iint_D xy\ dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\ dy\ dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\ dy\ dx$$

nhưng cách này cần nhiều công sức hơn.

□

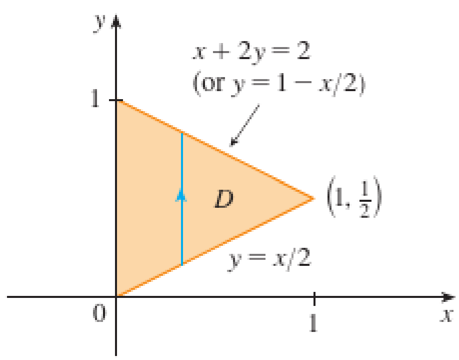
Ví dụ 15.3.5. Tìm thể tích của khối tứ diện được bao bởi các mặt phẳng $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, và $z = 0$.

Giải. Với một câu hỏi như vầy sẽ là khôn ngoan nếu vẽ hai sơ đồ: một cho khối ba chiều và một cho miền phẳng D mà khối nằm trên. Hình cho khối T được bao bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $z = 0$, mặt phẳng thẳng đứng $x = 2y$, và mặt phẳng $x + 2y + z = 2$.



Hình 15.3.12:

Vì mặt phẳng $x + 2y + z = 2$ cắt mặt phẳng xy (có phương trình $z = 0$) the đường thẳng $x + 2y = 2$ ta thấy T nằm trên miền tam giác D trong mặt phẳng xy bao bởi các đường thẳng $x = 2y$, $x + 2y = 2$, và $x = 0$. (Xem Hình 15.3.13.)



Hình 15.3.13:

Mặt phẳng $x + 2y + z = 2$ có thể được viết như $z = 2 - x - 2y$, vì thế thể tích dưới đồ thị của hàm $z = 2 - x - 2y$ và bên trên

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

Vì thế

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (2 - x - 2y)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2}\, dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

Ví dụ 15.3.6. Tính tích phân $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$.

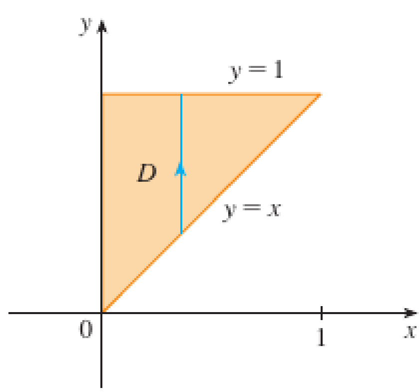
Giải. Nếu ta muốn tính tích phân trên ở nguyên dạng ta phải đối mặt với việc tính tích phân $\int \sin(y^2)\, dy$. Nhưng không thể làm được như vậy vì $\int \sin(y^2)\, dy$ không phải là một hàm sơ cấp. Vì vậy ta phải đổi thứ tự lấy tích phân. Việc này thực hiện được bằng cách biểu diễn tích phân lặp như là tích phân bội. Dùng Phương trình 15.3.3 theo chiều ngược lại, ta được

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \sin(y^2)\, dA$$

với

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$$

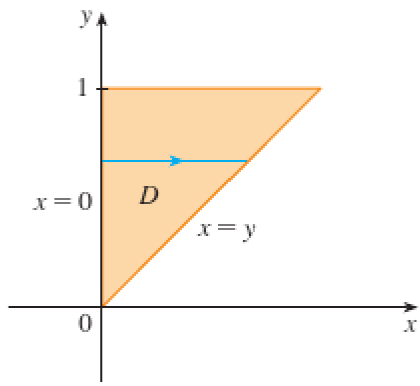
Ta vẽ miền D trong Hình 15.3.14.



Hình 15.3.14:

Từ Hình 15.3.15 ta thấy một cách miêu tả khác của D là

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$$



Hình 15.3.15:

Điều này cho phép ta dùng 15.3.5 để diễn tả tích phân bội hai như là tích phân lặp theo thứ tự ngược lại:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\ dy\ dx &= \iint_D \sin(y^2)\ dA \\
&= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\ dx\ dy = \int_0^1 \left[x\sin(y^2)\right]_{x=0}^{x=y}\ dy \\
&= \int_0^1 y\sin(y^2)\ dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)
\end{aligned}$$

□

Tính chất của tích phân bội

Ta giả sử tất cả các tích phân dưới đây tồn tại. Ba tính chất đầu của tích phân bội hai trên một miền D được suy ra từ Định nghĩa 15.3.2 và các tính chất 15.1.5, 15.1.6, 15.1.7.

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\ dA = \iint_D f(x,y)\ dA + \iint_D g(x,y)\ dA \qquad (15.3.6)$$

$$\iint_D cf(x,y)\ dA = c\iint_D f(x,y)\ dA \qquad (15.3.7)$$

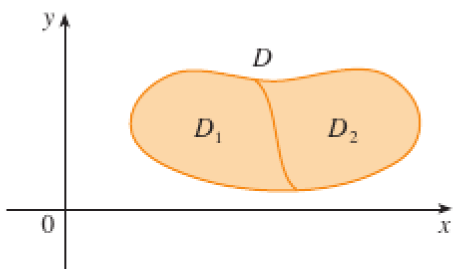
Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi (x,y) trong D thì

$$\iint_D f(x,y)\ dA \geq \iint_D g(x,y)\ dA \qquad (15.3.8)$$

Tính chất tiếp theo của tích phân bội tương tự với tính chất của tích phân một biến cho bởi đẳng thức $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

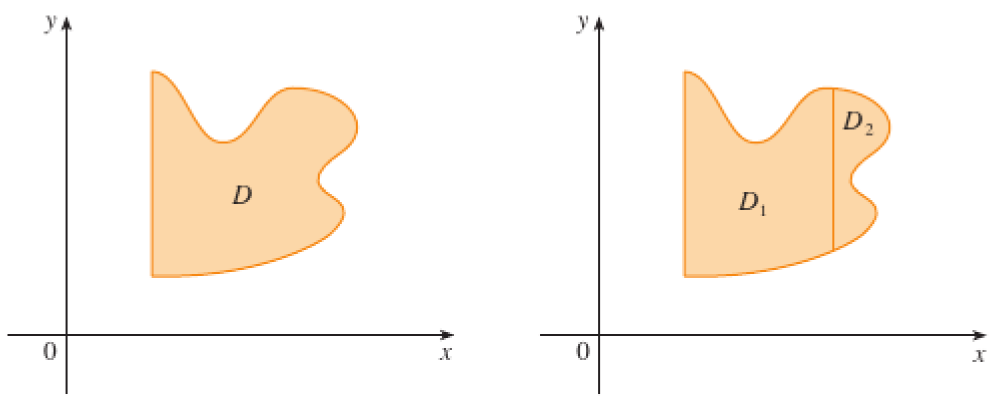
Nếu $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 không phủ lấp nhau trừ ra có thể trên biên của chúng (xem Hình 15.3.7) thì

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA \tag{15.3.9}$$



Hình 15.3.16:

Tính chất 15.1.7 có thể được dùng để tính tích phân bội hai trên miền D mà không là loại I lẫn loại II nhưng có thể được biểu diễn như là một hội của miền loại I và loại II. Hình minh họa cách làm này.



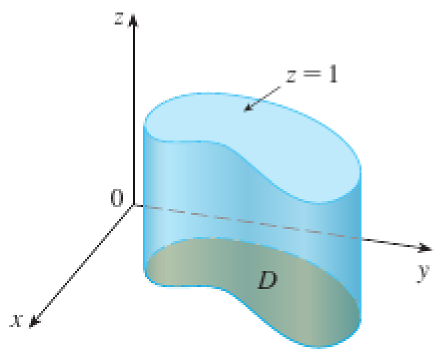
Hình 15.3.17:

Tính chất tiếp theo của tích phân nói rằng nếu ta lấy tích phân của hàm hằng $f(x,y) = 1$ trên miền D ta được diện tích của D:

$$\iint_D 1\, dA = A(D) \tag{15.3.10}$$

Hình 15.3.18 minh họa cho công thức trên: Một khối trụ có đáy D và chiều cao

1 thì có thể tích là $A(D) \cdot 1 = A(D)$, nhưng ta biết ta cũng có thể viết thể tích của nó là $\iint_D 1 \, dA$.



Hình 15.3.18: Mặt trụ với đáy D và chiều cao 1.

Cuối cùng ta có thể kết hợp các tính chất trên để có được tính chất sau:

Mệnh đề. *Nếu $m \leq f(x,y) \leq M$ với mọi (x,y) trong D thì*

$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y) \, dA \leq MA(D) \qquad (15.3.11)$$

Ví dụ 15.3.7. Dùng tính chất 15.3.11 để ước lượng tích phân $\iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA$, với D là đĩa với tâm ở gốc tọa độ và bán kính 2.

Giải. Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ và $-1 \leq \cos y \leq 1$, ta có $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ và vì thế

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Do đó dùng $A(D) = \pi(2)^2$ trong tính chất 15.3.11 ta được

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA \leq 4\pi e$$

□

Bài tập

Tính các tích phân lặp.

15.3.1. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy$

15.3.2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y) \, dx \, dy$

15.3.3. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 + 2y) \, dy \, dx$

15.3.4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy\ dx\ dy$

15.3.5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\ dt\ ds$

15.3.6. $\int_0^1 \int_0^{e^v} \sqrt{1+e^v}\ dw\ dv$

Tính các tích phân bội hai.

15.3.7. $\iint_D y^2\ dA$, $D = \{(x,y) \mid -1 \le y \le 1,\ -y-2 \le x \le y\}$

15.3.8. $\iint_D \frac{y}{x^5+1}\ dA$, $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

15.3.9. $\iint_D x\ dA$, $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$

15.3.10. $\iint_D x^3\ dA$, $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\}$

15.3.11. Hãy vẽ một miền

(a) loại I nhưng không loại II

(b) loại II nhưng không loại I

15.3.12. Hãy vẽ một miền

(a) cả loại I lẫn loại II

(b) không loại I lẫn loại II

Biễu diễn D như một miền loại I và loại II. Sau đó tính tích phân theo hai cách.

15.3.13. $\iint_D x\ dA$, D bao bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

15.3.14. $\iint_D xy\ dA$, D bao bởi các đường cong $y = x^2$, $y = 3x$.

Thiết lập các tích phân lặp cho cả hai thứ tự lấy tích phân. Sau đó tính tích phân bội bằng thứ tự dễ hơn và giải thích tại sao nó dễ hơn.

15.3.15. $\iint_D y\ dA$, D bị chặn bởi $y = x - 2$, $x = y^2$.

15.3.16. $\iint_D y^2 e^{xy}\ dA$, D bị chặn bởi $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

Tính tích phân bội.

15.3.17. $\iint_D x \cos y\ dA$, D bị chặn bởi $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

15.3.18. $\iint_D (x^2 + 2y)\ dA$, D bị chặn bởi $y = x$, $y = x^3$, $x \ge 0$.

15.3.19. $\iint_D y^2\ dA$, D là miền tam giác với các đỉnh $(0,1)$, $(1,2)$, $(4,1)$.

15.3.20. $\iint_D xy^2\ dA$, D bị chặn bởi $x = 0$, $x = \sqrt{1-y^2}$.

15.3.21. $\iint_D (2x - y)\, dA$, D được bao bởi đường tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính 2.

15.3.22. $\iint_D 2xy\, dA$, D là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(1,2)$, $(0,3)$.

Tìm thể tích của khối.

15.3.23. Dưới mặt phẳng $x - 2y + z = 1$ và trên miền bao bởi $x + y = 1$ và $x^2 + y = 1$.

15.3.24. Dưới mặt $z = 1 + x^2y^2$ và trên miền bao bởi $x = y^2$ và $x = 4$.

15.3.25. Dưới mặt $z = xy$ và trên tam giác với các đỉnh $(1,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$.

15.3.26. Bao bởi mặt paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ và mặt phẳng $x = 0$, $y = 1$, $y = z$, $z = 0$.

15.3.27. Dưới mặt $z = xy$ và trên tam giác với các đỉnh $(1,1)$, $(4,1)$, $(1,2)$.

15.3.28. Bao bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$.

15.3.29. Bao bởi các mặt phẳng $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$, $z = 0$.

15.3.30. Bao bởi mặt trụ $y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ trong góc phần tám thứ nhất.

15.3.31. Bao bởi mặt trụ $y^2 + z^2 = r^2$ và $y^2 + z^2 = r^2$.

15.3.32. Dùng máy tính để ước lượng điểm giao của hai đường cong $y = x^4$ và $y = 3x - x^2$. Nếu D là miền được bao bởi các đường này, hãy ước lượng $\iint_D x\, dA$.

15.3.33. Tìm xấp xỉ thể tích của khối trong góc phần tám thứ nhất được bao bởi các mặt phẳng $y = z$, $z = 0$, $z = x$ và mặt trụ $y = \cos x$. (Dùng một thiết bị vẽ đồ thị để ước lượng giao điểm).

Tìm thể tích của khối bằng cách trừ hai thể tích.

15.3.34. Khối được bao bởi mặt trụ paraboloic $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ và mặt phẳng $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.

15.3.35. Khối được bao bởi mặt trụ paraboloic $y = x^2$, và các mặt phẳng $z = 3y$, $z = 2 + y$.

Vẽ khối mà thể tích được cho bởi tích phân lặp.

15.3.36. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$

15.3.37. $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

Dùng một hệ đại số máy tính để tính chính xác thể tích của khối.

15.3.38. Dưới mặt $z = x^3y^4 + xy^2$ và bên trên miền được bao bởi các đường $y = x^3 - x$ và $y = x^2 + x$ với $x \geq 0$.

15.3.39. Giữa hai paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và $z = 8 - x^2 - 2y^2$ và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

15.3.40. Được bao bởi $z = 1 - x^2 - y^2$ và $z = 0$.

15.3.41. Được bao bởi $z = x^2 + y^2$ và $z = 2y$.

Vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự tích phân.

15.3.42. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$.

15.3.43. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$.

15.3.44. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$.

15.3.45. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$.

15.3.46. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$.

15.3.47. $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$.

Tính tích phân bằng cách đổi thứ tự tích phân.

15.3.48. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$.

15.3.49. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$.

15.3.50. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$.

15.3.51. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\, dy\, dx$.

15.3.52. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dx\, dy$.

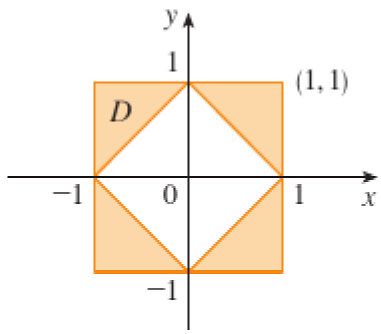
15.3.53. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$.

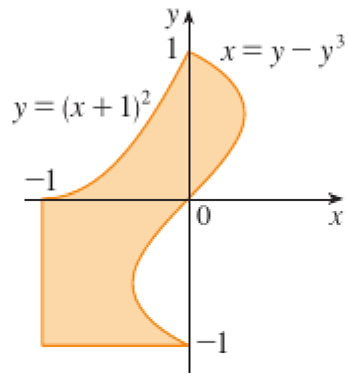
15.3.54. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$.

Biễu diễn D là hội của các miền loại I và loại II và tính tích phân.

15.3.55. $\iint_D x^2\, dA$.

15.3.56. $\iint_D y\, dA$.





Dùng Tính chất 15.3.11 để ước lượng giá trị của tích phân.

15.3.57. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\ dA$, Q là phần tư đường tròn với tâm tại gốc tọa độ và bán kính $\frac{1}{2}$ trong góc phần tư thứ nhất.

15.3.58. $\iint_Q \sin^4(x+y)\ dA$, T là tam giác bao bởi các đường thẳng $y = 0$, $y = 2x$, $x = 1$.

Tìm giá trị trung bình của f trên miền D.

15.3.59. $f(x, y) = xy$, D là tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 3)$.

15.3.60. $f(x, y) = x \sin y$, D được bao bởi các đường $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

15.3.61. Chứng minh Tính chất 15.3.11.

15.3.62. Khi tính một tích phân bội trên một miền D, một tổng của tích phân lặp nhận được như sau:

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\ dx\ dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\ dx\ dy$$

Hãy phác họa miền D và biễu diễn tích phân bội như một tích phân lặp với thứ tự tích phân ngược lại.

Dùng hình học hoặc đối xứng để tính tích phân.

15.3.63. $\iint_D (x+2)\ dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}\}$.

15.3.64. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ dA$, D là đĩa với tâm ở gốc tọa độ và bán kính R.

15.3.65. $\iint_D (2x + 3y)\ dA$, D là hình chữ nhật $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

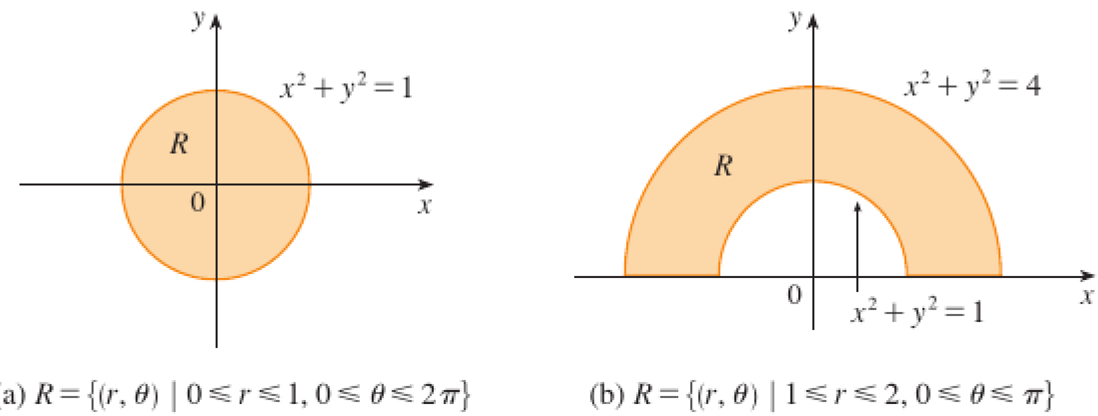
15.3.66. $\iint_D (2 + x^2y^3 - y^2 \sin x)\ dA$, $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$.

15.3.67. $\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2})\ dA$, $D = [-a, a] \times [-b, b]$.

15.3.68. Vẽ đồ thị của khối được bao bởi mặt phẳng $x + y + z = 1$ và mặt paraboloic $z = 4 - x^2 - y^2$ và tìm thể tích chính xác của nó. (Dùng máy tính để vẽ đồ thị, tìm phương trình của đường biên của miền lấy tích phân, và tính tích phân.)

15.4 Tích phân bội trong tọa độ cực

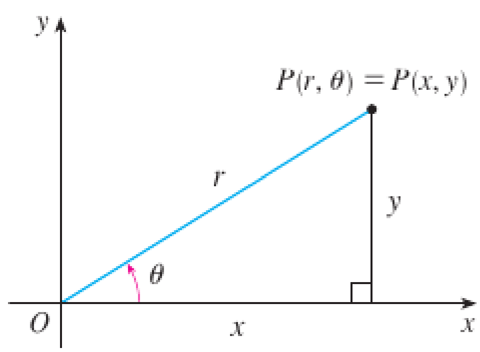
Giả sử ta muốn tính tích phân $\iint_R f(x,y)\,dA$ trong đó R là một trong những miền trong Hình 15.4.1. Trong cả hai trường hợp miêu tả R theo tọa độ vuông góc là khá phức tạp, nhưng R có thể được miêu tả dễ dàng dùng tọa độ cực.



Hình 15.4.1:

Nhắc lại từ Hình 15.4.2 là tọa độ cực (r,θ) của một điểm liên hệ với tọa độ (x,y) bởi công thức

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

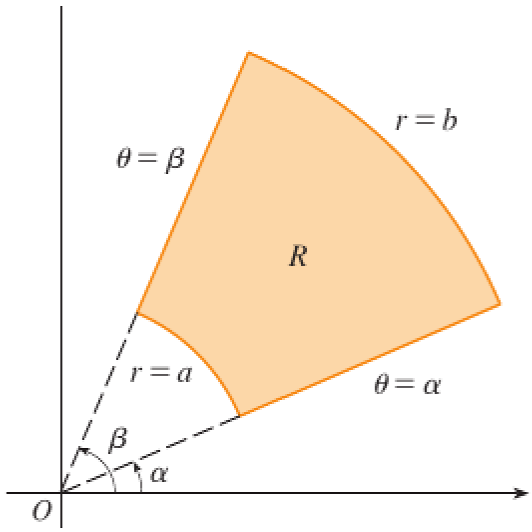


Hình 15.4.2:

Các miền trong Hình 15.4.1 là các trường hợp riêng của hình chữ nhật cực

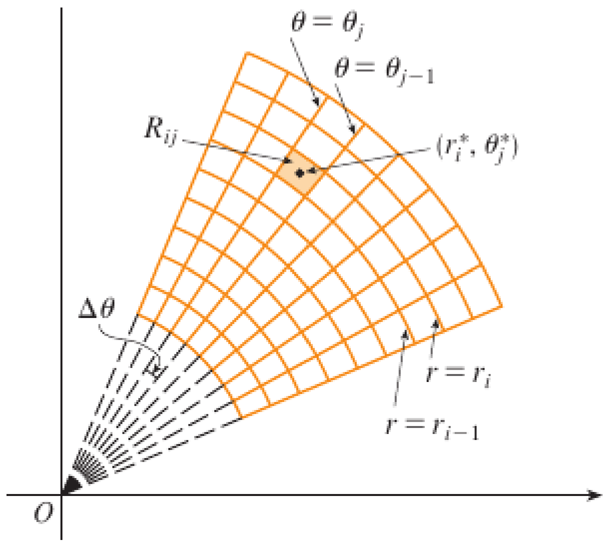
$$R = \{(r,\theta) \mid a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

được vẽ ở Hình 15.4.3.



Hình 15.4.3:

Để tính tích phân $\iint_R f(x,y)\, dA$ với R là một hình chữ nhật cực, ta chia đoạn $[a,b]$ thành m đoạn $[r_{i-1}, r_i]$ có cùng chiều rộng $\Delta r = (b-a)/m$ và ta chia đoạn $[\alpha, \beta]$ thành n đoạn $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ với cùng chiều rộng $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Khi đó các đường tròn $r = r_i$ và các tia $\theta = \theta_j$ chia hình chữ nhật cực R thành các hình chữ nhật cực nhỏ $R_{i,j}$ như trong Hình 15.4.4.



Hình 15.4.4:

"Tâm" của hình chữ nhật cực

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}$$

có tọa độ cực

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Ta tính diện tích của R_{ij} dùng sự kiện là diện tích của phần hình tròn với bán kính r và góc ở tâm θ là $\frac{1}{2}r^2\theta$. Trừ diện tích của hai phần này, mỗi phần với góc ở tâm là $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, ta được diện tích của R_{ij} là

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

Mặc dù ta đã định nghĩa tích phân $\iint_R f(x, y)\ dA$ theo các hình chữ nhật thông thường, có thể chứng tỏ rằng với hàm liên tục f ta luôn nhận được cùng một đáp số bằng cách dùng tọa độ cực. Tọa độ vuông góc của tâm của R_{ij} là $(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)$, nên một tổng Riemann có dạng

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) r_i^*\Delta r\Delta\theta \tag{15.4.1}$$

Nếu ta viết $g(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$, thì tổng Riemann trong phương trình trên có thể được viết là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta$$

chính là một tổng Riemann cho tích phân bội

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta)\ dr\ d\theta$$

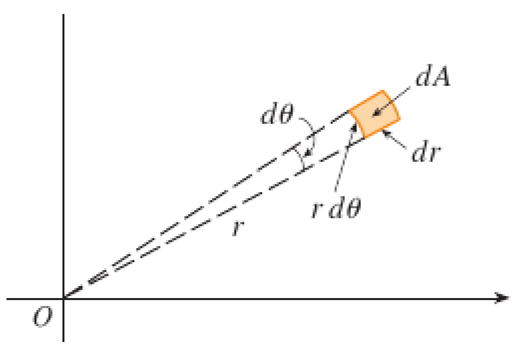
Vì thế ta có

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\ dA &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^*\cos\theta_j^*, r_i^*\sin\theta_j^*)\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r\Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta)\ dr\ d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta\end{aligned}$$

Mệnh đề (Đổi biến sang tọa độ cực trong tích phân bội)**.** *Nếu f là hàm liên tục trên hình chữ nhật cực R cho bởi $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ với $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ thì*

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta \tag{15.4.2}$$

Công thức trên nói rằng ta có thể chuyển từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cực trong tích phân bội bằng cách viết $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, dùng cận thích hợp cho r và θ, và thay dA bởi $rdrd\theta$. Cẩn thận đừng quên thừa số r thêm vào trong vế phải Công thức 15.4.2. Một cách kinh điển để nhớ được minh họa trong Hình 15.4.5, ở đó hình chữ nhật cực "vô cùng bé" có thể được coi như một hình chữ nhật thông thường với kích thước $rd\theta$ và dr và do đó có "diện tích" $dA = rdrd\theta$.



Hình 15.4.5:

Ví dụ 15.4.1. Tính $\iint_R (3x+4y^2)\, dA$, với R là miền thuộc nửa mặt phẳng trên được bao bởi các đường tròn $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=4$.

Giải. Miền R có thể được miêu tả là

$$R = \{(x,y) \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

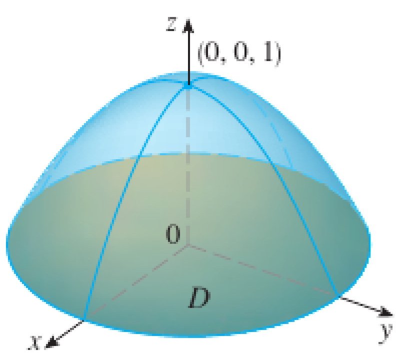
Đây là hình được vẽ trong Hình 15.4.1, và trong tọa độ cực được cho bởi $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Vì thế theo Công thức 15.4.2,

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x+4y^2)\, dA &= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta) r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} [r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta]_{r=1}^{r=2}\, d\theta = \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi} [7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)]\, d\theta \\
&= \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Tìm thể tích của khối bao bởi mặt phẳng $z=0$ và paraboloid $z = 1-x^2-y^2$.

Giải. Nếu ta đặt $z=0$ trong phương trình của mặt paraboloid, ta được $x^2+y^2=1$. Điều này có nghĩa là mặt phẳng cắt mặt paraboloid theo đường tròn $x^2+y^2=1$, vì vậy khối đã cho nằm bên dưới mặt paraboloid và bên trên đĩa D cho bởi $x^2+y^2 \leq 1$. (Xem Hình).



Hình 15.4.6:

Trong tọa độ cực D được cho bởi $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vì $1-x^2-y^2 =$

$1 - r^2$, thể tích đang tìm là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\ dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\ dr = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

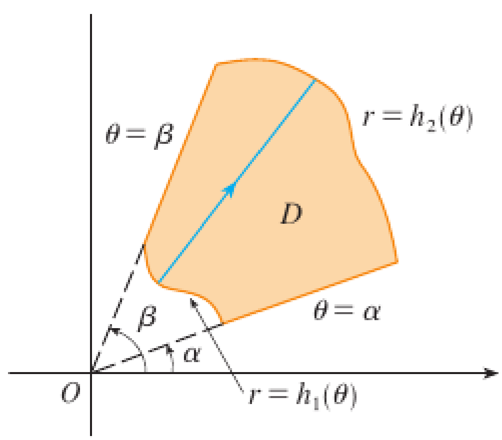
Nếu ta dùng tọa độ chữ nhật thay vì tọa độ cực, ta sẽ được

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\ dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\ dy\ dx$$

mà không dễ tính và cần phải tìm $\int (1 - x^2)^{3/2}\ dx$.

□

Những gì ta vừa làm có thể được mở rộng cho miền phức tạp hơn có dạng như trong Hình



Hình 15.4.7:

Nó tương tự với miền loại II đã xét. Thực ra kết hợp Công thức 15.4.2 với 15.3.5 ta được công thức sau.

Mệnh đề. *Nếu f liên tục trên một miền cực có dạng*

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y)\ dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr\ d\theta \tag{15.4.3}$$

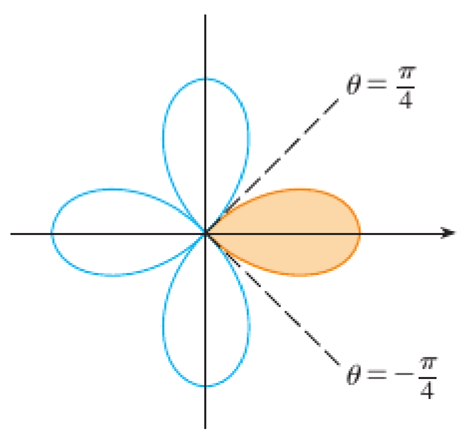
Đặc biệt, lấy $f(x,y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$, và $h_2(\theta) = h(\theta)$, ta thấy diện tích của miền D được bao bởi $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, và $r = h(\theta)$ là

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1\ dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\ dr\ d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[h(\theta)]^2\ d\theta \end{aligned}$$

Ví dụ 15.4.2. Dùng tích phân bội để tích diện tích được bao bởi một cánh của hoa hồng bốn cánh $r = \cos 2\theta$.

Giải. Từ phác họa đường cong trên Hình 15.4.8, ta thấy cánh hoa được cho bởi miền

$$D = \{(r,\theta) \mid -\pi/4 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le r \le \cos 2\theta\}$$



Hình 15.4.8:

Như thế diện tích là

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\ dr\ d\theta = \frac{\pi}{8}$$

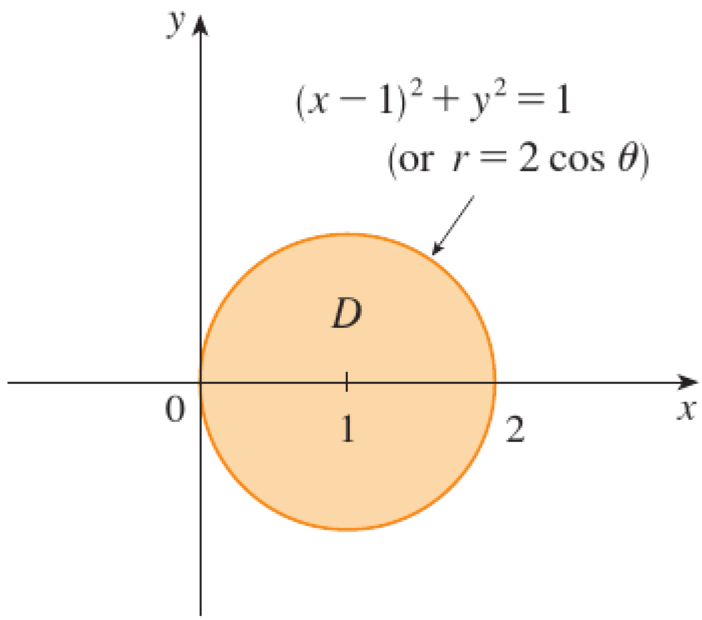
□

Ví dụ 15.4.3. Tìm thể tích của khối nằm bên dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$, bên trên mặt phẳng xy, và bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

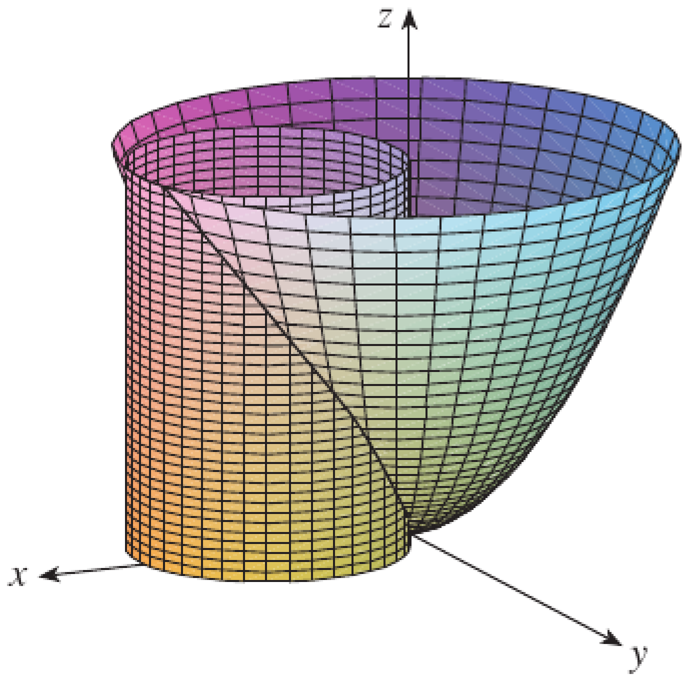
Giải. Khối nằm bên trên đĩa D và đường tròn biên có phương trình $x^2 + y^2 = 2x$, hay, sau khi viết như một bình phương

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

(Xem Hình 15.4.9 và 15.4.10.)



Hình 15.4.9:



Hình 15.4.10:

Trong tọa độ cực ta có $x^2 + y^2 = r^2$ và $x = r\cos\theta$, vì thế đường tròn biên trở thành $r^2 = 2r\cos\theta$, hay $r = 2\cos\theta$. Như vậy đĩa D được cho bởi

$$D = \{(r,\theta) \mid -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}$$

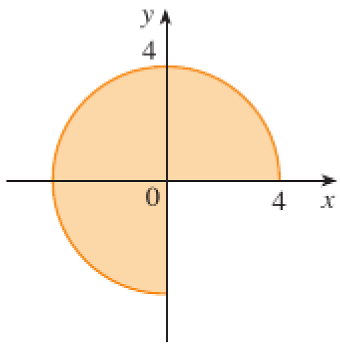
và theo Công thức 15.4.3 ta có

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2+y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 r\, dr\, d\theta \\
&= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right] d\theta = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

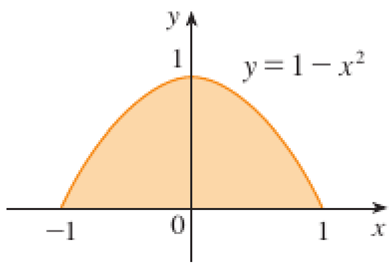
□

Bài tập

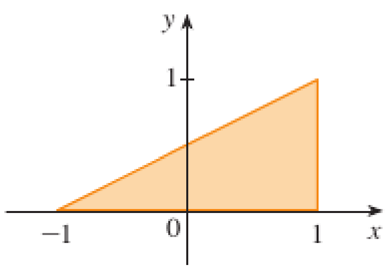
Miền R được cho. Hãy quyết định dùng tọa độ cực hay tọa độ chữ nhật, và viết $\iint_R f(x,y)\, dA$ như một tích phân lặp, trong đó f là một hàm liên tục bất kì trên R.



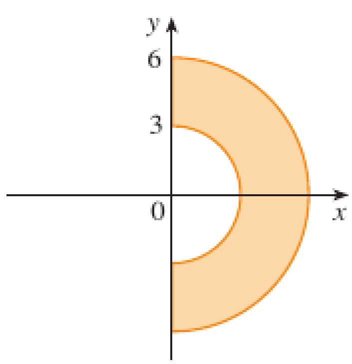
15.4.1.



15.4.2.



15.4.3.



15.4.4.

Vẽ miền mà diện tích được cho bởi tích phân và hãy tính tích phân.

15.4.5. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r\ dr\ d\theta$

15.4.6. $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\ dr\ d\theta$

15.4.7. $\iint_D x^2y\ dA$, trong đó D là nửa trên của đĩa với tâm ở gốc tọa độ và bán kính 5.

15.4.8. $\iint_R (2x-y)\ dA$, trong đó R là miền trong gốc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2+y^2=4$ và đường thẳng $x=0$ và $y=x$.

15.4.9. $\iint_R \sin(x^2+y^2)\ dA$, trong đó R là miền trong gốc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn tâm tại gốc tọa độ với bán kính 1 và 3.

15.4.10. $\iint_R \frac{y^2}{x^2+y^2}\ dA$, trong đó R là miền nằm giữa hai đường tròn $x^2+y^2=a^2$ và $x^2+y^2=b^2$ với $0<a<b$.

15.4.11. $\iint_R e^{-x^2-y^2}\ dA$, trong đó D là miền được bao bởi nửa đường tròn $x=\sqrt{4-y^2}$ và trục y.

15.4.12. $\iint_R \cos\sqrt{x^2+y^2}\ dA$, trong đó D là đĩa với tâm tại gốc tọa độ và bán kính 2.

15.4.13. $\iint_R \arctan(y/x)\ dA$, trong đó $R=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le y\le x\}$

15.4.14. $\iint_R x\ dA$, trong đó D là miền trong gốc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2+y^2=4$ và $x^2+y^2=2x$.

Dùng tích phân bôi để tính diện tích của miền.

15.4.15. Một cánh của hoa hồng $r=\cos 3\theta$.

15.4.16. Miền được bao bởi đường trái tim $r=1+\cos\theta$ và $r=1-\cos\theta$.

15.4.17. Miền bên trong đường tròn $(x-1)^2+y^2=1$ và bên ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$.

15.4.18. Miền bên trong đường trái tim $r=1+\cos\theta$ và bên ngoài đường tròn $r=3\cos\theta$.

Dùng tọa độ cực để tính thể tích của khối.

15.4.19. Dưới nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và bên trên đĩa $x^2+y^2\le 4$.

15.4.20. Dưới mặt paraboloid $z=18-2x^2-2y^2$ và bên trên mặt phẳng xy.

15.4.21. Bao bởi mặt hyperboloid $-x^2-y^2+z^2=1$ và mặt phẳng $z=2$.

15.4.22. Bên trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2=16$ và bên ngoài mặt trụ $x^2+y^2=4$.

15.4.23. Quả cầu bán kính a.

15.4.24. Bao bởi mặt paraboloid $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ và mặt $z = 7$ trong góc phần tám thứ nhất.

15.4.25. Bên trên nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

15.4.26. Bao bởi paraboloid $z = 3x^2 + 3y^2$ và $z = 4 - x^2 - y^2$.

15.4.27. Bên trong cả mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và ellipsoid $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

15.4.28. (a) Một mũi khoan có hình trụ bán kính r_1được dùng để khoét một lỗ qua tâm của một quả cầu bán kính r_2. Tìm thể tích của khối còn lại.

(b) Hãy biễu diễn thể tích ở phần (a) qua độ cao h của khối. Chú ý rằng thể tích chỉ phụ thuộc vào h, không phụ thuộc vào r_1 hay r_2.

Hãy tính tích phân lặp bằng cách chuyển sang tọa độ cực.

15.4.29. $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

15.4.30. $\int_{0}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 y\, dx\, dy$

15.4.31. $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$

15.4.32. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

Biểu diễn tích phân bội qua tích phân một biến theo r. Sau đó dùng máy tính để tính tích phân đúng tới 4 chữ số thập phân.

15.4.33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA$, trong đó D là đĩa với tâm ở gốc tọa độ và bán kính 1.

15.4.34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dA$, trong đó D là phần của đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$ trong góc phần tư thứ nhất.

15.4.35. Một hồ bơi có hình tròn với đường kính 40ft. Độ sâu là hằng dọc theo đường đông-tây và tăng tuyến tính từ 2ft từ đầu phía nam tới 7ft ở đầu phía bắc. Tìm thể tích nước trong hồ.

15.4.36. Một hệ thống tưới nước nông nghiệp phân phối nước theo hình tròn bán kính 100ft. Nó cung cấp nước tới độ sâu e^{-t} ft/h ở khoảng cách r ft từ hệ thống.

(a) Nếu $0 < R < 100$, tổng lượng nước tưới mỗi giờ là bao nhiêu trên miền bên trong đường tròn bán kính R tâm tại hệ thống?

(b) Xác định một biểu thức cho lượng nước trung bình trên mỗi ft vuông mỗi giờ trên miền bên trong đường tròn bán kính R.

15.4.37. Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ trên miền vành khăn $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ với $0 < a < b$.

15.4.38. Cho D là đĩa với tâm tại gốc tọa độ và bán kính a. Khoảng cách trung bình từ một điểm trong D tới gốc tọa độ là bao nhiêu?

15.4.39. Dùng tọa độ cực để kết hợp tổng

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

thành một tích phân bội. Tính tích phân này.

15.4.40. (a) Ta định nghĩa tích phân suy rộng sau (trên toàn bộ mặt phẳng $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \end{aligned}$$

với D_a là đĩa với bán kính a và tâm ở gốc tọa độ. Chứng tỏ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Một định nghĩa tương đương cho tích phân suy rộng trong phần (a) là

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

với S_a là hình vuông với đỉnh $(\pm a, \pm a)$. Dùng cái này để chứng tỏ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Rút ra rằng

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Bằng cách đổi biến $t = \sqrt{2}x$ chứng tỏ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Đây là một kết quả cơ bản của xác suất và thống kê.)

15.4.41. Dùng kết quả bài tập trên để tích tích phân sau:

(a) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$

(b) $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

15.5 Ứng dụng của tích phân bội

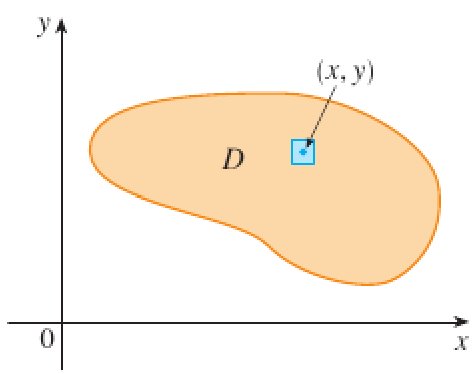
Chúng ta đã thấy một ứng dụng của tích phân kép: tính toán thể tích. Một ứng dụng hình học khác là tìm diện tích của mặt và điều này sẽ được thực hiện trong phần tiếp theo. Trong phần này chúng tôi khám phá các ứng dụng vật lý như tính toán khối lượng, điện tích, tâm khối lượng, và mômen quán tính. Chúng ta sẽ thấy rằng những ý tưởng vật lý cũng là quan trọng khi áp dụng cho các hàm mật độ xác suất của hai biến ngẫu nhiên.

Mật độ và khối lượng

Trong phần 8.3 chúng ta đã có thể sử dụng tích phân để tính toán những mômen tâm của khối lượng của một tấm mỏng hoặc phiến lá với mật độ không đổi. Nhưng bây giờ, được trang bị với tích phân bội, chúng ta có thể xem xét mộttấm mỏng với mật độ khác nhau. Giả sử tấm mỏng chiếm một khu vực D của mặt phẳng xy và *mật độ* của nó (trong đơn vị của khối lượng trên đơn vị diện tích) tại một điểm (x, y) trong D được đưa ra bởi $\rho(x, y)$, với ρ là một hàm liên tục trên D. Điều này có nghĩa rằng

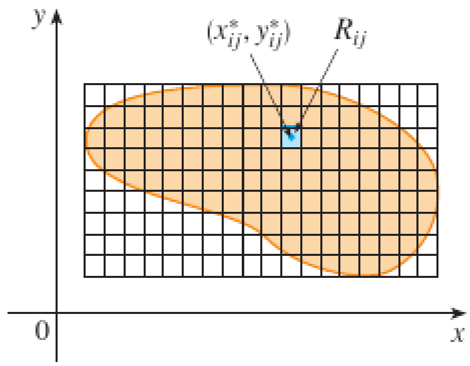
$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

với Δm và ΔA là khối lượng và diện tích của một hình chữ nhật nhỏ chứa (x, y) và giới hạn được thực hiện khi kích thước của hình chữ nhật tiến về 0. (Xem Hình 15.5.1.)



Hình 15.5.1:

Để tìm tổng khối lượng m của tấm mỏng chúng ta chia một hình chữ nhật R chứa D thành các hình chữ nhật con R_{ij} có cùng kích thước (như trong Hình 15.5.2) và xem $\rho(x, y)$ là 0 bên ngoài D.



Hình 15.5.2:

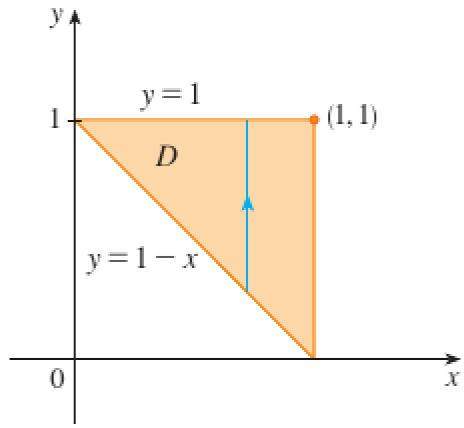
Nếu chúng ta chọn một điểm (x_{ij}^*, y_{ij}^*) trong R_{ij}, thì khối lượng của phần của tấm mỏng chiếm R_{ij} là khoảng $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, trong đó ΔA là diện tích R_{ij}. Nếu chúng ta cộng tất cả các khối như vậy, chúng ta nhận một xấp xỉ của tổng khối lượng:

$$m \approx \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D \rho(x,y)\ dA \tag{15.5.1}$$

Các nhà vật lý cũng xem xét các loại mật độ có thể được trình bày theo cách tương tự. Ví dụ, nếu một điện tích được phân bố trên một khu vực D và mật độ điện tích (theo đơn vị điện tích trên một đơn vị diện tích) được cho bởi $\sigma(x,y)$ tại một điểm (x,y) trong D, thì tổng điện tích Q được cho bởi

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)\ dA \tag{15.5.2}$$

Ví dụ 15.5.1. Điện tích được phân phối trong khu vực tam giác D trong Hình 15.5.3 với mật độ điện tích tại (x,y) là $\sigma(x,y) = xy$, được đo bằng coulomb trên một mét vuông (C/m^2). Tìm tổng điện tích.



Hình 15.5.3:

Giải. Từ Phương trình 15.5.2 và Hình 15.5.3 ta có

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sigma(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1-x)^2]\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\ dx = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Vậy tổng điện tích là $\frac{5}{24}$C.

□

Mômen và tâm khối lượng

Trong phần 8.3 chúng tôi thấy tâm khối lượng của một tấm mỏng với mật độ không đổi; ở đây chúng ta xét một tấm mỏng với mật độ thay đổi. Giả sử tấm mỏng chiếm một miền D và có hàm mật độ $\rho(x,y)$. Nhớ lại từ Chương 8 chúng ta định nghĩa mômen của một hạt đối với một trục là tích của khối lượng của nó và khoảng cách có hướng của nó tới trục. Chúng ta chia D thành hình chữ nhật nhỏ như trong Hình 15.5.2. Sau đó, khối lượng của R_{ij} xấp xỉ là $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$, vì vậy chúng ta có thể tính gần đúng mômen của R_{ij} đối với trục x bằng

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A]y_{ij}^*$$

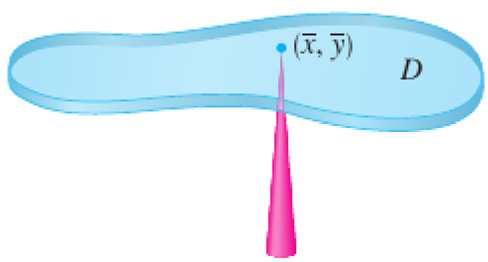
Nếu giờ ta cộng các đại lượng trên và lấy giới hạn khi số hình chữ nhật con trở nên lớn ta được *mômen* của cả phiến lá *quanh trục x*

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D y\rho(x,y)\ dA \tag{15.5.3}$$

Tương tự, mômen quanh trục y là:

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x\rho(x,y)\, dA \qquad (15.5.4)$$

Như trước, ta định nghĩa tâm khối lượng $(\bar{x}, \bar{y})$ sao cho $m\bar{x} = M_y$ và $m\bar{y} = M_x$. Ý nghĩa vật lí là phiến lá cư xử như thể toàn bộ khối lượng của nó tập trung ở tâm khối lượng của nó. Do đó, phiến cân bằng ở vị trí nằm ngang khi được chống ở ngay tâm khối lượng (xem Hình 15.5.4).



Hình 15.5.4:

Mệnh đề 15.5.2. *Tọa độ tâm khối lượng $(\bar{x}, \bar{y})$ của một phiến lá (tấm mỏng) chiếm một miền D có hàm mật độ $\rho(x,y)$ là*

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)\, dA$$

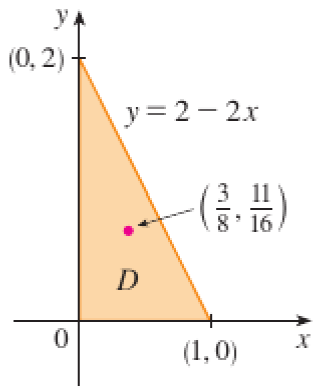
$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)\, dA$$

với khối lượng m được cho bởi

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

Ví dụ 15.5.3. Tìm khối lượng và trâm khối lượng của tấm mỏng hình tam giác với đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ nếu hàm mật độ là $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.

Giải. Tam giác được vẽ trong Hình 15.5.5.



Hình 15.5.5:

(Chú ý rằng phương trình của biên trên là $y = 2 - 2x$.) Khối lượng của tấm mỏng là

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+3x+4y)\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= 4\int_0^1 (1-x^2)\ dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Công thức trong 15.5.2 cho

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\ dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x+3x^2+xy)\ dy\ dx \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)\ dx = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\ dA = \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (y+3xy+y^2)\ dy\ dx \\ &= \frac{3}{8}\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (7-9x-3x^2+5x^3)\ dx = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

Tâm khối lượng nằm ở điểm $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.

□

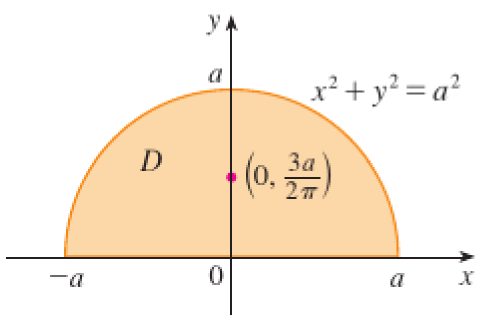
Ví dụ 15.5.4. Mật độ tại bất kỳ điểm nào trên một tấm mỏng hình bán nguyệt là tỷ lệ thuận với khoảng cách tới tâm của vòng tròn. Tìm tâm của khối lượng của tấm mỏng.

Giải. Chúng ta đặt một tấm mỏng như nửa trên của vòng tròn $x^2 + y^2 = a^2$. (Xem Hình 15.5.6.) Khoảng cách từ một điểm (x, y) đến tâm của vòng tròn (gốc tọa độ) là $\sqrt{x^2 + y^2}$. Do đó hàm mật độ là

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

trong đó K là một hằng. Cả hàm mật độ lẫn hình dạng của tấm mỏng gợi ý ta dùng tọa độ cực. Khi đó $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ và miền D được cho bởi $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi$. Vậy khối lượng của tấm mỏng là

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr)r\, dr\, d\theta = K\int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2\, dr \\ &= \frac{K\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$



Hình 15.5.6:

Cả tấm và hàm mật độ là đối xứng đối với trục y, do đó tâm khối lượng phải nằm trên trục y, có nghĩa là $\bar{x} = 0$. Tọa độ y được cho bởi

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3}\int_0^\pi \int_0^a r\sin\theta (Kr)r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr = \frac{3a}{2\pi}. \end{aligned}$$

Vậy tâm khối lượng nằm ở điểm $(0, 3a/(2\pi))$.

□

Mômen quán tính

Mômen quán tính (còn gọi là mômen thứ hai) của một hạt có khối lượng m quanh một trục được định nghĩa là mr^2, trong đó r là khoảng cách từ hạt tới trục. Chúng tôi mở rộng khái niệm này cho một tấm mỏng với hàm mật độ $\rho(x, y)$ và chiếm một vùng D bằng cách tiến hành như chúng ta đã làm cho những mômen bình thường. Chúng ta chia D thành hình chữ nhật nhỏ, xấp xỉ mômen quán tính của mỗi hình chữ nhật con quanh trục x, và lấy giới hạn tổng khi số lượng các hình chữ nhật con trở nên lớn. Kết quả là mômen quán tính của tấm mỏng quanh trục x:

$$I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}^*)^2\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D y^2\rho(x, y)\ dA \tag{15.5.5}$$

Tương tự, mômen quán tính quanh trục y là:

$$I_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}^*)^2\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D x^2\rho(x, y)\ dA \tag{15.5.6}$$

Cũng đáng quan tâm để xét mômen quán tính quanh gốc tọa độ, còn gọi là mômen quán tính cực:

$$I_0 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right]\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x, y)\ dA \tag{15.5.7}$$

Chú ý là $I_0 = I_x + I_y$.

Ví dụ 15.5.5. Tìm mômen quán tính I_x, I_y, và I_0 của một đĩa đồng chất D với mật độ $\rho(x, y) = \rho$, tâm tại gốc tọa độ, bán kính a.

Giải. Biên của D là vòng tròn $x^2 + y^2 = a^2$ và trong tọa độ cực D được biểu diễn là $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$. Hãy tính I_0 trước:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2+y^2)\rho\ dA = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 r\ dr\ d\theta \\ &= \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^a r^3\ dr = \frac{\pi\rho a^4}{2}. \end{aligned}$$

Thay vì tính I_x và I_y trực tiếp, ta dùng sự kiện là $I_x + I_y = I_0$ và $I_x = I_y$ (từ tính đối xứng của bài toán). Vậy

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}.$$

□

Trong ví dụ trên chú ý rằng khối lượng của đĩa là

$$m = \text{mật độ x diện tích} = \rho(\pi a^2)$$

do đó, các mômen quán tính của đĩa quanh gốc (giống như một bánh xe quanh trục của nó) có thể được viết như

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

Vì vậy, nếu chúng ta tăng khối lượng hoặc bán kính của đĩa, chúng ta do đó làm tăng mômen quán tính. Nói chung, mômen quán tính đóng vai trò như nhau trong chuyển động quay khối lượng đóng trong chuyển động thẳng. Các mômen quán tính của một bánh xe là những gì làm cho nó khăn để bắt đầu hoặc ngừng vòng quay của bánh xe, cũng như khối lượng của một chiếc xe hơi là những gì làm cho nó biệt gặp khó để bắt đầu hoặc dừng chuyển động của xe.

Bán kính xoay tròn của một tấm mỏng quanh một trục là số R sao cho

$$mR^2 = I \tag{15.5.8}$$

trong đó m là khối lượng của tấm mỏng và I là mômen quán tính quanh trục đã cho. Phương trình trên nói rằng nếu khối lượng của tấm đã được tập trung tại một khoảng cách R từ trục, thì mômen quán tính của "điểm khối lượng" sẽ bằng mômen quán tính của tấm mỏng.

Đặc biệt, bán kính xoay tròn $\bar{y}$ đối với trục x và bán kính xoay tròn $\bar{x}$ đối với trục y được cho bởi các phương trình

$$m\bar{y}^2 = I_x, \qquad m\bar{x}^2 = I_y \tag{15.5.9}$$

Như vậy $(\bar{x}, \bar{y})$ là điểm mà tại đó khối lượng của tấm có thể được tập trung mà không thay đổi mômen quán tính đối với các trục tọa độ. (Lưu ý sự tương tự với tâm khối lượng.)

Ví dụ 15.5.6. Tính bán kính xoay tròn quanh trục x của đĩa trong Ví dụ 15.5.5.

Giải. Như đã lưu ý, khối lượng của đĩa là $m = \rho\pi a^2$, do đó từ Phương trình 15.5.9 ta được

$$\bar{y} = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}.$$

Vì thế bán kính xoay tròn quanh trục x là $\bar{y} = \frac{1}{2}a$, chính là nửa bán kính của đĩa.

□

Xác suất

Trong Mục 8.5 ta đã xét *hàm mật độ xác suất* f của một biến ngẫu nhiên X. Điều này có nghĩa là $f(x) \geq 0$ với mọi x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, và xác suất để X nằm giữa a và b được tính bằng cách lấy tích phân f từ a tới b:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

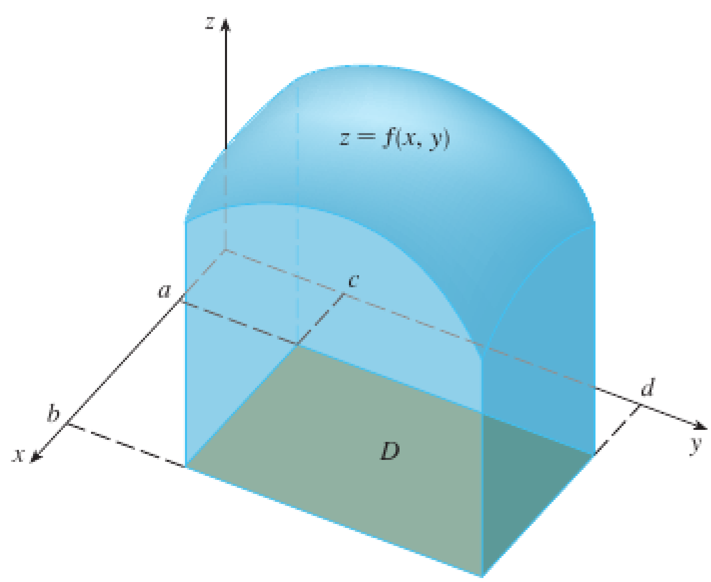
Bây giờ chúng ta hãy xem xét một cặp biến ngẫu nhiên liên tục X và Y, ví dụ như thời gian hoạt động của hai bộ phận của của một máy hoặc chiều cao và trọng lượng của một phụ nữ được chọn ngẫu nhiên. Hàm mật độ chung của X và Y là một hàm f của hai biến sao cho xác suất mà (X, Y) nằm trong một miền D là

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\, dA.$$

Đặc biệt, nếu miền là một hình chữ nhật, xác suất để X nằm giữa a và b và Y nằm giữa c và d là

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx.$$

(Xem Hình 15.5.7.)



Hình 15.5.7:

Vì xác suất không âm và được đo ở tỉ lệ từ 0 tới 1 nên hàm mật độ chung có các tính chất sau:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dA = 1.$$

Như trong Bài tập 15.4.40, tích phân kép trên $\mathbb{R}^2$ là một tích phân suy rộng được định nghĩa là giới hạn của tích phân kép trên hình tròn hoặc hình vuông lớn dần, và ta có thể viết

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1.$$

Ví dụ 15.5.7. Nếu hàm mật độ chung của X và Y được cho bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

tìm giá trị của hằng số C. Sau đó tìm $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

Giải. Ta tìm giá trị của C bằng cách đảm bảo tích phân của f bằng 1. Vì $f(x,y) = 0$ ngoài hình chữ nhật $[0,10] \times [0,10]$ ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x+2y)\, dy\, dx = C\int_0^{10} \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx = 1500C.$$

Vậy $C = \frac{1}{1500}$.

Giờ ta tính xác suất để X nhiều lắm là 7 và Y nhiều lắm là 2:

$$\begin{aligned} P(X &\leq 7, Y \geq 2) = \int_{-\infty}^{7}\int_2^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^7\int_2^{10} \frac{1}{1500}(x+2y)\, dy\, dx \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0.5787. \end{aligned}$$

□

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất $f_1(x)$ và Y là một ngẫu nhiên biến với hàm mật độ $f_2(y)$. Khi đó, X và Y được gọi là các *biến ngẫu nhiên độc lập* nếu hàm mật độ chung của chúng là tích của hàm mật độ riêng của chúng:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y).$$

Trong Mục 8.5 ta đã mô hình hóa thời gian đợi bằng hàm mật độ mũ

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & t \geq 0 \end{cases}$$

với μ chỉ thời gian đợi trung bình. Trong ví dụ tiếp theo ta xét trường hợp hai biến đợi độc lập.

Ví dụ 15.5.8. Người quản lý của một rạp chiếu phim xác định rằng thời gian trung bình khán giả chờ đợi xếp hàng để mua vé cho bộ phim của tuần này là 10 phút và thời gian trung bình họ chờ đợi để mua bắp rang là 5 phút. Giả sử rằng hai thời gian chờ đợi là độc lập, tìm xác suất mà một khán giả chờ đợi tổng cộng ít hơn 20 phút trước khi lấy chỗ ngồi của mình.

Giải. Giả sử rằng cả thời gian chờ đợi X để mua vé và thời gian chờ đợi Y trong hàng mua nước giải khát được mô hình hóa bởi hàm mật độ xác suất theo hàm mũ, chúng ta có thể viết các hàm mật độ cá nhân như sau

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-x/5} & y \geq 0. \end{cases}$$

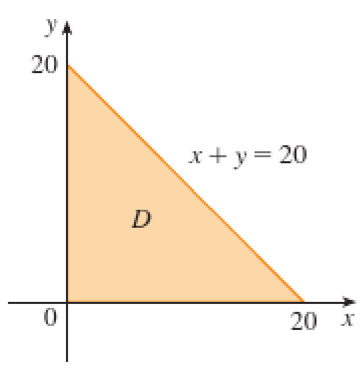
Vì X và Y là độc lập, hàm mật độ chung là tích

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

Ta được hỏi xác suất để $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

với D là tam giác trong Hình 15.5.8.



Hình 15.5.8:

Vậy

$$\begin{aligned} P(X + Y &< 20) = \iint_D f(x,y)\, dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}\, dy\, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là khoảng 75% khán giả chờ đợi ít hơn 20 phút trước khi lấy chỗ ngồi của mình.

□

Kì vọng

Nhắc lại trong Mục 8.5 nếu X la fmột biến ngẫu nhiên với hàm mật độ f thì *trung bình* của nó là

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx.$$

Bây giờ nếu X và Y là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ chung f ta định nghĩa trung bình của X và Y, còn gọi là kì vọng của X và Y là

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x,y)\, dA. \tag{15.5.10}$$

Chú ý các biểu thức cho μ_1 và μ_2 giống như những mômen M_x và M_y của một tấm mỏng với hàm mật độ ρ. Trong thực tế, chúng ta có thể nghĩ về xác suất giống như là như khối lượng phân phối liên tục. Chúng ta tính toán xác suất cách chúng ta tính khối lượng - bằng cách lấy tích phân một hàm mật độ. Và bởi vì tổng "khối lượng xác suất" là 1, các biểu thức cho $\bar{x}$ và $\bar{y}$ cho thấy rằng chúng ta có thể nghĩ đến những giá trị kỳ vọng của X và Y, μ_1 và μ_2, như là tọa độ của các " tâm khối lượng" của phân phối xác suất.

Trong ví dụ sau chúng ta làm việc với sự phân bố chuẩn. Như trong phần 8.5, một biến ngẫu nhiên được gọi là có *phân phối chuẩn* nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

với μ là trung bình và σ là độ lệch chuẩn.

Ví dụ 15.5.9. Một nhà máy sản xuất ra vòng bi lăn (hình trụ) được bán như có đường kính 4,0 cm và chiều dài 6,0 cm. Trong thực tế, đường kính X được phân phối chuẩn với trung bình 4,0 cm và độ lệch chuẩn 0,01 cm, trong khi chiều dài Y được phân phối chuẩn với trung bình 6,0 cm và độ lệch chuẩn 0,01 cm. Giả sử X và Y là độc lập, viết hàm mật độ chung và vẽ đồ thị của nó. Tìm xác suất mà một vòng bi lăn được chọn ngẫu nhiên từ các dây chuyền sản xuất có thể chiều dài hoặc đường kính khác đi từ trung bình hơn 0,02 cm.

Giải. Ta được cho X và Y được phân phối chuẩn với $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$. Khi đó hàm mật độ của từng biến X và Y là

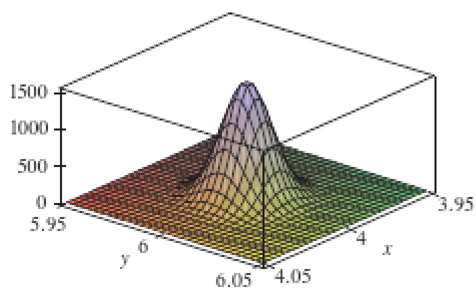
$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/0.0002}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-(y-6)^2/0.0002}$$

Vì X và Y độc lập nên hàm phân bố chung là tích

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_1(x)f_2(y) \\ &= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}. \end{aligned}$$

Đồ thị của hàm này được vẽ ở Hình 15.5.9.



Hình 15.5.9:

Hãy tính xác suất để cả X và Y sai khác trung bình dưới 0.02 cm. Dùng một máy tính để ước lượng tích phân, ta được

$$\begin{aligned} P(3.98 &< X < 4.02, 5.98 < Y < 6.02) = \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \frac{5000}{\pi} \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx \approx 0.91. \end{aligned}$$

Như vậy xác suất để X hoặc Y sai khác trung bình hơn 0.02 cm là gần bằng

$$1 - 0.91 = 0.09.$$

□

Bài tập

15.5.1. Điện tích được phân bố trên một hình chữ nhật $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (đo bằng coulomb trên mét vuông). Tìm tổng điện tích trên hình chữ nhật.

15.5.2. Điện tích được phân bố trên một hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ sao cho mật độ điện tích tại (x, y) là $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (đo bằng coulomb trên mét vuông). Tìm tổng điện tích trên hình tròn.

Tìm khối lượng và tâm khối lượng của tấm mỏng chiếm miền D và có hàm mật độ cho trước.

15.5.3. $D = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$.

15.5.4. $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$; $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.

15.5.5. D là miền tam giác với đỉnh $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$.

15.5.6. D là miền tam giác được bao bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = x$, $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$.

15.5.7. D được bao bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$.

15.5.8. D được bao bởi $y = x^2$, $y = x + 2$; $\rho(x, y) = kx$.

15.5.9. $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le \sin(\pi x/L),\ 0 \le x \le L\}$; $\rho(x, y) = y$.

15.5.10. D được bao bởi $y = x^2$, $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$.

15.5.11. Một tấm mỏng chiếm một đĩa $x^2 + y^2 \le 1$ trong góc phần tư thứ nhất. Tìm tâm khối lượng nếu mật độ tại mỗi điểm là tỉ lệ với khoảng cách tới trục x.

15.5.12. Tìm tâm khối lượng ở bài trên nếu mật độ tại mỗi điểm tỉ lệ với bình phương khoảng cách tới gốc tọa độ.

15.5.13. Biên của một tấm mỏng bao gồm các hình bán nguyệt $y = \sqrt{1 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - x^2}$ cùng với các phần của trục x nối chúng. Tìm tâm khối lượng của tấm mỏng nếu mật độ tại mọi điểm tỷ lệ thuận với khoảng cách của nó từ gốc tọa độ.

15.5.14. Tìm tâm khối lượng của tấm mỏng trong bài tập trên nếu mật độ tại bất kỳ điểm nào là tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ gốc.

15.5.15. Tìm tâm khối lượng của một tấm mỏng trong hình dạng của một tam giác vuông cân có chiều dài cạnh bằng a nếu mật độ bất kỳ điểm nào là tỷ lệ thuận với bình phương của khoảng cách từ đỉnh đối diện với cạnh huyền.

15.5.16. Một tấm mỏng chiếm miền bên trong vòng tròn $x^2 + y^2 = 2y$ nhưng bên ngoài vòng tròn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm tâm khối lượng nếu mật độ tại mọi điểm là tỉ lệ nghịch với nó khoảng cách từ gốc.

15.5.17. Tìm mômen quán tính I_x, I_y, I_0 cho tấm mỏng của Bài tập 15.5.7.

15.5.18. Tìm mômen quán tính I_x, I_y, I_0 cho tấm mỏng của Bài tập 15.5.11.

15.5.19. Tìm mômen quán tính I_x, I_y, I_0 cho tấm mỏng của Bài tập 15.5.15.

15.5.20. Xem một cánh quạt vuông có cạnh dài 2 và góc dưới bên trái được đặt tại gốc. Nếu mật độ của cánh là $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, khó hơn để quay cánh quạt quanh trục x hay trục y?

Một tấm mỏng với mật độ $\rho(x, y) = \rho$ chiếm chỗ cho trước. Tìm các mômen quán tính và bán kính xoay quanh trục x và trục y.

15.5.21. Hình chữ nhật $0 \le x \le b$, $0 \le y \le h$.

15.5.22. Tam giác với đỉnh $(0,0)$, $(b,0)$, $(0,h)$.

15.5.23. Phần của đĩa $x^2 + y^2 \le a^2$ trong góc phần tư thứ nhất.

15.5.24. Miền dưới đường $y = \sin x$ với $x = 0$ tới $x = \pi$.

Dùng một hệ đại số máy tính để tìm khối lượng, tâm khối lượng, mômen quán tính của tấm mỏng chiếm miền D với mật độ cho trước.

15.5.25. D được bao bởi cánh bên phải của hoa hồng bốn cánh $r = \cos 2\theta$, $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

15.5.26. $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le xe^{-x},\ 0 \le x \le 2\}$; $\rho(x,y) = x^2y^2$.

15.5.27. Hàm mật độ chung cho cặp biến ngẫu nhiên X và Y là

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx(1+y) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

(a) Tìm giá trị của hằng số C.

(b) Tìm $P(X \le 1, Y \le 1)$.

(c) Tìm $P(X + Y \le 1)$.

15.5.28. (a) Kiểm rằng

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

là một hàm mật độ chung.

(b) Nếu X và Y là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ chung f. Tìm $P(X \ge \frac{1}{2})$, $P(X \ge \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2})$.

(c) Tìm giá trị kì vọng của X và Y.

15.5.29. Hàm mật độ chung cho cặp biến ngẫu nhiên X và Y là

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

(a) Kiểm rằng f thật sự là một hàm mật độ chung.

(b) Tìm các xác suất sau: $P(Y \ge 1)$, $P(X \le 2, Y \le 4)$.

(c) Tìm giá trị kì vọng của X và Y.

15.5.30. (a) Một đèn có hai bóng đèn của một loại với một tuổi thọ trung bình 1000 giờ. Giả sử rằng chúng ta có thể mô hình xác suất trách của sự hư hỏng các bóng đèn bởi một hàm mật độ mũ với trung bình $\mu = 1000$, tìm xác suất mà cả hai bóng đèn của đèn hư hỏng trong vòng 1000 giờ.

(b) Một đèn khác chỉ có một bóng đèn cùng loại như trong phần (a). Nếu một bóng đèn cháy và được thay thế bằng một bóng đèn cùng loại, tìm xác suất mà hai bóng đèn hư hỏng trong vòng tổng số 1000 giờ.

15.5.31. Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập, trong đó X được phân phối chuẩn với trung bình 45 và độ lệch chuẩn 0,5 và Y được phân phối chuẩn với trung bình 20 và độ lệch chuẩn 0.1.

(a) Tìm $P(40 \leq X \leq 50, 20 \leq Y \leq 25)$.

(b) Tìm $P(4(X-45)^2 + 100(Y-20)^2 \leq 2)$.

15.5.32. Xavier và Yolanda cả hai đều có lớp học kết thúc vào buổi trưa và họ đồng ý gặp mỗi ngày sau giờ học. Họ đến quán cà phê độc lập với nhau. Thời gian đến của Xavier là X và thời gian đến của Yolanda là Y, trong đó X và Y được đo bằng phút sau khi buổi trưa. Các chức năng mật độ cá nhân là

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

(Xavier đến một lúc sau buổi trưa và thường đến đúng giờ hơn so với muộn. Yolanda luôn đến trước 12:10 và có nhiều khả năng đến muộn hơn ngay là đúng giờ.) Sau khi Yolanda đến, cô ấy sẽ chờ Xavier cho đến nửa giờ, nhưng Xavier sẽ không đợi Yolanda. Tìm xác suất mà họ gặp nhau.

15.5.33. Khi nghiên cứu sự lây lan của dịch bệnh, ta giả định xác suất mà một cá nhân bị nhiễm bệnh sẽ lây lan bệnh cho một cá nhân không bị nhiễm bệnh là một hàm của khoảng cách giữa họ. Hãy xét một thành phố có bán kính 10 dặm, trong đó dân số được phân bố đồng đều. Với một cá nhân không bị nhiễm bệnh tại một điểm cố định $A(x_0, y_0)$, giả định rằng hàm xác suất được cho bởi

$$f(P) = \frac{1}{20}\left[20 - d(P, A)\right]$$

trong đó $d(P, A)$ cho khoảng cách giữa hai điểm P và A.

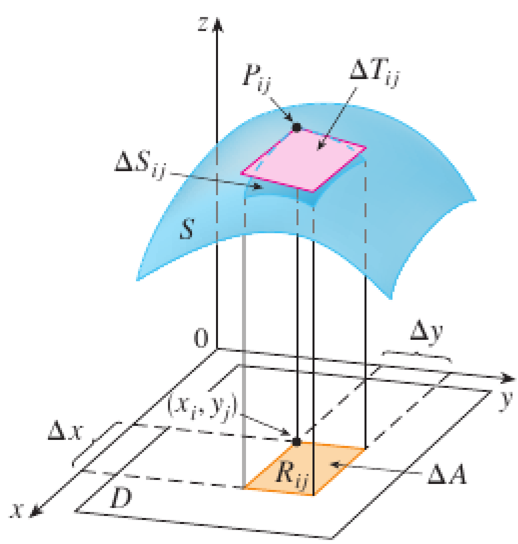
(a) Giả sử sự phơi nhiễm của một người đối với bệnh là tổng của xác suất nhiễm bệnh từ tất cả các các thành viên của dân số. Giả sử rằng các nhiễm người được phân bố đều trên toàn thành phố, với k cá nhân nhiễm bệnh cho mỗi dặm vuông. Tìm tích phân bội đại diện cho sự phơi nhiễm của một người sống ở A.

(b) Tính tích phân trên với trường hợp trong đó A là trung tâm của thành phố và đối với trường hợp trong đó A nằm trên cạnh của thành phố. Bạn muốn ở đâu hơn?

15.6 Diện tích mặt

[2] Trong phần này ta áp dụng tích phân kép cho vấn đề tính toán diện tích bề mặt. Trong phần 8.2 chúng tôi tìm thấy diện tích của một loại mặt rất đặc biệt - mặt tròn xoay - bằng các phương pháp của tích phân đơn biến. Ở đây chúng ta tính diện tích của một bề mặt với phương trình $z = f(x, y)$, đồ thị của một hàm số của hai biến.

Cho S là một mặt với phương trình $z = f(x, y)$, với f là hàm có đạo hàm riêng liên tục. Để đơn giản để thiết lập công thức diện tích bề mặt, ta giả sử rằng $f(x, y) \geq 0$ và miền xác định D của f là một hình chữ nhật. Ta chia D thành các hình chữ nhật nhỏ R_{ij} với diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Nếu (x_i, y_j) là góc của R_{ij} gần gốc tọa độ nhất, gọi $P_{ij}(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ là điểm trên S ngay ở trên nó (xem Hình 15.6.1).



Hình 15.6.1:

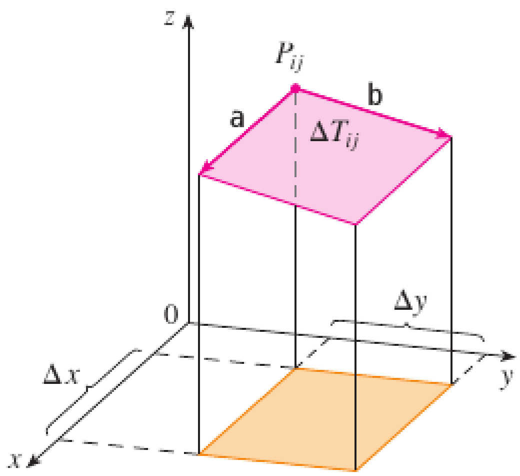
Mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_{ij} là một xấp xỉ S gần P_{ij}. Vì thế diện tích ΔT_{ij} của phần này của mặt phẳng tiếp xúc (một hình bình hành) nằm ngay trên R_{ij} là một xấp xỉ của diện tích ΔS_{ij} của phân của S nằm ngay trên R_{ij}.

[2] Ở Mục 16.6 ta sẽ trình bày diện tích của các mặt tổng quát hơn, gọi là các mặt tham số, không cần học mục này nếu sẽ học mục đó.

Vì thế tổng $\sum\sum \Delta T_{ij}$ là một xấp xỉ của tổng diện tích của S, và xấp xỉ này có vẻ cải thiện khi số hình chữ nhật tăng lên. Vì vậy ta định nghĩa *diện tích mặt* của S là

$$A(S) = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \tag{15.6.1}$$

Để tìm một công thức thuận tiện hơn Phương trình 15.6.1 cho tính toán, gọi **a** và **b** là các vectơ gốc tại P_{ij} và nằm dọc hình bình hành với diện tích ΔT_{ij}. (Xem Hình 15.6.2.)



Hình 15.6.2:

Khi đó $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. Nhắc lại từ Mục 14.3 rằng $f_x(x_i, y_j)$ và $f_y(x_i, y_j)$ là độ nghiêng của đường thẳng tiếp xúc qua P_{ij} theo hướng **a** và **b**. Vì thế

$$\mathbf{a} = \Delta x\mathbf{i} + f_x(x_i, y_j)\Delta x\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y\mathbf{j} + f_y(x_i, y_j)\Delta y\mathbf{k}$$

và

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j)\Delta y \end{bmatrix} \\
&= -f_x(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\Delta x\Delta y\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\mathbf{k} \\
&= [-f_x(x_i, y_j)\mathbf{i} - f_y(x_i, y_j)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta A.
\end{aligned}$$

Vậy $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_x(x_i, y_j)]^2 + 1}\Delta A$. Từ Định nghĩa 15.6.1

ta được

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i,y_j)]^2 + [f_x(x_i,y_j)]^2 + 1}\Delta A \end{aligned}$$

và theo định nghĩa của tích phân bội ta được công thức sau.

Mệnh đề 15.6.1. *Diện tích của mặt với phương trình $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, với f_x và f_y liên tục, là*

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_x(x,y)]^2 + 1}\; dA$$

Ta sẽ kiểm trong Mục 16.6 rằng công thức này nhất quán với công thức trước cho diện tích của mặt tròn xoay. Nếu ta dùng kí hiệu khác cho đạo hàm riêng, ta có thể viết lại công thức trong 15.6.1 như sau:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dA. \tag{15.6.2}$$

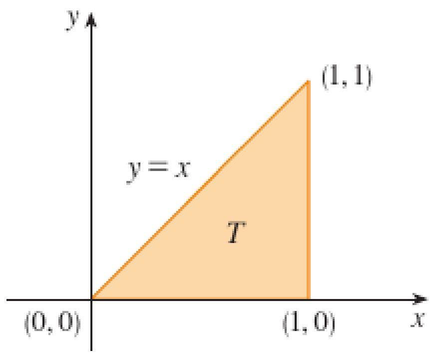
Chú ý sự tương tự giữa diện tích mặt trong công thức trên và chiều dài đường cong trong Mục 8.1:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx.$$

Ví dụ 15.6.2. Tìm diện tích mặt của mặt $z = x^2 + 2y$ nằm trên tam giác T trong mặt phẳng xy với đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, và $(1,1)$.

Giải. Miền T được vẽ trong Hình 15.6.3 và được miêu tả là

$$T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}.$$

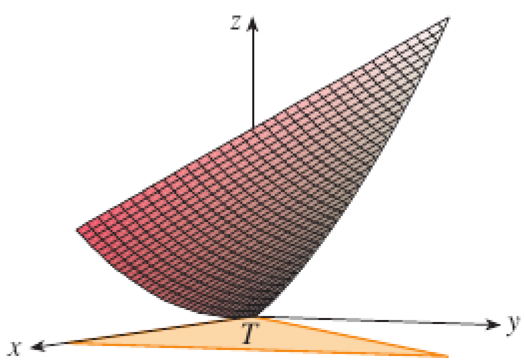


Hình 15.6.3:

Dùng Công thức 15.6.1 với $f(x,y) = x^2 + 2y$ ta được

$$\begin{aligned} A &= \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2+5}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{4x^2+5}\, dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(4x^2+5)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Hình 15.6.4 vẽ phần mặt mà ta vừa tính diện tích.

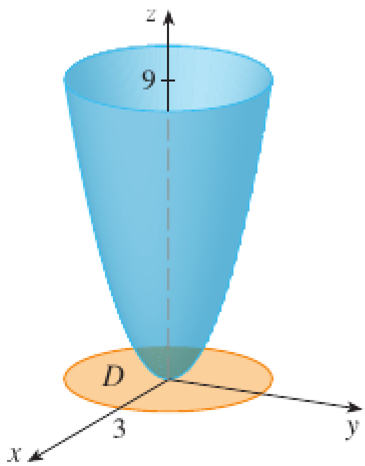


Hình 15.6.4:

□

Ví dụ 15.6.3. Tìm diện tích của phần paraboloid $z = x^2 = y^2$ nằm bên dưới mặt phẳng $z = 9$.

Giải. Mặt phẳng cắt mặt paraboloid theo đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Vì thế mặt đã cho nằm trên đĩa D với tâm tại gốc tọa độ và bán kính 3. (Xem Hình 15.6.5.)



Hình 15.6.5:

Dùng Công thức 15.6.2 ta được

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$
$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA.$$

Chuyển sang tọa độ cực ta được

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1).$$

□

Bài tập

Tìm diện tích của mặt.

15.6.1. Phần mặt phẳng $z = 2 + 3x + 4y$ nằm trên hình chữ nhật $[0, 5] \times [1, 4]$.

15.6.2. Phần mặt phẳng $2x + 5y + z = 10$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$.

15.6.3. Phần mặt phẳng $3x + 2y + z = 6$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

15.6.4. Phần mặt $z = 2 + 3x + 2y^2$ nằm trên hình tam giác với đỉnh $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$.

15.6.5. Phần mặt trụ $y^2 + z^2 = 9$ nằm trên hình chữ nhật với đỉnh $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,2)$, $(4,2)$.

15.6.6. Phần mặt paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm trên mặt phẳng xy.

15.6.7. Phần mặt hyperbolic paraboloid $z = y^2 - x^2$ nằm giữa hai mặt trục $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

15.6.8. Mặt $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

15.6.9. Phần của mặt $z = xy$ nằm giữa mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

15.6.10. Phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trên mặt $z = 1$.

15.6.11. Mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$ và bên trên mặt phẳng xy.

15.6.12. Phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4z$ nằm trong mặt paraboloid $z = x^2+y^2$.

Tìm diện tích mặt đúng tới bốn chữ số thập phân bằng cách biểu diễn diện tích qua tích phân đơn và dùng máy tính để ước lượng tích phân.

15.6.13. Phần mặt $z = e^{-x^2-y^2}$ nằm bên trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 4$.

15.6.14. Phần mặt $z = \cos(x^2 + y^2)$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

15.6.15. (a) Dùng Luật điểm giữa cho tích phân kép (xem Mục 15.1) với bốn hình vuông để ước tích diện tích mặt của paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm bên trên hình vuông $[0,1] \times [0,1]$.

(b) Dùng hệ đại số máy tính để xấp xỉ diện tích mặt trong phần (a) tới bốn chữ số thập phân. So sánh với đáp số ở câu (a).

15.6.16. (a) Dùng Luật điểm giữa cho tích phân kép với $m = n = 2$ để ước tích diện tích mặt của $z = xy + x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

(b) Dùng hệ đại số máy tính để xấp xỉ diện tích mặt trong phần (a) tới bốn chữ số thập phân. So sánh với đáp số ở câu (a).

15.6.17. Tìm chính xác diện tích của mặt $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 1$.

15.6.18. Tìm chính xác diện tích của mặt $z = 1 + x + y + x^2$, $-2 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Minh họa bằng hình vẽ mặt.

15.6.19. Tìm tới bốn chữ số thập phân diện tích của phần mặt $z = 1 + x^2y^2$ bên trên đĩa $x^2 + y^2 \leq 1$.

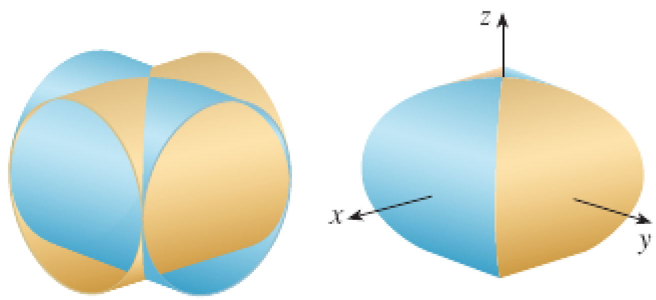
15.6.20. Tìm tới bốn chữ số thập phân diện tích của phần mặt $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ bên trên hình vuông $|x| + |y| \leq 1$. Minh họa bằng hình vẽ mặt.

15.6.21. Chứng tỏ diện tích của phần mặt phẳng $z = ax + by + c$ chiếu xuống miền D trên mặt phẳng xy với diện tích $A(D)$ là $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}A(D)$.

15.6.22. Nếu dùng Công thức 15.6.1 để tính diện tích của nửa trên của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ thì có một vấn đề nhỏ là tích phân suy rộng. Thực sự hàm dưới dấu tích phân không liên tục vô hạn tại mọi điểm trên đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$. Tuy nhiên tích phân có thể được tính như là giới hạn của tích phân trên đĩa $x^2 + y^2 \leq t^2$ khi $t^- \to a^-$. Dùng phương pháp này để chứng tỏ diện tích của mặt cầu bán kính a là $4\pi a^2$.

15.6.23. Tìm diện tích của phần hữu hạn của paraboloid $y = x^2 + z^2$ được cắt bởi mặt $y = 25$. [Gợi ý: Chiếu mặt lên mặt phẳng xz.]

15.6.24. Hình sau vẽ mặt được tạo ra khi mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$ cắt mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$. Tìm diện tích của mặt này.



15.7 Tích phân bội ba

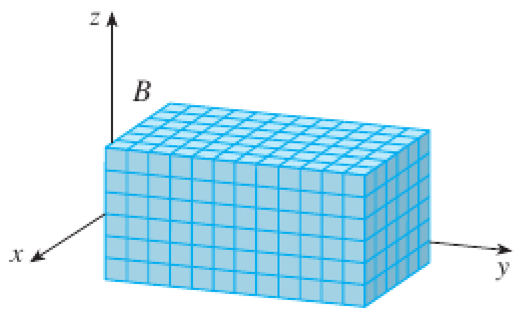
Giống như cách ta định nghĩa tích phân đơn cho hàm một biến và tích phân kép cho hàm hai biến, ta có thể định nghĩa tích phân bội ba cho hàm ba biến. Trước hết hãy làm việc với trường hợp đơn giản nhất khi f là hàm xác định trên hình hộp chữ nhật:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}. \tag{15.7.1}$$

Bước đầu tiên là chia B thành hình hộp nhỏ. Ta làm điều này bằng cách chia đoạn $[a, b]$ thành l đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ với cùng chiều dài Δx, chia đoạn $[c, d]$ thành m đoạn con với cùng chiều dài Δy, và chia đoạn $[r, s]$ thành n đoạn con với cùng chiều dài Δz. Mặt phẳng đi qua đầu mút của những đoạn con song song với các mặt phẳng tọa độ chia hộp B thành lmn hộp con

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

được vẽ trong Hình 15.7.1. Mỗi hình hộp con có thể tích $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.



Hình 15.7.1:

Ta thành lập tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V \tag{15.7.2}$$

với điểm thử $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ trong B_{ijk}. Tương tự như định nghĩa của tích phân bội hai 15.5.2, ta định nghĩa tích phân bội ba là giới hạn của tổng Riemann

Định nghĩa 15.7.1. *Tích phân bội ba* của f trên hộp B là

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Lại lần nữa, tích phân này tồn tại nếu f liên tục. Ta có thể chọn điểm thử là bất kì điểm nào trong hộp con, nhưng nếu ta chọn nó là điểm (x_i, y_j, z_k) ta được một biểu thức dễ nhìn:

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V$$

Giống như tích phân bội hai, cách thực tế để tính tích phân bội ba là biễu diễn chúng như các tích phân lặp như sau:

Định lí 15.7.2 (Định lí Fubini cho tích phân bội ba)**.** *Nếu f là liên tục trên hình hộp $B = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ thì*

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz.$$

Tích phân lặp bên vế phải của Định lí Fubini nói rằng ta có thể lấy tích phân theo x (giữ y và z cố định), sau đó lấy tích phân theo y (giữ z cố định), và cuối cùng lấy tích phân theo z. Có năm thứ tự khác để lấy tích phân, đều cho cùng một giá trị. Ví dụ, nếu lấy tích phân theo y, sau đó z, và rồi x, ta có

$$\iiint_B f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dz\ dx.$$

Ví dụ 15.7.3. Tính tích phân bội ba $\iiint_B xyz^2\ dV$, với B là hình hộp

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}.$$

Giải. Ta có thể dùng sáu thứ tự khác nhau của tích phân. Nếu ta chọn lấy tích phân theo x, rồi y, rồi z, ta được

$$\begin{aligned}\iiint_B xyz^2\ dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\ dx\ dy\ dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\ dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\ dy\ dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz = \frac{27}{4}.\end{aligned}$$

□

Giờ ta định nghĩa tích phân bội ba trên miền tổng quát E trong không gian ba chiều (một khối) với cùng cách như tích phân bội hai (15.3.2). Ta đặt E vào hộp B theo kiểu trong Phương trình 15.7.1. Sau đó ta định nghĩa F sao cho nó trùng với f trên E nhưng là 0 tại những điểm trong B nằm ngoài E. Theo định nghĩa

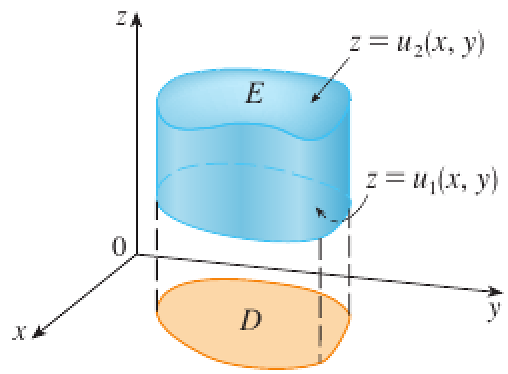
$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \iiint_B F(x,y,z)\ dV.$$

Tích phân này tồn tại nếu f là liên tục và biên của F là "trơn một cách thích hợp". Tích phân bội ba có các tính chất cơ bản như tích phân bội hai (Tính chất 15.3.6, 15.3.7, 15.3.8).

Ta giới hạn lại phạm vi quan tâm vào hàm liên tục f và một số loại miền đơn giản. Một khối E được gọi là thuộc *loại 1* nếu nó nằm giữa đồ thị của hai hàm liên tục của x và y, tức là

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\} \tag{15.7.3}$$

với D là chiếu của E lên mặt phẳng xy như trong Hình 15.7.2.



Hình 15.7.2:

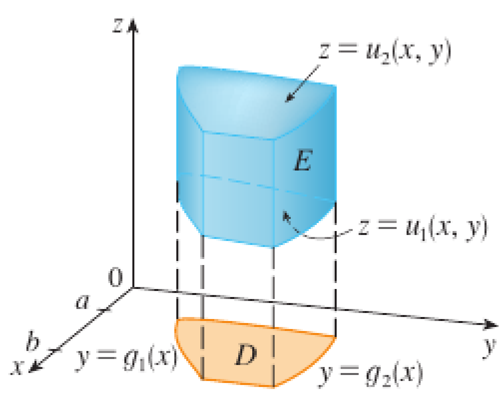
Chú ý rằng biên trên của khối E là mặt có phương trình $z = u_2(x, y)$ trong khi biên dưới là mặt $z = u_1(x, y)$.

Bằng cùng cách lí luận để có 15.3.3, ta có thể chứng tỏ là nếu E là miền loại 1 cho bởi Phương trình 15.7.3 thì

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA. \tag{15.7.4}$$

Ý nghĩa của tích phân bên trong vế phải của phương trình trên là x và y được giữ cố định và vì thế $u_1(x, y)$ và $u_2(x, y)$ được xem là những hằng số, trong khi $f(x, y, z)$ được lấy tích phân theo z.

Đặc biệt, nếu hình chiếu D của E lên mặt phẳng xy là miền phẳng loại 1 (như trong Hình 15.7.3), thì



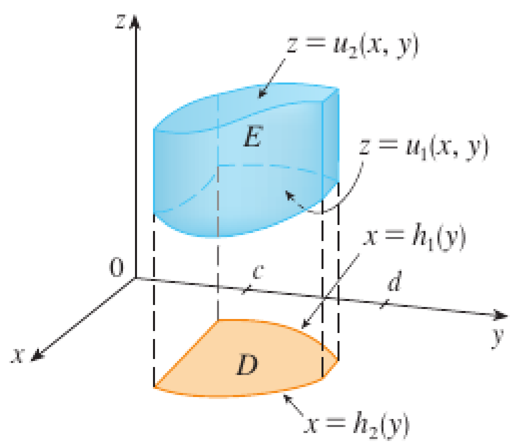
Hình 15.7.3: Một miền khối loại 1 với hình chiếu D là miền phẳng loại 1.

$$E = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

và Phương trình 15.7.4 trở thành

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy\, dz. \qquad (15.7.5)$$

Nếu D là loại 2 (như trong Hình 15.7.2) thì



Hình 15.7.4: Một khối loại 1 với hình chiếu loại 2.

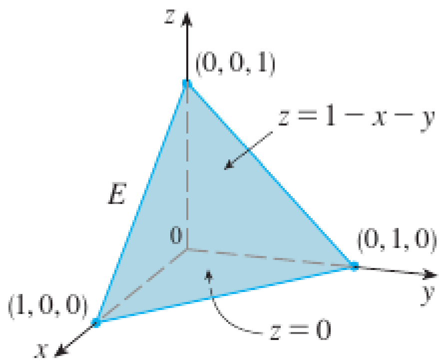
$$E = \{(x, y, z) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y),\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

và Phương trình 15.7.4 trở thành

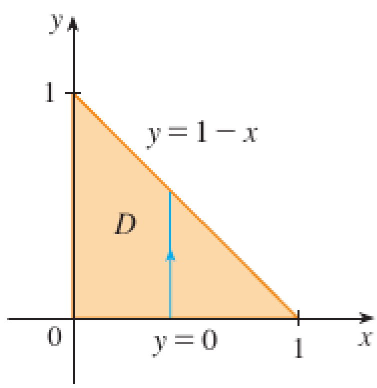
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy. \qquad (15.7.6)$$

Ví dụ 15.7.4. Tính $\iiint_E z\, dV$ với E là khối tứ diện bao bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Giải. Khi thiết lập tích phân bội ba khôn ngoan là vẽ hai sơ đồ: một cho khối E (Hình 15.7.5) và một cho hình chiếu của nó lên mặt phẳng xy (Hình 15.7.6).



Hình 15.7.5:



Hình 15.7.6:

Biên dưới của hình tứ diện là mặt phẳng $z = 0$ và biên trên của tứ diện là mặt phẳng $x + y + z = 1$ (hay $z = 1 - x - y$), vì thế ta dùng $u_1(x, y) = 0$ và $u_2(x, y) = 1 - x - y$ trong Công thức 15.7.5. Chú ý rằng hai mặt phẳng $x + y + z = 1$ và $z = 0$ cắt nhau theo đường thẳng $x + y = 1$ (hay $y = 1 - x$) trong mặt phẳng xy. Do đó chiếu của E là miền tam giác trong Hình 15.7.6, và ta có

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \qquad (15.7.7)$$

Cách miêu tả E như loại 1 này cho phép ta tính tích phân như sau:

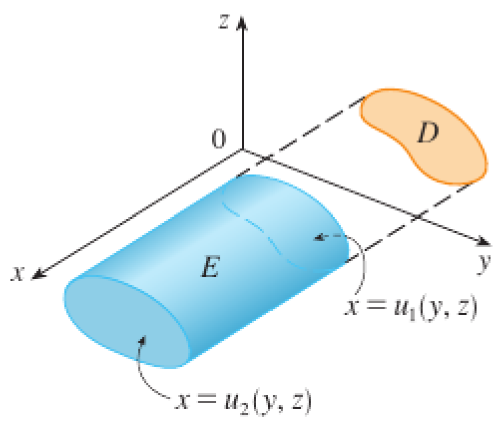
$$\begin{aligned}\iiint_E z\, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

□

Một miền khối E là *loại 2* nếu có dạng

$$E = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D,\ u_1(y,z) \le x \le u_2(y,z)\}$$

với D trong trường hợp này là chiếu của E lên mặt phẳng yz (xem Hình 15.7.7).



Hình 15.7.7:

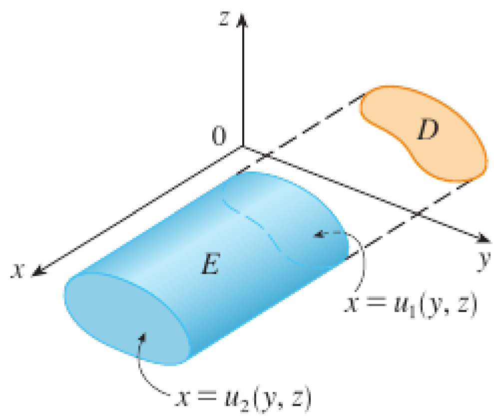
Mặt phía sau là $x = u_1(y,z)$, mặt phía trước là $x = u_2(y,z)$, và ta có

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx\right] dA. \tag{15.7.8}$$

Cuối cùng, một miền loại 3 có dạng

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D,\ u_1(x,z) \le y \le u_2(x,z)\}$$

với D trong trường hợp này là chiếu của E lên mặt phẳng xz (xem Hình 15.7.8).



Hình 15.7.8:

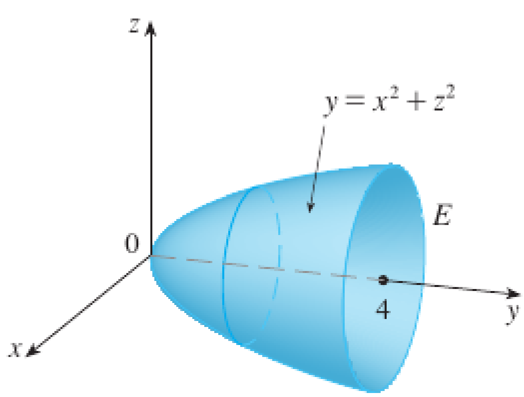
Mặt phía trái là $= u_1(x, z)$, mặt phía phải là $y = u_2(x, z)$, và ta có

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA. \qquad (15.7.9)$$

Trong mỗi Phương trình 15.7.8 và 15.7.9 có thể có hai cách biểu diễn tích phân phụ thuộc việc D là miền phẳng loại 1 hay loại 2 (và tương ứng với Phương trình 15.7.5 và 15.7.6).

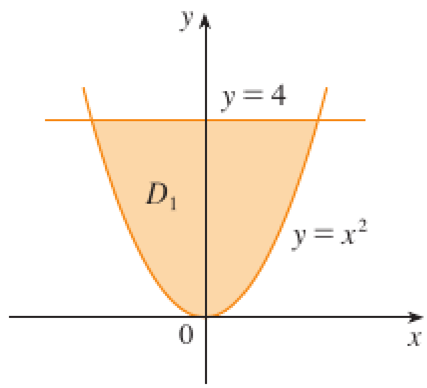
Ví dụ 15.7.5. Tính $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$ với E là miền bao bởi paraboloid $y = x^2 + z^2$ và mặt phẳng $y = 4$.

Giải. Khối E được miêu tả trong Hình 15.7.9.



Hình 15.7.9: Miền lấy tích phân.

Nếu ta coi nó như là miền loại 1 thì ta cần xét hình chiếu D_1 của nó lên mặt phẳng xy, chính là miền trong Hình 15.7.10.



Hình 15.7.10: Hình chiếu lên mặt phẳng xy.

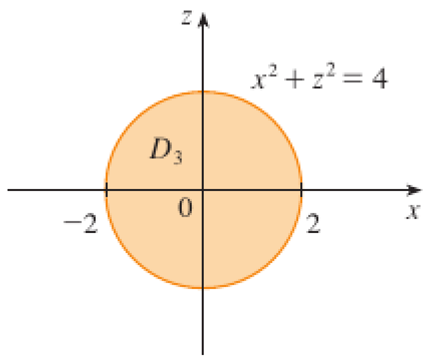
Từ $y = x^2 + z^2$ ta được $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, do đó biên dưới của E là $z = -\sqrt{y - x^2}$ và biên trên là $z = \sqrt{y - x^2}$. Vì thế miêu tả E là miền loại 1 là

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4,\ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\}$$

và như vậy ta được

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx.$$

Mặc dù biểu thức này là đúng, rất khó tính nó. Vậy hãy thay vào đó xét E như miền loại 3. Như thế, hình chiếu D_3 của nó lên mặt phẳng xz là đĩa $x^2 + z^2 \le 4$ trong Hình 15.7.11.



Hình 15.7.11: Hình chiếu lên mặt phẳng xz.

Biên bên trái của E là paraboloid $y = x^2 + z^2$ và biên phải là mặt phẳng $y = 4$, vì thế lấy $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ và $u_2(x, z) = 4$ trong Phương trình 15.7.9, ta được

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\right] dA = \iint_{D_3} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA.$$

Mặc dù tích phân này có thể được viết là

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

nó sẽ dễ hơn nếu ta chuyển sang tọa độ cực trong mặt phẳng xz: $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Ta được

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \frac{128\pi}{15}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 15.7.6. Biễu diễn tích phân lặp $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ như một tích phân bội ba và sau đó viết lại nó như một tích phân lặp theo thứ tự khác, lấy tích phân theo x trước, sau đó theo z, rồi theo y.

Giải. Ta có thể viết

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

với $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq z \leq y\}$. Miêu tả này của E cho phép ta viết hình chiếu lên ba mặt phẳng tọa độ như sau: trên mặt phẳng xy:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\} \\ &= \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{y} \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

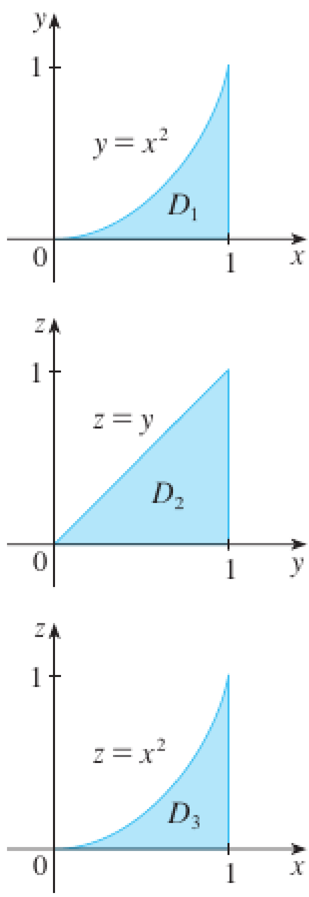
trên mặt phẳng yz:

$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq y\}$$

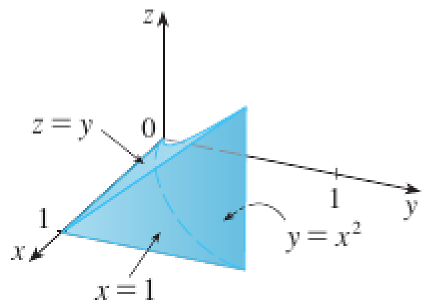
trên mặt phẳng xz:

$$D_3 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2\}.$$

Từ các hình vẽ hình chiếu trong Hình 15.7.12 ta vẽ khối E trong Hình 15.7.13.



Hình 15.7.12: Các hình chiếu của E.



Hình 15.7.13: Khối E.

Ta thấy E được bao bởi các mặt phẳng $z = 0$, $x = 1$, $y = z$ và mặt trụ parabolic $y = x^2$ (hay $x = \sqrt{y}$).

Nếu ta lấy tích phân theo x trước, sau đó z, và sau đó y, ta dùng một miêu tả khác của E:

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq y,\ \sqrt{y} \leq x \leq 1\}.$$

Vì thế

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy.$$

□

Ứng dụng của tích phân bội ba

Nhắc lại rằng nếu $f(x) \geq 0$ thì tích phân đơn $\int_a^b f(x)\, dx$ đại diện cho diện tích bên dưới đường $y = f(x)$ từ a tới b, và nếu $f(x, y) \geq 0$, thì tích phân kép $\iint_D f(x, y)\, dA$ đại diện cho thể tích dưới mặt $z = f(x, y)$ bên trên D. Cách giải thích tương ứng trong trường hợp tích phân bội ba $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$, với $f(x, y, z) \geq 0$, không thật hữu ích, vì nó sẽ là "siêu thể tích" của một vật bốn chiều và dĩ nhiên nó rất khó hình dung. (Nhớ là E chỉ là miền xác định của hàm f; đồ thị của f nằm trong không gian bốn chiều.) Tuy vậy, tích phân bội ba $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ có thể được giải thích theo những cách khác nhau trong những hoàn cảnh vật lí khác nhau, phụ thuộc vào cách giải thích của x, y, z và $f(x, y, z)$.

Hãy bắt đầu với trường hợp đặc biệt khi $f(x, y, z) = 1$ với mọi điểm trong E. Khi đó tích phân bội ba thực sự đại diện cho thể tích của E:

$$V(E) = \iiint_E dV. \tag{15.7.10}$$

Ví dụ, có thể thấy điều này trong trường hợp miền loại 1 bằng cách đặt

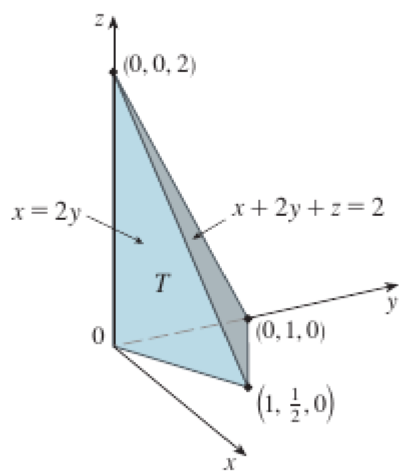
$f(x, y, z) = 1$ trong Công thức 15.7.4:

$$\iiint_E 1\ dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\ dA$$

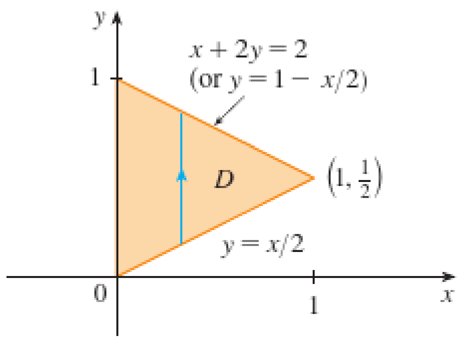
và từ Mục 15.3 ta biết cái này đại diện cho thể tích nằm giữa hai mặt $z = u_1(x, y)$ và $z = u_2(x, y)$.

Ví dụ 15.7.7. Dùng tích phân bội ba để tìm thể tích của khối tứ diện T được bao bởi mặt phẳng $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, và $z = 0$.

Giải. Khối tứ diện T và hình chiếu D của nó lên mặt phẳng xy được vẽ trong Hình 15.7.14 và 15.7.15. Biên dưới của T là mặt phẳng $z = 0$ và biên trên là mặt phẳng $x + 2y + z = 2$, tức là, $z = 2 - x - 2y$.



Hình 15.7.14:



Hình 15.7.15:

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)\, dy\, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

bằng cùng cách tính như trong Ví dụ 15.3.5.

(Chú ý rằng không cần thiết để dùng tích phân bội ba để tính thể tích. Nó chỉ đơn giản là cho một cách khác để thiết lập các tính toán.)

□

Tất cả ứng dụng của tích phân kép trong Mục 15.5 có thể mở rộng ngay cho tích phân bội ba. Để làm ví dụ, nếu hàm mật độ của một khối chiếm miền E là $\rho(x, y, z)$ trong đơn vị khối lượng trên đơn vị thể tích, ở tại mọi điểm (x, y, z), thì *khối lượng* của nó là

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV \tag{15.7.11}$$

và mômen quanh ba mặt phẳng tọa độ là

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z)\, dV \quad M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z)\, dV \quad M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z)\, dV. \tag{15.7.12}$$

Tâm khối lượng nằm ở điểm $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ với

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{15.7.13}$$

Nếu mật độ là hằng, tâm khối lượng của khối được gọi là *tâm* của E. Mômen quán tính quanh ba trục tọa độ là

$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV \quad I_y = \iiint_E (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV \quad I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

Như trong Mục 15.5, *tổng điện tích* trên khối chiếm miền E và có mật độ điện tích $\sigma(x,y,z)$ là

$$Q = \iiint_E \sigma(x,y,z)\,dV.$$

Nếu ta có ba biến ngẫu nhiên liên tục X, Y, Z thì hàm mật độ chung là hàm ba biến sao cho xác suất để (X,Y,Z) nằm trong E là

$$P((X,Y,Z)\in E) = \iiint_E f(x,y,z)\,dV.$$

Đặc biệt,

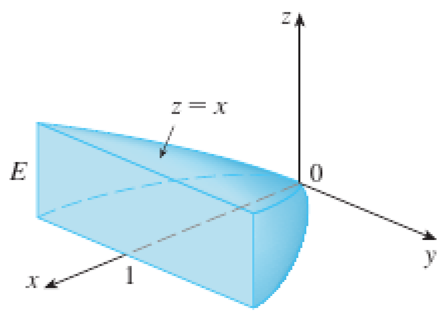
$$P(a\le X\le b, c\le Y\le d, r\le Z\le s) = \int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

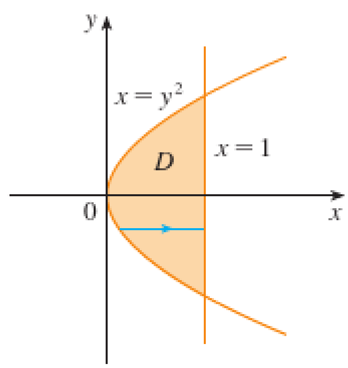
Hàm mật độ chung thỏa

$$f(x,y,z)\ge 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = 1.$$

Ví dụ 15.7.8. Tìm tâm khối lượng của khối với mật độ hằng bao bởi mặt trụ parabolic $x = y^2$ và mặt phẳng $x = z$, $z = 0$, $x = 1$.

Giải. Khối E và hình chiếu của nó lên mặt phẳng xy được vẽ ở Hình 15.7.16.





Hình 15.7.16:

Mặt dưới và mặt trên của E là mặt phẳng $z = 0$ và $z = x$, vậy biểu diễn E là miền loại 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le y \le 1, y^2 \le x \le 1, 0 \le z \le x\}$$

Khi đó nếu hàm mật độ là $\rho(x, y, z) = \rho$ thì khối lượng là

$$m = \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x \rho \, dz \, dx \, dy = \frac{4\rho}{5}.$$

Vì tính đối xứng của E và ρ quanh mặt phẳng xz, ta có thể nói ngay là $M_{xz} = 0$ và do đó $\bar{y} = 0$. Các mômen khác là

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x x\rho \, dz \, dx \, dy = \frac{4\rho}{7}.$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy = \frac{2\rho}{7}.$$

Vậy tâm khối lượng là

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right).$$

□

Bài tập

15.7.1. Tính tích phân trong Ví dụ 15.7.3, lấy tích phân theo y trước, rồi theo z, rồi theo x.

15.7.2. Tính tích phân $\iiint_E (xy + z^2)\, dV$, với

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 3\}$$

dùng ba thứ tự khác nhau của tích phân.

Tính các tích phân lặp.

15.7.3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$.

15.7.4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\, dz\, dy\, dx$.

15.7.5. $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} xe^{-y}\, dy\, dx\, dz$.

15.7.6. $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1}\, dx\, dz\, dy$.

15.7.7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$.

15.7.8. $\int_1^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \sin y\, dy\, dz\, dx$.
Tính tích phân bội ba.

15.7.9. $\iiint_E y\, dV$ với $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x, x - y \le z \le x + y\}$.

15.7.10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$ với $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le 1, 0 \le z \le xy\}$.

15.7.11. $\iiint_E \frac{z}{x^2+z^2}\, dV$ với $E = \{(x, y, z) \mid 1 \le y \le 4, y \le z \le 4, 0 \le x \le z\}$.

15.7.12. $\iiint_E \sin y\, dV$ với E nằm dưới mặt phẳng $z = x$ và trên miền tam giác với đỉnh $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$, $(0, \pi, 0)$.

15.7.13. $\iiint_E 6xy\, dV$ với E được bao bởi mặt phẳng $z = 1 + x + y$ và trên miền trong mặt phẳng xy bao bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

15.7.14. $\iiint_E xy\, dV$ với E được bao bởi mặt trụ parabolic $y = x^2$ và $x = y^2$ và mặt phẳng $z = 0$ và $z = x + y$.

15.7.15. $\iiint_E x^2\, dV$ với T là khối tứ diện với các đỉnh $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

15.7.16. $\iiint_E xyz\, dV$ với T là khối tứ diện với các đỉnh $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$.

15.7.17. $\iiint_E x\, dV$ với E được bao bởi mặt trụ paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ và mặt $x = 4$.

15.7.18. $\iiint_E z\, dV$ với E được bao bởi mặt trụ parabolic $y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $x = 0$, $y = 3x$, và $z = 0$ trong góc phần tám thứ nhất.

Dùng một tích phân bội ba để tìm thể tích của khối.

15.7.19. Khối tứ diện được bao bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $2x + y + z = 4$.

15.7.20. Khối được bao bởi mặt $y = x^2 + z^2$ và $y = 8 - x^2 - z^2$.

15.7.21. Khối được bao bởi mặt $y = x^2$, $z = 0$, và $y + z = 1$.

15.7.22. Khối được bao bởi $x^2 + z^2 = 4$ và $y = -1$ và $y + z = 4$.

15.7.23. (a) Tìm thể tích của miếng hình nêm trong góc phần tám thứ nhất được cắt bởi mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$ và mặt $y = x$ và $x = 1$ bằng tích phân bội ba.

(b) Dùng bảng tích phân hoặc hệ đại số máy tính để tìm giá trị đúng của tích phân bội trong phần (a).

15.7.24. (a) Trong Luật điểm giữa cho tích phân bội ba ta dùng một tổng Riemann để xấp xỉ tích phân trên một hộp B, với $f(x, y, z)$ được tính ở tâm $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ của hộp B_{ijk}. Dùng Luật điểm giữa để ước lượng $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, với B là một hình hộp xác định bởi $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 4$. Chia B thành tám hình hộp con có cùng kích thước.

(b) Dùng một hệ đại số máy tính để xấp xỉ tích phân trong phần (a) đúng tới số nguyên gần nhất. So sánh với kết quả ở phần (a).

Dùng Luật điểm giữa cho tích phân bội ba (Bài tập 15.7.24) để ước lượng giá trị của tích phân. Chia B thành tám hình hộp con có cùng kích thước.

15.7.25. $\iiint_B \cos(xyz)\, dV$ với $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.

15.7.26. $\iiint_B \sqrt{x} e^{xyz}\, dV$ với $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 2\}$.

$\iiint_B \cos(xyz)\, dV$ với $B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$.
Vẽ khối mà thể tích được cho bởi tích phân.

15.7.27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$.

15.7.28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$.

Biểu diễn tích phân $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ như một tích phân lặp theo sáu cách khác nhau, với E là khối được bao bởi mặt đã cho.

15.7.29. $y = 4 - x^2 - 4z^2$, $y = 0$.

15.7.30. $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$, $x = 2$.

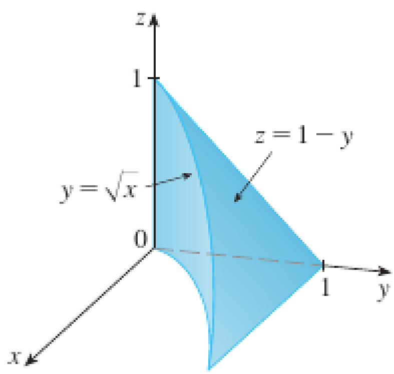
15.7.31. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$.

15.7.32. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$.

15.7.33. Hình sau cho miền lấy tích phân của

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

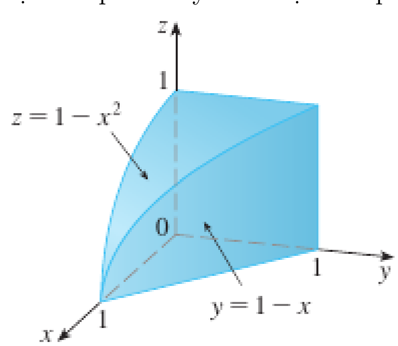
Hãy viết lại tích phân này như một tích phân lặp theo năm thứ tự khác.



15.7.34. Hình sau cho miền lấy tích phân của

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx.$$

Hãy viết lại tích phân này như một tích phân lặp theo năm thứ tự khác.



Viết năm tích phân khác bằng tích phân lặp đã cho.

15.7.35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy$.

15.7.36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$.

15.7.37. Tính tích phân bội bằng cách chỉ dùng giải thích hình học và đối xứng.

15.7.38. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\, dV$, với C là miền trụ $x^2 + y^2 \le 4$, $-2 \le z \le 2$.

15.7.39. $\iiint_B (z^3 + \sin y + 3)\, dV$, với B là quả cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

Tìm khối lượng và tâm khối lượng của khối E với hàm mật độ được cho.

15.7.40. E là khối trong Bài tập 15.7.13; $\rho(x, y, z) = 2$.

15.7.41. E là khối được bao bởi $z = 1 - y^2$ và mặt $x + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$.

15.7.42. E là khối được bao bởi $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

15.7.43. E là khối được bao bởi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$.

Giả sử khối có mật độ hằng k.

15.7.44. Tìm mômen quán tính của khối với kích thước mỗi chiều L nếu một đỉnh nằm ở gốc tọa độ và ba cạnh nằm trên ba trục tọa độ.

15.7.45. Tìm mômen quán tính của viên gạch hình hộp với kích thước các chiều a, b, c và khối lượng M nếu tâm của viên gạch nằm ở gốc tọa độ và các cạnh song song với ba trục tọa độ.

15.7.46. Tìm mômen quán tính quanh trục z của khối $x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

Thiết lập, nhưng đừng tính biểu thức cho (a) khối lượng, (b) tâm khối lượng, (c) mômen quán tính quanh trục z.

15.7.47. Khối trong Bài tập 15.7.21, $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

15.7.48. Nửa khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$, $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

15.7.49. Cho E là khối trong góc phần tám thứ nhất bao bởi mặt trụ $x^2+y^2 = 1$ và mặt phẳng $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ với hàm mật độ $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Dùng một hệ đại số máy tính để tìm giá trị đúng của những đại lượng sau cho E.

(a) Khối lượng.

(b) Tâm khối lượng.

(c) Mômen quán tính quanh trục z.

15.7.50. Cho E là khối trong Bài tập 15.7.18 với hàm mật độ $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Dùng một hệ đại số máy tính để tìm giá trị đúng của những đại lượng sau cho E.

(a) Khối lượng.

(b) Tâm khối lượng.

(c) Mômen quán tính quanh trục z.

15.7.51. Hàm mật độ chung của các biến ngẫu nhiên X, Y, và Z là $f(x,y,z) = Cxyz$ nếu $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$, và $f(x,y,z) = 0$ nếu khác.

(a) Tìm giá trị của hằng số C.

(b) Tìm $P(X \le 1, Y \le 1, Z \le 1)$.

(c) Tìm $P(X + Y + Z \le 1)$.

15.7.52. Hàm mật độ chung của các biến ngẫu nhiên X, Y, và Z là $f(x,y,z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$ nếu $0 \le x$, $0 \le y$, $0 \le z$, và $f(x,y,z) = 0$ nếu khác.

(a) Tìm giá trị của hằng số C.

(b) Tìm $P(X \le 1, Y \le 1)$.

(c) Tìm $P(X \le 1, Y \le 1, Z \le 1)$.

Giá trị trung bình của hàm $f(x,y,z)$ trên khối E được xác định là $f_{\text{ave}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x,y,z)\, dV$ với $V(E)$ là thể tích của E. Ví dụ, nếu ρ là hàm mật độ thì ρ_{ave} là mật độ trung bình của E.

15.7.53. Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x,y,z) = xyz$ trên hình hộp với cạnh L nằm trong góc phần tám thứ nhất với một đỉnh ở gốc tọa độ và cạnh song song với trục tọa độ.

15.7.54. Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x,y,z) = x^2z + y^2z$ trên miền bao bởi $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng $z = 0$.

15.7.55. (a) Tìm miền E sao cho tích phân

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

là cực đại.

(b) Dùng một hệ đại số máy tính để tính chính xác giá trị cực đại này.

Đề tài khám phá: Thể tích siêu mặt cầu

Trong đề tài này ta tìm công thức cho thể tích bao bởi siêu mặt cầu trong không gian n chiều.

(a) Dùng tích phân kép và phép thế lượng giác, cùng với bảng tích phân, tìm diện tích của hình tròn bán kính r.

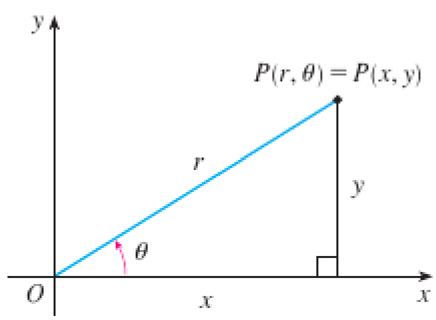
(b) Dùng một tích phân bội ba và phép thế lượng giác để tìm thể tích của quả cầu bán kính r.

(c) Dùng tích phân bội bốn để tìm siêu thể tích bao bởi siêu mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ trong $\mathbb{R}^4$. (Chỉ dùng phép thế lượng giác và công thức truy hồi cho $\int \sin^n x\, dx$ hoặc $\int \cos^n x\, dx$.)

(d) Dùng tích phân bội n để tìm thể tích được bao bởi siêu mặt bán kính r trong không gian $\mathbb{R}^n$. [Gợi ý: công thức cho n chẵn và n lẻ là khác nhau.]

15.8 Tích phân bội trong hệ tọa độ trụ

Trong hình học phẳng tọa độ cực đươc dùng để cho miêu tả đơn giản một số đường và miền. (Xem Mục 10.3). Hình 15.8.1 nhắc ta quan hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Decartes. Nếu điểm P có tọa độ Decartes là (x, y) và tọa độ cực (r, θ) thì theo hình



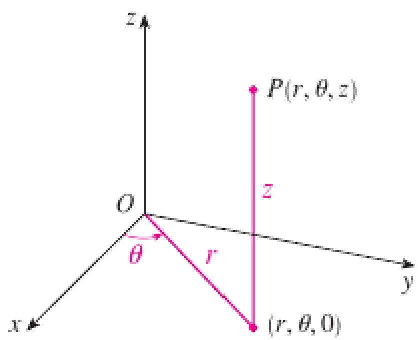
Hình 15.8.1:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Trong không gian ba chiều có một hệ tọa độ, gọi là *tọa độ trụ*, tương tự tọa độ cực và cho một miêu tả thuận tiện cho một số mặt và khối thường gặp. Như ta sẽ thấy, một số tích phân bội ba sẽ dễ tính hơn trong tọa độ trụ.

Tọa độ trụ

Trong hệ tọa độ trụ, một điểm P trong không gian ba chiều được đại diện bởi bộ ba có thứ tự (r, θ, z), với r và θ là tọa độ cực của hình chiếu của điểm P lên mặt phẳng xy và z là khoảng cách có hướng từ mặt phẳng xy tới P. (Xem Hình 15.8.2.)



Hình 15.8.2: Tọa độ trụ của một điểm.

Để chuyển đổi từ tọa độ trụ sang tọa độ chữ nhật ta dùng phương trình

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z \tag{15.8.1}$$

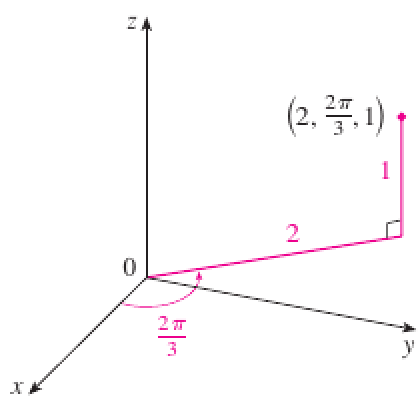
trong khi để đổi từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ trụ ta dùng

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z \tag{15.8.2}$$

Ví dụ 15.8.1. (a) Vẽ điểm với tọa độ trụ $(2, 2\pi/3, 1)$ và tìm tọa độ chữ nhật.

(b) Tìm tọa độ trụ của điểm với tọa độ chữ nhật $(3, -3, -7)$.

Giải. (a) Điểm với tọa độ trụ $(2, 2\pi/3, 1)$ được vẽ trong Hình 15.8.3.



Hình 15.8.3:

Từ Phương trình 15.8.1, các tọa độ chữ nhật của nó là

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$$
$$z = 1$$

Vậy điểm là $(-1, \sqrt{3}, 1)$ trong tọa độ chữ nhật.

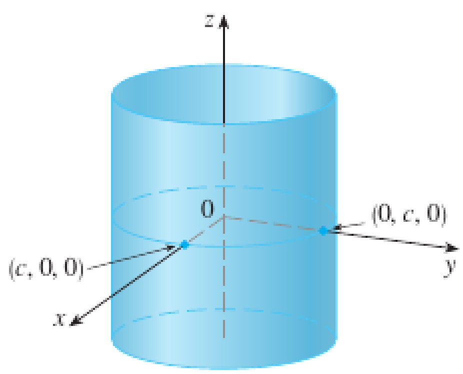
(b) Từ Phương trình 15.8.2 ta có

$$r = 3\sqrt{2}$$
$$\tan\theta = -1, \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$
$$z = -7$$

Vì thế một bộ tọa độ trụ là $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Một bộ khác là $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Như với tọa độ cực, có vô hạn cách chọn.

□

Tọa độ trụ là hữu ích trong các bài toán liên quan tới sự đối xứng quanh một trục, và trục z được chọn để trùng với trục đối xứng. Ví dụ, trục của mặt trụ tròn với tọa độ Decartes $x^2 + y^2 = c^2$ là trục z. Trong tọa độ trụ mặt trụ này có phương trình rất đơn giản $r = c$. (Xem Hình 15.8.4.) Đây là lí do cho tên gọi tọa độ "trụ".



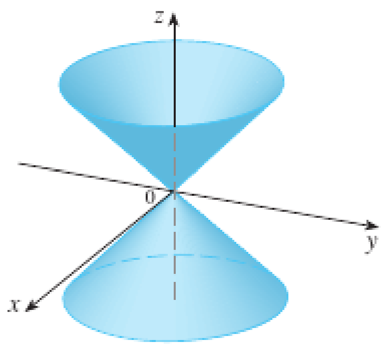
Hình 15.8.4: $r = c$, một hình trụ.

Ví dụ 15.8.2. Miêu tả mặt có phương trình tọa độ trụ là $z = r$.

Giải. Phương trình nói rằng giá trị z, tức chiều cao, của mỗi điểm trên mặt bằng với r, khoản cách từ điểm tới trục z. Vì θ không xuất hiện, nó có thể thay đổi. Như vậy bất kì một vết nằm ngang nào trên mặt $z = k$ $(k > 0)$ là một đường tròn với bán kính k. Những vết này gợi ý mặt là mặt nón. Dự đoán này được khẳng định nếu chuyển phương trình sang tọa độ chữ nhật. Từ Phương trình đầu trong 15.8.2 ta được

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2.$$

Ta nhận ra phương trình $z^2 = x^2 = y^2$ là một mặt nón tròn với trục là trục z (xem Hình 15.8.5).



Hình 15.8.5: $z = r$, một mặt nón.

$\square$

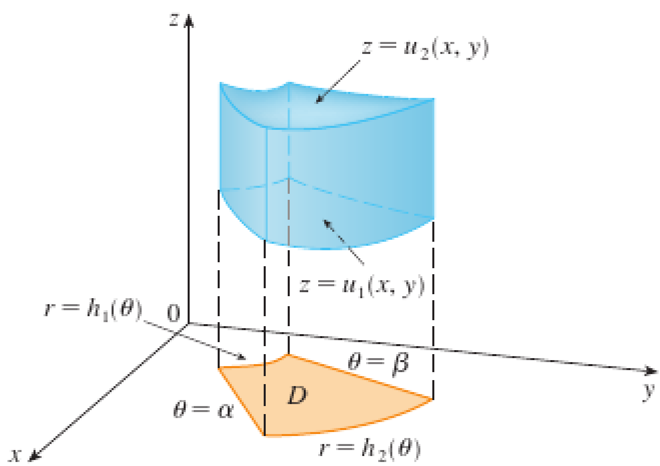
Tính tích phân trong tọa độ trụ

Giả sử E là miền loại 1 với hình chiếu D xuống mặt phẳng xy được miêu tả thuận tiện trong tọa độ cực (xem Hình 15.8.6). Đặc biệt, giả sử f là liên tục và

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

với D được cho trong tọa độ cực bởi

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}.$$



Hình 15.8.6:

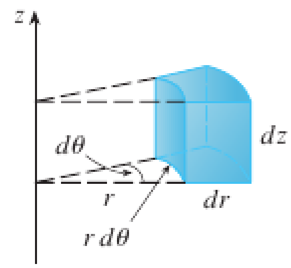
Ta biết trong Phương trình 15.7.4 rằng

$$\iiint_E f(x,y,z)\ dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right]\ dA. \tag{15.8.3}$$

Nhưng ta cũng biết cách tính tích phân bội hai trong tọa độ cực. Thực vậy, kết hợp Phương trình 15.8.3 với 15.4.3 ta được

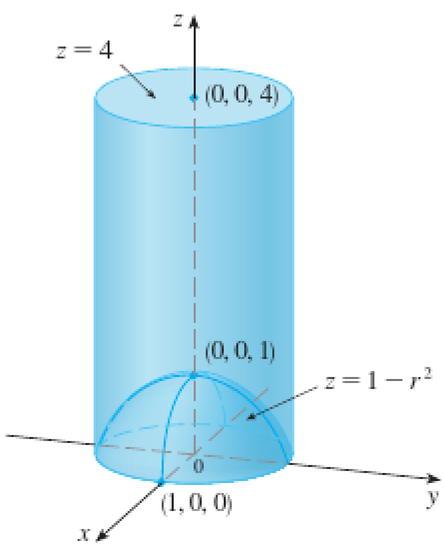
$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \left[\int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\ dz\right] dr\, d\theta. \tag{15.8.4}$$

Công thức 15.8.4 là *công thức cho tích phân bội ba trong tọa độ trụ*. Nó nói rằng ta chuyển đổi một tích phân bội ba từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ trụ bằng cách viết $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, để yên z, dùng cận tích phân thích hợp cho z, r, và θ, và thay dV bởi $r\ dzdrd\theta$. (Hình chỉ cách nhớ điều này.) Đáng dùng công thức này khi E là khối được miêu tả dễ dàng trong tọa độ trụ và đặc biệt khi $f(x,y,z)$ dùng biểu thức $x^2 + y^2$.



Hình 15.8.7: Phần tử thể tích trong tọa độ trụ: $dV = r\ dzdrd\theta$.

Ví dụ 15.8.3. Một khối E nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=1$ bên dưới mặt phẳng $z=4$, bên trên mặt $z=1-x^2-y^2$. (Xem Hình). Mật độ tại mọi điểm tỉ lệ với khoảng cách tới trục của mặt trụ. Tính khối lượng của E.



Hình 15.8.8:

Giải. Trong tọa độ trụ mặt trụ là $r=1$ và paraboloid là $z=1-r^2$, vì thế ta có thể viết

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 1, 1-r^2 \le z \le 4\}.$$

Vì mật độ tại (x, y, z) là tỉ lệ với khoảng cách tới trục z, mật độ của hàm là

$$f(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2} = Kr$$

với K là một hằng số tỉ lệ. Vì thế theo Công thức 15.7.11 khối lượng của E là

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2+y^2}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (Kr)r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \frac{12\pi K}{5}. \end{aligned}$$

□

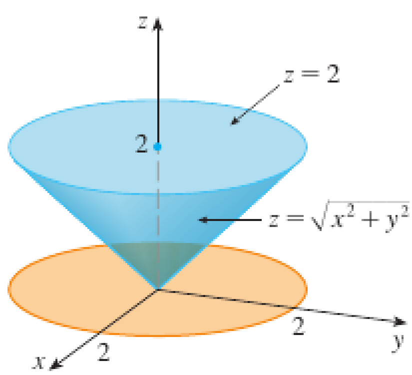
Ví dụ 15.8.4. Tính $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$.

Giải. Tích phân lặp này là tích phân bội ba trên khối

$$E = \{(x,y,z) \mid -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$$

và chiếu của E lên mặt phẳng xy là đĩa $x^2+y^2 \le 4$. Mặt bên dưới của E là nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ và mặt bên trên là $z = 2$. (Xem Hình 15.8.9.) Miền này có một biểu diễn đơn giản hơn nhiều trong tọa độ trụ:

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r \le z \le 2\}.$$



Hình 15.8.9:

Vì thế ta có

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx &= \iiint_E (x^2+y^2)\, dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

□

Bài tập

Vẽ điểm mà tọa độ trụ được cho. Sau đó tìm tọa độ chữ nhật của điểm.

15.8.1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

15.8.2. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

Đổi từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ trụ.

15.8.3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$

15.8.4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

Miêu tả bằng từ mặt với phương trình được cho.

15.8.5. $\theta = \pi/4$

15.8.6. $r = 5$

Xác định mặt có phương trình được cho.

15.8.7. $z = 4 - r^2$

15.8.8. $2r^2 + z^2 = 1$

Viết phương trình trong tọa độ trụ.

15.8.9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

15.8.10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$
Vẽ khối cho bởi các bất đẳng thức.

15.8.11. $0 \le r \le 2$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le z \le 1$.

15.8.12. $0 \le \theta \le \pi/2$, $r \le z \le 2$.

15.8.13. Một cái ống hình trụ có chiều dài 20 cm với bán kính trong 6 cm và bán kính ngoài 7 cm. Viết bất đẳng thức miêu tả ống trong một hệ tọa độ thích hợp. Giải thích cách đặt hệ tọa độ tương ứng với ống.

15.8.14. Vẽ khối được bao bởi $z = x^2 + y^2$ và $z = 5 - x^2 - y^2$.
Vẽ khối có thể tích cho bởi tích phân và tính tích phân.

15.8.15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{t^2} r \; dz \; dr \; d\theta$.

15.8.16. $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^t r \; dz \; d\theta \; dr$.

Dùng tọa độ trụ.

15.8.17. Tính $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} \; dV$, với E là miền nằm giữa mặt trụ $x^2 + y^2 = 16$ và giữa các mặt phẳng $z = -5$ và $z = 4$.

15.8.18. Tính $\iiint_E z\, dV$, với E là miền nằm giữa mặt $z = x^2 + y^2$ và giữa mặt phẳng $z = 4$.

15.8.19. Tính $\iiint_E (x + y + z)\, dV$, với E là miền nằm trong góc phần tám thứ nhất và nằm dưới mặt $z = 4 - x^2 - y^2$.

15.8.20. Tính $\iiint_E x\; dV$, với E là miền được bao bởi các mặt $z = 0$, $z = x + y + 5$, mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và $x^2 + y^2 = 9$.

15.8.21. Tính $\iiint_E x^2\; dV$, với E là miền được bao bởi các mặt $x^2 + y^2 = 1$, trên mặt $z = 0$, dưới mặt nón $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

15.8.22. Tính thể tích của khối nằm trong cả mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

15.8.23. Tính thể tích của khối nằm được bao bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

15.8.24. Tính thể tích của khối nằm giữa mặt trụ $z = x^2 + y^2$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

15.8.25. (a) Tính thể tích của khối E bao bởi mặt $z = x^2 + y^2$ và mặt $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

(b) Tìm tâm của E (tâm khối lượng trong trường hợp mật độ hằng).

15.8.26. (a) Tính thể tích của khối mà mặt trụ $r = a\cos\theta$ cắt ra từ mặt cầu bán kính a tâm tại gốc tọa độ.

(b) Minh họa khối ở câu (a) bằng cách vẽ mặt cầu và mặt trụ trên cùng một màn hình.

15.8.27. Tìm khối lượng và tâm khối lượng của khối S được bao bởi mặt $z = 4x^2 + 4y^2$ và mặt $z = a$ $(a > 0)$ nếu S có mật độ hằng K.

15.8.28. Tìm khối lượng của quả cầu B cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ nếu mật độ tại mọi điểm là tỉ lệ với khoảng cách tới trục z.

Tính tích phân bằng cách chuyển sang tọa độ trụ.

15.8.29. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\; dz\; dx\; dy.$

15.8.30. $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2}\; dz\; dy\; dx.$

15.8.31. Khi nghiên cứu sự hình thành của các rặng núi, các nhà địa lí đánh giá lượng công để nâng một ngọn núi lên từ mực nước biển. Hãy xem một ngọn núi có hình cơ bản là một món tròn vuông góc. Giả sử mật độ trọng lượng của vật chất gần điểm P là $g(P)$ và cao độ là $h(P)$.

(a) Tìm một tích phân xác định để đại diện cho tổng công để hình thành nên ngọn núi.

(b) Giả sử rằng núi Phú Sĩ ở Nhật Bản có hình một nón tròn vuông góc với bán kính 62000 ft, chiều cao 12400 ft, và mật độ hằng 200 lb/ft^3. Bao nhiêu công đã được làm để tạo nên núi Phú Sĩ nếu ban đầu đất nằm ở mặt nước

biển?

Đề tài thí nghiệm: Giao của ba mặt trụ

Hình dưới cho thấy khối được bao bởi ba mặt trụ tròn với cùng đường kính cắt nhau theo góc vuông. Trong đề tài này ta sẽ tính thể tích của nó và xác định hình dạng thay đổi như thế nào nếu mặt trụ có đường kính khác nhau.

(a) Vẽ cẩn thận khối được bao bởi ba mặt $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$, $y^2+z^2=1$. Chỉ ra vị trí các trục tọa độ và ghi nhãn các mặt với các phương trình của các mặt trụ.

(b) Tìm thể tích của khối trên.

(c) Dùng một hệ đại số máy tính để vẽ các cạnh của khối.

(d) Điều gì sẽ xảy ra đối với khối trên nếu bán kính của mặt trụ thứ nhất khác 1? Minh họa với hình vẽ tay hay bằng máy tính.

(e) Nếu mặt trụ thứ nhất là $x^2+y^2=a^2$ với $a<1$ hãy thiết lập, nhưng đừng tính, một tích phân kép để tính thể tích của khối. Nếu $a>1$ thì sao?

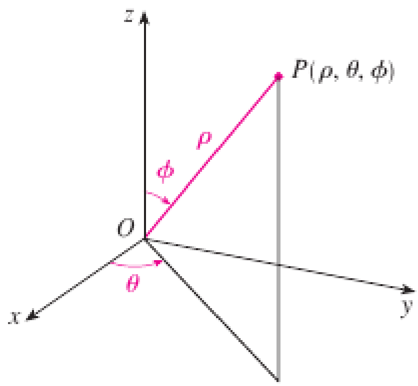
15.9 Tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Một hệ tọa độ hữu ích nữa trong không gian ba chiều là *hệ tọa độ cầu*. Nó làm đơn giản hoá các tích phân bội ba trên miền bao bởi các mặt cầu hay mặt nón.

Tọa độ cầu

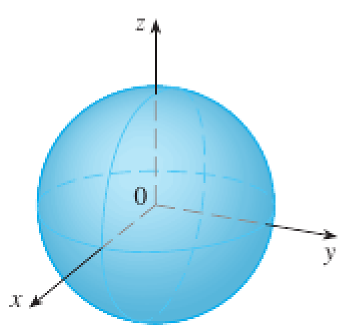
Hệ tọa độ cầu (ρ, θ, ϕ) của một điểm P trong không gian được vẽ trong Hình 15.9.1, ở đó $\rho = |OP|$ là khoảng cách từ gốc tới P, θ là cùng gốc như trong tọa độ trụ, và ϕ là góc giữa trục z dương và đoạn thẳng OP. Chú ý rằng

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

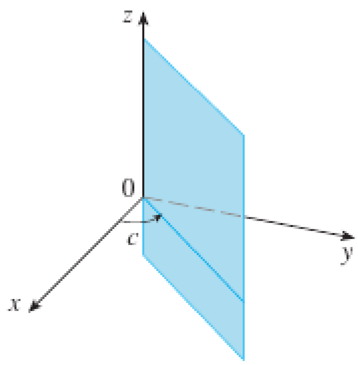


Hình 15.9.1: Tọa độ cầu của một điểm.

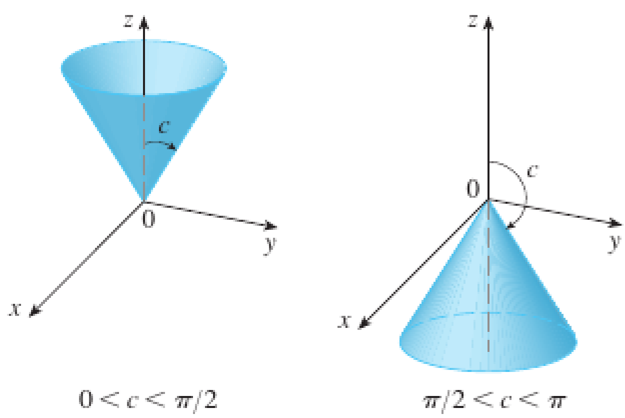
Tọa độ cầu đặc biệt hữu ích trong các bài toán có sự đối xứng quanh một điểm, và gốc tọa độ được đặt tại điểm này. Ví dụ, mặt cầu với tâm ở gốc tọa độ và bán kính c có phương trình đơn giản là $\rho = c$ (xem Hình 15.9.2); đây là lí do cho tên tọa độ "cầu". Đồ thị của phương trình $\theta = c$ là một nửa mặt phẳng thẳng đứng (xem Hình 15.9.3), và phương trình $\phi = c$ biểu diễn một nửa nón nhận trục z làm trục (xem Hình 15.9.4).



Hình 15.9.2: $\rho = c$, một mặt cầu.



Hình 15.9.3: $\theta = c$, một nửa mặt phẳng.

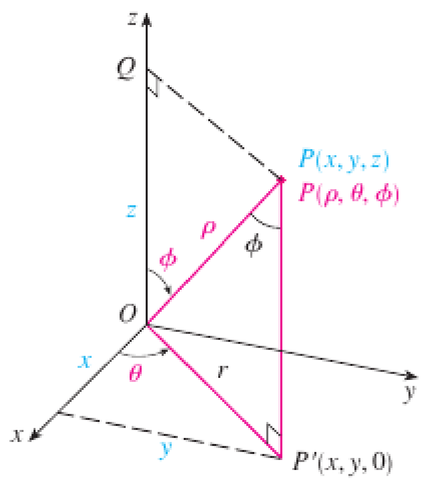


Hình 15.9.4: $\phi = c$, một nửa nón.

Quan hệ giữa tọa độ chữ nhật và tọa độ cầu có thể được thấy từ Hình 15.9.5. Từ tam giác OPQ và OPP' ta có

$$z = \rho\cos\phi$$

$$r = \rho\sin\phi$$



Hình 15.9.5:

Nhưng $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, do đó để chuyển từ tọa độ cầu sang tọa độ chữ nhật ta dùng phương trình

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi. \tag{15.9.1}$$

Công thức khoảng cách cho

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{15.9.2}$$

Ta dùng phương trình này để chuyển từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cầu.

Ghi chú. Không có một thống nhất chung về kí hiệu cho tọa độ cầu. Đa số sách vật lí đảo ngược ý nghĩa của θ và ϕ và dùng r thay vì ρ.

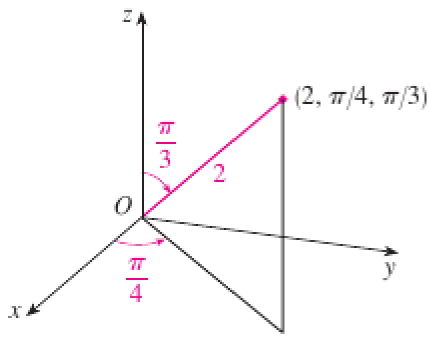
Ví dụ 15.9.1. Điểm $(2, \pi/4, \pi/3)$ được cho trong tọa độ cầu. Hãy chấm điểm này và tìm tọa độ chữ nhật của nó.

Giải. Ta chấm điểm này trong Hình 15.9.6. Từ Phương trình 15.9.1 ta có

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$x = \rho\cos\phi = 1.$$



Hình 15.9.6:

Vậy điểm $(2, \pi/4, \pi/3)$ là $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ trong tọa độ chữ nhật.

□

Ví dụ 15.9.2. Điểm $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ được cho trong tọa độ chữ nhật. Tìm tọa độ cầu của điểm này.

Giải. Từ Phương trình 15.9.2 ta có

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$$

và như vậy Phương trình 15.9.1 cho

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Chú ý rằng $\theta \neq 3\pi/2$ vì $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Vì thế tọa độ cầu của điểm đã cho là $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

□

Tính tích phân bội ba với tọa độ cầu

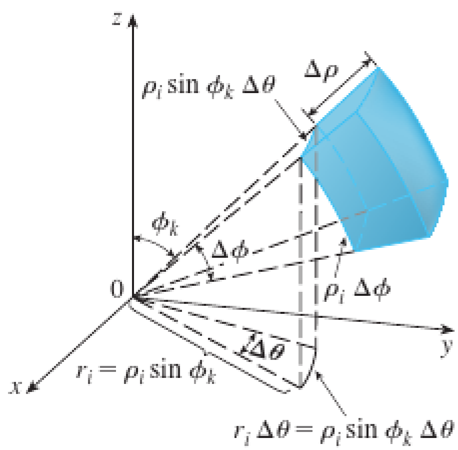
Trong tọa độ cầu cái tương ứng với hộp chữ nhật là mảnh nêm cầu

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

với $a \geq 0$ và $\beta - \alpha \leq 2\pi$, và $d - c \leq \pi$. Mặc dù ta định nghĩa tích phân bội ba bằng cách chia khối thành các hộp nhỏ, có thể chứng tỏ chia khối thành các mảnh nêm cầu luôn cho cùng kết quả. Vậy ta chia E thành các mảnh nêm nhỏ hơn E_{ijk} bằng các mặt cầu cách đều $\rho = \rho_i$, nửa mặt phẳng $\theta = \theta_j$, và nửa nón $\phi = \phi_k$. Hình 15.9.7 cho thấy E_{ijk} xấp xỉ bằng một khối chữ nhật với kích thước $\Delta\rho$, $\rho_i\Delta\phi$ (cung của đường tròn với bán kính ρ_i, góc $\Delta\phi$), và $\rho_i \sin\phi_k \Delta\theta$

(cung đường tròn với bán kính $\rho_i \sin \phi_k$, góc $\Delta\theta$). Vậy một xấp xỉ cho thể tích của E_{ijk} được cho bởi

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \Delta\phi)(\rho_i \sin \phi_k \Delta\theta) = \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi.$$



Hình 15.9.7:

Thực ra có thể chỉ ra, với sự hỗ trợ của Định lí giá trị trung bình, rằng thể tích của E_{ijk} được cho bởi

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

với $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ là một điểm nào đó trong E_{ijk}. Cho $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ là các tọa độ chữ nhật của điểm này. Khi đó

$$\begin{aligned}\iiint_E f(x,y,z)\, dV &= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V_{ijk} \\ &= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \sin \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i^2 \cos \tilde{\phi}_k)\tilde{\rho}_i^2 \sin \tilde{\phi}_k \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi.\end{aligned}$$

Nhưng đây chính là tổng Riemann của hàm

$$F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi.$$

Hệ quả là ta được *công thức tích phân bội ba trong tọa độ cầu*

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi \tag{15.9.3}$$

với E là mảnh nêm cầu được cho bởi

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}.$$

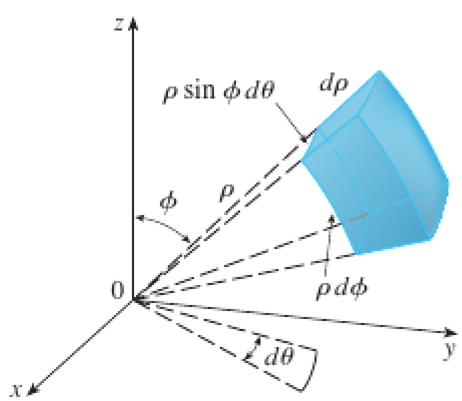
Phương trình 15.9.3 nói rằng ta chuyển một tích phân bội ba từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cầu bằng cách viết

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

dùng cận thích hợp cho tích phân, và thay dV bởi $\rho^2 \sin\phi \; d\rho d\theta d\phi$. Điều này được minh họa trong Hình 15.9.8.



Hình 15.9.8: Phần tử thể tích trong tọa độ trụ: $dV = \rho^2 \sin\phi \; d\rho d\theta d\phi$.

Công thức này có thể được mở rộng cho những miền cầu tổng quát hơn như

$$E = \{(\rho, \phi, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\}.$$

Trong trường hợp này công thức giống như trong 15.9.3 trừ cận của tích phân của ρ là $g_1(\theta, \phi)$ và $g_2(\theta, \phi)$.

Thường tọa độ cầu được dùng trong tích phân bội khi các mặt như nón hay mặt cầu tạo nên biên của miền lấy tích phân.

Ví dụ 15.9.3. Tính $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, với B là quả cầu đơn vị

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Giải. Vì biên của B là một mặt cầu, ta dùng tọa độ cầu:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi\}$$

Hơn nữa, tọa độ cầu là thích hợp vì

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Phương trình 15.9.3 cho

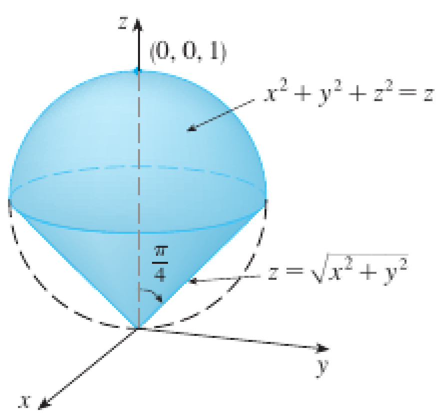
$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin\phi\ d\rho d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi(e-1).$$

□

Chú ý. Nếu tính tích phân trong ví dụ trên không dùng tọa độ cầu sẽ rất bất tiện. Trong tọa độ chữ nhật tích phân lặp sẽ là

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dz\ dy\ dx.$$

Ví dụ 15.9.4. Dùng tọa độ cầu để tìm thể tích của khối bên trên mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Xem Hình 15.9.9.)



Hình 15.9.9:

Giải. Chú ý rằng mặt cầu đi qua gốc tọa độ và có tâm $(0, 0, \frac{1}{2})$. Ta viết phương trình của mặt cầu trong tọa độ cầu như sau

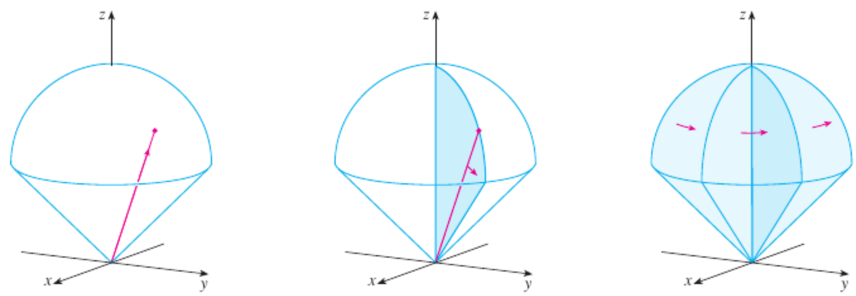
$$\rho^2 = \rho\cos\phi$$

hay $\rho = \cos\phi$. Phương trình mặt nón có thể được viết là

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le \cos\phi\}$$

Hình 15.9.10 vẽ cách E được quét ra nếu ta lấy tích phân trước hết theo ρ, rồi ϕ, rồi θ. Thể tích của E là

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \; d\rho d\phi d\theta \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$



Hình 15.9.10:

□

Bài tập

Chấm điểm có tọa độ cầu được cho. Sau đó tìm tọa độ chữ nhật của điểm.

15.9.1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$.

15.9.2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$.

Chuyển từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cầu.

15.9.3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$.

15.9.4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$.

Miêu tả bằng từ mặt với phương trình đã cho.

15.9.5. $\phi = \pi/3$

15.9.6. $\rho = 3$

Nhận dạng mặt với phương trình đã cho.

15.9.7. $\rho = \sin\theta \sin\phi$.

15.9.8. $\rho^2(\sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi) = 9$.

Viết phương trình trong tọa độ cầu.

15.9.9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$.

15.9.10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$.

Phác họa khối được cho bởi bất đẳng thức.

15.9.11. $2 \le \rho \le 4$, $0 \le \phi \le \pi/3$, $0 \le \theta \le \pi$.

15.9.12. $1 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$.

15.9.13. $\rho \le 1$, $3\pi/4 \le \phi \le \pi$.

15.9.14. $\rho \le 2$, $\rho \le \csc\phi$.

15.9.15. Một khối nằm trên nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Viết miêu tả khối theo các bất đẳng thức dùng tọa độ cầu.

15.9.16. (a) Tìm các bất đẳng thức miêu tả một quả cầu rỗng với đường kính 30 cm và độ dày 0.5 cm. Giải thích hệ trục tọa độ đã được chọn như thế nào.

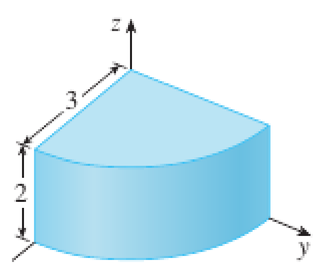
(b) Giả sử quả cầu bị cắt làm đôi. Viết bất đẳng thức để miêu tả một trong hai nửa.

Vẽ khối mà thể tích được cho bởi tích phân và tính tích phân.

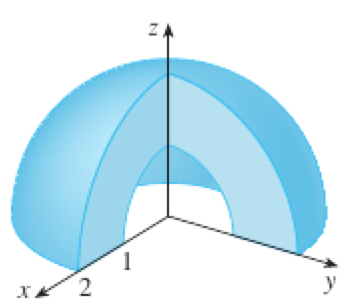
15.9.17. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi$.

15.9.18. $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta$.

Thiết lập tích phân bội ba của một hàm liên tục bất kì $f(x, y, z)$ trong tọa độ trụ hay cầu trên khối đã cho.



15.9.19.



15.9.20.
Dùng tọa độ cầu.

15.9.21. Tính $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2\, dV$, với B là quả cầu gốc tại gốc tọa độ và bán kính 5.

15.9.22. Tính $\iiint_H (9-x^2-y^2)\, dV$, với H là nửa quả cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

15.9.23. Tính $\iiint_E (x^2+y^2)\, dV$, với E nằm giữa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ và $x^2+y^2+z^2=9$.

15.9.24. Tính $\iiint_E y^2\, dV$, với E là nửa quả cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $y \geq 0$.

15.9.25. Tính $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\, dV$, với E là phần quả cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

15.9.26. Tính $\iiint_E xyz\, dV$, với E nằm giữa mặt cầu $\rho=2$ và $\rho=4$ và bên trên mặt nón $\pi=\pi/3$.

15.9.27. Tìm thể tích của phần quả cầu $\rho \leq a$ nằm giữa mặt nón $\phi=\pi/6$ và $\phi=\pi/3$.

15.9.28. Tìm khoảng cách trung bình từ một điểm trong quả cầu bán kính a tới tâm của nó.

15.9.29. (a) Tìm thể tích của khối nằm trên nón $\phi=\pi/3$ và dưới mặt cầu $\rho=4\cos\phi$.

(b) Tìm tâm của khối trên.

15.9.30. Tìm thể tích của khối nằm dưới mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$, ở trên mặt phẳng xy, và dưới mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

15.9.31. (a) Tìm tâm của khối trong Ví dụ 15.9.4.

(b) Tìm mômen quán tính quanh trục z của khối này.

15.9.32. Cho H là nửa khối cầu với bán kính a với mật độ tại mọi điểm tỉ lệ với khoảng cách tới tâm của đáy.

(a) Tìm khối lượng của H.

(b) Tìm tâm khối lượng của H.

(c) Tìm mômen quán tính của H quanh trục.

15.9.33. (a) Tìm tâm của nửa khối cầu đồng chất bán kính a.

(b) Tìm mômen quán tính của khối trên quanh một đường kính của đáy.

15.9.34. Tìm khối lượng và tâm khối lượng của nửa khối cầu đồng chất bán kính a nếu mật độ tại mọi điểm là tỉ lệ với khoảng cách tới đáy.

Dùng tọa độ cầu hay trụ, tùy cái nào có vẻ thích hợp hơn.

15.9.35. Tìm thể tích và tâm của khối E nằm trên nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và bên dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

15.9.36. Tìm thể tích của mảnh nêm nhỏ hơn cắt từ mặt cầu bán kính a bằng hai mặt phẳng gặp nhau một góc $\pi/6$.

15.9.37. Tính $\iiint_E z\, dV$ với E nằm trên mặt $z = x^2 + y^2$ và dưới mặt $z = 2y$. Dùng bảng tích phân hoặc máy tính để tính tích phân.

15.9.38. (a) Tính thể tích của mặt xuyến $\rho = \sin\phi$. (b) Dùng máy tính vẽ mặt xuyến.

Tính tích phân bằng cách chuyển qua tọa độ cầu.

15.9.39. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\, dz\, dy\, dx$.

15.9.40. $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3)\, dz\, dx\, dy$.

15.9.41. $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$.

15.9.42. Một mô hình cho mật độ δ của khí quyển Trái đất gần bề mặt là

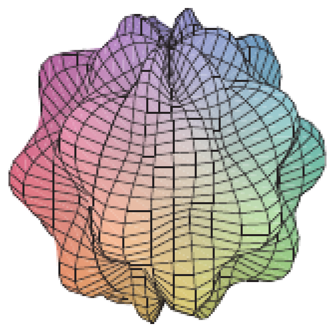
$$\delta = 619.09 - 0.000097\rho$$

với ρ (khoảng cách từ tâm Trái đất) được đo bằng mét và δ được đo bằng kilogram trên mét khối. Nếu ta coi bề mặt Trái đất là một mặt cầu với bán kính 6370 km thì đây là một mô hình hợp lí với $6.370 \times 10^6 \le \rho \le 6.375 \times 10^6$. Dùng mô hình này để ước lượng khối lượng khí quyển giữa mặt đất và cao độ 5 km.

15.9.43. Dùng máy tính vẽ một ống gồm một mặt trụ bán kính 3 và chiều cao 10 được đậy lại bằng hai nửa mặt cầu.

15.9.44. Kinh độ và vĩ độ của một một điểm P trên Bắc bán cầu liên hệ với tọa độ cầu ρ, θ, ϕ như sau. Ta lấy gốc tọa độ là tâm Trái đất và trục z dương đi qua Cực bắc. Trục x dương đi qua điểm kinh tuyến gốc (kinh tuyến đi qua Greenwich, Anh) cắt xích đạo. Khi đó vĩ độ của P là $\alpha = 90° - \phi°$ và kinh độ là $\beta = 360° - \theta°$. Tìm khoảng cách dọc theo đường tròn lớn từ Los Angeles (vĩ độ $34,06°$ bắc, kinh độ $118,25°$ tây) tới Montréal (vĩ độ $45,50°$ bắc, kinh độ $73,60°$ tây). Lấy bán kính của Trái đất là 3960 dặm. (Một đường tròn lớn là đường tròn giao điểm của mặt cầu và một mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu.)

15.9.45. Mặt $\rho = 1 + \frac{1}{5}\sin m\theta \sin n\phi$ đã được dùng làm mô hình cho khối u. "Mặt cầu lồi lõm" này với $m = 6$ và $n = 5$ được vẽ trong hình. Hãy dùng một hệ đại số máy tính để tìm thể tích mà nó bao.



15.9.46. Chứng tỏ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi.$$

(Tích phân suy rộng trên được định nghĩa là giới hạn của một tích phân bội ba trên một khối cầu khi bán kính của khối tăng ra vô hạn.)

15.9.47. (a) Dùng tọa độ trụ để chứng tỏ thể tích của khối bao bởi mặt cầu $r^2+z^2=a^2$ và dưới mặt nón $z=r\cot\phi_0$ (hoặc $\phi=\phi_0$), với $0<\phi_0<\pi/2$ là

$$V=\frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\phi_0).$$

(b) Suy ra rằng thể tích của mảnh nêm cầu cho bởi $\rho_1\le\rho\le\rho_2$, $\theta_1\le\theta\le\theta_2$, $\phi_1\le\phi\le\phi_2$ là

$$\Delta V=\frac{\rho_2^3-\rho_1^3}{3}(\cos\phi_1-\cos\phi_2)(\theta_2-\theta_1).$$

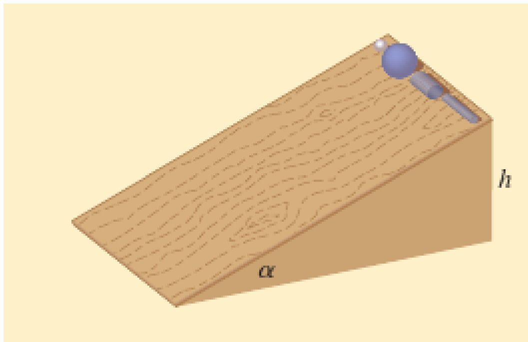
(c) Dùng Định lí giá trị trung bình để chứng tỏ rằng thể tích trong phần (b) có thể được viết là

$$\Delta V=\tilde{\rho}^2\sin\tilde{\phi}\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$$

với $\tilde{\rho}$ nằm giữa ρ_1 và ρ_2, $\tilde{\phi}$ nằm giữa ϕ_1 và ϕ_2, $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$, $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$, và $\Delta\phi=\phi_2-\phi_1$.

Đề tài ứng dụng: Trượt đua

Giả sử rằng một quả bóng đầy (đá cẩm thạch), một quả bóng rỗng, một khối trụ (một thanh thép), và một ống trụ rỗng (một ống chì) lăn xuống dốc. Cái nào trong số các vật này đạt tới đáy đầu tiên? (Hãy đoán trước khi tiếp tục.)



Để trả lời câu hỏi này, chúng ta xem xét một quả bóng hoặc hình trụ khối lượng m, bán kính r, và mômen quán tính I (quanh trục quay). Nếu chiều cao thả xuống là h, thì thế năng ở đỉnh là mgh. Giả sử vật đạt đến đáy với vận tốc v và vận tốc góc ω, thì $v = \omega r$. Động năng ở đáy bao gồm hai phần: $\frac{1}{2}mv^2$ từ tịnh tiến (di chuyển xuống dốc) và $\frac{1}{2}I\omega^2$ từ quay. Nếu chúng ta giả định rằng sự mất mát năng lượng từ ma sát lăn là không đáng kể, thì sự bảo toàn năng lượng cho

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

(a) Chứng tỏ

$$v^2 = \frac{2gh}{1+I^*}$$

với $I^* = \frac{I}{mr^2}$.

(b) Nếu $y(t)$ là chiều cao di chuyển được ở thời điểm t, thì cùng lí luận như trên cho $v^2 = \frac{2gy}{1+I^*}$ ở mọi thời điểm t. Dùng điều này để chứng tỏ y thỏa phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+I^*}}\,(\sin\alpha)\,\sqrt{y}$$

với α là góc nghiêng của mặt phẳng.

(c) Bằng cách giải phương trình trên, chứng tỏ tổng thời gian di chuyển là

$$T = \sqrt{\frac{2h(1+I^*)}{g\sin^2\alpha}}$$

Điều này chứng tỏ vật với giá trị I^* nhỏ nhất sẽ thắng cuộc đua.

(d) Chứng tỏ $I^* = \frac{1}{2}$ cho khối trụ đặc và $I^* = 1$ cho ống trụ rỗng.

(e) Tính I^* cho một quả cầu rỗng một phần với bán kính trong a và bán kính ngoài r. Cho đáp án theo $b = a/r$. Điều gì sẽ xảy ra khi $a \to \infty$ và $a \to r$?

(f) Chứng tỏ $I^* = \frac{2}{5}$ cho khối cầu đặc và $I^* = \frac{2}{3}$ cho quả cầu rỗng. Vậy các vật tới đích theo thứ tự sau: quả cầu đặc, khối trụ đặc, quả cầu rỗng, ống trụ rỗng.

15.10 Đổi biến trong tích phân bội

Trong giải tích hàm một biến ta thường dùng phép đổi biến (một phép thế) để đơn giản hóa một tích phân. Bằng cách đổi vai trò của x và u ta có thể viết công thức thế như sau:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(g(u)g'(u)\ du \tag{15.10.1}$$

với $x = g(u)$ và $a = g(c)$, $b = g(d)$. Một cách khác để viết công thức 15.10.1 là như sau:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(x(u)\frac{dx}{du}\ du \tag{15.10.2}$$

Một phép đổi biến cũng có thể hữu ích trong tích phân bội. Ta đã thấy một ví dụ của điều này: đổi biến sang tọa độ cực. Các biến mới r và θ liên hệ với biến cũ x và y theo công thức

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

và công thức đổi biến 15.4.2 có thể được viết là

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ drd\theta$$

với S là miền trong mặt phẳng $r\theta$ tương ứng với miền R trong mặt phẳng xy.

Tổng quát hơn, ta xét một phép đổi biến cho bởi một *phép biến đổi* T từ mặt phẳng uv sang mặt phẳng xy:

$$T(u,v) = (x,y)$$

với x và y liên hệ với u và v qua phương trình

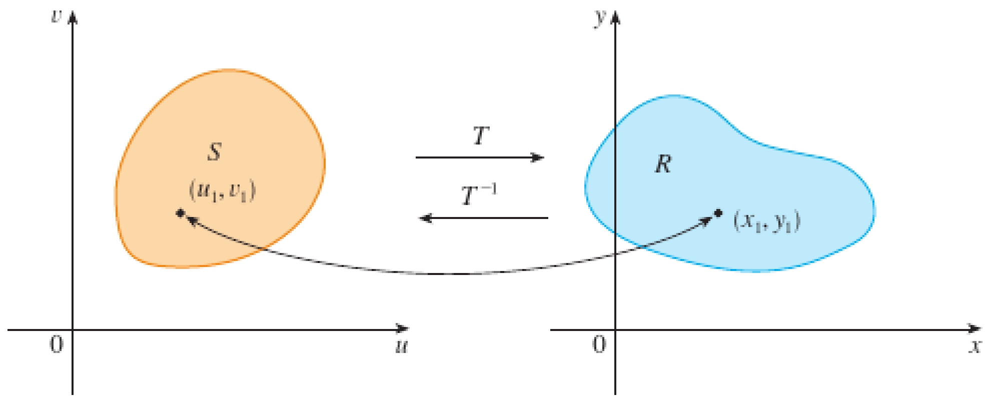
$$x = g(u,v) \qquad y = h(u,v) \tag{15.10.3}$$

hoặc, như ta thường viết

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v).$$

Ta thường giả sử T là một *phép biến đổi* C^1, nghĩa là g và h có các đạo hàm riêng bậc 1 liên tục.

Một phép biến đổi T chẳng qua là một hàm mà cả miền xác định lẫn tập ảnh là tập con của $\mathbb{R}^2$. Nếu $T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$ thì điểm (x_1,y_1) được gọi là *ảnh* của điểm (u_1,v_1). Nếu không có hai điểm nào có cùng ảnh thì ta nói T là *một-tới-một*. Hình 15.10.1 minh họa tác động của phép biến đổi T lên một miền S trong mặt phẳng uv. T biến S thành miền R trong mặt phẳng xy gọi là *ảnh* của S, gồm ảnh của tất cả các điểm của S.



Hình 15.10.1:

Nếu T là phép biến đổi một-tới-một thì nó có một phép biến đổi ngược T^{-1} từ mặt phẳng xy tới mặt phẳng uv và có thể xảy ra là Phương trình 15.10.3 giải được u và v theo x và y:

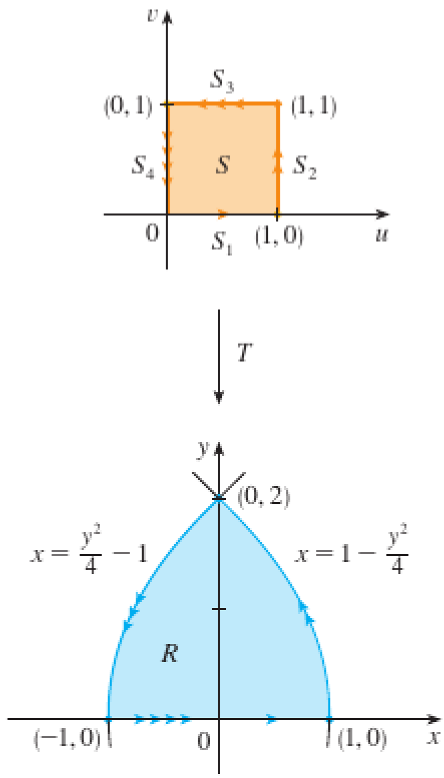
$$u = G(x, y), \qquad v = H(x, y).$$

Ví dụ 15.10.1. Một phép biến đổi được cho bởi phương trình

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv.$$

Tìm ảnh của hình vuông $S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$.

Giải. Phép biến đổi mang biên của S thành biên của ảnh. Vậy ta bắt đầu bằng cách tìm ảnh của các cạnh của S. Cạnh thứ nhất, S_1, được cho bởi $v = 0$ $(0 \le u \le 1)$. (Xem Hình 15.10.2.)



Hình 15.10.2:

Từ phương trình đã cho ta có $x = u^2$, $y = 0$, và như vậy $0 \le x \le 1$. Vậy S_1 được chiếu lên đoạn thẳng từ $(0, 0)$ tới $(1, 0)$ trong mặt phẳng xy. Cạnh thứ hai, S_2, là $u = 1$ $(0 \le v \le 1)$ và, đặt $u = 1$ trong phương trình đã cho, ta được

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v.$$

Khử v, ta được

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \le x \le 1 \tag{15.10.4}$$

là một phần của một parabol. Tương tự, S_3 được cho bởi $v = 1$ $(0 \le u \le 1)$ có ảnh là cung parabol

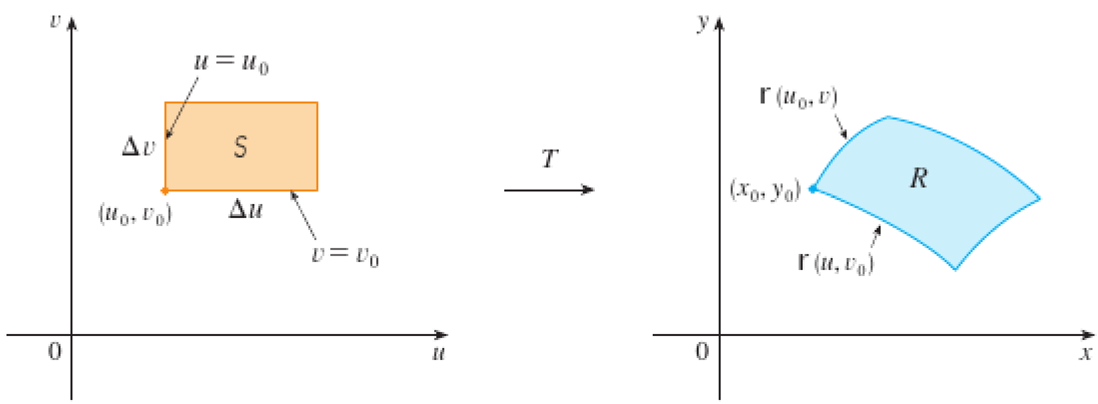
$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \le x \le 0 \tag{15.10.5}$$

Cuối cùng, S_4 được cho bởi $u = 0$ $(0 \le v \le 1)$ có ảnh là $x = -v^2$, $y = 0$, tức là $-1 \le x \le 0$. (Chú ý rằng do ta đi dọc hình vuông theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, ta đi dọc miền parabol theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.) Ảnh của

S là miền R (minh họa trong Hình 15.10.2) được bao bởi trục x và parabol cho bởi Phương trình 15.10.4 và 15.10.5.

□

Bây giờ ta hãy xem một phép đổi biến làm ảnh hưởng như thế nào tới tích phân bội. Ta bắt đầu với một hình chữ nhật nhỏ S trong mặt phẳng uv với góc trái bên dưới là điểm (u_0, v_0) và kích thước là Δu và Δv. (Xem Hình 15.10.3.)



Hình 15.10.3:

Ảnh của S là miền R trong mặt phẳng xy, một trong các điểm biên là $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. Vectơ

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\mathbf{i} + h(u, v)\mathbf{j}$$

là véctơ vị trí của ảnh của điểm (u, v). Phương trình của cạnh dưới của S là $v = v_0$, với đường ảnh được bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(u, v_0)$. Véctơ tiếp xúc với đường ảnh này tại (x_0, y_0) là

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j}.$$

Tương tự, vectơ tiếp xúc tại (x_0, y_0) với đường cong ảnh của cạnh trái của S (cụ thể là $u = u_0$) là

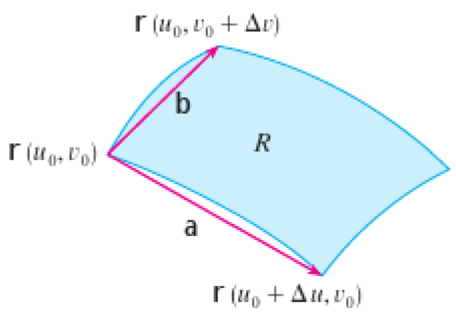
$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}.$$

Ta có thể xấp xỉ miền ảnh $R = T(S)$ bằng một hình bình hành xác định bởi véctơ cát tuyến

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

vẽ trong Hình 15.10.4.



Hình 15.10.4:

Nhưng

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

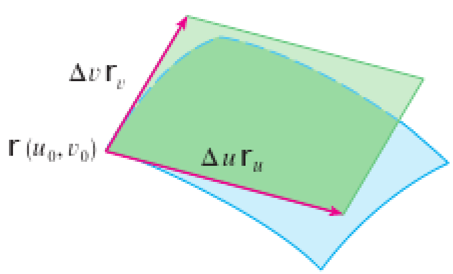
và như vậy

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u \mathbf{r}_u.$$

Tương tự

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v \mathbf{r}_v.$$

Điều này có nghĩa ta có thể xấp xỉ R bằng một hình bình hành được xác định bởi $\Delta u \mathbf{r}_u$ và $\Delta v \mathbf{r}_v$. (Xem Hình 15.10.5.)



Hình 15.10.5:

Vì thế ta có thể xấp xỉ diện tích của R bằng diện tích của hình bình hành này, mà theo Mục 12.4 là

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u) \times (\Delta v \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v \tag{15.10.6}$$

Tính tích có hướng, ta được

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Định thức xuất hiện trong công thức này được gọi là Jacobi của phép biến đổi và được viết bằng một kí hiệu riêng.[3]

Định nghĩa 15.10.2. Jacobi của phép biến đổi T cho bởi $x = g(u,v)$ và $y = h(u,v)$ là

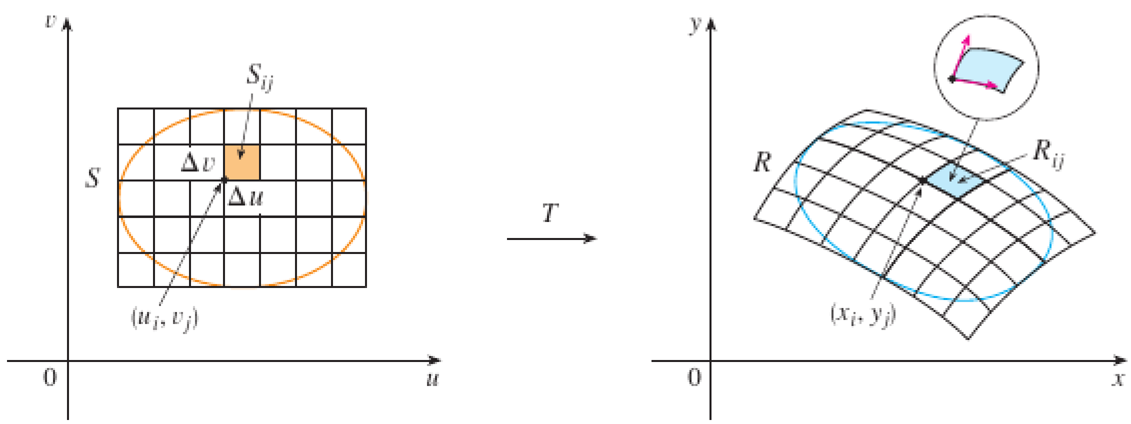
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Với kí hiệu này ta có thể dùng Phương trình 15.10.6 để cho một xấp xỉ cho diện tích ΔA của R:

$$\Delta A \approx \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \tag{15.10.7}$$

với Jacobi được tính ở (u_0, v_0).

Tiếp đến ta chia miền S trong mặt phẳng uv thành các hình chữ nhật S_{ij} và gọi là R_{ij} là ảnh của chúng trong mặt phẳng xy. (Xem Hình 15.10.6.)



Hình 15.10.6:

Áp dụng xấp xỉ 15.10.7 vào mỗi R_{ij} ta xấp xỉ tích phân kép của f trên R như sau:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\,dA &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta A \\ &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(g(u_i,v_j), h(u_i,v_j)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

[3]Jacobi được đặt theo tên của nhà toán học Đức Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Mặc dù nhà toán học Pháp Cauchy là người đầu tiên dùng những định thức đặc biệt dùng đạo hàm riêng này, Jacobi đã phát triển chúng thành một phương pháp để tính tích phân bội.

với Jacobi được tính tại (u_i, v_j). Chú ý rằng tổng trên chính là một tổng Riemann của tích phân

$$\iint_S f(g(u,v), h(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dudv.$$

Lí luận trên gợi ý rằng định lí sau là đúng. (Một chứng minh đầy đủ có trong sách về Giải tích nâng cao.)

Định lí 15.10.3 (Đổi biến trong tích phân bội hai)**.** *Giả sử rằng T là một phép biến đổi C^1 với Jacobi khác không và mang một miền S trong mặt phẳng uv lên một miền R trong mặt phẳng xy. Giả sử rằng f là liên tục trên R và rằng R và S là miền phẳng loại 1 hoặc loại 2. Cũng giả sử rằng T là một-tới-một, có thể trừ ra trên biên của S. Khi đó*

$$\iint_R f(x,y) \, dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dudv.$$

Định lí 15.10.3 nói rằng ta chuyển một tích phân theo x và y sang một tích phân theo u và v bằng cách biểu diễn x và y theo u và v và viết

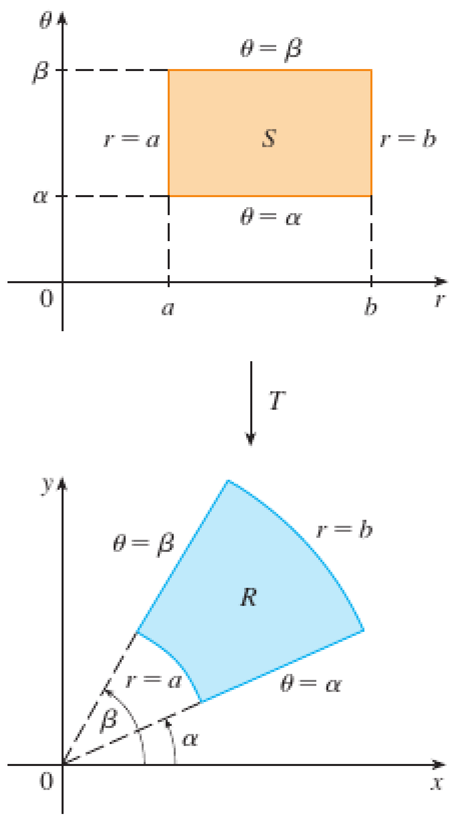
$$dA = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, dudv.$$

Chú ý sự tương tự giữa Định lí 15.10.3 và công thức một chiều trong Phương trình 15.10.2. Thay vì đạo hàm dx/du, ta có giá trị tuyệt đối của Jacobi, tức là $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|$.

Như một minh họa đầu tiên cho Định lí 15.10.3, ta chứng tỏ công thức tích phân trong tọa độ cực chỉ là một trường hợp riêng. Ở đây phép biến đổi T từ mặt phẳng $r\theta$ sang mặt phẳng xy được cho bởi

$$x = g(r,\theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r,\theta) = r\sin\theta$$

và hình học của phép biến đổi này được miêu tả trong Hình 15.10.7.



Hình 15.10.7: Phép biến đổi tọa độ cực.

T mang một hình chữ nhật bình thường trong mặt phẳng $r\theta$ sang một hình chữ nhật cực trong mặt phẳng xy. Jacobi của T là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0.$$

Do đó Định lí 15.10.3 cho

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\ dxdy &= \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right|\ drd\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ drd\theta \end{aligned}$$

chính là Công thức 15.4.2.

Ví dụ 15.10.4. Dùng phép đổi biến $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ để tính tích phân $\iint_R y\,dA$, với R là miền được bao bởi trục x và parabol $y^2 = 4-4x$ và $y^2 = 4+4x$, $y \geq 0$.

Giải. Miền R được vẽ trong Hình 15.10.2. Trong Ví dụ 15.10.1 ta phát hiện ra rằng $T(S) = R$, với S là hình vuông $[0,1] \times [0,1]$. Thật vậy, lí do để đổi biến để tính tích phân đó là S là một miền đơn giản hơn R nhiều. Trước hết ta cần tính Jacobi:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0.$$

Do đó theo Định lí 15.10.3,

$$\iint_R y\, dA = \iint_S 2uv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\, dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2+v^2)\, du\, dv = 2.$$

□

Chú ý. Ví dụ trên không phải là bài toán quá khó để giải vì ta đã được cho một phép đổi biến thích hợp. Nếu ta không được cho một phép biến đổi như vậy thì việc đầu tiên là nghĩ tới một phép đổi biến thích hợp. Nếu khó lấy tích phân $f(x,y)$ thì dạng của $f(x,y)$ có thể gợi ý một phép biến đổi. Nếu miền lấy tích phân R là bất tiện thì phép biến đổi cần được chọn sao cho miền tương ứng S trong mặt phẳng uv có một miêu tả thuận tiện.

Ví dụ 15.10.5. Tính tích phân $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA$, với R là miền hình thang với đỉnh $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, và $(0,-1)$.

Giải. Vì không dễ lấy tích phân $e^{(x+y)/(x-y)}$, dạng của hàm này gợi ý ta cách đổi biến:

$$u = x + y \qquad v = x - y. \tag{15.10.8}$$

Các phương trình này xác định một phép biến đổi T^{-1} từ mặt phẳng xy tới mặt phẳng uv. Định lí 15.10.3 nói về một phép biến đổi T từ mặt phẳng uv tới mặt phẳng xy. Nó nhận được bằng cách giải Phương trình 15.10.8 lấy x và y:

$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad y = \frac{1}{2}(u-v). \tag{15.10.9}$$

Jacobi của T là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

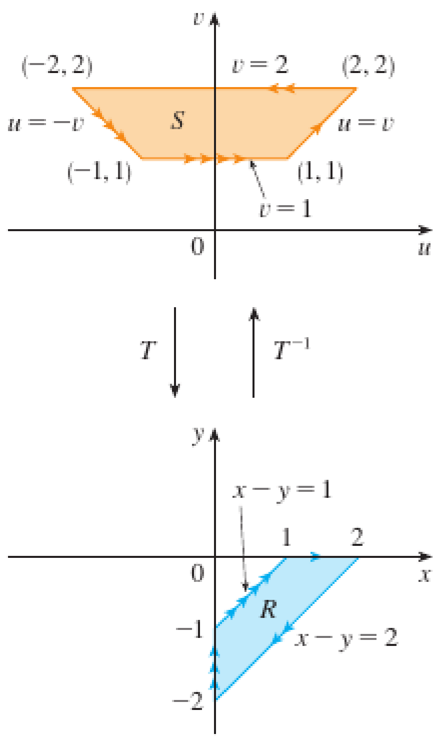
Để tìm miền S trong mặt phẳng uv tương ứng với R, ta chú ý rằng cạnh của R nằm trên đường thẳng

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

và, từ Phương trình 15.10.8 và Phương trình 15.10.9, đường ảnh trong mặt phẳng uv là

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1.$$

Vậy miền S là miền hình thang với đỉnh $(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$, và $(-1,1)$ trong Hình 15.10.8.



Hình 15.10.8:

Vì

$$S = \{(u,v) \mid 1 \le v \le 2, -v \le u \le v\}$$

Định lí 15.10.3 cho

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA &= \iint_S e^{u/v} \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right| du\, dv \\
&= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[v e^{u/v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv \\
&= \frac{3}{4}(e - e^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Tích phân bội ba

Có một công thức đổi biến tương tự cho tích phân bội ba. Cho T là một phép biến đổi mang một miền S trong không gian uvw lên một miền R trong không gian xyz bằng các phương trình

$$x = g(u, v, w) \quad y = h(u, v, w) \quad z = k(u, v, w).$$

Jacobi của T là ma trận 3×3 sau:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{15.10.10}$$

Dưới các giả thiết tương tự như trong Định lí 15.10.3, ta được công thức sau cho tích phân bội ba:

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), x(u, v, w), x(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw. \tag{15.10.11}$$

Ví dụ 15.10.6. Dùng Phương trình 15.10.11 để tìm công thức cho tích phân bội ba trong tọa độ cầu.

Giải. Ở đây phép đổi biến được cho bởi

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta \quad x = \rho \cos\phi.$$

Ta tính Jacobi như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\ &= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \sin\phi. \end{aligned}$$

Vì $0 \le \phi \le \pi$ ta có $\sin\phi \ge 0$. Vì thế

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = |-\rho^2 \sin\phi| = \rho^2 \sin\phi$$

và Công thức 15.10.11 cho

$$\iiint_R f(x, y, z)\ dV = \iiint_S f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi,$$

tương đương với Công thức 15.9.3.

□

Bài tập

Tìm Jacobi của phép biến đổi.

15.10.1. $x = 5u - v$, $y = u + 3v$.

15.10.2. $x = uv$, $y = u/v$.

15.10.3. $x = e^{-t}\sin\theta$, $y = e^{t}\cos\theta$.

15.10.4. $x = e^{s+t}$, $y = e^{s-t}$.

15.10.5. $x = u/v$, $y = v/w$, $z = w/u$.

15.10.6. $x = v + w^2$, $y = w + u^2$, $z = u + v^2$.

Tìm ảnh của tập S qua phép biến đổi.

15.10.7. $S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\}$; $x = 2u + 3v$, $y = u - v$.

15.10.8. S là hình vuông bao bởi các đường $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$, $x = v$, $y = u(1 + v^2)$.

15.10.9. S là hình tam giác bao với các đỉnh $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $x = u^2$, $y = v$.

15.10.10. S là đĩa được cho bởi $u^2 + v^2 \le 1$, $x = au$, $y = bv$.

Một miền R trong mặt phẳng xy được cho. Tìm phương trình cho một phép biến đổi T mang một hình chữ nhật S trong mặt phẳng uv lên R, với cạnh của S song song với trục tọa độ.

15.10.11. R được bao bởi $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$, $y = 1 - x$, $y = 3 - x$.

15.10.12. R là hình bình hành với các đỉnh $(0, 0)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$, $(-2, 1)$.

15.10.13. R nằm giữa các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 2$ trong góc phần tư thứ nhất.

15.10.14. R được bảo bởi các hyperbol $y = 1/x$, $y = 4/x$ và đường thẳng $y = x$, $y = 4x$ trong góc phần tư thứ nhất.

Dùng phép đổi biến đã cho để tính tích phân.

15.10.15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, với R là tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$; $x = 2u + v$, $y = u + 2v$.

15.10.16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, với R là hình bình hành với các đỉnh $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ và $(1, 5)$; $x = \frac{1}{4}(u + v)$, $y = \frac{1}{4}(v - 3u)$.

15.10.17. $\iint_R x^2\, dA$, với R là miền bao bởi các ellip $9x^2 + 4y^2 = 36$, $x = 2u$, $y = 3v$.

15.10.18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, với R là miền được bao bởi ellip $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$.

15.10.19. $\iint_R xy\, dA$ với R là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 3x$ và các hyperbol $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$.

15.10.20. $\iint_R y^2\, dA$ với R là miền được bao bởi các đường $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$, $u = xy$, $v = xy^2$. Minh họa bằng cách dùng máy tính vẽ R.

15.10.21. (a) Tính $\iiint_E dV$ với E là khối được bao bởi ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Dùng phép biến đổi $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

(b) Trái đất không phải là một quả cầu hoàn hảo: sự quay đã làm các cực phẳng hơn. Do đó hình dạng có thể được xấp xỉ bằng một ellipsoid với $a = b = 6378$ km và $c = 6356$ km. Dùng phần (a) để ước lượng thể tích Trái đất.

(c) Nếu khối trong phần (a) có mật độ hằng k, hãy tìm mômen quán tính của nó quanh trục z.

15.10.22. Một bài toán quan trọng trong nhiệt động lực học là tìm công của một máy Carnot lí tưởng. Một chu kì gồm giãn và nén thay phiên nhau trong một ống (piston). Công thực hiện bởi động cơ bằng với diện tích của miền R bao bởi hai đường đẳng nhiệt $xy = a$, $xy = b$ và hai đường đoản nhiệt $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, với $0 < a < b$ và $0 < c < d$. Hãy tính công thực hiện bằng cách xác định diện tích của R.

Tính tích phân bằng cách thực hiện phép đổi biến thích hợp.

15.10.23. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA$, với R là hình bình hành được bao bởi các đường $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, và $3x - y = 8$.

15.10.24. $\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\, dA$, với R là hình chữ nhật được bao bởi các đường thẳng $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$, $x + y = 3$.

15.10.25. $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\, dA$, với R là hình thang với đỉnh $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$.

15.10.26. $\iint_R \sin(9x^2 + 4y^2)\, dA$, với R là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi ellip $9x^2 + 4y^2 = 1$.

15.10.27. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, với R được cho bởi bất đẳng thức $|x| + |y| \le 1$.

15.10.28. Cho f liên tục trên $[0, 1]$ và cho R là miền tam giác với đỉnh $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Chứng tỏ

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du.$$

Ôn tập

Kiểm tra khái niệm

(1) Giả sử f là một hàm liên tục xác định trên một hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$.

  (a) Viết một biểu thức cho một tổng Riemann của f. Nếu $f(x, y) \geq 0$ thì tổng đại diện cho cái gì?

  (b) Viết định nghĩa $\iint_R f(x, y)\, dA$ như là một giới hạn.

  (c) Ý nghĩa hình học của $\iint_R f(x, y)\, dA$ nếu $f(x, y) \geq 0$ là gì? Nếu f lấy cả giá trị dương và giá trị âm thì sao?

  (d) Làm cách nào để tính $\iint_R f(x, y)\, dA$?

  (e) Luật điểm giữa cho tích phân kép nói điều gì?

  (f) Viết một biểu thức cho giá trị trung bình của f.

(2) (a) Làm cách nào để định nghĩa $\iint_D f(x, y)\, dA$ nếu D là một miền bị chặn không phải là hình chữ nhật?

  (b) Một miền loại 1 là gì? Tính $\iint_D f(x, y)\, dA$ nếu D là miền loại 1 như thế nào?

  (c) Một miền loại 2 là gì? Tính $\iint_D f(x, y)\, dA$ nếu D là miền loại 2 như thế nào?

  (d) Các tính chất của tích phân kép là gì?

(3) Chuyển tích phân từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cực như thế nào? Vì sao ta muốn chuyển như vậy?

(4) Nếu một tấm mỏng chiếm một miền phẳng D và có mật độ $\rho(x, y)$ hãy viết các biểu thức cho mỗi cái sau theo tích phân bội.

  (a) Khối lượng

  (b) Mômen quanh một trục

  (c) Tâm khối lượng

  (d) Mômen quán tính quanh trục và gốc tọa độ.

(5) Cho f là hàm mật độ chung của cặp biến ngẫu nhiên X và Y.

  (a) Viết một tích phân bội cho xác suất để X nằm giữa a và b và Y nằm giữa c và d

  (b) f có những tính chất gì?

  (c) Kì vọng của X và Y là gì?

(6) Viết một biểu thức cho diện tích của mặt với phương trình $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

(7) Viết định nghĩa của tích phân bội ba của f trên một hộp chữ nhật B.

  (a) Tính $\iiint_B f(x, y, z)\ dV$ như thế nào?

  (b) Định nghĩa $\iiint_E f(x, y, z)\ dV$ nếu E là một khối bị chặn không phải là hình hộp như thế nào?

  (c) Một khối loại 1 là gì? Tính $\iiint_E f(x, y, z)\ dV$ nếu E là khối loại 1 như thế nào?

  (d) Một khối loại 2 là gì? Tính $\iiint_E f(x, y, z)\ dV$ nếu E là khối loại 2 như thế nào?

  (e) Một khối loại 3 là gì? Tính $\iiint_E f(x, y, z)\ dV$ nếu E là khối loại 3 như thế nào?

(8) Nếu một khối chiếm một miền E và có mật độ $\rho(x, y, z)$ hãy viết các biểu thức cho mỗi cái sau.

  (a) Khối lượng

  (b) Mômen quanh các mặt phẳng tọa độ.

  (c) Tâm khối lượng

  (d) Mômen quán tính quanh các trục.

(9) (a) Đổi từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ trụ như thế nào trong tích phân bội ba?

  (b) Đổi từ tọa độ chữ nhật sang tọa độ cầu như thế nào trong tích phân bội ba?

  (c) Trong tình huống nào ta muốn chuyển sang tọa độ trụ hày tọa độ cầu?

(10) (a) Nếu một phép biến đổi T được cho bởi $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ thì Jacobi của T là gì?

  (b) Đổi biến trong tích phân bội hai như thế nào?

  (c) Đổi biến trong tích phân bội ba như thế nào?

Đố Đúng-Sai

Xác định xem mệnh đề là đúng hay sai. Nếu là đúng, hãy giải thích tại sao. Nếu nó là sai, hãy giải thích tại sao hoặc cho một ví dụ phản chứng.

(1) $\int_{-1}^{2} \int_0^6 x^2 \sin(x - y)\ dx\ dy = \int_0^6 \int_{-1}^{2} x^2 \sin(x - y)\ dy\ dx$.

(2) $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{x + y^2}\ dy\ dx = \int_0^x \int_0^1 \sqrt{x + y^2}\ dx\ dy$.

(3) $\int_1^2 \int_3^4 x^2 e^y \, dy \, dx = \int_1^2 x^2 \, dx \int_3^4 e^y \, dy$.

(4) $\int_{-1}^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2} \sin y \, dx \, dy = 0$.

(5) Nếu f liên tục trên $[0,1]$ thì

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y) \, dy \, dx = \left[\int_0^1 f(x) \, dx\right]^2.$$

(6) $\int_1^4 \int_0^1 (x^2 + \sqrt{y}) \sin(x^2y^2) \, dx \, dy \leq 9$.

(7) Nếu D là đĩa cho bởi $x^2 + y^2 \leq 4$ thì

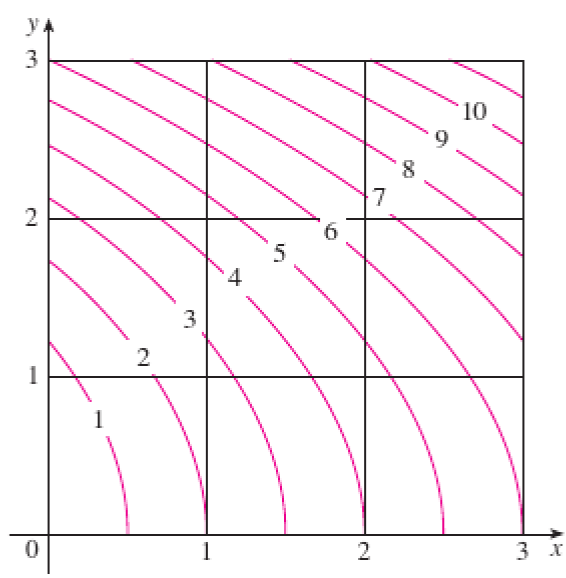
$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA = \frac{16}{3}\pi.$$

(8) Tích phân $\iiint_E kr^3 \, dz \, dr \, d\theta$ đại diện cho mômen quán tính quanh trục z của khối E với mật độ hằng k.

(9) Tích phân $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz \, dr \, d\theta$ đại diện cho thể tích được bao bởi các mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt phẳng $z = 2$.

Bài tập

(1) Một bản đồ đường mức cho một hàm f trên hình vuông $R = [0,3] \times [0,3]$. Dùng tổng Riemann với chín số hạng để ước tính giá trị của $\iint_R f(x,y) \, dA$. Lấy điểm thử là góc trên bên phải của các hình chữ nhật.



(2) Dùng Luật điểm giữa để ước lượng tích phân trong Bài tập 1.
Tính các tích phân lặp.

(3) $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y)\ dy\ dx$.

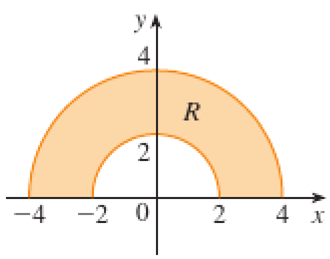
(4) $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy}\ dx\ dy$.

(5) $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2)\ dy\ dx$.

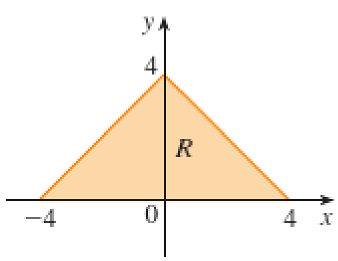
(6) $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\ dy\ dx$.

(7) $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \sin x\ dz\ dy\ dx$.

(8) $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyzx\ dz\ dx\ dy$.
Viết tích phân $\iint_R f(x,y)\ dA$ như một tích phân lặp, với R là miền được vẽ và f là hàm liên tục bất kì trên R.



(9)



(10)

(11) Miêu tả miền mà diện tích được cho bởi tích phân

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin 2\theta} r\ dr\ d\theta.$$

(12) Miêu tả khối mà thể tích được cho bởi tích phân

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

và tính tích phân này.
Tính các tích phân lặp bằng cách đổi thứ tự tích phân.

(13) $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\ dy\ dx$.

(14) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}\ dx\ dy$.
Tính giá trị của tích phân.

(15) $\iint_R ye^{xy}\ dA$, với $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$.

(16) $\iint_D xy\ dA$, với $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y + 2\}$.

(17) $\iint_D \frac{y}{1+x^2}\ dA$, với D được bao bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

(18) $\iint_D \frac{1}{1+x^2}\ dA$, với D là miền tam giác với các đỉnh $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

(19) $\iint_D y\ dA$, với D là miền trong góc phần tư thứ nhất được bao bởi parabol $x = y^2$, $x = 8 - y^2$.

(20) $\iint_D y\ dA$, với D là miền trong góc phần tư thứ nhất nằm trên hyperbol $xy = 1$ và đường thẳng $y = x$ và bên dưới đường thẳng $y = 2$.

(21) $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\ dA$, với D là miền trong góc phần tư thứ nhất được bao bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, và đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

(22) $\iint_D x\ dA$, với D là miền trong góc phần tư thứ nhất được giữa các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, và $x^2 + y^2 = 2$.

(23) $\iiint_E xy\ dV$ với $E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x + y\}$.

(24) $\iiint_T xy\ dV$, với T là khối tứ diện với các đỉnh $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

(25) $\iiint_E y^2 z^2\ dV$, với E được bao bởi paraboloid $x = 1 - y^2 - z^2$ và mặt phẳng $x = 0$.

(26) $\iiint_E z\ dV$, với E được bao bởi các mặt phẳng $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ và mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$ trong góc phần tư thứ nhất.

(27) $\iiint_E yz\ dV$, với E nằm trên mặt phẳng $z = 0$, bên dưới mặt phẳng $z = y$, bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

(28) $\iiint_H z^3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dV$, với H là nửa khối cầu nằm bên trên mặt phẳng xy và có tâm ở gốc tọa độ và bán kính 1.
Tìm thể tích của khối.

(29) Dưới paraboloid $z = x^2 + 4y^2$ và bên trên hình chữ nhật $R = [0, 2] \times [1, 4]$.

(30) Dưới mặt $z = x^2 y$ và bên trên tam giác trong mặt phẳng xy với đỉnh $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$.

(31) Khối tứ diện với đỉnh $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$, $(2, 2, 0)$.

(32) Bao bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 0$ và $y + z = 3$.

(33) Một trong những mảnh nêm cắt từ mặt trụ $x^2 + 9y^2 = a^2$ bởi mặt phẳng $z = 0$ và $z = mx$.

(34) Trên mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ và dưới nửa nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(35) Xét tấm mỏng chiếm miền D bao bởi parabol $x = 1 - y^2$ và trục tọa độ trong góc phần tư thứ nhất với hàm mật độ $\rho(x, y) = y$.

- (a) Tìm khối lượng của tấm.
- (b) Tìm tâm khối lượng.
- (c) Tìm mômen quán tính và bán kính xoay tròn quanh trục x và trục y.

(36) Một tấm mỏng chiếm phần của đĩa $x^2 + y^2 \le a^2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

- (a) Tìm tâm của tấm.
- (b) Tìm tâm khối lượng nếu hàm mật độ là $\rho(x, y) = xy^2$.

(37)
- (a) Tìm tâm của một nón tròn vuông góc với chiều cao h và bán kính đáy a. (Đặt nón sao cho đáy của nó nằm trên mặt phẳng xy với tâm ở gốc tọa độ và trục nằm ở phần dương của trục z.)
- (b) Tìm mômen quán tính của nón trên quan trục (trục z).

(38) Tìm diện tích của phần nón $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ giữa các mặt phẳng $z = 1$, $z = 2$.

(39) Tìm diện tích của phần mặt $z = x^2 + y$ nằm trên tam giác với đỉnh $(0, 0)$, $(1, 0)$, và $(0, 2)$.

(40) Vẽ mặt $z = x \sin y$, $-3 \le x \le 3$, $-\pi \le y \le \pi$, và tìm diện tích mặt đúng tới chữ số thập phân.

(41) Dùng tọa độ cực để tính

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx.$$

(42) Dùng tọa độ cầu để tính

$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy.$$

(43) Nếu D là miền được bao bởi các đường $y = 1 - x^2$ và $y = e^x$, tìm giá trị xấp xỉ của tích phân $\iint_D y^2\, dA$. (Dùng máy tính để ước lượng giao điểm của các đường.)

(44) Tìm tâm khối lượng của khối tứ diện với đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ và hàm mật độ $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(45) Hàm mật độ chung cho hai biến ngẫu nhiên X và Y là

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+y) & 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

(a) Tìm giá trị của hằng số C.

(b) Tìm $P(X \le 2, Y \ge 1)$.

(c) Tìm $P(X + Y \le 1)$.

(46) Một cái đèn có ba bóng, mỗi bóng thuộc loại có tuổi thọ trung bình 800 giờ. Nếu ta mô hình hóa xác suất hư hỏng của các bóng bằng một hàm mật độ mũ với trung bình 800, hãy tìm xác suất để cả ba bóng hư trong tổng thời gian 1000 giờ.

(47) Viết lại tích phân

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx$$

như một tích phân lặp theo thứ tự $dx\ dy\ dz$.

(48) Viết năm tích phân lặp khác bằng với

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{y^3} \int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\ dz\ dx\ dy.$$

(49) Dùng phép biến đổi $u = x - y$, $v = x + y$ để tính

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\ dA$$

với R là hình vuông với đỉnh $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$.

(50) Dùng phép biến đổi $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ để tìm thể tích của miền được bao bởi mặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ và các mặt phẳng tọa độ.

(51) Dùng công thức đổi biến và một phép biến đổi thích hợp để tính $\iint_R xy\ dA$ với R là hình vuông với đỉnh $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, và $(1,-1)$.

(52) Định lí giá trị trung bình cho tích phân bội hai nói rằng nếu f là một hàm liên tục trên một miền phẳng D loại 1 hay loại 2, thì có một điểm (x_0, y_0) trong D sao cho

$$\iint_D f(x,y)\ dA = f(x_0,y_0)A(D).$$

Dùng Định lí về giá trị trung gian, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (14.7.8) và Tính chất 15.3.11 của tích phân để chứng minh định lí này. (Dùng chứng minh của trường hợp một biến trong Mục 5.5 để hướng dẫn.)

(53) Giả sử f là hàm liên tục trên một đĩa chứa điểm (a, b). Cho D_r là đĩa đóng tâm (a, b) và bán kính r. Dùng Định lí giá trị trung bình cho tích phân bội hai (xem bài tập trên) để chứng tỏ rằng

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x,y)\, dA = f(a,b).$$

(54) (a) Tính $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{n/2}}\, dA$, với n là một số nguyên và D là miền bao bởi đường tròn với tâm ở gốc tọa độ và bán kính r và R, $0 < r < R$.

(b) Với giá trị nào của n thì tích phân ở phần (a) có giới hạn khi $r \to 0^+$?

(c) Tìm $\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}\, dV$, với E là miền được bao bởi mặt cầu với tâm ở gốc tọa độ và bán kính r và R, $0 < r < R$.

(d) Với giá trị nào của n thì tích phân ở phần (c) có giới hạn khi $r \to 0^+$?

Bài tập thêm

(1) Nếu $[[x]]$ chỉ số nguyên lớn nhất trong x (tức số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hay bằng x), hãy tính
$$\iint_R [[x+y]]\,dA$$
với $R = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 3, 2 \le y \le 5\}$.

(2) Tính tích phân
$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dy\,dx$$
với $\max\{x^2, y^2\}$ chỉ số lớn hơn của hai số x^2 và y^2.

(3) Tìm giá trị trung bình của hàm $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\,dt$ trên đoạn $[0,1]$.

(4) Nếu $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ là các vectơ hằng, $\mathbf{r}$ là vectơ vị trí $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, và E được cho bởi bất đẳng thức $0 \le \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \le \alpha$, $0 \le \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} \le \beta$, $0 \le \mathbf{c}\cdot\mathbf{r} \le \gamma$, chứng tỏ rằng
$$\iiint_E (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|}.$$

(5) Tích phân bội $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy$ là một tích phân suy biến và có thể được định nghĩa như giới hạn của một tích phân kép trên hình chữ nhật $[0,t]\times[0,t]$ khi $t \to 1^-$. Nhưng nếu ta khai triển hàm dưới tích phân như một chuỗi hình học, ta có thể biễu diễn tích phân như tổng của một chuỗi vô hạn. Chứng tỏ rằng
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(6) Leonhard Euler đã tìm được tổng đúng của chuỗi trong bài tập trên. Năm 1736 ông đã chứng tỏ
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Trong bài tập này ta sẽ chứng minh sự kiện này bằng cách tính tích phân bội trong bài tập trên. Khởi đầu bằng cách đổi biến
$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}.$$
Điều này cho một phép quay quanh gốc tọa độ một góc $\pi/4$. Cần vẽ miền tương ứng trong mặt phẳng uv. [Gợi ý: Nếu khi tính tích phân gặp biểu thức $(1-\sin\theta)/\cos\theta$ hoặc $\cos\theta/(1+\sin\theta)$ thì có thể dùng đẳng thức $\cos\theta = \sin((\pi/2)-\theta)$ và đẳng thức tương ứng cho $\sin\theta$.]

(7) (a) Chứng tỏ

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(Chưa từng có ai tìm được giá trị chính xác của tổng của chuỗi.)

(b) Chứng tỏ

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

Dùng phương trình này để tính tích phân bội ba đúng tới hai chữ số thập phân.

(8) Chứng tỏ

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

bằng cách biểu diễn tích phân như một tích phân lặp.

(9) (a) Chứng tỏ khi phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

được viết trong tọa độ trụ thì nó trở thành

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

(b) Chứng tỏ khi phương trình Laplace được viết trong tọa độ cầu, nó trở thành

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

(10) (a) Một tấm mỏng có mật độ hằng ρ và có dạng một đĩa với tâm tại gốc tọa độ và bán kính R. Dùng Định luật hấp dẫn Newton (xem Mục 13.4) để chứng tỏ độ lớn của lực hút tấm mỏng đặt lên một khối lượng m ở điểm $(0,0,d)$ trên phần dương trục z là

$$F = 2\pi G m \rho d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2+d^2}} \right).$$

[Gợi ý: Chia đĩa như trong Hình 15.4.4 và trước hết tính thành phần thẳng đứng của lực tác động bởi hình chữ nhật cực R_{ij}.]

(b) Chứng tỏ độ lớn của lực hút của một tấm mỏng với mật độ ρ chiếm cả mặt phẳng trên một đối tượng có khối lượng m đặt ở khoảng cách d từ mặt phẳng là

$$F = 2\pi G m \rho.$$

Chú ý biểu thức này không phụ thuộc d.

(11) Nếu f liên tục, chứng tỏ

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\ dt\ dz\ dy = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\ dt.$$

(12) Tính $\lim_{n\to\infty} n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+ni+j}}$.

(13) Mặt phẳng

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad a>0, b>0, c>0$$

cắt khối ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

thành hai mảnh. Tìm thể tích của mảnh nhỏ hơn.