JAMES STEWART

PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN

Chương 16

GIẢI TÍCH VECTƠ

Các mặt tham số được nghiên cứu trong mục 16.6, chúng thường được sử dụng bởi các lập trình viên để tạo ra những bộ phim hoạt hình. Trong phân cảnh của bộ phim hoạt hình Antz bên đây, công chúa Bala đang cố gắng giải cứu cho Z khi anh đang bị mắc kẹt trong một giọt sương. Một mặt tham số ở đây được mô tả bởi giọt sương và chuyển động của giọt sương được mô tả bởi một họ các mặt tham số. Một trong các lập trình viên thiết kế bộ phim hoạt hình này đã nói rằng: "Phải chi tôi đã quan tâm nhiều hơn đến các mặt tham số khi mà tôi còn tham gia lớp học về giải tích. Nó chắc chắn đã rất hữu ích cho tôi ngày hôm nay ".

Trong chương này, chúng ta nghiên cứu các tính toán trong trường vectơ. (Các hàm này thường gán các vectơ với các điểm trong không gian). Đặc biệt, chúng ta định nghĩa tích phân đường (có thể được dùng để tìm công sinh ra bởi một trường lực làm vật dịch chuyển dọc theo một đường cong nào đó). Tiếp đó, chúng ta định nghĩa tích phân mặt (có thể được sử dụng để tìm tốc độ dòng chảy của chất lỏng qua một bề mặt nào đó). Liên hệ giữa các loại tích phân mới này và các loại tích phân đã gặp như tích phân một lớp, hai lớp và ba lớp sẽ được trình bày trong các phiên bản nhiều chiều của các định lý cơ bản trong Phép tính tích phân: Định lý Green, Định lý Stokes, và Định lý Divergence.

16.1 Trường Vectơ

Các vectơ trong hình 16.1.1 là các vectơ vận tốc của không khí biểu thị tốc độ và hướng gió tại các điểm cách 'surface elevation' 10m tại vùng vịnh San Francisco. Nhìn qua các mũi tên lớn nhất trong phần (a) chúng ta thấy rằng tốc độ gió lớn nhất xảy ra tại thời điểm gió đi vào vịnh qua cầu Golden Gate. Phần (b) cho thấy hướng gió rất khác so với 12 giờ trước đó. Chúng ta có thể liên tưởng một vectơ vận tốc gió với mọi điểm trong không khí. Đây là ví dụ về một *trường vector vận tốc*.

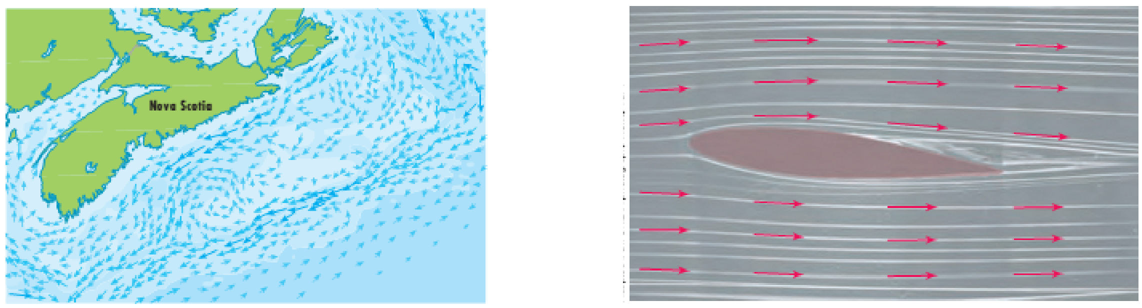
Hình 16.1.1: Trường vectơ vận tốc mô tả hướng gió đi qua vịnh San Francisco. Hình trái: 18h ngày 01/03/2010; hình phải: 6h ngày 01/03/2010.

Một vài ví dụ khác về trường vectơ vận tốc được minh họa trong hình 16.1.2: dòng hải lưu và luồng không khí đi qua cánh máy bay.

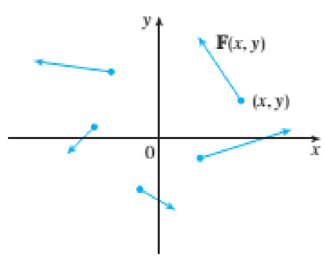
Một dạng khác của trường vectơ, được gọi là một *trường lực*, liên kết một vectơ lực với một điểm trong miền. Một ví dụ là trường lực hấp dẫn mà chúng ta sẽ xem xét trong Ví dụ 4.

Nói chung, một trường vector là một hàm có miền xác định là tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^2$ (hoặc $\mathbb{R}^3$) và miền giá trị là tập hợp các vectơ trong V_2 (hoặc V_3).

Định nghĩa 16.1. Cho D là một tập trong $\mathbb{R}^2$ (một miền mặt phẳng). Một **trường vectơ** trong $\mathbb{R}^2$ là một hàm $\mathbf{F}$ đặt tương ứng mỗi điểm (x, y) trong D một vectơ hai chiều $\mathbf{F}(x, y)$.



Hình 16.1.2: Trường vectơ vận tốc. Hình trái: dòng hải lưu ngoài khơi bờ biển Nova Scotia; Hình phải: luồng không khí đi qua một cánh máy bay nghiêng.



Hình 16.1.3: Trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$.

Cách tốt nhất để mô tả một trường vectơ là vẽ mũi tên biểu diễn vectơ $\mathbf{F}(x, y)$ bắt đầu tại điểm (x, y). Dĩ nhiên, ta không thể thực hiện tại mọi điểm (x, y), nhưng chúng ta có thể có sự hình dung có sở về hàm $\mathbf{F}$ bằng cách thực hiện cho một vài điểm đại diện trong D như hình 16.1.3. Vì $\mathbf{F}(x, y)$ là một vectơ hai chiều nên ta có thể viết hàm này theo các **hàm thành phần** P và Q như sau:

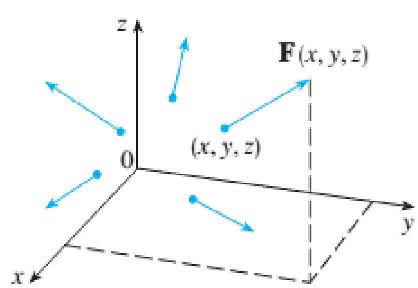
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

hoặc, viết gọn,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$$

Chú ý rằng P và Q là các hàm vô hướng hai biến và đôi khi chúng được gọi là **trường vô hướng** để phân biệt với các trường vectơ.

Định nghĩa 16.2. Cho E là một tập con của $\mathbb{R}^3$. Một **trường vectơ** trên $\mathbb{R}^3$ là một hàm $\mathbf{F}$ đặt tương ứng mỗi điểm (x, y, z) trong E một vectơ ba chiều $\mathbf{F}(x, y, z)$.



Hình 16.1.4: Trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$.

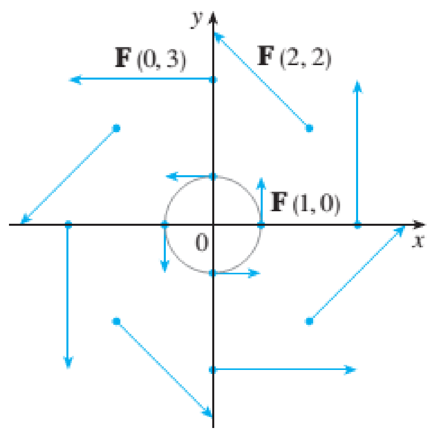
Một trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$ được minh họa trong Hình 16.1.4. Ta có thể biểu diễn nó dưới dạng các hàm thành phần P, Q và R như sau:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Như các hàm vectơ trong mục 13.1, ta có thể định nghĩa sự liên tục của trường vectơ và chỉ ra rằng $\mathbf{F}$ liên tục khi và chỉ khi các hàm thành phần của nó P, Q và R là liên tục.

Đôi khi chúng ta xác định một điểm (x, y, z) với vectơ vị trí của nó $\mathbf{x} = (x, y, z)$ và viết $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ thay cho $\mathbf{F}(x, y, z)$. Khi đó $\mathbf{F}$ trở thành một hàm đặt tương ứng một vectơ $\mathbf{x}$ với một vectơ $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Ví dụ 1. *Một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ được xác định bởi $\boldsymbol{F}(x, y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Mô tả $\boldsymbol{F}$ bằng cách phác thảo một vài vectơ $\boldsymbol{F}(x, y)$ như trong Hình 16.1.3.*



Hình 16.1.5: $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Giải Vì $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, ta vẽ vectơ $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ bắt đầu từ điểm $(1, 0)$ trong Hình 16.1.5. Vì $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, ta vẽ vectơ $\langle -1, 0\rangle$ với điểm bắt đầu $(0, 1)$. Tiếp tục theo cách này, ta tính toán được một số giá trị đại diện của $\mathbf{F}(x, y)$ trong bảng dưới đây và vẽ các vectơ tương ứng biểu diễn cho trường vectơ trong Hình 16.1.5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Có vẽ như mỗi mũi tên trong Hình 16.1.5 tiếp xúc với một đường tròn có tâm tại điểm gốc. Để khẳng định điều này, ta lấy tích vô hướng của vectơ vị trí $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ với vectơ $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

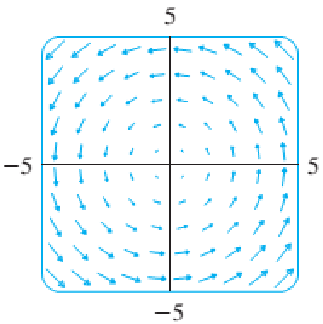
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Điều này cho thấy rằng $\mathbf{F}(x, y)$ vuông góc với vectơ vị trí $\langle x, y\rangle$ và do đó nó là tiếp tuyến của đường tròn có tâm tại điểm gốc và bán kính $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta cũng lưu ý rằng:

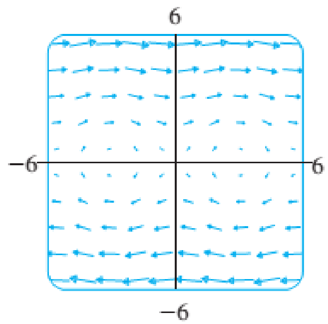
$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

nên độ lớn của vectơ $\mathbf{F}(x,y)$ bằng với bán kính của đường tròn.

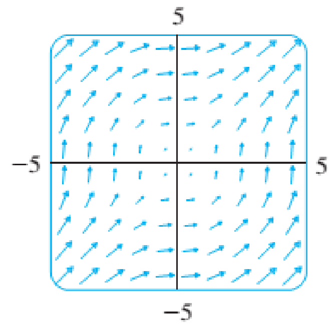
Một vài hệ thống máy tính có khả năng vẽ các trường vectơ trong hai và ba chiều. Ta có thể có một hình dung tốt hơn về trường vectơ vì máy tính có thể vẽ được một số lượng lớn các vectơ đại diện. Hình 16.1.6 cho thấy rằng một máy tính có thể vẽ một trường vectơ trong Ví dụ 1; Hình 16.1.7 và 16.1.8 chỉ ra hai trường vectơ khác.



Hình 16.1.6: $\mathbf{F}(x,y) = \langle -y, x\rangle$

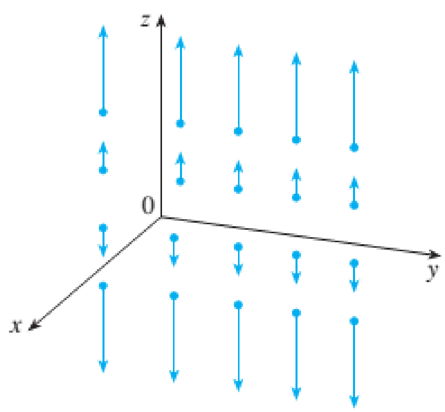


Hình 16.1.7: $\mathbf{F}(x,y) = \langle y, \sin x\rangle$



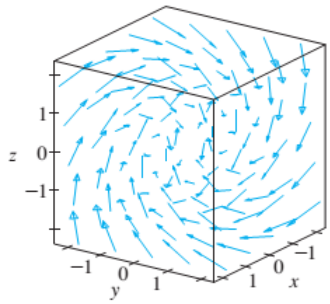
Hình 16.1.8: $\mathbf{F}(x,y) = \langle \ln(1+y^2), \ln(1+x^2)\rangle$

Ví dụ 2. *Hãy phát họa một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{k}$.*

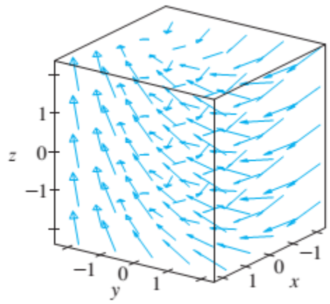


Hình 16.1.9: $\mathbf{F}(x,y) = z\mathbf{k}$.

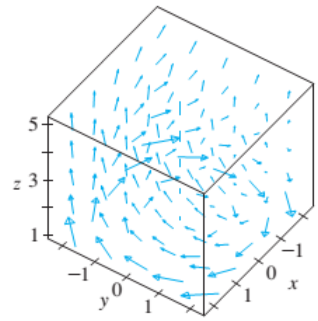
Giải Phác họa được chỉ ra trong Hình 16.1.9. Lưu ý rằng mọi vectơ là thẳng đứng và hoặc hướng lên hoặc hướng xuống mặt phẳng xy. Độ lớn của các vectơ tăng theo khoảng cách của nó với mặt phẳng xy.



Hình 16.1.10: $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$



Hình 16.1.11: $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$



Hình 16.1.12: $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{y}{z}\mathbf{i} - \dfrac{x}{z}\mathbf{j} + \dfrac{z}{4}\mathbf{k}$

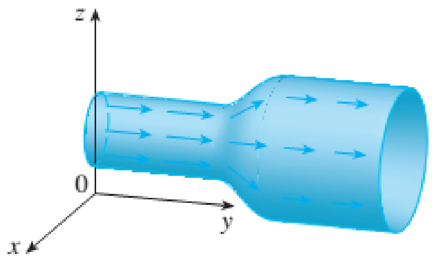
Chúng ta có thể vẽ trường vectơ trong Ví dụ 2 bằng tay bởi công thức đặc biệt đơn giản của nó. Tuy nhiên, ta hầu như không thể phác họa các trường vectơ ba chiều bằng tay được, và do đó chúng ta cần phải nhờ đến một hệ thống đại số máy tính. Các ví dụ được chỉ ra trong Hình 16.1.10, 16.1.11 và 16.1.12. Chú ý rằng các trường vectơ trong Hình 16.1.10 và 16.1.11 có công thức tương tự nhau, như tất cả các vectơ trong Hình 16.1.11 hướng ngược lại theo trục y vì thành phần y đều mang giá trị -2. Nếu trường vectơ trong Hình 16.1.12 biểu diễn một trường vận tốc, thì một hạt sẽ được quét lên và sẽ theo đường xoắn ốc quanh trục z theo hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên cao.

Ví dụ 3. *Hãy tưởng tượng một chất lỏng chảy đều đặn dọc theo một đường ống và cho* $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ *là vectơ vận tốc tại một điểm* (x, y, z)*. Khi đó hàm* $\boldsymbol{V}$ *gán một vectơ cho mỗi điểm* (x, y, z) *trong miền* E *(bên trong đường ống) và do đó* $\boldsymbol{V}$ *là một trường vectơ trên* $\mathbb{R}^3$ *và được gọi là một* ***trường vận tốc****. Một trường vận tốc có thể được minh họa trong Hình 16.1.13. Tốc độ tại mỗi điểm cho trước được cho bởi chiều dài của mũi tên.*

Trường vận tốc cũng xảy ra trong các lĩnh vực khác của vật lý. Chẳng hạn, trường vectơ trong Ví dụ 1 cũng có thể được sử dụng như trường vận tốc mô tả một bánh xe quay ngược chiều kim đồng hồ. Ta cũng đã thấy các ví dụ của trường vận tốc trong Hình 16.1.1 và 16.1.2.

Ví dụ 4. *Định Luật Vạn Vật Hấp Dẫn của Newton nói rằng độ lớn của lực hấp dẫn giữa hai vật có khối lượng* m *và* M *là:*

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$



Hình 16.1.13: Trường vectơ trong dòng chất lỏng.

trong đó r là khoảng cách giữa các vật thể và G hằng số hấp dẫn. (Đây là một ví dụ của định luật nghịch đảo bình phương). Giả sử rằng vật có khối lượng M được đặt tại điểm gốc trong $\mathbb{R}^3$. (Chẳng hạn, M có thể là khối lượng của trái đất và điểm gốc có thể đặt tại tâm của nó). Đặt vectơ vị trí của vật có khối lượng m là $\boldsymbol{x} = \langle x, y, z\rangle$. Khi đó $r = |\boldsymbol{x}|$, nên $r^2 = |\boldsymbol{x}|^2$. Lực hấp dẫn tác động lên vật thứ hai này tính từ điểm gốc, và vect đơn vị theo hướng này là:

$$-\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$$

Do đó, lực hấp dẫn tác động lên vật tại $\boldsymbol{x} = \langle x, y, z\rangle$ là:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{mMG}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x} \tag{16.1.1}$$

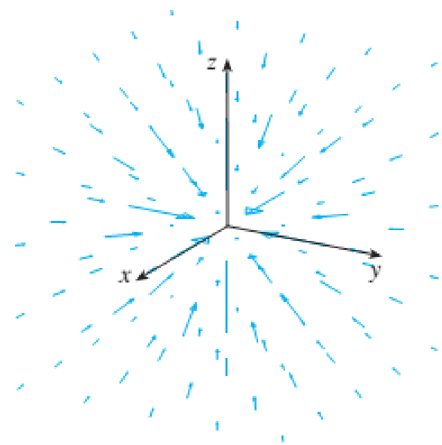
[Các nhà vật lý thường dùng ký hiệu $\mathbf{r}$ thay cho $\mathbf{x}$ để nói về vectơ vị trí. Nên bạn có thể thấy công thức (16.1.1) dưới dạng $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$]. Hàm số được cho bởi phương trình (16.1.1) là một ví dụ của trường vectơ, được gọi là **trường hấp dẫn**, bởi vì nó tương ứng một vectơ [lực $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] với mỗi điểm $\mathbf{x}$ trong không gian.

Công thức (16.1.1) là một cách viết gọn cho trường hấp dẫn, nhưng chúng ta cũng có thể viết nó dưới dạng các hàm thành phần bằng cách sử dụng các công thức $\mathbf{x} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ và $|x| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}$$

Trường hấp dẫn $\mathbf{F}$ được phác họa trong Hình 16.1.14.

Ví dụ 5. *Giả sử một điện tích Q được đặt tại điểm gốc. Dựa vào Định Luật Coulomb, lực điện $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ tác động bởi điện tích này lên một điện tích khác q đặt tại điểm (x, y, z) với*



Hình 16.1.14: Trường lực hấp dẫn.

vectơ $\boldsymbol{x} = \langle x, y, z \rangle$ *là:*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x} \tag{16.1.2}$$

trong đó ε *là hằng số (nó phụ thuộc vào đơn vị sử dụng). Với điện tích thoả* $qQ > 0$ *thì lực là lực đẩy; ngược lại với điện tích thoả* $qQ < 0$ *thì lực là lực hút. Chú ý sự tương đồng giữa công thức* (16.1.1) *và* (16.1.2)*. Cả hai trường vectơ đề là các ví dụ về* ***trường lực***

Thay vì xét lực điện $\boldsymbol{F}$*, các nhà vật lý thường xét lực trên một đơn vị điện tích:*

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$$

Khi đó $\boldsymbol{E}$ *là một trường vectơ trên* $\mathbb{R}^3$ *và được gọi là* ***trường điện*** *của* Q*.*

Trường Gradient

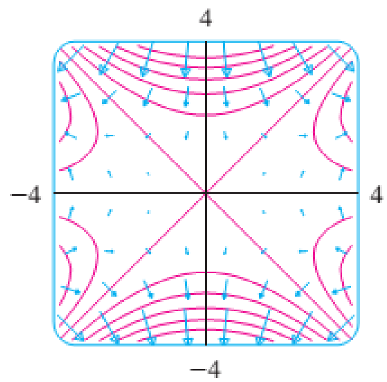
Nếu f là một hàm hai biến, theo Mục 14.6 thì gradient ∇f (hoặc grad$f$) được xác định bởi:

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Do đó ∇f thực sự là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ và được gọi là một **trường vectơ gradient**. Tương tự như thế, nếu f là một hàm ba biến, thì gradient của nó là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi:

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Ví dụ 6. *Tìm trường vectơ gradient của* $f(x,y) = x^2y - y^3$. *Hãy vẽ trường vectơ gradient và các chu tuyến của* f. *Chúng liên hệ với nhau như thế nào?*



Hình 16.1.15

Giải Trường vectơ gradient được cho bởi:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

Hình 16.1.15 chỉ ra hàm đường viền của f với trường vectơ gradient. Cần lưu ý rằng các vectơ gradient vuông góc với các đường mức, như ta đã có trong Mục 14.6.

Cũng cần chú ý rằng các vectơ gradient là dài trong khi đó các đường mức là gần nhau và ngắn, nơi các đường cong xa nhau. Đó là bởi vì chiều dài của vector gradient là giá trị đạo hàm hướng của f và các đường cong gần nhau chỉ ra một đồ thị dốc.

Một trường vectơ **F** được gọi là một **trường vectơ bảo toàn** nếu nó là gradient của một hàm nào đó, nghĩa là, nếu tồn tại một hàm f thỏa mãn $\mathbf{F} = \nabla f$. Trong trường hợp đó, f được gọi là một **hàm thế vị** của **F**.

Không phải mọi trường vectơ đều bảo toàn, nhưng các trường như vậy phát sinh rất thường xuyên trong vật lý. Ví dụ, trường hấp dẫn **F** trong Ví dụ 4 là bảo toàn bởi vì ta định nghĩa:

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

khi đó

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\\ &= \frac{-mMGx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}\\ &= \mathbf{F}(x,y,z)\end{aligned}$$

Trong Mục 16.3 và 16.5 ta sẽ tìm hiểu làm thế nào để biết một trường vectơ được cho có bảo toàn hay không.

Bài tập 16.1. ***1-10*** *Phát họa các trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *bằng cách vẽ một biểu đồ như trong Hình 16.1.5 hoặc Hình 16.1.9.*

1. $\boldsymbol{F}(x,y) = 0.3\boldsymbol{i} - 0.4\boldsymbol{j}$.
2. $\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{1}{2}x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.
3. $\boldsymbol{F}(x,y) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$.
4. $\boldsymbol{F}(x,y) = y\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j}$.
5. $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
6. $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
7. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{k}$.
8. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -y\boldsymbol{k}$.
9. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{k}$.
10. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}$.

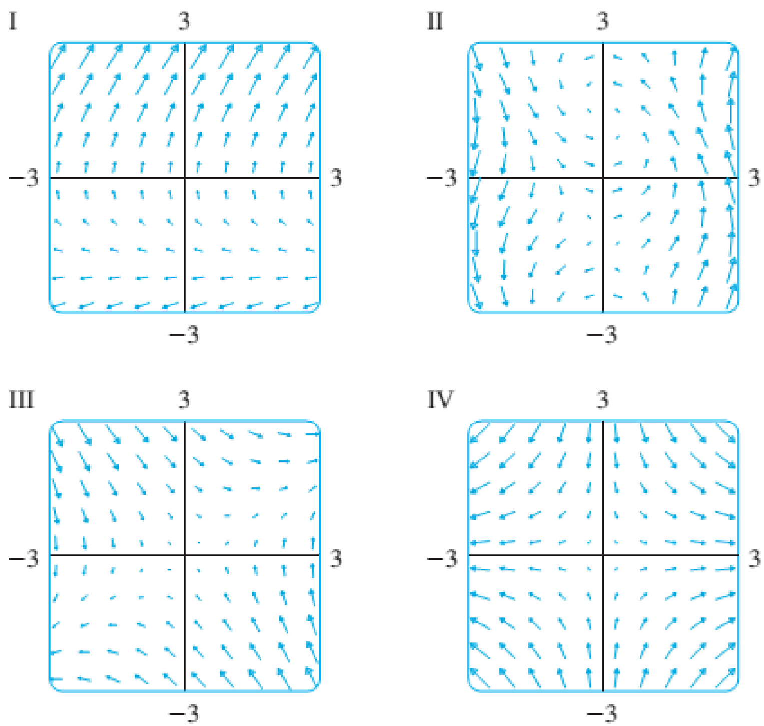
11-14 *Hãy kết hợp các trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *thích hợp với các phác hoạ tương ứng được đánh dấu từ I-IV. Hãy giải thích lý do tại sao bạn chọn nó.*

11. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle x, y\rangle$.

12. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle y, x-y \rangle$.

13. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle y, y+2 \rangle$.

14. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle \cos(x+y), x \rangle$



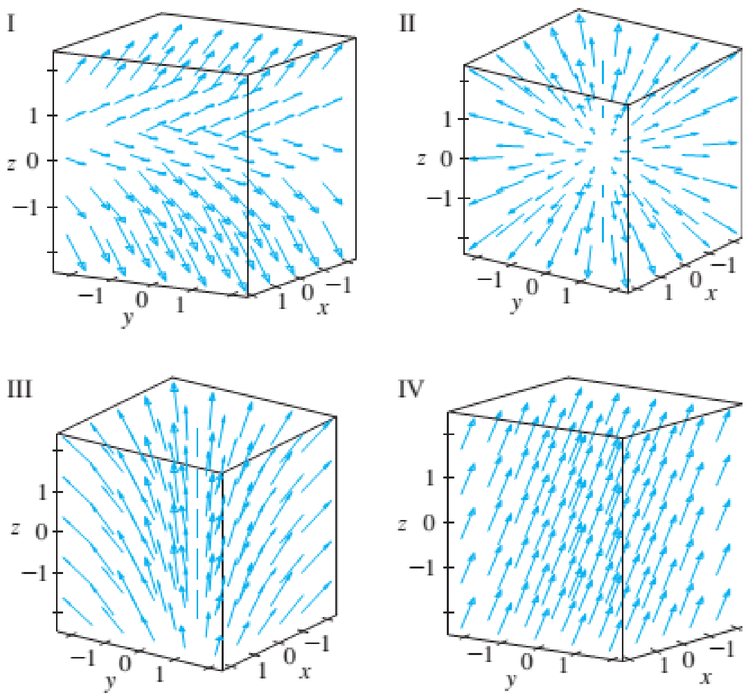
15-18 *Hãy kết hợp các trường vectơ **F** thích hợp với các phác hoạ tương ứng được đánh dấu từ I-IV. Hãy giải thích lý do tại sao bạn chọn nó.*

15. $F(x,y,z) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

16. $F(x,y,z) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

17. $F(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

18. $F(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.



19. *Nếu bạn có một CAS vẽ các trường vectơ (các lệnh dùng vẽ trong Maple là* `fieldplot` *và* `PlotVectorField` *hoặc VectorPlot trong Mathematica), hãy dùng chúng để vẽ:*

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y^2 - 2xy)\boldsymbol{i} + (3xy - 6x^2)\boldsymbol{j}$$

Hãy giải thích sự xuất hiện bằng các tìm tập hợp các điểm (x,y) *sao cho* $\boldsymbol{F}(x,y) = 0$.

20. *Cho* $\boldsymbol{F}(x,y) = (r^2 - 2r)\boldsymbol{x}$ *với* $\boldsymbol{x} = \langle x, y\rangle$ *và* $r = |\boldsymbol{x}|$. *Sử dụng CAS để vẽ trường vectơ này trong các miền khác nhau cho đến khi bạn có thể thấy những gì đang diễn ra. Hãy mô tả sự xuất hiện của hình ảnh và giải thích nó bằng cách tìm các điểm thoả mãn* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$.

21-24 *Hãy tìm trường vectơ gradient của* f.

21. $f(x,y) = xe^{xy}$.

22. $f(x,y) = \tan(3x - 4y)$.

23. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

24. $f(x,y,z) = x ln(y-2z)$.

25-26 *Hãy tìm trường vectơ gradient của* f *và phác họa nó.*

25. $f(x,y) = x^2 - y$.

26. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

27-28 *Hãy tìm trường vectơ gradient và chu tuyến của* f. *Hãy giải thích rằng chúng có liên quan với nhau thế nào.*

27. $f(x,y) = ln(1+x^2+y^2)$.

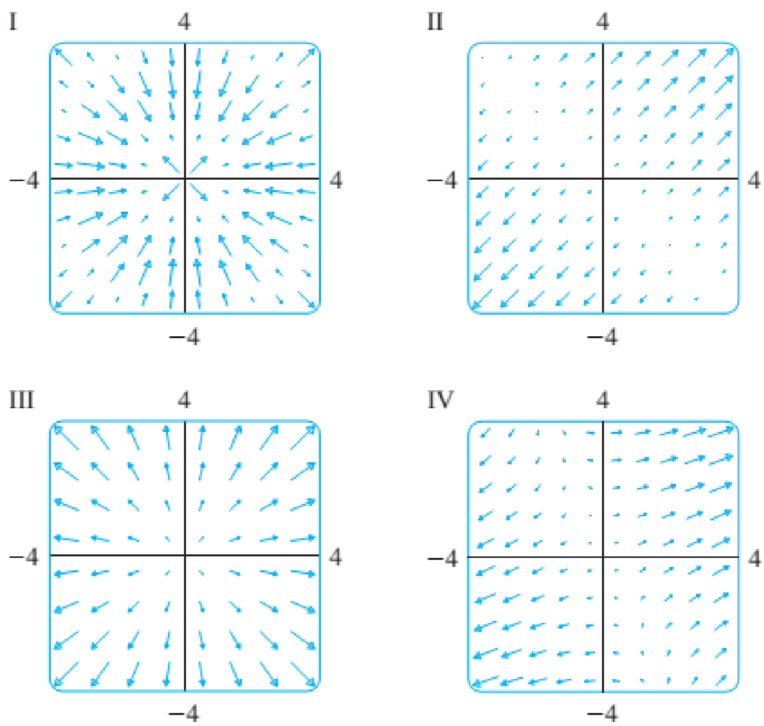
28. $f(x,y) = \cos x - 2\sin y$.

29-32 *Hãy kết hợp hàm* f *thích hợp với các phác hoạ trường vectơ gradient của chúng tương ứng được đánh dấu từ I-IV. Hãy giải thích lý do tại sao bạn chọn nó.*
29. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

30. $f(x,y) = x(x+y)$.

31. $f(x,y,z) = (x+y)^2$.

32. $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$.



33. *Một chất điểm chuyển động trong trường vận tốc* $\boldsymbol{V}(x,y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$. *Nếu nó có toạ độ* $(2,1)$ *tại thời điểm* $t = 3$, *hãy ước tính toạ độ của nó tại thời điểm* $t = 3.01$.

34. *Tại thời điểm* $t = 1$, *một chất điểm được đặt tại toạ độ* $(1,3)$. *Nếu nó di chuyển trong trường vận tốc:*

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \langle xy - 2, y^2 - 10 \rangle$$

Hãy tìm toạ độ xấp xỉ của nó tại thời điểm $t = 1.05$.

Dòng chảy (hoặc luồng không khí) của một trường vectơ là đường dẫn của một chất điểm mà trường vận tốc được cho bởi một trường vectơ. Do vậy các vectơ trong một trường vectơ tiếp xúc với dòng chảy.

35. (a) *Hãy dùng một phác họa của trường vectơ* $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ *để vẽ một số dòng chảy. Từ phác thảo của bạn, bạn có thể đoán được phương trình của dòng chảy đó?*

(b) *Nếu phương trình tham số của một dòng chảy là* $x = x(t), y = y(t)$, *hãy giải thích tại sao các hàm này thoả mãn phương trình vi phân* $dx/dt = x$ *và* $dy/dt = -y$.

Sau đó, hãy giải các phương trình vi phân này để tìm phương trình của dòng chảy đi qua điểm $(1,1)$.

36. (a) *Hãy phác họa trường vectơ* $\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ *và phác họa một vài dòng chảy. Các dòng chảy này xuất hiện có hình dạng gì?*

(b) *Nếu phương trình tham số của các dòng chảy là* $x = x(t), y = y(t)$, *thì các hàm này thoả mãn phương trình vi phân nào? Đoán rằng* $dy/dx = x$.

(c) *Nếu một chất điểm khởi động tại điểm gốc trong trường vận tốc được cho bởi* $\boldsymbol{F}$, *hãy tìm một phương trình mô tả di chuyển của nó.*

16.2 Tích phân đường

Trong mục này chúng ta định nghĩa tích phân tương tự như tích phân một lớp nhưng thay vì tích phân trên đoạn thẳng $[a,b]$ ta sẽ tích phân trên một đường cong C. Ta gọi tích phân này là *tích phân đường* mặc dù thuật ngữ "tích phân trên đường cong" rõ nghĩa hơn. Tích phân đường được phát minh vào đầu thế kỷ thứ 19 để giải các bài toán dòng chảy của chất lỏng, lực học, điện học và từ trường học.

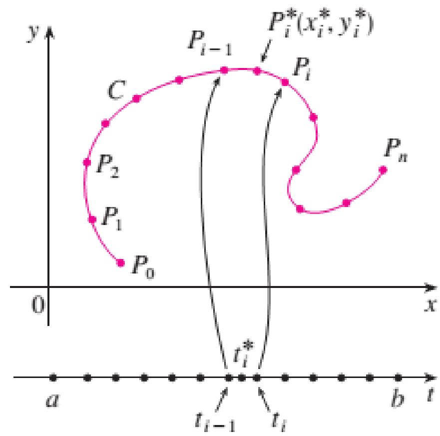
Ta bắt đầu từ một đường cong C được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{16.2.1}$$

hoặc, tương đương, được cho bởi phương trình vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, và ta giả sử rằng C là một đường cong trơn. [Điều này nghĩa là $\mathbf{r}'$ liên tục và $\mathbf{r}'(t) \neq 0$. Xem Mục 13.3]. Nếu ta chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ $[t_{i-1}, t_i]$ có chiều rộng bằng nhau và ta đặt $x_i = x(t_i)$ và $y_i = y(t_i)$, khi đó các điểm tương ứng $P_i(x_i, y_i)$ chia C thành n cung nhỏ khác nhau có chiều dài tương ứng là $\triangle s_1, \triangle s_2, ..., \triangle s_n$. (Xem hình 16.2.1). Ta chọn một điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ bất kỳ trên cung thứ i (nó tương ứng với một điểm t_i^* trong đoạn $[t_{i-1}, t_i]$). Nếu f là một hàm bất kỳ có miền xác định chứa trong đường cong C, ta tính giá trị f tại điểm (x_i^*, y_i^*) và nhân với độ dài $\triangle s_i$, và lấy tổng sau:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \triangle s$$

và tổng này tương tự với một tổng Riemann. Tiếp theo ta lấy giới hạn của các tổng này và đưa ra định nghĩa tương tự như tích phân một lớp thông thường.



Hình 16.2.1

Định nghĩa 16.3. Nếu f xác định trên một đường cong trơn C cho bởi phương trình (16.2.1), khi đó **tích phân đường của f trên C** là:

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\triangle s$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Trong Mục 10.2 ta có độ dài đường cong C được cho bởi:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Lập luận tương tự ta cũng có thể chỉ ra rằng, nếu f là hàm liên tục thì giới hạn trong ịnh nghĩa 16.3 luôn tồn tại và công thức sau đây được áp dụng để tính tích phân đường:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \qquad (16.2.2)$$

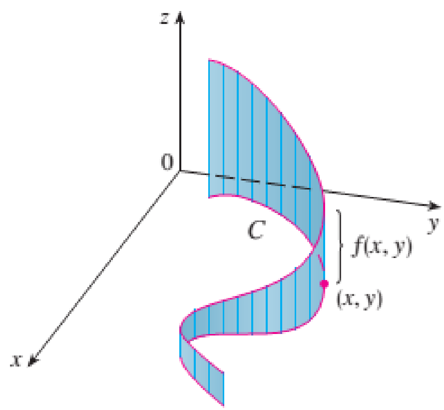
Giá trị của tích phân đường không phụ thuộc vào các tham số của đường cong, với điều kiện là đường cong đi qua đúng một lần khi t tăng từ a đến b.

Nếu $s(t)$ là độ dài của C giữa $\mathbf{r}(a)$ và $\mathbf{r}(t)$, thì:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Do vậy, một cách để nhớ công thức (16.2.2) là biểu diễn tất cả dưới dạng tham số t: sử dụng phương trình tham số để biểu diễn x và y theo t và viết ds như sau:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$



Hình 16.2.2

Trong trường hợp đặc biệt, khi C là một đoạn thẳng nối giữa hai điểm $(a, 0)$ và $(b, 0)$, xem x như một tham số, ta viết phương trình tham số của C như sau: $x = x, y = 0, a \leqslant x \leqslant b$. Công thức (16.2.2) thành:

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x, 0)dx$$

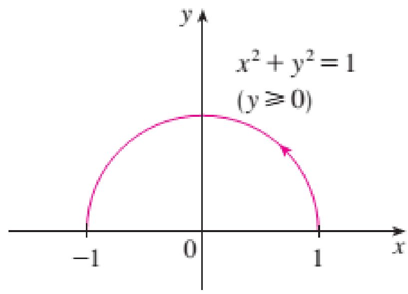
và khi đó tích phân đường trở thành tích phân 1 lớp thông thường.

Cũng giống như tích phân một lớp thông thường, ta có thể định nghĩa tích phân đường của một hàm *dương* là diện tích hình phẳng. Thật ra, nếu $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)ds$ biểu diễn diện tích một bên của "lá chắn" hoặc "màn che" trong Hình 16.2.2, mà cơ sở của nó là C và chiều cao trên điểm (x, y) là $f(x, y)$.

Ví dụ 1. Hãy tính $\int_C (2 + x^2 y)ds$, trong đó C là nửa trên của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$.

Giải Để sử dụng công thức (16.2.2), đầu tiên ta cần có phương trình tham số của C. Nhắc lại rằng đường tròn đơn vị có thể được tham số bởi hệ phương trình:

$$x = \cos t \qquad y = \sin t$$



Hình 16.2.3

và nửa trên của đường tròn được mô tả bởi khoảng tham số $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (Xem Hình 16.2.3). Do đó, công thức (16.2.2) thành:

$$\begin{aligned}
\int_C (2 + x^2 y)ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi \\
&= 2\pi + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

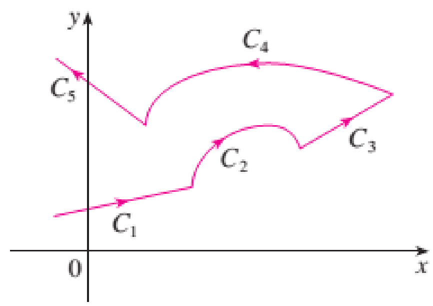
Giả sử rằng C là **đường cong trơn từng khúc**, nghĩa là, C hợp của hữu hạn các đường cong trơn $C_1, C_2, ..., C_n$, trong đó, như minh họa ở Hình 16.2.4, điểm đầu của C_{i+1} là điểm cuối của C_i. Khi đó ta định nghĩa tích phân của f trên C là tổng tích phân của f trên mỗi đường cong trơn của C:

$$\int_C f(x, y)ds = \int_{C_1} f(x, y)ds + \int_{C_2} f(x, y)ds + ... + \int_{C_n} f(x, y)ds$$

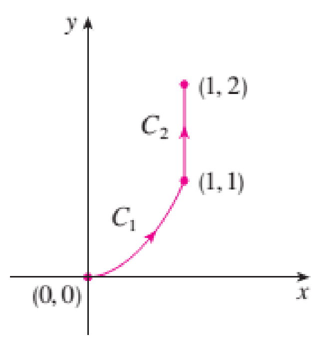
Ví dụ 2. Hãy tính $\int_C 2x ds$, trong đó C chứa cung C_1 của parabol $y = x^2$ từ điểm $(0, 0)$ đến $(1, 1)$ cho bởi đoạn thẳng đứng C_2 từ điểm $(1, 1)$ đến $(1, 2)$.

Giải Đường cong C được phác họa trong Hình 16.2.5. C_1 là đồ thị của một hàm theo x, vậy ta có thể chọn x làm tham số và phương trình C_1 trở thành:

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$



Hình 16.2.4: Một đường cong trơn từng khúc.



Hình 16.2.5: $C = C_1 \cup C_2$

Do đó

$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dx = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}dx$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{3/2}|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

Trên C_2 ta chọn y làm tham số, và phương trình của C_2 là:

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

và

$$\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dy = \int_1^2 2ydy = 2$$

Vậy,

$$\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

Bất kỳ sự giải thích vật lý nào về tích phân đường $\int_C f(x,y)ds$ đều phụ thuộc vào sự giải thích của hàm f. Giả sử $\rho(x,y)$ là hàm trù mật tuyến tính tại một điểm (x,y) của một sợi dây mỏng có hình dạng như một đường cong C. Khi đó khối lượng một phần của sợi dây từ P_{i-1} đến P_i trong Hình 16.2.1 được xấp xỉ $\rho(x_i^*, y_i^*)\triangle s_i$ và tổng khối lượng của sợi dây được xấp xỉ là $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\triangle s_i$. Bằng cách chọn càng nhiều điểm trên đường cong, ta có được **khối lượng** m của sợi dây là giới hạn của các giá trị xấp xỉ này:

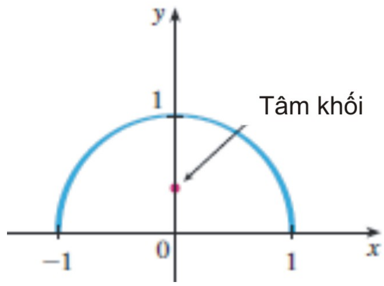
$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\triangle s_i = \int_C \rho(x,y)ds$$

[Ví dụ, nếu $f(x,y) = 2 + x^2y$ là hàm trù mật của một sợi dây hình bán nguyệt, khi đó tích phân trong Ví dụ 1 cho ta khối lượng của sợi dây]. **Tâm khối** của sợi dây với hàm trù mật ρ được đặt tại điểm $(\bar{x}, \bar{y})$, trong đó:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds \tag{16.2.3}$$

Những lời giải thích vật lý khác của tích phân đường sẽ được thảo luận sau trong chương này.

Ví dụ 3. Một sợi dây có dạng nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ và ở phía đáy là dày hơn phía đầu của nó. Tìm tâm khối của sợi dây nếu hàm mật độ tuyến tính tại một điểm bất kỳ tỷ lệ với khoảng cách của nó với đường thẳng $y = 1$.



Hình 16.2.6

Giải Như trong ví dụ 1 ta áp dụng phương trình tham số $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$ và ta có $ds = dt$. Hàm mật độ tuyến tính là:

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

trong đó k là hằng số, và do đó khối lượng của dây là:

$$m = \int_C k(1 - y)ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t)dt = k\left[t + \cos t\right]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Từ phương trình (16.2.3) ta có:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C yk(1 - y)ds \\ &= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t)dt = \frac{1}{\pi - 2}\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi \\ &= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\end{aligned}$$

Từ sự đối xứng ta thấy rằng $\bar{x} = 0$, do đó tâm khối là điểm:

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0.38)$$

Xem Hình 16.2.6.

Hai loại tích phân đường khác cũng được đưa ra bằng cách thay thế $\triangle s_i$ bởi $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ hoặc $\triangle y_i = y_i - y_{i-1}$ trong ịnh nghĩa 16.3. Chúng được gọi là **tích phân đường của f trên C theo x và y**:

$$\int_C f(x, y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\triangle x_i \tag{16.2.4}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\triangle y_i \tag{16.2.5}$$

Khi ta muốn phân biệt tích phân đường nguyên thủy $\int_C f(x,y)ds$ với các tích phân trong (16.2.4) và (16.2.5), ta gọi nó là **tích phân đường theo chiều dài cung**.

Các công thức sau đây nói rằng các tích phân đường theo x và y cũng có thể được tính bằng cách biểu diễn mọi thứ theo t: $x = x(t), y = y(t)$, $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$.

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt \tag{16.2.6}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt \tag{16.2.7}$$

Thường xuyên xảy ra trường hợp tích phân đường theo x và y cùng nhau, khi đó ta có thể viết:

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Khi ta thiết lập một tích phân đường, đôi khi điều khó khăn nhất đó là làm sao biểu diễn một đường cong với các mô tả hình học cho trước dưới dạng tham số. Đặc biệt, ta cần tham số hoá một đoạn thẳng, nên nhớ rằng biểu diễn vectơ của một đoạn thẳng điểm đầu là $\mathbf{r}_0$ và điểm cuối $\mathbf{r}_1$ được cho bởi công thức:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{16.2.8}$$

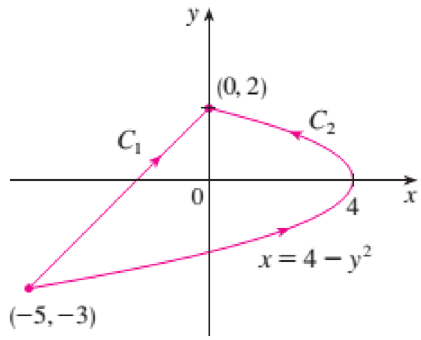
(Xem phương trình 12.5.4.)

Ví dụ 4. Hãy tính $\int_C y^2dx + xdy$, trong đó (a) $C = C_1$ là đoạn thẳng nối từ điểm $(-5,-3)$ đến $(0,2)$ và (b) $C = C_2$ là một cung của parabol $x = 4 - y^2$ nối từ điểm $(-5,-3)$ đến $(0,2)$. (Xem Hình 16.2.7).

Giải (a) Biểu diễn tham số cuả đoạn thẳng là:

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Áp dụng công thức (16.2.8) với $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3\rangle$ và $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2\rangle$.) Khi đó $dx = 5dt$, $dy = 5dt$



Hình 16.2.7

và các công thức (16.2.6) và (16.2.7) ta có:

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2dx + xdy &= \int_0^1 (5t-3)^2(5dt) + (5t-5)(5dt)\\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)dt\\ &= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right] = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

(b) Do phương trình parabol được cho bởi một hàm số theo y, chọn y là tham số và viết C_2 dưới dạng:

$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Khi đó $dx = -2ydy$ và theo công thức (16.2.6) và (16.2.7) ta có:

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2dx + xdy &= \int_{-3}^2 y^2(-2y)dy + (4-y^2)dy\\ &= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)dy\\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Chú ý rằng ta có những lời giải khác nhau trong phần (a) và (b) của ví dụ 4 mặc dù hai đường cong có cùng các điểm đầu mút. Như vậy, nhìn chung, giá trị của một tích phân đường phụ thuộc không chỉ vào các điểm đầu mút của đường cong mà còn vào đường nối giữa chúng nữa. (Tuy nhiên, xem Mục 16.3 ta có các điều kiện mà tích phân là độc lập với đường nối).

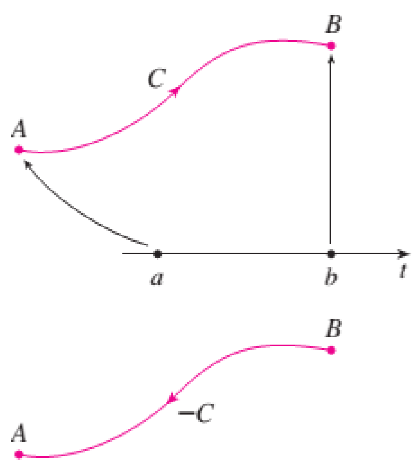
Cũng cần chú ý rằng các lời giải trong Ví dụ 4 phụ thuộc vào phương, hoặc hướng của đường cong. Nếu $-C_1$ biểu thị đoạn thẳng nối từ điểm $(0, 2)$ đến $(-5, -3)$, bạn có thể kiểm tra, bằng cách áp dụng phương trình tham số:

$$x = -5t \quad y = 2 - 5t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

mà

$$\int_{-C_1} y^2 dx + x dy = \frac{5}{6}$$

Nói chung, một phương trình tham số cho trước $x = x(t), y = y(t), a \leqslant t \leqslant b$, xác định **hướng** của đường cong C, với phương dương tương ứng với giá trị t tăng dần. (Xem Hình 16.2.8, trong đó điểm đầu A ứng với giá trị tham số a và điểm cuối B ứng với $t = b$).



Hình 16.2.8

Nếu $-C$ biểu diễn một đường cong chứa các điểm giống nhau với C nhưng ở hướng đối diện (từ điểm đầu B đến điểm cuối A trong Hình 16.2.8), khi đó ta có:

$$\int_{-C} f(x, y) dx = -\int_C f(x, y) dx \qquad \int_{-C} f(x, y) dy = -\int_C f(x, y) dy$$

Tuy nhiên nếu ta lấy tích phân theo độ dài cung, thì giá trị của tích phân đường *không* thay đổi khi ta đảo ngược hướng của đường cong:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

Điều này là bởi vì $\triangle s_i$ luôn luôn dương, trong khi đó $\triangle x_i$ và $\triangle y_i$ đổi dấu khi ta đảo ngược hướng của đường cong C.

Tích Phân Đường trong Không Gian

Ta giả sử rằng C là một đường cong trơn trong không gian được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leqslant t \leqslant b$$

hoặc bởi phương trình vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Nếu f là một hàm ba biến số liên tục trên một miền nào đó chứa C, khi đó ta định nghĩa **tích phân đường của f trên C** (theo độ dài cung) một cách tương tự như trong đường cong phẳng:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\triangle s_i$$

Ta tính tích phân này bằng cách áp dụng công thức tương tự như công thức (16.2.2):

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt \qquad (16.2.9)$$

Ta quan sát rằng các tích phân trong cả hai công thức (16.2.2) và (16.2.9) có thể được viết bằng các ký hiệu vectơ gọn hơn:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)dt$$

Trong trường hợp đặc biệt $f(x,y,z) = 1$, ta được:

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt = L$$

trong đó L là chiều dài của đường cong C (xem công thức 13.3.3).

Tích phân đường trên C tương ứng theo x, y và z cũng được định nghĩa như thế. Chẳng hạn,

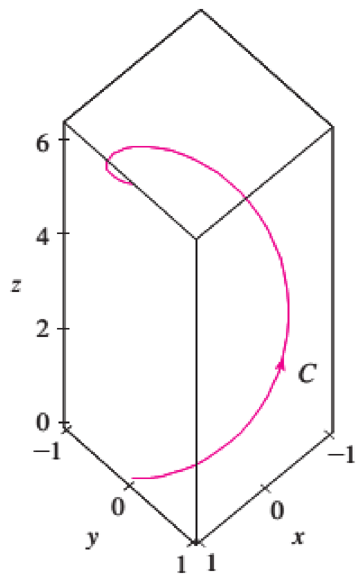
$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)ds &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\triangle z_i \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\end{aligned}$$

Do đó, tương tự như tích phân đường trong mặt phẳng, ta viết các tích phân dưới dạng:

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{16.2.10}$$

bằng cách biểu diễn tất cả (x, y, z, dx, dy, dz) theo tham số t.

Ví dụ 5. Hãy tính $\int_C y\sin z ds$, trong đó C là hình xoắn tròn được cho bởi phương trình: $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (Xem Hình 16.2.9).

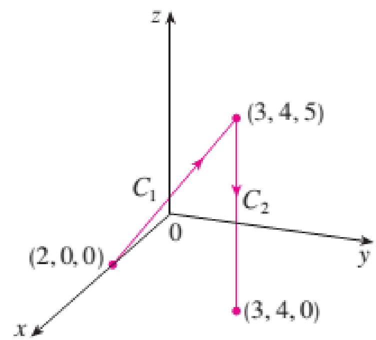


Hình 16.2.9

Giải Công thức (16.2.9) cho ta:

$$\begin{aligned}\int_C y\sin z ds &= \int_0^{2\pi} (\sin t)\sin t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

Ví dụ 6. Hãy tính $\int_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C gồm hai đoạn thẳng C_1 từ điểm $(2, 0, 0)$ đến điểm $(3, 4, 5)$, và nối tiếp đoạn thẳng đứng C_2 từ điểm $(3, 4, 5)$ đến điểm $(3, 4, 0)$.



Hình 16.2.10

Giải Đường cong C được chỉ ra trong Hình 16.2.10. Áp dụng phương trình (16.2.8) ta viết C_1 dưới dạng:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 2, 0, 0\rangle + t\langle 3, 4, 5\rangle = \langle 2+t, 4t, 5t\rangle$$

hoặc, dưới dạng tham số:

$$x = 2+t \quad y = 4t \quad z = 5t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Vậy,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} ydx + zdy + xdz &= \int_0^1 (4t)dt + (5t)4dt + (2+t)5dt \\ &= \int_0^1 (10+29t)dt = \left[10t + 29\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 24.5\end{aligned}$$

Tương tự, C_2 được viết dưới dạng:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 3, 4, 5\rangle + t\langle 3, 4, 0\rangle = \langle 3, 4, 5-5t\rangle$$

hoặc

$$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5-5t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Khi đó $dx = 0 = dy$, vậy,

$$\int_{C_2} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 3(-5)dt = -15$$

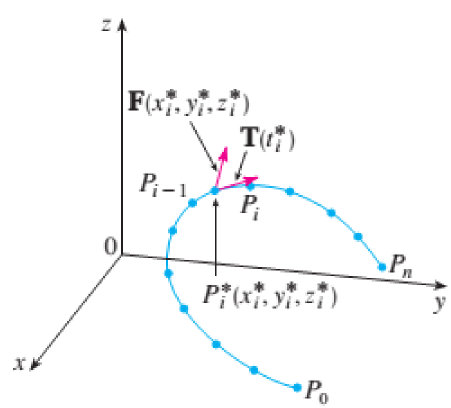
Cộng các giá trị tích phân này với nhau, ta được

$$\int_C ydx + zdy + xdz = 24.5 - 15 = 9.5$$

Tích Phân Đường trong Trường Vectơ

Nhắc lại từ Mục 5.4 rằng công thực hiện bởi lực một biến $f(x)$ khi di chuyển một chất điểm từ a đến b dọc theo trục x là $W = \int_a^b f(x)dx$. Khi đó trong Mục 12.3 ta tìm thấy rằng công thực hiện bởi một lực không đổi $\mathbf{F}$ trong khi di chuyển một vật từ một điểm P đến một điểm khác Q trong không gian là $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, với $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ là vectơ tịnh tiến.

Bây giờ ta giả sử rằng $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường lực liên tục trên $\mathbb{R}^3$, chẳng hạn như trường hấp dẫn trong ví dụ 4 trong Mục 16.1 hay trường lực điện của Ví dụ 5 trong Mục 16.1. (Một trường lực trên $\mathbb{R}^2$ có thể được coi là một trường hợp đặc biệt trong đó $R = 0$ và P, Q chỉ phụ thuộc vào x và y). Ta muốn tính toán công thực hiện bởi lực này khi di chuyển một chất điểm dọc theo đường cong trơn C.



Hình 16.2.11

Ta chia C thành các cung nhỏ $P_{i-1}P_i$ với chiều dài $\triangle s_i$ bằng cách chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ có chiều dài bằng nhau. (Xem Hình 16.2.1 cho trường hợp hai chiều hoặc Hình 16.2.11 trong trường hợp ba chiều). Chọn một điểm $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ trên cung nhỏ thứ i ứng với giá trị tham số t_i^*. Nếu $\triangle s_i$ nhỏ thì chất điểm di chuyển từ điểm P_{i-1}^* đến P_i^*

trên đường cong, nó tiếp tục di chuyển xấp xỉ theo phương của $\mathbf{T}(t_i^*)$, là vectơ tiếp tuyến tại P_i^*. Do vậy, sự tác động bởi lực $\mathbf{F}$ trong khi một chất điểm di chuyển từ P_{i-1}^* đến P_i^* được xấp xỉ bởi:

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\triangle s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\triangle s_i$$

và tổng công thực hiện trong khi chất điểm đó di chuyển dọc C được xấp xỉ:

$$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\triangle s_i \tag{16.2.11}$$

trong đó $\mathbf{T}(x, y, z)$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị tại điểm (x, y, z) trên C. Bằng trực giác, ta thấy rằng các xấp xỉ này càng tốt nếu n càng lớn. Do đó, ta ịnh nghĩa **công** W thực hiện bởi trường lực $\mathbf{F}$ là giới hạn của tổng Riemann trong (16.2.11), nghĩa là,

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \tag{16.2.12}$$

Phương trình (16.2.12) nói rằng*công là tích phân đường ứng với độ dài cung của các thành phần của vectơ tiếp tuyến của lực.*

Nếu đường cong C được cho bởi phương trình vectơ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, thì $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}(t)|$, nên áp dụng phương trình (16.2.9) ta có thể viết phương trình (16.2.12) dưới dạng:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Tích phân này thường được viết tắt là $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ và được tìm thấy ở các lĩnh vực khác nhau của ngành vật lý. Do đó, ta đưa ra các định nghĩa của tích phân đường cho *mọi* trường vectơ liên tục sau đây:

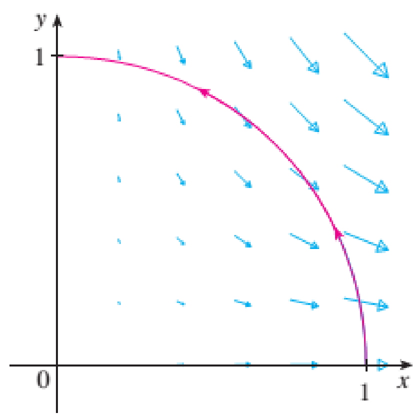
Định nghĩa 16.4. Cho $\mathbf{F}$ là một trường vectơ liên tục xác định trên một đường cong trơn C được cho bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$. Khi đó, **tích phân đường của** F **trên** C là:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

Khi áp dụng ịnh nghĩa 16.4, ta nhớ rằng $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ chỉ là cách viết tắt của $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, nên ta tính được $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ đơn giản bằng cách đặt $x = x(t), y = y(t), z =$

$z(t)$ trong biểu thức $\mathbf{F}(x, y, z)$. Cần lưu ý rằng ta có thể viết một cách hình thức là $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$.

Ví dụ 7. Hãy tìm công thực hiện bởi một trường lực $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ khi một chất điểm di chuyển trên một phần tư đường tròn $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.



Hình 16.2.12: Trường lực và đường cong trong Ví dụ 7 . Công thực hiện âm bởi vì trường cản trở chuyển động dọc theo đường cong.

Giải Do $x = \cos t$ và $y = \sin t$ nên ta có:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\mathbf{i} - \cos t \sin t\mathbf{j}$$

và

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Do đó công thực hiện được tính bởi:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t)dt \\ &= 2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

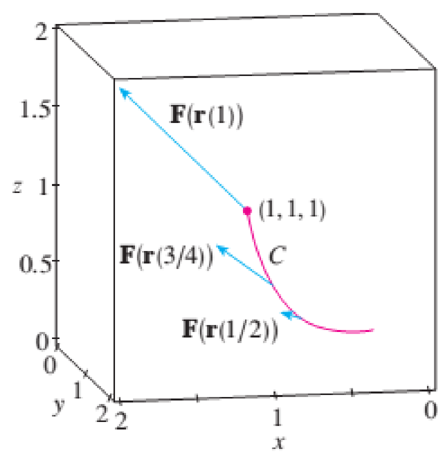
Lưu ý 1. *Mặc dù* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds$ *và tích phân ứng với độ dài cung là không đổi khi ta lấy hướng ngược lại, ta vẫn có*

$$\int_{-C} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

bởi vì vectơ tiếp tuyến đơn vị $\boldsymbol{T}$ *được thay bởi đối của nó khi* C *được thay bởi* $-C$.

Ví dụ 8. Hãy tính $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, trong đó $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$ và C là một cubic xoắn được cho bởi:

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$



Hình 16.2.13: Các khối xoắn C trong Ví dụ 8 và vài vectơ điển hình tại ba điểm trên C.

Giải Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \\
\mathbf{r}'(t) &= \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Vậy,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right]_0^1 = \frac{27}{28}
\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta nhận thấy mối liên hệ giữa tích phân đường của trường vectơ và tích phân đường của trường vô hướng. Giả sử rằng trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Ta áp dụng định nghĩa 16.4 để tính tích phân đường trên C:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt\\ &= \int_a^b (P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})\cdot(x'(t)\mathbf{i}+y'(t)\mathbf{j}+z'(t)\mathbf{k})dt\\ &= \int_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt\end{aligned}$$

Nhưng tích phân sau cùng chính là tích phân đường trong (16.2.10). Vậy ta có

$$\boxed{\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz, \text{ trong đó } \mathbf{F} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}}$$

Ví dụ, tích phân $\int_C ydx + zdy + xdz$ trong ví dụ 6 có thể được biểu diễn thành $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ trong đó

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

Bài tập 16.2. .

1-16 *Hãy tính các tích phân đường sau đây, trong đó C là đường cong cho trước.*

1. $\int_C y^3 ds$, $\quad C : x = t^3, y = t, 0 \leqslant t \leqslant 2.$

2. $\int_C xyds$, $\quad C : x = t^2, y = 2t, 0 \leqslant t \leqslant 1.$

3 $\int_C xy^4 ds$, $\quad$ *C là nửa bên phải của đường tròn* $x^2 + y^2 = 16$

4. $\int_C x\sin y ds$, $\quad$ *C là đoạn thẳng nối từ điểm* $(0,3)$ *đến* $(4,6)$

5. $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$, $\quad$ *C là một cung của đường cong* $y = \sqrt{x}$ *nối từ điểm* $(1,1)$ *đến* $(4,2)$.

6. $\int_C e^x dx$, $\quad$ *C là một cung của đường cong* $x = y^3$ *từ điểm* $(-1,-1)$ *đến* $(1,1)$.

7 $\int_C (x+2y)dx + x^2dy$, $\quad$ *C chứa các đoạn thẳng từ* $(0,0)$ *đến* $(2,1)$ *và từ* $(2,1)$ *đến* $(3,0)$.

8. $\int_C x^2dx + y^2dy$, C chứa một cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ từ điểm $(2,0)$ đến $(0,2)$ nối tiếp đoạn thẳng từ điểm $(0,2)$ đến $(4,3)$.

9. $\int_C xyzds$, $C : x = 2\sin t, y = t, z = -2\cos t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int_C xyz^2ds$, C là đoạn thẳng từ điểm $(-1,5,0)$ đến $(1,6,4)$.

11. $\int_C xe^{yz}ds$, C là đoạn thẳng từ điểm $(0,0,0)$ đến $(1,2,3)$.

12. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)ds$, $C : x = t, y = \cos 2t, z = \sin 2t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

13. $\int_C xye^{yz}dy$, $C : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

14. $\int_C ydx + zdy + xdz$, $C : x = \sqrt{t}, y = t, z = t^2, 1 \leqslant t \leqslant 4$.

15. $\int_C z^2dx + x^2dy + y^2dz$, C là đoạn thẳng từ điểm $(1,0,0)$ đến $(4,1,2)$.

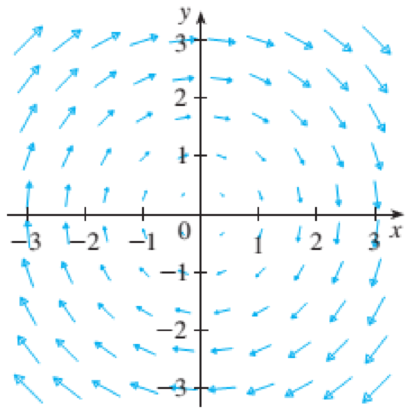
16. $\int_C (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, C chứa đoạn thẳng từ điểm $(0,0,0)$ đến $(1,0,1)$ và từ điểm $(1,0,1)$ đến $(0,1,2)$.

---

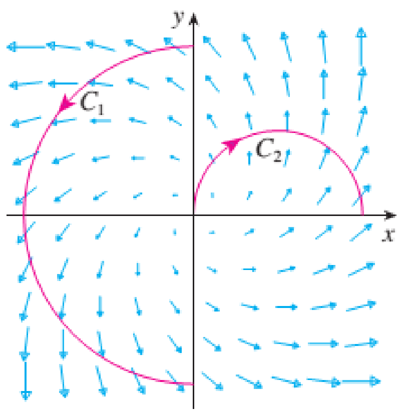
17. Cho $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ được chỉ ra trong hình.

(a) Nếu C_1 là một đoạn thẳng đứng từ điểm $(-3,-3)$ đến $(-3,3)$, hãy xác định xem $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ là dương, âm hay bằng không.

(b) Nếu C_2 là một đường tròn có hướng ngược chiều kim đồng hồ với bán kính 3 và tâm tại điểm gốc, hãy xác định xem $\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ là dương, âm hay bằng không.



12. Hình dưới đây chỉ ra một trường vectơ $\boldsymbol{F}$ *và hai đường cong* C_1 *và* C_2*. Các tích phân đường của* $\boldsymbol{F}$ *trên* C_1 *và* C_2 *là dương, âm hay bằng không.*



19-22 *Hãy tính các tích phân đường* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$*, trong đó* C *được cho bởi hàm vectơ* $\boldsymbol{r}(t)$*.*

19. $\boldsymbol{F}(x, y) = xy\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{r}(t) = 11t^4\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

20. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y)\boldsymbol{i} + (y - z)\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

21. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \sin x\boldsymbol{i} + \cos y\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}(t) = t^3\boldsymbol{i} - t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

23-26 *Hãy sử dụng máy tính hoặc CAS để tính các tính phân đường sau chính xác đến bốn chữ số thập phân.*

23. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y) = xy\boldsymbol{i} + \sin y\boldsymbol{j}$ *và* $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + e^{-t^2}\boldsymbol{j}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$.

24. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\sin z\boldsymbol{i} + z\sin x\boldsymbol{j} + x\sin y\boldsymbol{k}$ *và* $\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + \sin 5t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

25. $\displaystyle\int_C x\sin(y+z)ds$, *trong đó* C *có phương trình tham số là* $x = t^2, y = t^3, z = t^4, 0 \leqslant t \leqslant 5$.

26. $\displaystyle\int_C ze^{-xy}ds$, *trong đó* C *có phương trình tham số là* $x = t, y = t^2, z = e^{-t}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

27-28 *Hãy sử dụng một đồ thị của trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *và đường cong* C *để đoán rằng tích phân đường của* $\boldsymbol{F}$ *trên* C *là dương, âm hay bằng không. Sau đó hãy tính tích phân đường đó.*

27. $\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$, C *là một cung của đường tròn* $x^2+y^2 = 4$ *đi ngược chiều kim đồng hồ từ điểm* $(2,0)$ *đến* $(0,-2)$.

28. $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j$, C *là parabol* $y = 1+x^2$ *từ điểm* $(-1,2)$ *đến* $(1,2)$.

---

29. (a) *Hãy tính tích phân đường* $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y) = e^{x-1}\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$ *và* C *được cho bởi* $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

    (b) *Hãy phác họa câu (a) bằng cách sử dụng một máy tính đồ họa hoặc một máy vi tính để vẽ đồ thị của* C *và các vectơ trong trường vectơ ứng với* $t = 0, 1/\sqrt{2}$ *và 1 (như Hình 16.2.13).*

30. (a) *Hãy tính tích phân đường* $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ *và* C *được cho bởi* $\boldsymbol{r}(t) = 2t\boldsymbol{i} + 3t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}, -1 \leqslant t \leqslant 1$.

    (b) *Hãy phác họa câu (a) bằng cách sử dụng một máy tính đồ họa hoặc một máy vi tính để vẽ đồ thị của* C *và các vectơ trong trường vectơ ứng với* $t = \pm 1$ *và* $\pm\dfrac{1}{2}$ *(như Hình 16.2.13).*

31. *Hãy tìm giá trị chính xác của* $\int_C x^3y^2z ds$*, trong đó* C *là đường cong với phương trình tham số* $x = e^{-t}\cos 4t, y = e^{-t}\sin 4t, z = e^{-t}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) *Tìm công thực hiện bởi trường lực* $\boldsymbol{F}(x,y) = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$ *khi một chất điểm di chuyển một lần quanh đường tròn* $x^2 + y^2 = 4$ *ngược hướng chiều kim đồng hồ.*

    (b) *Hãy sử dụng một hệ thống máy tính để vẽ đồ thị trường lực này và đường tròn đó trên cùng một ảnh. Hãy dựa vào đồ thị để giải thích cho câu trả lời của câu (a) trên.*

33. *Một sợi dây mỏng được uốn cong thành hình dạng của một hình bán nguyệt* $x^2 + y^2 = 4, x \geqslant 0$. *Nếu mật độ tuyến tính là một hằng số* k*, hãy tìm khối lượng và tâm khối của sợi dây đó.*

34. *Một sợi dây mỏng có hình dạng phần tư thứ nhất của đường tròn có tâm tại gốc và bán kính* a*. Giả sử hàm mật độ là* $\rho(x,y) = kxy$*, hãy tìm khối lượng và tâm khối của sợi dây đó.*

35. (a) *Hãy viết các công thức tương tự như phương trình* (16.1.2) *với tâm khối là* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ *của một sợi dây mỏng có hình dạng của một đường cong* C *trong không gian nếu sợi dây này có hàm mật độ* $\rho(x,y,z)$.

    (b) *Hãy tìm tâm khối của một sợi dây có hình trôn ốc* $x = 2\sin t, y = 2\cos t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*, nếu mật độ là một hằng số* k.

36. *Hãy tìm khối lượng và tâm khối của một sợi dây có hình trôn ốc* $x = t, y\cos t, z = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*, nếu mật độ tại một điểm bất kỳ bằng bình phương khoảng cách đến điểm gốc.*

37. *Nếu một sợi dây có hàm mật độ tuyến tính* $\rho(x,y)$ *dọc theo đường cong phẳng* C*, với* ***mô-men quán tính*** *của nó theo trục* x *và* y *xác định bởi:*

$$I_x = \int_C y^2\rho(x,y)ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x,y)ds$$

Hãy tìm mô-men quán tính của sợi dây đó trong ví dụ 3 .

38. *Nếu một sợi dây có hàm mật độ tuyến tính* $\rho(x,y,z)$ *dọc theo một đường cong* C

trong không gian, với ***mô-men quán tính*** *của nó theo trục x, y và z xác định bởi:*

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$$
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)ds$$

Hãy tìm mô-men quán tính của sợi dây đó trong bài tập 35.

39. Hãy tìm công thực hiện bởi trường lực $\boldsymbol{F}(x, y) = x\boldsymbol{i} + (y + 2)\boldsymbol{j}$ khi một thể di chuyển dọc một nhịp của đường cycloid $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Hãy tìm công thực hiện bởi trường lực $\boldsymbol{F}(x, y) = x^2\boldsymbol{i} + ye^x\boldsymbol{j}$ khi một chất điểm di chuyển dọc đường parabol $x^2 = y + 1$ từ điểm $(1, 0)$ đến $(2, 1)$.

40. Hãy tìm công thực hiện bởi trường lực $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \langle x - y^2, y - z^2, z - x^2\rangle$ khi một chất điểm di chuyển dọc một đoạn thẳng từ điểm $(0, 0, 1)$ đến $(2, 1, 0)$.

41. Lực tác động của một điện tích đặt tại điểm gốc với một điện tích khác đặt tại một điểm (x, y, z) có vectơ tọa độ $\boldsymbol{r} = \langle x, y, z\rangle$ là $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = K\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ trong đó K là một hằng số. (Xem ví dụ 5 trong Mục 16.1) Hãy tìm công thực hiện bởi một chất điểm di chuyển dọc theo đoạn thẳng từ điểm $(2, 0, 0)$ đến $(2, 1, 5)$.

42. Toạ độ của một vật có khối lượng m tại thời điểm t là $\boldsymbol{r}(t) = at^2\boldsymbol{i} + bt^3\boldsymbol{j}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

(a) Lực tác động lên vật tại thời điểm t là bao nhiêu?

(b) Công thực hiện bởi lực này trong khoảng thời gian $0 \leqslant t \leqslant 1$ là bao nhiêu?

43. Một vật có khối lượng m di chuyển với hàm tọa độ $\boldsymbol{r}(t) = a\sin t\boldsymbol{i} + b\cos t\boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Hãy tìm công thực hiện lên vật này trong khoảng thời gian trên.

45. Một người đàn ông nặng 160 pounds mang một thùng sơn nặng 25 pounds lên một cầu thang xoắn bao quanh một đường hầm với bán kính 20ft. Nếu đường hầm có chiều cao 90ft và người đó leo chính xác ba lần lên tới đỉnh, vậy thì công cản của người đó với trọng lực là bao nhiêu?

46. Giả sử có một lỗ hổng bên trong hộp sơn trong bài tập 45 và khoảng 9 pounds sơn ró rỉ đều đặn ra khỏi lon trong quá trình người đó đi lên. Vậy công thực hiện là bao nhiêu?

47. *(a) Hãy chỉ ra rằng một trường lực hằng có công thực hiện bằng không khi một chất điểm di chuyển một lần xung quanh đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Điều này có còn đúng không khi trường lực $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x}$, *trong đó* k *là một hằng số và* $\boldsymbol{x} = \langle x, y \rangle$?

48. Cơ sở của một hàng rào tròn có bán kính 10m được cho bởi $x = 10\cos t, y = 10\sin t$. *Chiều cao của hàng rào tại điểm* (x, y) *được cho bởi* $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, *vậy chiều cao thay đổi từ 3 đến 5 mét. Giả sử 1 lít sơn sơn được* $100m^2$. *Hãy phác họa hàng rào đó và xác định số lượng sơn ta cần để sơn cả hai mặt của hàng rào đó.*

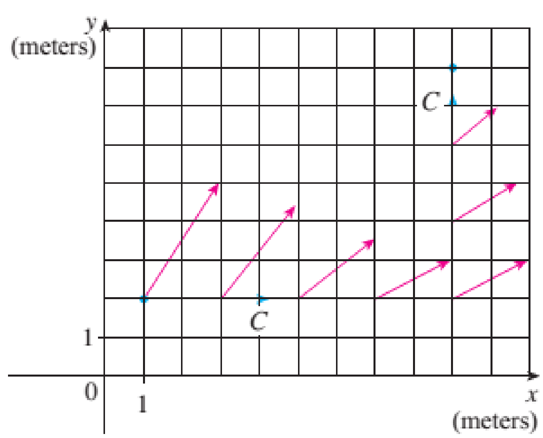
49. Nếu C *là một đường cong trơn được cho bởi một hàm vectơ* $\boldsymbol{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$, *và* $\boldsymbol{v}$ *là một vectơ hằng, hãy chỉ ra rằng:*

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot [\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)]$$

50. Nếu C *là một đường cong trơn được cho bởi một hàm vectơ* $\boldsymbol{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$, *và* $\boldsymbol{v}$ *là một vectơ hằng, hãy chỉ ra rằng:*

$$\int_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\left[|\boldsymbol{r}(b)|^2 - |\boldsymbol{r}(a)|^2\right]$$

51. Một vật di chuyển dọc đường cong C *được chỉ ra trong hình từ điểm* $(1, 2)$ *đến* $(9, 8)$. *Độ dài của các vectơ trong trường lực* $\boldsymbol{F}$ *được đo bằng Newton theo tỷ lệ trên các trục. Hãy tính công thực hiện bởi* $\boldsymbol{F}$ *lên vật đó.*

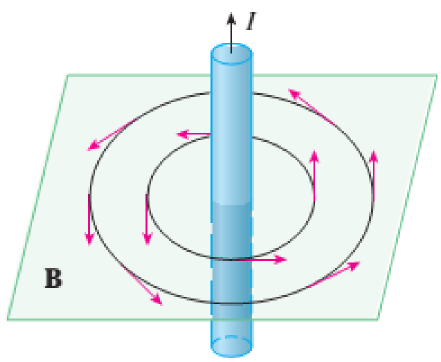


52. Thực nghiệm chỉ ra rằng một dòng điện ổn định I *tren một sợi dây dài sinh ra một từ trường* $\boldsymbol{B}$ *là tiếp tuyến của mọi đường tròn nằm trên mặt phẳng vuông góc với* *sợi dây đó và tâm trên trục của dây (như trên hình).* Định luật Ampère *liên hệ giữa dòng điện và hiệu ứng từ trường:*

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I$$

trong đó I là dòng điện tổng hợp đi qua một mặt bất kỳ bị chặn bởi đường cong kín C, và μ_0 là một hằng số gọi là độ thấm từ trong không gian. Bằng cách lấy C là một đường tròn có bán kính r, hãy chỉ ra rằng độ lớn $B = |\boldsymbol{B}|$ của từ trường ở một khoảng cách r đến tâm của sợi dây là

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 Định Lý Cơ Bản của Tích Phân Đường

Nhắc lại trong Mục 4.3 rằng Phần 2 của Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân có thể viết

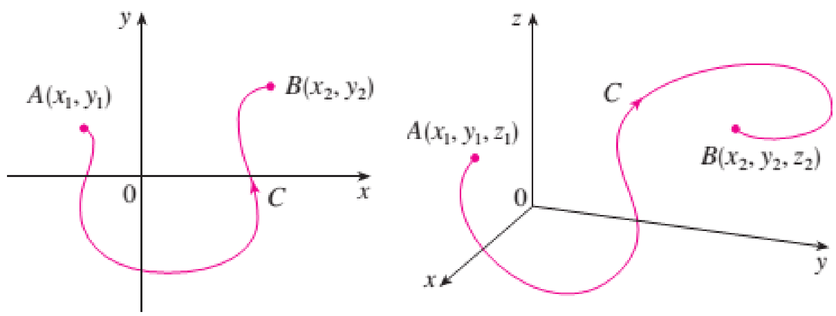
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \tag{16.3.1}$$

trong đó F' liên tục trên đoạn $[a, b]$. Ta cũng gọi phương trình (16.3.1) là định lý 'Net Change': Tích phân của tốc độ thay đổi là 'net change'.

Nếu ta xem vectơ gradient ∇f của một hàm f hai hoặc ba biến như là đạo hàm của f, khi đó định lý sau đây là một phiên bản của Định lý Cơ bản của Tích Phân Đường.

Định lý 16.1. *Cho C là một đường cong trơn được cho bởi hàm vectơ $\boldsymbol{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$. Cho f là một hàm khả vi hai hoặc ba biến mà vectơ gradient của nó ∇f liên tục trên C. Khi đó:*

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(b)) - f(\boldsymbol{r}(a))$$



Hình 16.3.1

Lưu ý 2. *Định lý 16.1 nói rằng ta có thể tính tích phân đường của một trường vectơ bảo toàn (trường vectơ gradient của hàm thế vị f) một cách đơn giản khi biết giá trị của f tại các điểm đầu mút của C. Thật ra, Định lý 16.1 nói rằng tích phân đường của ∇f là net change trong f. Nếu f là một hàm hai biến và C là một đường cong phẳng với điểm đầu $A(x_1, y_1)$ và điểm cuối $B(x_2, y_2)$, như trong Hình 16.3.1, Định lý 16.1 thành:*

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Nếu f là một hàm ba biến và C là một đường cong trong không gian nối giữa hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$, khi đó ta có

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_2)$$

Ta sẽ chứng minh Định lý 16.1 trong trường hợp này.

Chứng minh. **Chứng minh định lý 16.1**

Áp dụng ịnh nghĩa 16.4 ta có:

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))dt \quad \text{theo đạo hàm hàm hợp} \\ &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))\end{aligned}$$

Bước cuối cùng của chúng minh được suy ra bởi Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân (phương trình (16.3.1)). □

Dù ta đã chứng minh Định lý 16.1 cho trường hợp các đường cong trơn, tuy nhiên điều này cũng đúng cho các đường cong trơn từng khúc. Ta có thể dễ dàng chứng minh được bằng cách chia đường cong C thành hữu hạn các đường cong trơn và cộng các tích phân trên đó lại với nhau.

Ví dụ 1 Hãy tìm công thực hiện bởi trường lực hấp dẫn

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

khi một chất điểm có khối lượng m di chuyển trên một đường cong C trơn từng khúc từ điểm $(3, 4, 12)$ đến điểm $(2, 2, 0)$. (Xem Ví dụ 4 Mục 16.1). **Giải** Từ Mục 16.1 ta thấy rằng $\mathbf{F}$ là một trường vectơ bảo toàn và, thật ra, $\mathbf{F} = \nabla f$, trong đó,

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Do đó, theo ịnh lý 16.1, công thực hiện được tính bởi:

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)\end{aligned}$$

Sự độc lập đối với đường lấy tích phân

Giả sử C_1 và C_2 là hai đường cong trơn từng khúc (ta gọi là các **đường lấy tích phân**) và chúng có cùng điểm đầu A và điểm cuối B. Ta đã biết rằng trong ví dụ 4 từ Mục 16.2, tổng quát ta có $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Một hệ quả của ịnh lý 16.1:

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

trong đó ∇f liên tục. Nói cách khác, tích phân đường của một trường vectơ *bảo toàn* chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong mà nó đi qua.

Nói chung, nếu $\mathbf{F}$ là một trường vectơ liên tục trên miền D, ta nói rằng tích phân đường $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ là **độc lập với đường lấy tích phân** nếu $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ với hai đường C_1 và C_2 trong D mà có cùng điểm đầu và điểm cuối. Với thuật ngữ này, ta có thể nói rằng *tích phân đường của các trường vectơ bảo toàn là độc lập đối với đường lấy tích phân.*

Một đường cong được gọi là **đóng kín** nếu điểm cuối của nó trùng với điểm đầu, nghĩa là $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$. (Xem Hình 16.3.2). Nếu $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ là độc lập với đường lấy tích phân trong D và C là một đường bất kỳ trong D, ta có thể chọn hai điểm bất kỳ A và B trên C và xem C được tạo thành từ đường C_1 từ A đến B và đường C_2 từ B đến A. (Xem Hình 16.3.3). Khi đó

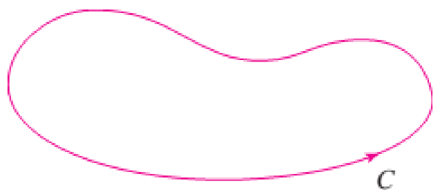
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

vì C_1 và $-C_2$ có cùng điểm đầu và điểm cuối.

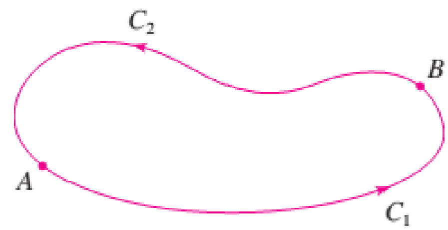
Ngược lại, nếu ta có $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ trong khi C là một đường cong kín trong D, thì ta sẽ chứng minh được sự độc lập đối với các đường sau đây. Lấy hai đường bất kỳ C_1 và C_2 từ A đến B trong D và đặt C là một đường cong tạo thành bởi hai đường cong C_1 và $-C_2$. Khi đó

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

và do đó $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Ta vừa chứng minh định lý sau đây.



Hình 16.3.2: Một đường cong đóng



Hình 16.3.3

Định lý 16.2. *$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ là độc lập với đường lấy tích phân trong D khi và chỉ khi $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ với mọi đường cong kín C trong D.*

Ta đã biết rằng tích phân đường của một trường vectơ bảo toàn bất kỳ $\mathbf{F}$ đều độc lập với đường lấy tích phân, nên $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ với một đường cong kín bất kỳ. Giải thích một cách vật lý thì công thực hiện bởi một trường lực bảo toàn (chẳng hạn trường hấp dẫn hoặc trường điện trong Mục 16.1) khi một vật di chuyển dọc một đường cong kín bằng 0.

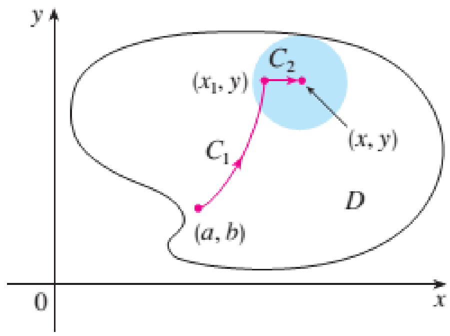
Định lý sau đây nói rằng các trường vectơ *chỉ* độc lập với đường lấy tích phân thì bảo toàn. Nó được trình bày và chứng minh cho các đường cong phẳng, nhưng cũng có một tính chất tương tự cho các đường cong trong không gian. Ta giả sử rằng D là **mở**, nghĩa là với mọi điểm P trong D đều có một quả cầ tâm P nằm hoàn toàn trong D. (Do đó D không chứa bất kỳ điểm biên nào). Hơn thế nữa, ta cũng giả sử rằng miền D **liên thông**: Điều này nghĩa là hai điểm bất kỳ trong D có thể được nối với nhau thành một đường và đường đó cũng nằm trong D.

Định lý 16.3. *Giả sử $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ liên tục trên một miền mở liên thông D. Nếu $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ là độc lập đối với đường lấy tích phân trên D , khi đó $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ bảo toàn trên D; nghĩa là, tồn tại một hàm f sao cho $\nabla f = \boldsymbol{F}$.*

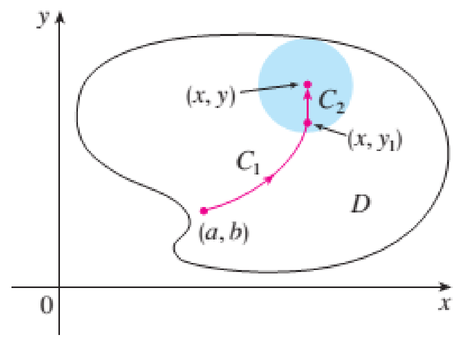
Chứng minh. Lấy $A(a, b)$ là một điểm cố định trong D. Ta định nghĩa một hàm thế vị f:

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

với mọi điểm (x, y) trong D. Vì $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ là độc lập đối với đường lấy tích phân, do đó đường lấy tích phân C từ (a, b) đến (x, y) để tính $f(x, y)$ là không quan trọng. Do D mở nên tồn tại một quả cầ chứa trong D có tâm (x, y). Chọn một điểm bất kỳ (x_1, y) trong quả cầ này với $x_1 < x$ và gọi C chứa C_1 từ điểm (a, b) đến (x_1, y) nối với đoạn thẳng nằm ngang C_2 từ điểm (x_1, y) đến (x, y). (Xem Hình 16.3.4).



Hình 16.3.4



Hình 16.3.5

Khi đó,

$$f(x,y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Để ý rằng tích phân đầu tiên không phụ thuộc vào biến x, do đó:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Nếu ta viết $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, khi đó:

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} Pdx + Qdy$$

Trên C_2, y là hằng số nên $dy = 0$. Chọn t là một tham số trong đó $x_1 \leqslant t \leqslant x$, ta có

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \int C_2 Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t,y)dt = P(x,y)$$

do đã áp dụng phần 1 trong Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân (xem Mục 4.3). Lập luận tương tự, áp dụng tích phân trên đoạn thẳng đứng (xem Hình 16.3.5) chỉ ra rằng,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x,t)dt = Q(x,y)$$

Do vậy,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \nabla f$$

điều này cho ta kết luận $\mathbf{F}$ là bảo toàn. □

Câu hỏi còn lại ở đây: Làm thế nào để có thể xác định có hay không một trường vectơ $\mathbf{F}$ bảo toàn? Giả sử ta biết rằng $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ là bảo toàn, trong đó P và Q có đạo hàm riêng cấp một liên tục. Khi đó tồn tại một hàm f thỏa mãn $\mathbf{F} = \nabla f$, tức là

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{và} \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

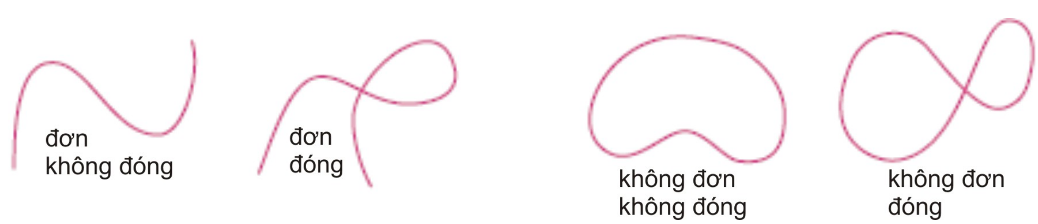
Theo định lý Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Định lý 16.4. *Nếu $\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ là một trường vectơ bảo toàn, trong đó P và Q có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên một miền D, khi đó trên khắp D ta có*

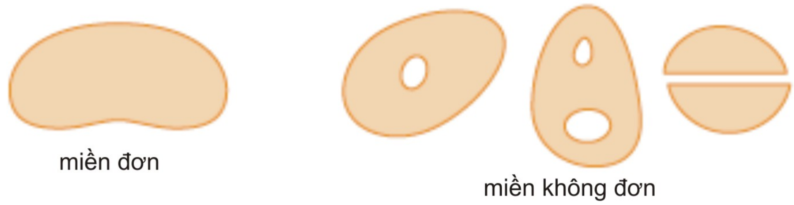
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Chiều ngược lại của ịnh lý 16.4 chỉ đúng cho một miền đặc biệt. Để giải thích điều này, ta cần khái niệm của **đường đơn**, đó là một đường cong không giao với chính nó tại bất kỳ điểm nào giữa hai điểm đầu mút. [Xem Hình 16.3.6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ cho một đường đơn đóng, nhưng $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ khi $a < t_1 < t_2 < b$].



Hình 16.3.6: Các dạng của đường cong

Trong ịnh lý 16.3 ta cần một miền mở liên thông. Với định lý kế tiếp ta cần một điều kiện mạnh hơn. Một **miền đơn liên** trong miề phẳng là một miền liên thông D mà mọi đường đơn đóng trong D chỉ chứa các điểm nằm trong D. Để ý trong Hình 16.3.7, một miền đơn liên không có bất kỳ lỗ hổng nào và không thể chứa hai miền riêng biệt.



Hình 16.3.7

Với miền đơn liên, ta có thể phát biểu chiều ngược lại của ịnh lý 16.4 cho ta một phương pháp đơn giản để chứng minh một trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$ là bảo toàn. Chứng minh này sẽ được phác họa trong chương kê tiếp như là một hệ quả của định lý Green.

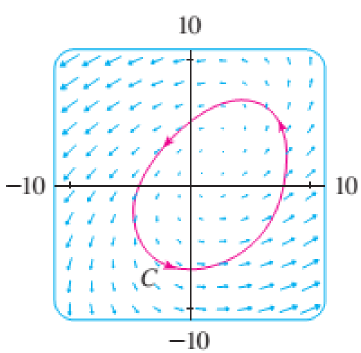
Định lý 16.5. *Cho $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ là một trường vectơ trên một miền đơn liên mở D. Giả sử rằng P và Q có đạo hàm cấp một liên tục và*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên} \quad D$$

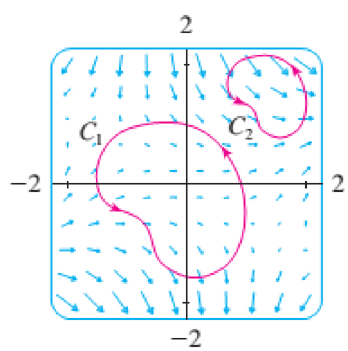
Khi đó $\boldsymbol{F}$ là bảo toàn.

Ví dụ 2 Hãy xác định trường vectơ sau đây có bảo toàn hay không

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$$



Hình 16.3.8



Hình 16.3.9

Hình 16.3.8 và 16.3.9 biểu diễn trường vectơ trong Ví dụ 2 và 3 tương ứng. Các vectơ trong Hình 16.3.8 bắt đầu trên đường cong đóng C dường như có cùng hướng với C. Vì thế nếu $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ thì $\mathbf{F}$ không bảo toàn. Tính toán trong Ví dụ 2 chứng tỏ điều này. Một vài vectơ gần đường cong C_1 và C_2 trong Hình 16.3.9 gần như cùng hướng với đường cong, trong khi một số khác hướng theo chiều ngược lại. Vì thế tích phân đường dọc theo đường cong đóng bằng 0. Ví dụ 3 chỉ ra rằng $\mathbf{F}$ thực sự bảo toàn.

Giải Cho $P(x,y) = x - y$ và $Q(x,y) = x - 2$. Khi đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Bởi vì $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ nên $\mathbf{F}$ là không bảo toàn dựa theo ịnh lý 16.4.

Ví du 3 Hãy xác định trường vectơ sau đây có bảo toàn hay không

$$\mathbf{F}(x,y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

Giải Cho $P(x,y) = 3 + 2xy$ và $Q(x,y) = x^2 - 3y^2$. Khi đó

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Thật vậy, miền của $\mathbf{F}$ là mặt phẳng nguyên ($D = \mathbb{R}^2$) mở và đơn liên. Do đó ta có thể áp dụng lý 16.5 và kết luận rằng $\mathbf{F}$ là bảo toàn.

Trong ví dụ 3 , Định lý 16.5 cho ta $\mathbf{F}$ là bảo toàn, nhưng nó không cho ta biết hàm thế vị f thỏa mãn $\mathbf{F} = \nabla f$. Chứng minh của Định lý 16.3 cho ta một gợi ý để tìm hàm f này. Ta áp dụng "tích phân từng phần" như trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 4

(a) Nếu $\mathbf{F}(x,y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, hãy tìm một hàm f sao cho $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Hãy tính tích phân đường $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, trong đó C là đường cong được cho bởi:

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

Giải

(a) Từ ví dụ 3 ta biết rằng $\mathbf{F}$ là bảo toàn và do đó tồn tại một hàm f với $\nabla f = \mathbf{F}$, tức là,

$$f_x(x,y) = 3 + 2xy \tag{16.3.2}$$

$$f_y(x,y) = x^2 - 3y^2 \tag{16.3.3}$$

Lấy tích phân (16.3.2) theo biến x ta được:

$$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y) \tag{16.3.4}$$

Để ý rằng hằng số của tích phân là một hằng số theo x, nghĩa là, một hàm theo y, ta gọi là $g(y)$. Ta lấy tiếp đạo hàm hai vế của (16.3.4) theo y:

$$f_y(x, y) = x^2 + g'(y) \tag{16.3.5}$$

So sánh (16.3.3) và (16.3.5) ta thấy rằng:

$$g'(y) = -3y^2$$

Lấy tích phân theo y, ta có

$$g(y) = -y^3 + K$$

trong đó K là hằgn số. Thay vào (16.3.4) ta có

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

là hàm thế vị cần tìm.

(b) Để áp dụng ịnh lý 16.2 ta phải biết đầu và điểm cuối của C, tức là, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ và $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^\pi)$. Trong biểu thức của $f(x, y)$ ở câu (a), bất kỳ giá trị nào của K cũng đúng, ta chọn $K = 0$. Khi đó ta có

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Phương pháp này gọn hơn phương pháp tính trực tiếp tích phân đường mà ta đã nghiên cứu trong Mục 16.2.

Một tiêu chí để xác định xem một trường vectơ $\mathbf{F}$ trên $\mathbb{R}^3$ là bảo toàn được đưa ra trong Mục 16.5. Đồng thời, ví dụ tiếp theo sẽ chỉ ra một kỹ thuật tìm ra hàm thế vị tương tự như tìm các trường vectơ trên $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 5 Nếu $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}$, khi đó hãy tìm hàm f thỏa mãn $\nabla f = \mathbf{F}$. **Giải** Giả sử có một hàm f như vậy, thì

$$f_x(x, y, z) = y^2 \tag{16.3.6}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z} \tag{16.3.7}$$

$$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z} \tag{16.3.8}$$

Lấy tích phân (16.3.6) theo x ta được:

$$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z) \tag{16.3.9}$$

trong đó $g(y, z)$ là hàm hằng theo x. Khi đó ta lấy đạo hàm (16.3.9) theo y, ta có

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

và so sánh với (16.3.7)

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Vậy $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ và ta viết lại (16.3.9) như sau:

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Cuối cùng, lấy đạo hàm theo z và so sánh với (16.3.8) ta được $h'(z) = 0$ và do đó $h(z) = K$, hằng số. Hàm f cần tìm là

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

Và dễ dàng kiểm tra rằng $\nabla f = \mathbf{F}$.

Sự Bảo Toàn của Năng Lượng

Lấy ý tưởng của chương này cho một trường lực liên tục $\mathbf{F}$ khi một vật di chuyển dọc đường C được cho bởi $\mathbf{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$, trong đó $\mathbf{r}(a) = A$ là điểm đầu và $\mathbf{r}(b) = B$ là điểm cuối của C. Theo Định Luật 2 Newton (xem Mục 13.4), lực $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ tại một điểm trên C có liên hệ với gia tốc $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ bởi phương trình

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(r)) = m\mathbf{r}''(t)$$

Do đó công thực hiện bởi lực tác động lên vật là

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\right] dt \qquad \text{(Định lý 13.2.3, công thức 4)} \\
&= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 dt = \frac{m}{2} \left[|\mathbf{r}'(t)|^2\right]_a^b \qquad \text{(Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân)} \\
&= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2\right)
\end{aligned}$$

Kết luận

$$W = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}(a)|^2 \tag{16.3.10}$$

trong đó $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ là vận tốc.

Đại lượng $\frac{1}{2}m|\mathbf{v}(t)|^2$, nghĩa là, một nửa khối lượng nhân với bình phương của tốc độ, được gọi là **động năng** của vật. Khi đó ta có thể viết lại phương trình (16.3.10) như

$$W = K(B) - K(A) \tag{16.3.11}$$

cho ta công thực hiện bởi trường lực trên C bằng với hiệu các động năng tại các điểm đầu mút của C.

Bây giờ hãy giả sử rằng $\mathbf{F}$ là một trường lực bảo toàn; nghĩa là, ta có thể viết dưới dạng $\mathbf{F} = \nabla f$. Trong ngành vật lý, **thế năng** của một vật tại điểm (x, y, z) được xác định bởi $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, do vậy ta có $\mathbf{F} = -\nabla P$. Khi đó theo ịnh lý 16.3 ta có

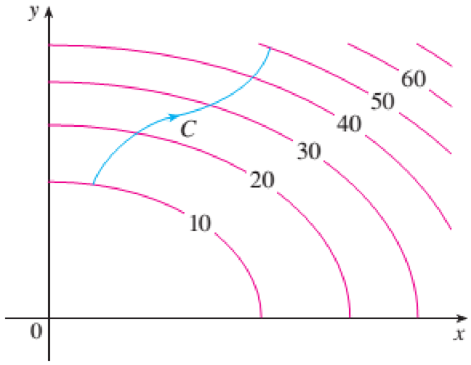
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

So sánh phương trình này với phương trình (16.3.11) ta thấy rằng

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

nói rằng nếu một vật di chuyển từ một điểm A đến một điểm khác B dưới sự ảnh hưởng của một trường lực bảo toàn, thì tổng thế năng và động năng bằng hằng số. Đây gọi là **Định Luật Bảo Toàn Năng Lượng** và đó là lý do một trường vectơ được gọi là *bảo toàn*.

Bài tập 16.3. *1. Hình dưới đây chỉ ra một đường cong C và một đồ thị đường viền của một hàm f có gradient liên tục. Hãy tìm* $\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}$.



2. *Cho trước một bảng các giá trị của hàm f có gradient liên tục. Hãy tìm* $\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó C có phương trình tham số:*

$$x = t^2 + 1 \quad y = t^3 + t \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3-10 *Hãy xác định rằng trường vectơ $\boldsymbol{F}$ có bảo toàn hay không. Nếu nó bảo toàn, hãy tìm hàm f sao cho $\boldsymbol{F} = \nabla f$.*

3. $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x - 3y)\boldsymbol{i} + (-3x + 4y - 8)\boldsymbol{j}$

4. $\boldsymbol{F}(x,y) = e^x \sin y \boldsymbol{i} + e^x \cos y \boldsymbol{j}$

5. $\boldsymbol{F}(x,y) = e^x \cos y \boldsymbol{i} + e^x \sin y \boldsymbol{j}$

6. $\boldsymbol{F}(x,y) = (3x^2 - 2y^2)\boldsymbol{i} + (4xy + 3)\boldsymbol{j}$

7. $\boldsymbol{F}(x,y) = (ye^x + \sin y)\boldsymbol{i} + (e^x + x\cos y)\boldsymbol{j}$

8. $\boldsymbol{F}(x,y) = (2xy + y^{-2})\boldsymbol{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\boldsymbol{j}, \quad y > 0$

9. $\boldsymbol{F}(x,y) = (\ln y + 2xy^3)\boldsymbol{i} + (3x^2y^2 + x/y)\boldsymbol{j}$

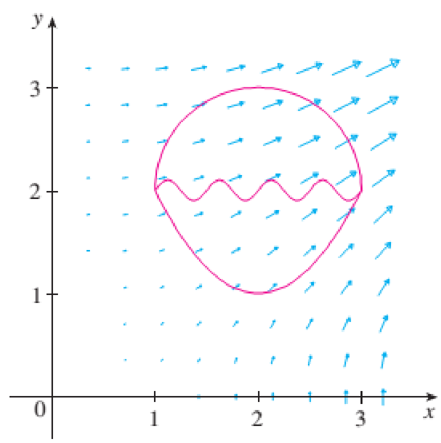
10. $\boldsymbol{F}(x, y) = (xy\cosh xy + \sinh xy)\boldsymbol{i} + (x^2\cosh xy)\boldsymbol{j}$

---

11 *Trong hình là một trường vectơ* $\boldsymbol{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2\rangle$ *và ba đường cong đều báwt đầu tại điểm* $(1, 2)$ *và kết thúc tại điểm* $(3, 2)$.

(a) Hãy giải thích tại sao $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ *có giá trị bằng nhau với cả bai đường cong này.*

(b) Giá trị đó là bao nhiêu?



12-18 *(a) Hãy tìm hàm* f *thỏa mãn* $\boldsymbol{F} = \nabla f$ *và (b) Hãy áp dụng câu (a) để tính* $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ *với* C *là đường cong cho trước.*

12. $\boldsymbol{F}(x, y) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$, *$C$ là một cung của parabol* $y = 2x^2$ *từ điểm* $(-1, 2)$ *đến điểm* $(2, 8)$.

13. $\boldsymbol{F}(x, y) = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j}$, $C : \boldsymbol{r}(t) = \langle t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$.

14. $\boldsymbol{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\boldsymbol{i} + x^2e^{xy}\boldsymbol{j}$, $C : \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

15. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + (xy + 2z)\boldsymbol{k}$, *$C$ là đoạn thẳng từ điểm* $(1, 0, -2)$ *đến điểm* $(4, 6, 3)$.

16. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\boldsymbol{i} + 3xyz\boldsymbol{j} + (xy^2 + 2x^2z)\boldsymbol{k}$, $C : x = \sqrt{t}, y = t + 1, z = t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$.

17. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = yze^{xz}\boldsymbol{i}+e^{xz}\boldsymbol{j}+xye^{xz}\boldsymbol{k}$, $C:\boldsymbol{r}(t) = (t^2+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+(t^2-2t)\boldsymbol{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \sin y\boldsymbol{i}+(x\cos y+\cos z)\boldsymbol{j}-y\sin z\boldsymbol{k}$, $C:\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19-20 *Hãy chỉ ra rằng các tích phân đường dưới đây là độc lập đối với đường lấy tích phân và hãy tính giá trị của nó.*

19. $\displaystyle\int_C 2xe^{-y}dx + (2y - x^2e^{-y})dy$, *$C$ là một đường bất kỳ từ điểm $(1,0)$ đến điểm $(2,1)$.*

20. $\displaystyle\int_C \sin y dx + (x\cos y - \sin y)dy$, *$C$ là một đường bất kỳ từ điểm $(2,0)$ đến điểm $(1,\pi)$.*

---

21. *Giả sử rằng bạn được yêu cầu xác định đường cong mà nó đòi hỏi ít nhất một công thực hiện bởi một trường lực **F** khi một chất điểm di chuyển từ điểm này đến điểm khác. Bạn kiểm tra xem **F** có phải là trường bảo toàn không, và thật vậy bạn suy ra nó là trường bảo toàn. Vậy làm cách nào bạn trả lời các yêu cầu này?*

22. *Giả sử một thí nghiệm xác định công thực hiện bởi một trường lực **F** khi một chất điểm di chuyển từ điểm $(1,2)$ đến điểm $(5,-3)$ dọc đường cong C_1 là 1.2J và công thực hiện bởi **F** khi một chất điểm di chuyển dọc một đường cong C_2 khác nối giữa hai điểm đó là 1.4J. Bạn có thể nói gì về **F**? Tại sao?*

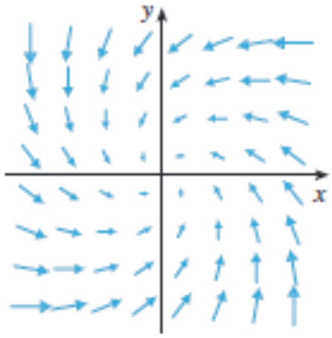
23-24 *Hãy tìm công thực hiện bởi một trường lực **F** khi một vật di chuyển từ P đến Q.*

23. $\boldsymbol{F}(x,y) = 2y^{3/2}\boldsymbol{i} + 3x\sqrt{y}\boldsymbol{j}; \quad P(1,1), Q(2,4)$

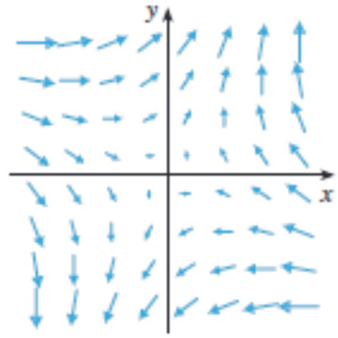
24. $\boldsymbol{F}(x,y) = e^{-y}\boldsymbol{i} - xe^{-y}\boldsymbol{j}; \quad P(0,1), Q(2,0)$

25-26 *Các trường vectơ chỉ ra trong hình có bảo toàn hay không? Hãy giải thích.*

25.



26.



---

27. Nếu $\boldsymbol{F}(x, y) = \sin y\boldsymbol{i} + (1 + x\cos y)\boldsymbol{j}$, hãy dựa vào đồ thị để đoán xem $\boldsymbol{F}$ có bảo toàn hay không. Sau đó hãy kiểm tra dự đoán của bạn có đúng hay không.

28. Cho $\boldsymbol{F} = \nabla f$, trong đó $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Hãy tìm các đường cong C_1 và C_2 không đóng và thỏa mãn phương trình

(a) $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

(b) $\displaystyle\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 1$

29. Hãy chỉ ra rằng nếu trường vectơ $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ là bảo toàn và P, Q, R có đạo hàm riêng cấp một liên tục, thì

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Hãy áp dụng bài tập 29 để chỉ ra rằng tích phân đường $\displaystyle\int_C ydx + xdy + xyzdz$ là không độc lập với đường lấy tích phân.

31-34 *Hãy xác định xem các tập đã cho có (a) mở, (b) liên thông, và (c) đơn liên.*

31. $\{(x, y) | 0 < y < 3\}$

32. $\{(x, y) | 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, y \geqslant 0\}$

34. $\{(x, y)|(x, y) \neq (2, 3)\}$

---

35. *Cho* $\boldsymbol{F}(x, y) = \dfrac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Hãy chỉ ra $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(b) Chỉ ra rằng $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *là không độc lập với đường lấy tích phân. [*Gợi ý*: Hãy tính* $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *và* $\int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *trong đó* C_1 *và* C_2 *lần lượt là nửa đường tròn trên và dưới của* $x^2 + y^2 = 1$ *từ điểm* $(1, 0)$ *và* $(-1, 0)$*.] Điều này có mâu thuẫn với ịnh lý 16.5?*

36. *(a) Giả sử* $\boldsymbol{F}$ *là một trường lực bình phương nghịch đảo, tức là*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{c\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

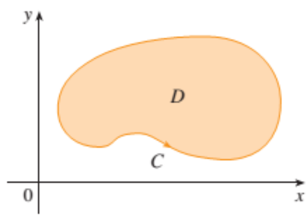
với một hằng số c, trong đó $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$*. Hãy tìm công thực hiện bởi* $\boldsymbol{F}$ *khi một vật di chuyển từ một điểm* P_1 *docj một đường đến điểm* P_2 *cách điểm gốc tọa độ lần lượt các khoảng cách* d_1 *và* d_2*.*

(b) Một ví dụ của trường lực bình phương nghịch đảo là trường hấp dẫn $\boldsymbol{F} = -(mMG)\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ *đã đề cập trong ví dụ 4 trong Mục 16.1. Hãy áp dụng câu (a) để tìm công thực hiện bởi trường hấp dẫn khi trái đất di chuyển từ điểm xa mặt trời nhất (tại khoảng cách lớn nhất* 1.52×10^8 *km từ mặt trời). (Lấy các giá trị* $m = 5.97 \times 10^{24} kg, M = 1.99 \times 10^{30} kg$ *và* $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$*).*

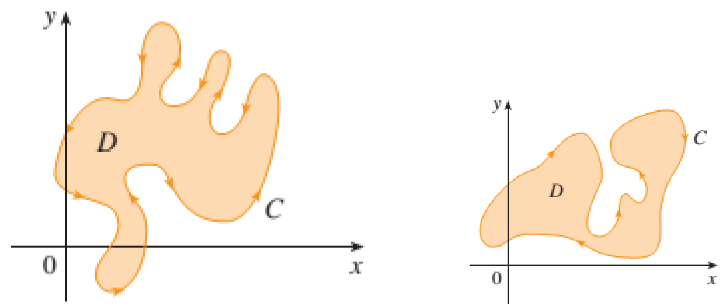
(c) Một ví dụ khác của trường bình phương nghịch đảo là điện trường $\boldsymbol{F} = \varepsilon q Q\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ *đã đề cập trong ví dụ 5 Mục 16.1. Giả sử rằng một electron có điện tích* $-1.6 \times 10^{-19} C$ *được đặt tại điểm gốc tọa độ. Một điện tích đơn vị dương được đặt tại một khoảng cách electron đó* 10^{-12} *m và di chuyển theo chiều dương một đoạn bằng nửa khoảng cách đó. Hãy áp dụng câu (a) để tìm công thực hiện bởi điện trường đó. (Hãy lấy giá trị* $\varepsilon = 8.985 \times 10^9$*).*

16.4 Định Lý Green

Định lý Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân đường trên một đường cong đơn khép kín và tích phân bội trên một miền phẳng D bị chặn bởi C. (Xem Hình 16.4.1. Ta giả sử rằng D chứa mọi điểm trong C và mọi điểm trên C). Trong khi phát biểu định lý Green ta quy ước rằng **chiều dương** của một đường cong đơn khép kín C là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Do vậy nếu C được cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t), a \leqslant t \leqslant b$, thì miền D luôn luôn nằm bên trái của điểm $\mathbf{r}(t)$ mà C đi qua. (Xem Hình 16.4.2)



Hình 16.4.1



Hình 16.4.2: Hình trái: hướng dương. Hình phải: hướng âm.

Định lý 16.6 (Định lý Green)**.** *Cho C là một đường cong đơn khép kín, dương, trơn từng khúc trong mặt phẳng và cho D là một miền bị chặn bởi C. Nếu P và Q có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa D, khi đó*

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Lưu ý 3. *Ký hiệu $\oint_C Pdx + Qdy$ hoặc $\oint_C Pdx + Qdy$ đôi khi được dùng để chỉ ra rằng tích phân đường được tính trên đường cong kín, dương C. Một ký hiệu khác của đường cong dương bị chặn của D là ∂D, định lý Green khi đó được viết lại*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{16.4.1}$$

Định lý Green được xem như là một phần tương đương của Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân cho tích phân bội. So sánh phương trình (16.4.1) với phát biểu của Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân Phần 2 trong phương trình sau:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Cả hai trường hợp tích phân đều có chứa đạo hàm ($F', \partial Q/\partial x$ và $\partial P/\partial y$) ở vế trái của phương trình. Và trong cả hai trường hợp vế phải đều có giá trị của các hàm (F, Q và P)

chỉ trên biên của miền lấy tích phân. (Trong trường hợp một chiều, khoảng $[a, b]$ có biên chỉ bao gồm hai điểm a và b).

Nói chung định lý Green chứng minh không dễ dàng, nhưng ta có thể chứng minh trong trường hợp đặc biệt trong đó miền lấy tích phân là loại I và loại II (xem Mục 15.3). Ta gọi các miền như vậy là các ***miền đơn l****.*

Định lý Green được đặt theo tên của nhà khoa học tự học người Anh George Green (1793-1841). Ông ấy đã làm việc toàn thời gian trong tiệm bánh của cha mình từ lúc 9 tuổi và ông đã tự học toán từ các sách trong thư viện. Vào năm 1828 ông ta xuất bản quyển sách có tên *Bài luận về ứng dụng của Giải Tích Toán học vào lý thuyết Điện và Từ*, nhưng chỉ khoảng 100 bản copy đã được in và hầu hết chúng đều được phân phát cho những người bạn của ông. Tài liệu này có đề cập đến một định lý có nội dung tương đương với định lý Green ta đã biết, nhưng nó không được biết đến một cách rộng rãi vào thời điểm đó. Cuối cùng, vào độ tuổi 40, Green đã đậu vào trường đại học Cambrige nhưng ông đã qua đời sau khi tốt nghiệp được 4 năm. Vào năm 1846, William Thomson (Lord Kelvin) có được một bản sao bài luận của Green, ông nhận ra ý nghĩa của nó và cho in lại bài luận này. Green là người đầu tiên đã cố gắng xây dựng một lý thuyết toán học của điện và từ. Công trình của ông là nền tảng cho các lý thuyết điện từ của Thomson, Stokes, Rayleigh, và Maxwell.

Chứng minh định lý Green trong trường hợp D là miền đơn l. Lưu ý rằng Định Lý Green sẽ được chứng minh khi ta chỉ ra rằng

$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{16.4.2}$$

và

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \tag{16.4.3}$$

Ta chứng minh phương trình (16.4.2) bằng cách biểu diễn D bởi một miền loại I:

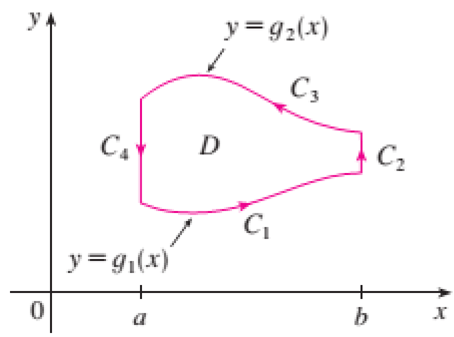
$$D = \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(y)\}$$

trong đó g_1 và g_2 là các hàm liên tục. Điều này cho phép ta tính toán tích phân bội trên ở vế phải của phương trình (16.4.2) như sau:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] \tag{16.4.4}$$

trong đó bước cuối được suy ra từ Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân.

Bây giờ ta tính vế trái của (16.4.2) bằng cách chia C thành hợp của các đường cong



Hình 16.4.3

C_1, C_2, C_3 và C_4 được mô tả như Hình 16.4.3. Trên C_1 ta lấy x là tham số và viết phương trình tham số $x = x, y = g_1(x), a \leqslant x \leqslant b$. Do đó,

$$\int_{C_1} P(x,y)dx = \int_a^b P(x, g_1(x))dx$$

Quan sát thấy rằng C_3 có chiều đi từ phải sang trái nhưng $-C_1$ từ trái sang phải, nên ta có thể viết phương trình tham số của $-C_3$ là $x = x, y = g_2(x), a \leqslant x \leqslant b$. Do đó,

$$\int_{C_3} P(x,y)dx = -\int_{-C_3} P(x,y)dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

Trên C_2 hoặc C_4, x là hằng số nên $dx = 0$ và

$$\int_{C_2} P(x,y)dx = 0 = \int_{C_4} P(x,y)dx$$

Vậy,

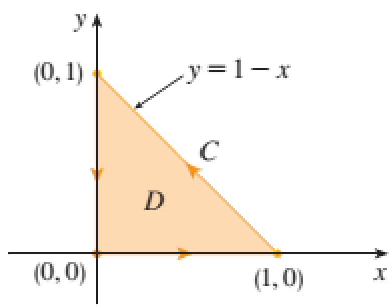
$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)dx &= \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_3} P(x,y)dx + \int_{C_4} P(x,y)dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx\end{aligned}$$

So sánh biểu thức này với phương trình (16.4.4), ta thấy rằng

$$\int_C P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Phương trình (16.4.3) được chứng minh cùng cách biểu diễn D là một miền loại II (xem bài tập 30). Khi đó, cộng phương trình (16.4.2) và (16.4.3), ta được Định Lý Green. □

Ví dụ 1 Hãy tính $\int_C x^4 dx + xydy$, trong đó C đường cong hình tam giác gồm ba đoạn từ $(0,0)$ đến $(1,0)$, từ $(1,0)$ đến $(0,1)$ và từ $(0,1)$ đến $(0,0)$.



Hình 16.4.4

Giải Tuy rằng tích phân đường này có thể được tính bằng các phương pháp thông thường như trong Mục 16.2, nhưng nó sẽ được tính bằng cách tách ra thành ba tích phân trên ba cạnh của tam giác, và sẽ dùng công thức Green. Chú ý rằng miền D được giới hạn bởi C và C có chiều dương (Xem Hình 16.4.4). Nếu ta đặt $P(x,y) = x^4$ và $Q(x,y) = xy$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}\int_C x^4 dx + xydy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)dydx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6}\left[(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Ví dụ 2 Hãy tính $\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{y^4+1})dy$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

Giải Miền D bị chặn bởi C là quả cầ $x^2 + y^2 \leqslant 9$, nên ta đổi sang tọa độ cực sau khi áp dụng định lý Green:

$$\begin{aligned}\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + (7 + \sqrt{y^4+1})dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(7 + \sqrt{y^4+1}) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\sin x})\right] dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (7-3) r dr d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r dr = 36\pi.\end{aligned}$$

Trong các Ví dụ 1 và Ví dụ 2 ta thấy rằng tích phân bội được tính dễ dàng hơn tích phân đường. (Hãy cố gắng tính tích phân đường trong Ví dụ 2 bạn sẽ bị thuyết phục bởi điều này). Nhưng đôi khi ta tính tích phân đường lại dễ dàng hơn, và định lý Green được áp dụng trong chiều ngược lại. Chẳng hạn, nếu ta biết rằng $P(x,y) = Q(x,y) = 0$ trên đường cong C, định lý Green suy ra

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P dx + Q dy = 0$$

bất kể giá trị của P và Q trong miền D.

Một ứng dụng khác của chiều ngược lại của định lý Green đó là tính diện tích. Bởi vì diện tích của D là $\iint_D 1 dA$, nên ta sẽ chọn P và Q sao cho

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Có nhiều khả năng: Định lý Green cho ta công thức sau đây cho diện tích của D:

$$\begin{array}{lll} P(x,y) = 0 & P(x,y) = -y & P(x,y) = -\frac{1}{2}y \\ Q(x,y) = x & Q(x,y) = 0 & Q(x,y) = \frac{1}{2}x \end{array}$$

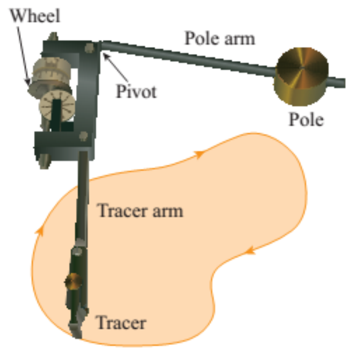
$$A = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2}\oint_C x dy - y dx \tag{16.4.5}$$

Ví dụ 3 Hãy tìm diện tích của hình ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Giải Hình ellipse có phương trình tham số $x = a\cos t$ và $y = b\sin t$, trong đó $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Áp dụng biểu thức thứ ba trong phương trình (16.4.5) ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\sin t)dt - (b\sin t)(-a\sin t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_C dt = \pi ab \end{aligned}$$

Công thức (16.4.5) được áp dụng để giải thích làm thế nào máy tính tích phân có thể tính toán. Một cái **máy tính tích phân** là một dụng cụ cơ khí sử dụng để đo diện tích



Hình 16.4.5: A Keuffel and Esser polar planimeter

của miền bằng cách tìm ra các đường biên. Các thiết bị này rất hữu dụng trong tất cả các ngành khoa học: trong sinh học để tính diện tích lá hoặc cánh, trong y học để đo kích thước mặt cắt của các cơ quan hoặc các khối u, trong lâm nghiệp để tính kích thước của các khu rừng từ hình ảnh.

Hình 16.4.5 chỉ ra hoạt động của một máy tính tích phân cực: Một cực cố định và một bộ đánh dấu được di chuyển dọc các đường biên của miền cần tính, các bánh xe trượt và xoay theo chiều vuông góc với trục của bộ đánh dấu. Các máy tính tích phân đo khoảng cách giữa các cuộn bánh xe và nó tỷ lệ thuận với diện tích của miền được giới hạn. Các kết quả được xem như hệ quả của công thức (16.4.5) được đề cập trong các bài báo:

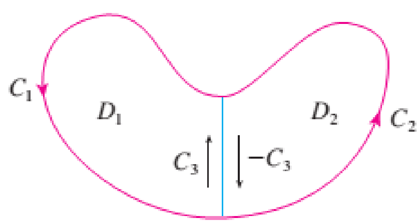
- R. W. Gatterman, "The planimeter as an example of Green's Theorem", *Amer. Math, Monthly*, Vol. 88 (1981), pp. 701-4.
- Tanya Leise, "As the planimeter wheel turns", *College Math. Journal*, Vol. 38 (2007), pp. 24-31.

Định lý mở rộng của Định Lý Green

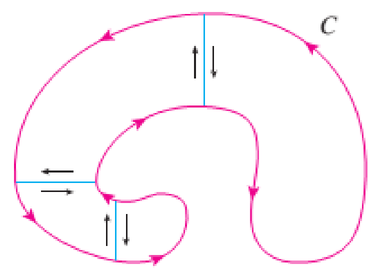
Dù ta đã chứng minh định lý Green chỉ cho trường hợp miền D là miền đơn liên, nhưng ta có thể mở rộng định lý này trong trường hợp D là hợp hữu hạn các miền đơn liên. Chẳng hạn, nếu D là miền được phác họa như trong Hình 16.4.6, ta có thể viết $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 đều là những miền đơn liên. Biên của D_1 là $C_1 \cup C_2$ và biên của D_2 là

$C_2 \cup (-C_3)$ nên, áp dụng định lý Green tách biệt cho D_1 và D_2, ta được

$$\int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$
$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



Hình 16.4.6



Hình 16.4.7

Nếu ta cộng các phương trình này lại với nhau, tích phân đường trên C_3 và $-C_3$ triệt tiêu, ta được

$$\int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

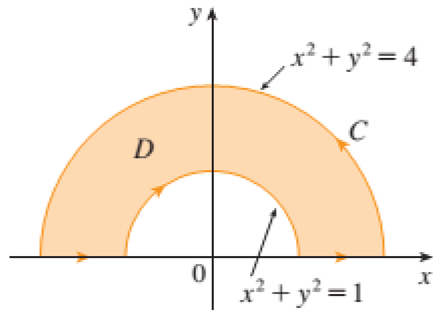
đây là định lý Green cho $D = D_1 \cup D_2$, vì thế biên của nó là $C = C_1 \cup C_2$.

Lập luận tương tự cho phép chúng ta thiết lập định lý Green cho hợp hữu hạn các miền đơn liên không giao nhau (Xem Hình 16.4.7).

Ví dụ 4. Hãy tính $\oint_C y^2dx + 3xydy$, trong đó C là biên của nửa hình vành khuyên D nằm trên nửa mặt phẳng trên giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.
Giải Chú ý rằng mặc dù D không là miền đơn liên, trục y chia nó thành hai miền đơn liên (Xem Hình 16.4.8). Trong hệ trục tọa độ cực ta viết

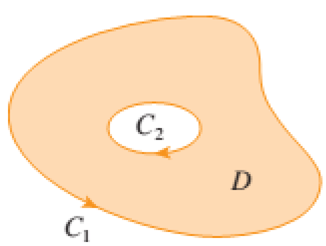
$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Định lý Green cho ta:

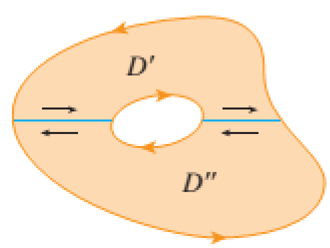


Hình 16.4.8

$$\begin{aligned}\oint_C y^2dx + 3xydy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA \\ &= \iint_D ydA = \int_0^\pi \int_1^2 r\sin\theta r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = [-\cos\theta]_0^\pi \left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$



Hình 16.4.9



Hình 16.4.10

Định lý Green có thể được mở rộng cho các miền có lỗ hổng, tức là các miền không đơn liên. Quan sát biên C của miền D trong Hình 16.4.9 bao gồm hai đường cong đơn khép kín C_1 và C_2. Ta giả sử rằng các đường biên giới hạn bởi D được định hướng sao cho D luôn nằm bên trái mà đường cong C đi qua. Do vậy chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ bên ngoài đường cong C_1 nhưng cùng chiều kim đồng hồ bên trong đường cong C_1. Nếu ta chia D thành hai miền D' và D'' bằng các đường ở giữa như trong Hình 16.4.10

và sau đó áp dụng Định Lý Green cho mỗi miền D' và D'', ta được

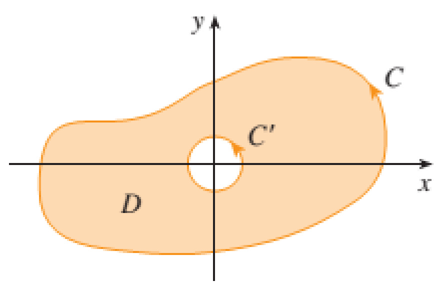
$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \int_{\partial D'} Pdx + Qdy + \int_{\partial D''} Pdx + Qdy\end{aligned}$$

Vì tích phân đường dọc các đường biên là ngược hướng với nhau, do đó chúng bị triệt tiêu, và ta được

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_C Pdx + Qdy$$

và đó là định lý Green áp dụng cho miền D.

Ví dụ 5. Nếu $\mathbf{F}(x, y) = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, hãy chỉ ra rằng $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ với mọi đường đơn khép kín có chiều dương bao quanh điểm gốc toạ độ.



Hình 16.4.11

Giải Do C là một đường cong kín bất kỳ bao quanh điểm gốc toạ độ, nên rất khó khăn để tính trực tiếp tích phân này. Hãy xét một đường tròn C' có hướng ngược chiều kim đồng hồ với tâm tại gốc tọa độ và bán kính a, trong đó a được chọn đủ bé sao cho C' nằm trong C (Xem Hình 16.4.11). Lấy D là miền giới hạn bởi C và C' và theo định lý Green ta có

$$\begin{aligned}\int_C Pdx + Qdy + \int_{-C'} Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0\end{aligned}$$

Do đó,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy$$

chính là

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Và tích phân này được tính dễ dàng bằng cách áp dụng phương trình tham số cho bởi $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Do vậy,

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

Chúng ta kết thúc mục này bằng cách sử dụng định lý Green để thảo luận về một kết quả đã được phát biểu trong mục trước đó.

Phác họa chứng minh của định lý 16.5. Giả sử rằng $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ là một trường vectơ trên một miền đơn liên mở D, P và Q có đạo hàm riêng cấp một liên tục, và giả sử rằng

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{trên khắp} \quad D$$

Nếu C là một đường đơn khép kín trong D và R là miền mà C bao quanh, khi đó định lý Green cho ta

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0dA = 0$$

Một đường cong không đơn giao với chính nó tại một hoặc nhiều điểm có thể được chia thành một số đường cong đơn. Ta vừa chỉ ra rằng tích phân đường của $\mathbf{F}$ trên các đường cong đơn này bằng 0 và, cộng các tích phân này lại với nhau, ta thấy rằng $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ với C là đường cong kín bất kỳ. Do đó, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ là độc lập với đường lấy tích phân trên D theo định lý 16.2. Kết luận rằng $\mathbf{F}$ là một trường vectơ bảo toàn. □

Bài tập 16.4. .

1-4 Hãy tính các tích phân đường sau đây bằng hai phương pháp: (a) tính trực tiếp và (b) áp dụng định lý Green.

1. $\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$, *$C$ là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2.*

2. $\oint_C xydx + x^2dy$, *C là hình chữ nhật có các đỉnh* $(0,0),(3,0),(3,1)$ *và* $(0,1)$.

3. $\oint_C xydx + x^2y^3dy$, *C là hình tam giác có các đỉnh* $(0,0),(1,0)$ *và* $(1,2)$.

4. $\oint_C x^2y^2dx + xydy$, *C chứa một cung của đường parabol* $y = x^2$ *từ điểm* $(0,0)$ *đến* $(1,1)$ *và đoạn thẳng nối từ điểm* $(1,1)$ *đến* $(0,1)$ *và từ điểm* $(0,1)$ *đến* $(0,0)$.

5-10 *Hãy áp dụng định lý Green để tính các tích phân đường trên các đường cong có chiều dương.*

5. $\int_C xy^2dx + 2x^2ydy$, *C là hình tam giác có các đỉnh* $(0,0),(2,2)$ *và* $(2,4)$.

6. $\int_C \cos y dx + x^2 \sin y dy$, *C là hình chữ nhật có các đỉnh* $(0,0),(5,0),(5,2)$ *và* $(0,2)$.

7. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, *C là đường giới hạn bởi các parabol* $y = x^2$ *và* $x = y^2$.

8. $\int_C y^4dx + 2xy^3dy$, *C là đường ellipse* $x^2 + 2y^2 = 2$.

9. $\int_C y^3dx - x^3dy$, *C là đường tròn* $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C (1 - y^3)dx + (x^3 + e^{y^2})dy$, *C là đường giới hạn bởi hai đường tròn* $x^2 + y^2 = 4$ *và* $x^2 + y^2 = 9$.

11-14 *Hãy áp dụng định lý Green để tính* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *(Hãy kiểm tra hướng của đường cong trước khi áp dụng định lý)*

11. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle y\cos x - xy\sin x, xy + x\cos x\rangle$, *C là hình tam giác có các đỉnh theo chiều từ* $(0,0)$ *đến* $(0,4)$ *đến* $(2,0)$ *và trở lại* $(0,0)$.

12. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2\rangle$, *C chứa một cung của đường* $y = \cos x$ *từ điểm* $(-\pi/2, 0)$ *đến* $(\pi/2, 0)$ *và đoạn thẳng từ điểm* $(\pi/2, 0)$ *đến điểm* $(-\pi/2)$.

13. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle y - \cos y, x \sin y\rangle$, *C là đường tròn* $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ *theo chiều kim đồng hồ.*

14. $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle\sqrt{x^2+1}, \tan^{-1} x\rangle$, *C là hình tam giác có các đỉnh theo chiều từ* $(0,0)$ *đến* $(1,1)$ *đến* $(0,1)$ *và trở lại* $(0,0)$.

15-16 *hãy xác minh định lý Green bằng cách sử dụng một hệ thống máy tính để tính cả tích phân đường và tích phân bội.*

15. $P(x,y) = y^2e^x$, $\quad Q(x,y) = x^2e^y$, *C chứa một đoạn thẳng từ* $(-1,1)$ *đến* $(1,1)$ *và một cung của parabol* $y = 2 - x^2$ *từ điểm* $()1,1$ *đến* $(-1,1)$.

16. $P(x,y) = 2x - x^3y^5$, $\quad Q(x,y) = x^3y^8$, *C là hình ellipse* $4x^2 + y^2 = 4$.

---

17. *Hãy áp dụng định lý Green để tìm công thực hiện bởi lực* $\boldsymbol{F}(x,y) = x(x+y)\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$ *khi một chất điểm di chuyển từ điểm gốc tọa độ dọc trục x đến điểm* $(1,0)$, *và sau đó thẳng đến* $(0,1)$ *và quay trở lại điểm gốc ban đầu dọc trục y.*

18. *Một chất điểm khởi động tại điểm* $(-2,0)$, *dọc trục x đến điểm* $(2,0)$ *và sau đó di chuyển dọc nửa đường tròn* $y = \sqrt{4-x^2}$ *từ điểm ban đầu. Hãy áp dụng định lý Green để tìm công thực hiện trên chất điểm này bởi trường lực* $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle x, x^3 + 3xy^2\rangle$.

19. *Hãy áp dụng một công thức trong (16.4.5) để tính diện tích của hình vòm của cycloid* $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$.

20. *Nếu một đường tròn C bán kính 1 cuộn dọc bên ngoài một đường tròn* $x^2 + y^2 = 16$, *một điểm cố định P trên C chuyển động vẽ ra một đường cong gọi là* epicycloid, *có phương trình tham số* $x = 5\cos t - \cos 5t, y = 5\sin t - \sin 5t$. *Hãy vẽ epicycloid này và sử dụng công thức (16.4.5) để tính diện tích bao quanh nó.*

21. (a) *Nếu C là một đoạn thẳng nối từ điểm (x_1, y_1) đến điểm khác (x_2, y_2), hãy chỉ ra rằng*

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1$$

(b) *Nếu các đỉnh của một đa giác, được đánh dấu theo chiều kim đồng hồ là $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, hãy chỉ ra rằng diện tích của đa giác đó được tính bởi*

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + ... + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)\right]$$

(c) *Hãy tính diện tích của một hình năm góc có các đỉnh lần lượt là $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,2)$ và $(-1,1)$.*

22. *Cho D là miền bị chặn bởi một đường đơn khép kín C trong mặt phẳng xy. Hãy áp dụng định lý Green để chứng minh rằng tọa độ của trọng tâm $(\bar{x}, \bar{y})$ của D là:*

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2dx$$

trong đó A là diện tích của D.

23. *Hãy áp dụng bài tập 22 để tìm trọng tâm của phần tư đường tròn có bán kính là a.*

24. *Hãy áp dụng bài tập 22 để tìm trọng tâm của hình tam giác có các đỉnh là $(0,0), (a,0)$ và (a,b) trong đó $a > 0, b > 0$.*

25. *Một bản mỏng trong miền phẳng với hàm mật độ là hàm hằng $\rho(x,y) = \rho$ trong mặt phẳng xy giới hạn bởi một đường cong đơn khép kín C. Hãy chỉ ra rằng mômen quán tính trên các trục xác định bởi:*

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3dy$$

26. *Hãy áp dụng bài tập 25 để tìm mômen quán tính của một quả cầ có bán kính a và hàm mật độ là hàm hằng theo đường kính. (So sánh với ví dụ 4 trong Mục 15.5).*

27. *Hãy áp dụng phương pháp trong ví dụ 5 để tính $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, trong đó*

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{2xy\boldsymbol{i} + (y^2 - x^2)\boldsymbol{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

và C là một đường cong đơn khép kín theo chiều dương và chứa điểm gốc tọa độ.

28. *Hãy tính* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y) = \langle x^2 + y, 3x - y^2 \rangle$ *và* C *là đường cong bị chặn có chiều dương giới hạn bởi một miền* D *có diện tích bằng 6.*

29. *Nếu* $\boldsymbol{F}$ *là một trường vectơ như trong ví dụ 5, hãy chỉ ra rằng* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ *cho mọi đường cong đơn khép kín không đi qua hoặc chứa điểm gốc tọa độ.*

30. *Hãy hoàn thành chứng minh một trường hợp đặc biệt của định lý Green bằng cách chứng minh phương trình* (16.4.3).

31. *Hãy áp dụng định lý Green để chứng minh công thức đổi biến trong tích phân bội (công thức 15.10.9) trong trường hợp với* $f(x,y) = 1$:

$$\iint_R dxdy = \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Ở đây R *là miền tích phân trong mặt phẳng* xy *và* S *là miền tích phân trong mặt phẳng* uv *dưới phép đổi biến* $x = g(u,v), y = h(u,v)$.

[Gợi ý: Chú ý rằng bên vế trái là $A(R)$ *và áp dụng phần đầu tiên của phương trình* (16.4.5). *Hãy chuyển đổi tích phân đường trên* ∂R *thành tích phân đường trên* ∂S *và áp dụng định lý Green trong mặt phẳng uv].*

16.5 Curl và Divergence

Trong chương này ta giới thiệu hai phép toán được thực hiện trên trường vectơ và đóng một vai trò cơ bản trong ứng dụng của phép tính vectơ vào dòng điện trường và dòng từ trường. Mỗi phép toán tương tự như đạo hàm, nhưng một phép toán thì tạo ra trường vectơ trong khi một phép toán tạo ra một trường vô hướng.

Curl

Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và các đạo hàm riêng của P, Q và R đều tồn tại, thì **curl** của $\mathbf{F}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \tag{16.5.1}$$

Để có thể nhớ dễ dàng, ta hãy viết phương trình (16.5.1) bằng cách sử dụng ký hiệu phép toán. Ta định nghĩa một phép toán đạo hàm vectơ ∇ ("del") như sau:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Nó có ý nghĩa khi nó tác động lên một hàm vô hướng để có gradient của f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Nếu ta nghĩ rằng ∇ là một vectơ có các thành phần $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$, ta có thể xem nó như là một tích vectơ của ∇ với trường vectơ $\mathbf{F}$ như sau:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \text{curl } \mathbf{F}\end{aligned}$$

Do đó cách dễ nhất để nhớ định nghĩa (16.5.1) đó là

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{16.5.2}$$

Ví dụ 1 Nếu $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, hãy tìm $\mathbf{F}$. **Giải** Áp dụng phương trình (16.5.2), ta có:

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F} = \nabla\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k} \\ &= (-2y - xy)\mathbf{i} - (0 - x)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k} \\ &= -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}\end{aligned}$$

Nhớ lại rằng gradient của một hàm f ba biến là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và do đó ta có thể tính curl của nó. Định lý sau đây nói rằng curl của một trường vectơ gradient bằng $\mathbf{0}$.

Định lý 16.7. *Nếu f là một hàm ba biến có đạo hàm riêng cấp hai liên tục, thì*

$$\textit{curl}\,(\nabla f) = 0$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\text{curl}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0
\end{aligned}$$

theo định lý Clairaut. □

Bởi vì một trường vectơ bảo toàn là $\mathbf{F} = \nabla f$, nên theo định lý 16.7 có thể suy ra rằng

Nếu $\mathbf{F}$ là bảo toàn, thì curl $\mathbf{F} = 0$

Điều này cho ta một dấu hiệu nhận biết một trường vectơ có bảo toàn hay không.

Ví du 2 Hãy chỉ ra rằng trường vectơ $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ không bảo toàn.
Giải Trong ví dụ 1 ta đã chỉ ra rằng

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

Điều này chỉ ra rằng curl $\mathbf{F} \neq 0$, và do đó theo định lý 16.7, $\mathbf{F}$ không bảo toàn.

Tổng quát thì chiều ngược lại của định lý 16.7 không đúng, nhưng định lý dưới đây nói rằng chiều ngược lại là đúng nếu $\mathbf{F}$ xác định tại mọi nơi trong không gian. (Tổng quát hơn, điều đó là đúng néu như miền xác định là miền đơn liên, nghĩa là "không có lỗ hổng"). Định lý 16.8 là trường hợp ba chiều của định lý 16.5. Chứng minh của nó cần sử dụng định lý Stokes và sẽ được phác họa trong Mục 16.8.

Định lý 16.8. *Nếu $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ xác định trên toàn $\mathbb{R}^3$ mà các thành phần của nó có đạo hàm riêng liên tục và curl $\boldsymbol{F} = 0$, thì $\boldsymbol{F}$ là trường vectơ bảo toàn.*

Ví dụ 3.

(a) Hãy chỉ ra rằng

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$$

là một trường vectơ bảo toàn.

(b) Hãy tìm hàm f thỏa mãn $\mathbf{F} = \nabla f$.

Giải

(a) Ta tính curl của $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= (6xyz^2 - 6xyz^2)\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k} \\ &= 0\end{aligned}$$

Vì curl $\mathbf{F} = 0$ và miền xác định của $\mathbf{F}$ là $\mathbb{R}^3$, nên $\mathbf{F}$ là trường vectơ bảo toàn theo định lý 16.8.

(b) Kỹ thuật tìm f đã được đề cập trong Mục 16.4. Ta có

$$f_x(x, y, z) = y^2z^3 \tag{16.5.3}$$

$$f_y(x, y, z) = 2xyz^3 \tag{16.5.4}$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 \tag{16.5.5}$$

Lấy tích phân (16.5.3) theo biến x, ta được:

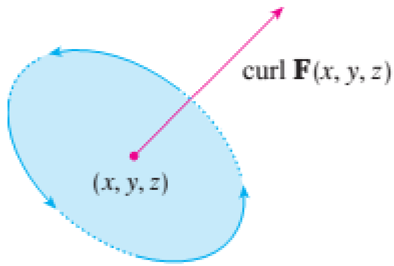
$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z) \tag{16.5.6}$$

Lấy đạo hàm của (16.5.6) theo biến y ta được $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, và từ (16.5.4) ta có $g_y(y, z) = h(z)$ và

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Khi đó (16.5.5) cho ta $h'(z) = 0$, và

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$



Hình 16.5.1

Lý do mà ta gọi là *curl* đó là vectơ curl tương ứng với một phép quay. Và mối liên hệ này được giải thích trong bài tập 37. Một việc khác xảy ra khi **F** biểu diễn một trường vận tốc trong dòng chảy chất lỏng (xem ví dụ 3 trong Mục 16.1). Chất điểm gần (x, y, z) quay quanh một trục và chỉ ra hướng của curl $\mathbf{F}(x, y, z)$, và chiều dài của vectơ curl đo xem các chất điểm di chuyển nhanh như thế nào trên trục đó (xem Hình 16.5.1). Nếu curl $\mathbf{F} = 0$ tại một điểm P, thì chất lỏng không xoáy tại P và **F** được gọi là **không xoáy** tại P. Nói cách khác, không có nước xoáy hay dòng xoáy tại P. Nếu curl $\mathbf{F} \neq 0$, thì một bánh lái lái dòng nước nhưng nó không xoay quanh trục của nó. Nếu curl $\mathbf{F} \neq 0$, thì bánh lái đó xoay quanh trục. Ta đưa ra một lời giải thích chi tiết hơn trong Mục 16.8 như là một kết luận của định lý Stokes.

Divergence

Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và $\partial P/\partial x, \partial Q/\partial y$ và $\partial R/\partial z$ tồn tại, thì **divergence của F** là mộthàm ba biến được xác định bởi

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{16.5.7}$$

Lưu ý rằng curl **F** là một trường vectơ nhưng div **F** là một trường vô hướng. Dưới toán tử gradient $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$, divergence của **F** có thể được viết dưới dạng ký hiệu là tích vô hướng của ∇ và **F**:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \tag{16.5.8}$$

Ví dụ 4. Nếu $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, hãy tìm div **F** **Giải** Dựa vào đinh nghĩa của divergence (phương trình (16.5.7) và (16.5.8)) ta có

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

Nếu $\mathbf{F}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$, thì curl $\mathbf{F}$ cũng là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$. Như vậy, ta có thể tính được divergence của nó. Định lý sau đây chỉ ra rằng kết quả đó bằng 0.

Định lý 16.9. *Nếu $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và P, Q và R có đạo hàm riêng cấp hai liên tục, thì*

$$\textit{div curl } \boldsymbol{F} = 0$$

Chứng minh. Áp dụng định nghĩa của divergence và curl, ta có

$$\begin{aligned}
\text{div curl } \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \qquad = 0
\end{aligned}$$

do các số hạng này triệt tiêu theo định lý Clairaut. □

Ví dụ 5. Hãy chỉ ra rằng trường vectơ $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ không thể viết được dưới dạng curl của một trường vectơ khác, tức là, $\mathbf{F} \neq$ curl $\mathbf{G}$. **Giải** Trong ví dụ 4 ta đã chỉ ra rằng

$$\text{div } \mathbf{F} = z + xz$$

và do đó div $\mathbf{F} \neq 0$. Giả sử rằng $\mathbf{F} =$ curl $\mathbf{G}$, khi đó theo định lý 16.9 ta phải có

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div curl } \mathbf{G} = 0$$

điều này mâu thuẫn vì div $\mathbf{F} \neq 0$. Như vậy, $\mathbf{F}$ không là curl của một trường vectơ khác.

Một lần nữa, lý do từ cái tên *divergence* có thể được hiểu trong bối cảnh dòng chảy của chất lỏng. Nếu $\mathbf{F}(x, y, z)$ là vận tốc của chất lỏng (hoặc khí ga), khi đó div $\mathbf{F}(x, y, z)$ biểu diễn tốc độ thay đổi (theo thời gian) khối lượng của chất lỏng (hoặc khí ga) chảy từ điểm (x, y, z) trên một đơn vị thể tích. Nói cách khác, div $\mathbf{F}(x, y, z)$ đo hướng của chất lỏng chảy ra từ điểm (x, y, z). Nếu div $\mathbf{F} = 0$, thì $\mathbf{F}$ được gọi là **không nén được**.

Một toán tử khả vi khác xuất hiện khi ta tính toán divergence của một trường vectơ gradient ∇f. Nếu f là một hàm ba biến, ta có

$$\text{div }(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

và biểu thức này rất thường xuyên gặp và ta viết tắt nó là $\nabla^2 f$. Toán tử

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

được gọi là **toán tử Laplace** bởi vì nó liên quan tới **phương trình Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Ta cũng có thể áp dụng toán tử Laplace cho một trường vectơ

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

với các thành phần của nó như sau

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k}$$

Các Dạng Vectơ của Định Lý Green

Các toán tử curl và divergence cho ta viết lại Định Lý Green dưới nhiều dạng mà ta sẽ dùng trong các nghiên cứu sau này. Ta giả sử rằng một miền phẳng D, và đường biên của nó là C, và các hàm P và Q thỏa mãn các giả thiết của định lý Green. Khi đó, ta xem xét một trường vectơ $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Tích phân đường của nó là

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

và, xem $\mathbf{F}$ như là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ với thành phần thứ ba là 0, ta có

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Do đó,

$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

và ta có thể viết lại phương trình trong định lý Green dưới dạng vectơ như sau

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \tag{16.5.9}$$

Phương trình (16.5.9) biểu diễn tích phân đường của thành phần tiếp tuyến của **F** trên C dưới dạng tích phân bội của cao độ của curl **F** trên miền D giới hạn trong C. Bây giờ ta lấy một công thức tương tự có chứa thành phần pháp tuyến của **F**.

Nếu C được viết dưới dạng phương trình vectơ

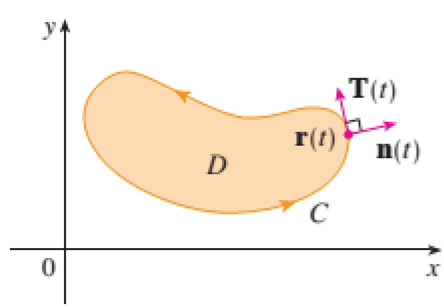
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad 1 \leqslant t \leqslant b$$

thi vectơ tiếp tuyến đơn vị (xem Mục 13.2) là

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}$$

Ta có thể chứng minh rằng vectơ pháp tuyến đơn vị bên ngoài của C được cho bởi

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\mathbf{j}$$



Hình 16.5.2

(Xem Hình 16.5.2). Khi đó, từ phương trình (16.2.2) ta có

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_a^b (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})(t)|\mathbf{r}'(t)|dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t),y(t))y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t),y(t))x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]|\mathbf{r}'(t)|dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t))y'(t)dt - Q(x(t),y(t))x'(t)dt \\
&= \int_C Pdy - Qdx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA
\end{aligned}$$

theo định lý Green. Nhưng mà đại lượng tích phân trong tích phân bội này chỉ là divergence của $\mathbf{F}$. Do vậy, ta có một dạng vectơ thứ hai của định lý Green.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\,\mathbf{F}(x,y)dA \tag{16.5.10}$$

Biểu thức này nói rằng tích phân đường của một thành phần pháp tuyến của $\mathbf{F}$ trên C bằng với tích phân bội của divergence của $\mathbf{F}$ trên miền D giới hạn trong C.

Bài tập 16.5. .

1-8 *Hãy tìm (a) curl và (b) divergence của trường vectơ cho trước.*

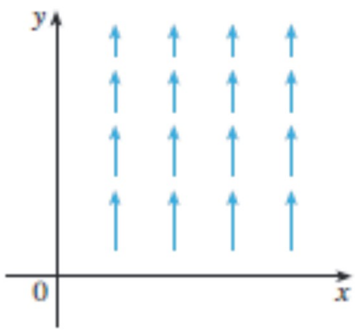
1. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x+yz)\boldsymbol{i} + (y+xz)\boldsymbol{j} + (z+xy)\boldsymbol{k}$
2. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy^2z^3\boldsymbol{i} + x^3yz^2\boldsymbol{j} + x^2y^3z\boldsymbol{k}$
3. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xye^z\boldsymbol{i}yze^x\boldsymbol{k}$
4. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \sin yz\boldsymbol{i} + \sin zx\boldsymbol{j} + \sin xy\boldsymbol{k}$
5. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$
6. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = e^{xy}\sin z\boldsymbol{j} + y\tan^{-1}(x/z)\boldsymbol{k}$
7. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \langle e^x\sin y, e^y\sin z, e^z\sin x\rangle$
8. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \langle \dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\rangle$

9-11 *Cho một trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *trong mặt xy và trông giống nhau trên mọi mặt phẳng nằm ngang. (Nói cách khác,* $\boldsymbol{F}$ *độc lập với z và thành phần z của nó bằng 0).*

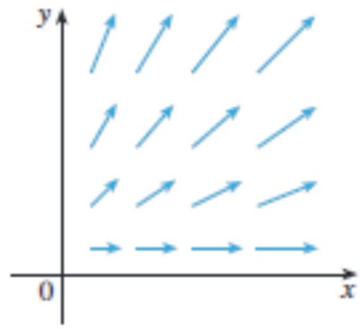
(a) div $\boldsymbol{F}$ *là dương, âm, hay bằng không? Hãy giải thích.*

(b) Hãy kiểm tra xem curl $\boldsymbol{F} = 0$ *hay không. Nếu không, curl* $\boldsymbol{F}$ *chỉ theo hướng nào?*

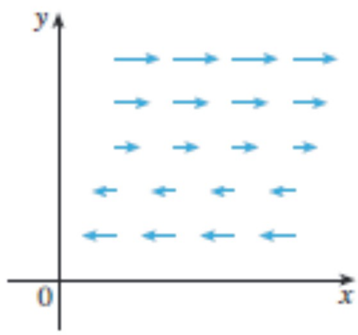
9.



10.



11.



---

12. Cho f là một trường vô hướng và $\boldsymbol{F}$ *là một trường vectơ. Hãy nêu rõ các biểu thức sau là có nghĩa hay không. Nếu không, hãy giải thích tại sao. Và nếu có, hãy nêu xem nó là một trường vô hướng hay một trường vectơ.*

13-18 *Hãy xét xem các trường vectơ sau đây có bảo toàn hay không. Nếu nó bảo toàn, hãy tìm hàm f sao cho* $\boldsymbol{F} = \nabla f$*.*

13. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k}$

14. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xyz^2\boldsymbol{i} + x^2yz^2\boldsymbol{j} + x^2y^2z\boldsymbol{k}$

(a) curl f	(b) grad$f$
(c) div $\mathbf{F}$	(d) curl (grad$f$)
(e) grad$\mathbf{F}$	(f) grad(div $\mathbf{F}$)
(g) div (grad$f$)	(h) grad(div f)
(i) curl (curl $\mathbf{F}$)	(j) div (div $\mathbf{F}$)
(k) (grad$f$) $\times$ (div $\mathbf{F}$)	(l) div (curl (grad$f$))

15. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3xy^2z^2\boldsymbol{i} + 2x^2yz^3\boldsymbol{j} + 3x^2y^2z^2\boldsymbol{k}$

16. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i} + \sin z\boldsymbol{j} + y\cos z\boldsymbol{k}$

17. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^{yz}\boldsymbol{i} + xze^{yz}\boldsymbol{j} + xye^{yz}\boldsymbol{k}$

18. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^x\sin yz\boldsymbol{i} + ze^x\cos yz\boldsymbol{j} + ye^x\cos yz\boldsymbol{k}$

---

19. Có hay không một trường vectơ $\boldsymbol{G}$ *trên* $\mathbb{R}^3$ *sao cho curl* $\boldsymbol{G} = \langle x\sin y, \cos y, z - xy\rangle$*? Hãy giải thích.*

20. Có hay không một trường vectơ $\boldsymbol{G}$ *trên* $\mathbb{R}^3$ *sao cho curl* $\boldsymbol{G} = \langle xyz, -y^2z, yz^2\rangle$*? Hãy giải thích.*

21. Hãy chỉ ra một trường vectơ bất kỳ có dạng

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = f(x)\boldsymbol{i} + g(y)\boldsymbol{j} + h(z)\boldsymbol{k}$$

trong đó f, g, h *là các hàm khả vi, và không rôta.*

22. Hãy chỉ ra một trường vectơ bất kỳ có dạng

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = f(y, z)\boldsymbol{i} + g(x, z)\boldsymbol{j} + h(x, y)\boldsymbol{k}$$

là không nén được.

23-29 *Hãy chứng minh các đẳng thức sau đây, giả sử rằng các đạo hàm riêng tương ứng tồn tại và liên tục. Nếu* f *là một trường vectơ vô hướng và* $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ *là các trường vectơ, thì* $f\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}$ *và* $\boldsymbol{F}$*curl* $\boldsymbol{G}$ *được xác định bởi*

$$(f\boldsymbol{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\boldsymbol{F}(x, y, z)$$
$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, z)\cdot\boldsymbol{G}(x, y, z)$$
$$(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(x, y, z) = \boldsymbol{F}(x, y, z)\times\boldsymbol{G}(x, y, z)$$

23. *div* $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \textit{div } \boldsymbol{F} + \textit{div } \boldsymbol{G}$

24. *curl* $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \textit{curl } \boldsymbol{F} + \textit{curl } \boldsymbol{G}$

25. *div* $(f\boldsymbol{F}) = f\,\textit{div } \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\cdot\nabla f$

26. *curl*$(f\boldsymbol{F}) = f\,\textit{curl } \boldsymbol{F} + (\nabla f)\times\boldsymbol{F}$

27. *div* $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G}\cdot\textit{curl } \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}\cdot\textit{curl } \boldsymbol{G}$

28. *div* $(\nabla f\times\nabla g) = 0$

29. *curl* $(\textit{curl } \boldsymbol{F}) = \textit{grad}(\textit{div } \boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$

30-32 *Cho* $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ *và* $r = |\boldsymbol{r}|$.

30. *Hãy kiểm chứng các đẳng thức sau*

    (a) $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$.

    (b) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{r}) = 4r$.

    (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$.

31. *Hãy kiểm chứng các mệnh đề sau*

(a) $\nabla r = \boldsymbol{r}/r$.

(b) $\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$.

(c) $\nabla(1/r) = -\boldsymbol{r}/r^3$.

(d) $\nabla\ln r = \boldsymbol{r}/r^2$.

32. *Nếu* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}/r^p$, *hãy tìm div* $\boldsymbol{F}$. *Có hay không một giá trị p sao cho div* $\boldsymbol{F} = 0$.

---

33. *Hãy áp dụng định lý Green với dạng như phương trình* (16.5.10) *để chứng minh* ***đẳng thức thứ nhất của Green****:*

$$\iint_D f\nabla^2 g dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot \boldsymbol{n} ds - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g dA$$

trong đó C và D thoả mãn các giả thiết của định lý Green và các đạo hàm riêng tương ứng của f và g tồn tại và liên tục. (Đại lượng $\nabla g\cdot \boldsymbol{n} = D_n g$ trong tích phân đường. Đây là đạo hàm có hướng theo hướng của vectơ pháp tuyến và được gọi là ***đạo hàm hướng pháp tuyến*** *của g).*

34. *Hãy áp dụng đẳng thức thứ nhất của Green (bài tập 33) để chứng minh* ***đẳng thức thứ hai của Green****:*

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dA = \oint_C f(\nabla g - g\nabla f)\cdot \boldsymbol{n} dA$$

trong đó C và D thoả mãn các giả thiết của định lý Green và các đạo hàm riêng tương ứng của f và g tồn tại và liên tục.

35. *Từ Mục 14.3 hãy nhớ lại rằng một hàm g được gọi là* tuần hoàn trên *D nếu nó thỏa mãn phương trình Laplace, nghĩa là, $\nabla^2 g = 0$ trên D. hãy áp dụng đâwrng thức thứ nhất của Green (với cùng các giả thiết như trong bài tập 33) để chỉ ra rằng nếu g là tuần hoàn trên D thì $\oint_C D_n g ds = 0$. Ở đây $D_n g$ là đạo hàm hướng pháp tuyến của g được định nghĩa trong bài tập 33.*

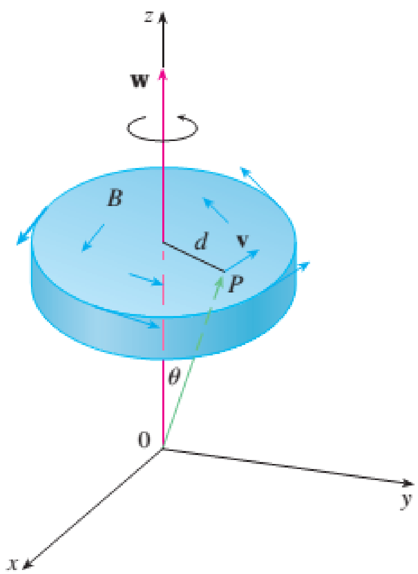
36. *Hãy áp dụng đẳng thức thứ nhất của Green để chỉ ra rằng nếu f là tuần hoàn trên D, và nếu $f(x, y) = 0$ trên biên của C, khi đó $\iint_D |\nabla f|^2 dA = 0$ (với cùng các giả thiết như trong bài tập 33).*

37. *Bài tập này chứng minh một mối liên hệ giữa vectơ curl và phép quay. Cho B là một vật rắn, cứng quay quanh trục z. Phép quay có thể được mô tả bởi vectơ $\boldsymbol{w} = \omega\boldsymbol{k}$, trong đó ω là vận tốc góc của B, nghĩa là, vectơ vận tốc tiếo tuyến tại một điểm P bất kỳ trong B chia cho khoảng cách d từ nó đến trục quay. Cho $\boldsymbol{r} = \langle x, y, z\rangle$ là vectơ toạ độ của P.*

    (a) *Bằng cách xét góc θ trong hình, hãy chỉ ra rằng trường vận tốc của B được cho bởi $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$.*

    (b) *Hãy chỉ ra $\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$*

(c) *Hãy chỉ ra* $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{w}$.



38. *Hệ phương trình Maxwell liên quan đến điện trường* $\boldsymbol{E}$ *và từ trường* $\boldsymbol{H}$ *thay đổi theo thời gian trong một miền không điện tích và không có dòng điện có thể được nêu ra như sau:*

$$\begin{aligned} div\ \boldsymbol{E} &= 0 \\ div\ \boldsymbol{H} &= 0 \\ curl\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ curl\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng. Hãy áp dụng các phương trình này để chứng minh các đẳng thức sau đây:

(a) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$.

(b) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$.

(c) $\nabla^2 \boldsymbol{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$

(d) $\nabla^2 \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$

39. *Ta vừa chứng minh rằng mọi trường vectơ có dạng $\boldsymbol{F} = \nabla g$ đều thỏa mãn phương trình curl $\boldsymbol{F} = 0$ và mọi trường vectơ có dạng $\boldsymbol{F} = curl\ \boldsymbol{G}$ đều thỏa mãn phương trình div $\boldsymbol{F} = 0$ (giả sử rằng các đạo hàm riêng tương ứng là liên tục) Điều này cho ta một câu hỏi: Có hay không các phương trình mà mọi hàm có dạng $f = div\ \boldsymbol{G}$ phải thỏa mãn? Hãy chỉ ra câu trả lời cho câu hỏi này là "không" bằng cách chứng minh rằng* mọi *hàm liên tục f trên $\mathbb{R}^3$ là divergence của một trường vectơ nào đó. [Gợi ý: Cho $\boldsymbol{G}(x,y,z) = \langle g(x,y,z), 0, 0\rangle$, trong đó $g(x,y,z) = \int_0^x f(x,y,z)dt$].*

16.6 Các Mặt Tham Số và Diện tích của chúng

Cho đến nay, ta đã xem xét các dạng đặc biệt của mặt: mặt trụ, mặt nón bậc hai, đồ thị của các hàm hai biến, các mặt của hàm ba biến. Ở đây, ta áp dụng hàm vectơ để mô tả các mặt tổng quát hơn, được gọi là *các mặt them số*, và tính toán diện tích của chúng. Sau đó, ta đưa ra công thức tính diện tích của một mặt tổng quát và xem xét nó được áp dụng vào các mặt đặc biệt như thế nào.

Mặt Tham Số

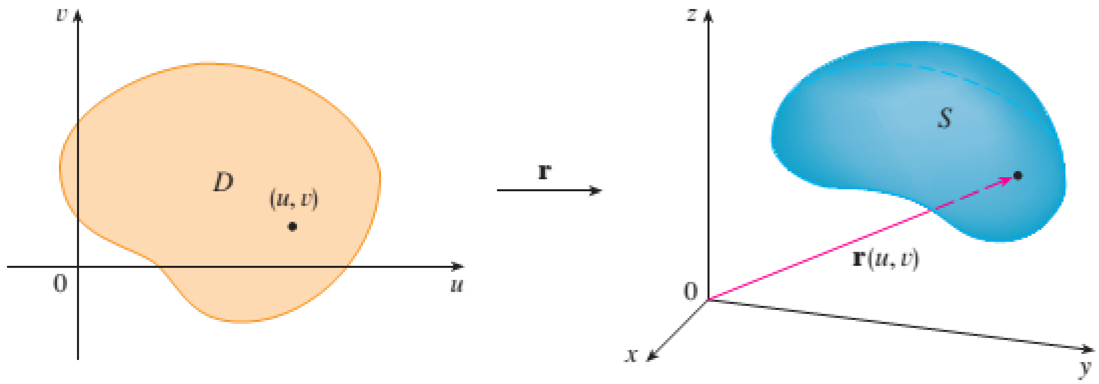
Theo cách tương tư mà ta đã mô tả một đường cong trong không gian bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$ theo tham số t, ta có thể mô tả một mặt bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v)$ theo hai tham số u và v. ta giả sử rằng

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \tag{16.6.1}$$

là một hàm vectơ xác định trên miền D trong mặt phẳng uv. Cho nên x, y và z, các hàm thành phần của $\mathbf{r}$, là các hàm hai biến u và v với miền xác định D. Tập các điểm (x,y,z) trong $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v) \tag{16.6.2}$$

và (u,v) thay đổi trong D, được gọi là **mặt tham số** S và phương trình (16.6.2) được gọi là các **phương trình tham số** của S. Mỗi giá trị của u và v cho ra một điểm trên S; chọn tất cả các giá trị như vậy, ta được mọi điểm trên S. Nói cách khác, mặt S được vạch ra bởi toạ độ của các vectơ $\mathbf{r}(u,v)$ khi (u,v) thay đổi trên D (Xem Hình 16.6.1).



Hình 16.6.1: Một mặt tham số

Ví dụ 1. Hãy xác định và phác họa một mặt có phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(u,v) = 2\cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2\sin u\mathbf{k}$$

Giải Các phương trình tham số cho mặt này là

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\sin u$$

Nên với một điểm (x, y, z) bất kỳ trên mặt, ta có

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$

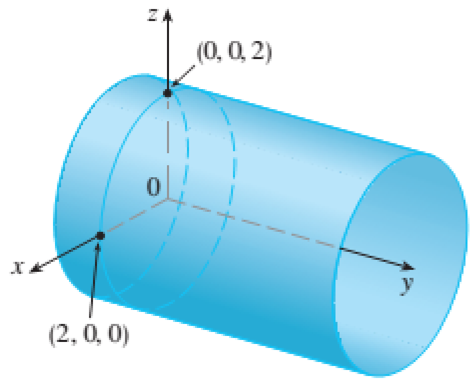
Điều này có nghĩa là theo chiều dọc mặt cắt song song với mặt phẳng xy (tức là, với y không đổi) là mọi đường tròn có bán kính bằng 2. Bởi vì $y = v$ và không có ràng buộc nào cho v, mặt này là một mặt trụ tròn với bán kính 2 mà trục của nó là trục y (Xem Hình 16.6.2).

Trong ví dụ 1 ta không có ràng buộc cho các tham số u và v và do đó ta có toàn bộ mặt trụ. Nếu, chẳng hạn, ta ràng buộc u và v bằng cách viết miền tham số

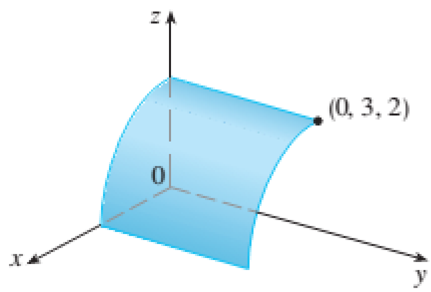
$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

khi đó $x \geqslant 0, z \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 3$ và ta có một phần tư mặt trụ có chiều dài 3 được minh họa trong Hình 16.6.3.

Nếu một mặt tham số S được cho bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v)$, thì sẽ có hai họ đường cong nằm trên S, một họ với u không đổi và một họ khác với v không đổi. Các họ này



Hình 16.6.2



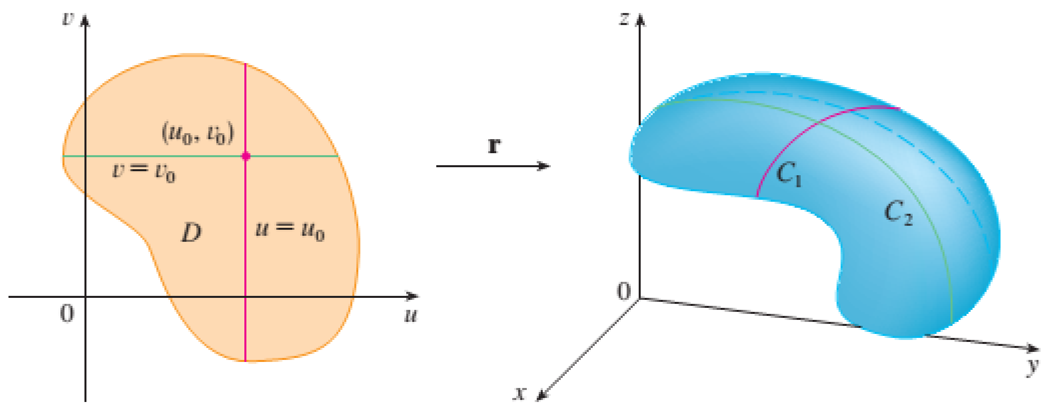
Hình 16.6.3

ứng với các đường thẳng đứng và các đường nằm ngang trong mặt phẳng uv. Nếu ta giữ u không đổi bằng cách đặt $u = u_0$ thì $\mathbf{r}(u, v)$ là một hàm vectơ chỉ theo một biến v và xác định một đường cong C_1 trên S. (Xem Hình 16.6.4)

Tương tự, nếu ta giữ v không đổi bằng cách đặt $v = v_0$, ta được một đường cong C_2 được cho bởi $\mathbf{r}(u, v_0)$ trên S. Ta gọi các đường cong này là các **đường cong lưới**. (Trong ví dụ 1, các đường cong lưới có được bằng cách đặt u không đổi là các đường nằm ngang trong khi các đường cong lưới với v không đổi là các đường tròn). Thật ra, khi một máy tính vẽ đồ thị của một mặt tham số, nó thường mô tả bề mặt bằng cách vẽ các đường cong lưới, như ta sẽ thấy trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2. Hãy sử dụng một hệ thống máy tính để vẽ đồ thị bề mặt

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \sin v)\cos u, (2 + \sin v)\sin u, u + \cos v \rangle$$



Hình 16.6.4

Với các đường cong lưới nào thì u không đổi? Đường nào với v không đổi?

Giải Ta vẽ đồ thị một phần của bề mặt với miền tham số $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ trong Hình 16.6.5. Nó có sự xuất hiện của một đường xoắn ốc. Để xác định các đường cong lưới, ta viết tương ứng các phương trình tham số:

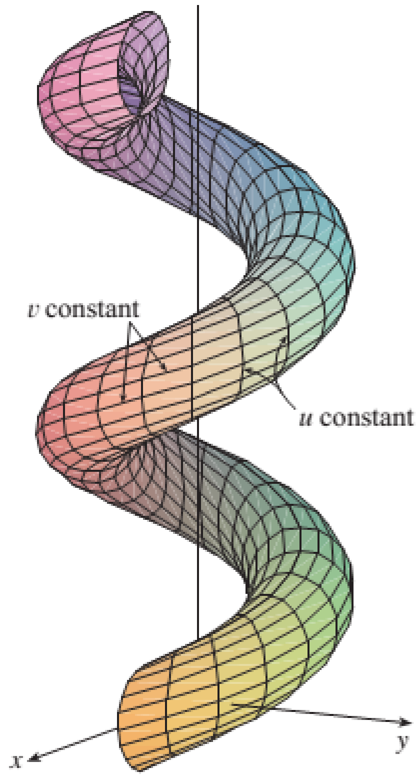
$$x = (2 + \sin v)\cos u \qquad y = (2 + \sin v)\sin u \qquad z = u + \cos u$$

Nếu v không đổi thì $\sin v$ và $\cos v$ không đổi, nên phương trình tham số giống như một đường đinh ốc trong Ví dụ 4 Mục 13.1. Do vậy các đường cong lưới với v không đổ là các đường xoắn ốc trong Hình 16.6.5. Ta suy luận rằng các đường cong lưới với u không đổi phải là các đường tương tự đường tròn như trong hình. Thêm một bằng chứng cho khẳng định này là nếu u không đổi, $u = u_0$ thì phương trình $z = u_0 + \cos v$ chỉ ra rằng các giá trị của z sẽ thay đổi từ $u_0 - 1$ đến $u_0 + 1$.

Trong ví dụ 1 và 2 chúng ta có một phương trình vectơ và được yêu cầu vẽ đồ thị của mặt tham số tương ứng. Trong các ví dụ dưới đây, tuy nhiên, ta có thêm thử thách cần tìm một hàm vectơ để biểu diễn một mặt tham số cho trước. Trong phần cuối của chương này ta sẽ phải làm chính xác việc đó.

Ví dụ 3. Hãy tìm một hàm vectơ biểu diễn mặt phẳng đi qua điểm P_0 có vectơ tọa độ $\mathbf{r}_0$ và chứa hai vectơ không song song $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$.

Giải Nếu P là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng, ta có thể được điểm P bằng cách cho P_0 di chuyển một đoạn cho trước theo hướng của vectơ $\mathbf{a}$ và một đoạn khác theo hướng



Hình 16.6.5

vectơ **b**. Do đó sẽ có hai số u và v sao cho $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ (Minh họa trong Hình 16.6.6, theo định luật Parallelogram, trong trường hợp u và v đều dương. Xem bài tập 46 trong Mục 12.2). Nếu **r** là tọa độ vectơ của P, khi đó

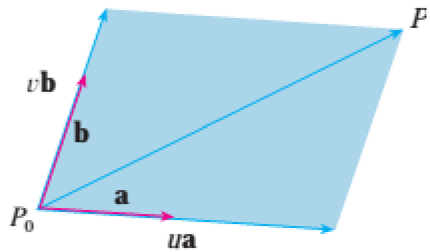
$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Vậy nên phương trình vectơ của mặt phẳng được viết dưới dạng

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

trong đó u và v là các số thực.

Nếu ta viết $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ và $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, thì ta có



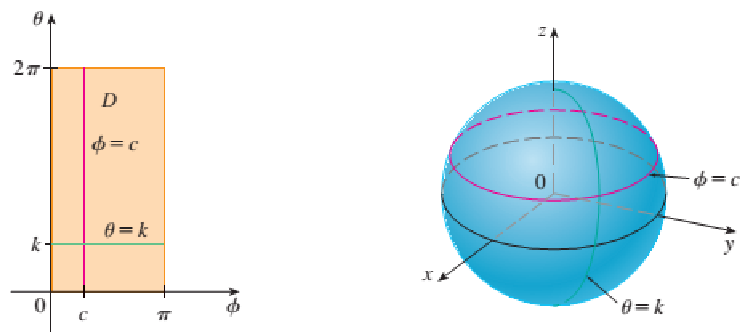
Hình 16.6.6

thể viết các phương trình tham số của mặt phẳng đi qua (x_0, y_0, z_0) như sau:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + b_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$

Ví dụ 4. Hãy tìm biểu diễn tham số của mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



Hình 16.6.7

Giải Một mặt cầu có biểu diễn đơn giản $\rho = a$ trong hệ trục tọa độ cầu, nên ta chọn các góc ϕ và θ trong toạ độ cầu như là các tham số (Mục 15.9). Khi đó, đặt $\rho = a$ trong phương trình chuyển từ toạ độ cầu đến toạ độ chữ nhật (Các phương trình 15.9.1), ta được

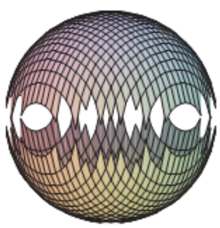
$$x = a\sin\phi\cos\theta \qquad y = a\sin\phi\cos\theta \qquad z = a\cos\phi$$

là phương trình tham số của mặt cầu. Phương trình vectơ tương ứng là

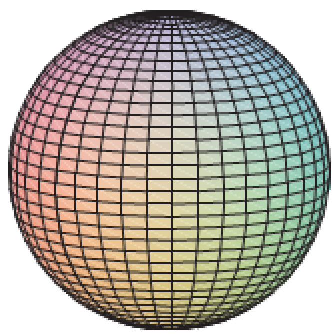
$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + a\cos\phi\mathbf{k}$$

Ta có $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ và $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, nên miền tham số là hình chữ nhật $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Các đường cong lưới với ϕ không đổi là các đường tròn vĩ độ (chứa đường xích đạo). Các đường cong lưới với θ không đổi là các đường kinh tuyến (nửa đường tròn), có kết nối với các cực bắc và nam. (Xem Hình 16.6.7).

Lưu ý 4. *Ta đã thấy trong ví dụ 4 rằng các đường cong lưới của một mặt cầu là các đường cong có vĩ độ và kinh độ không đổi. Với một mặt tham số tổng quát ta thực sự tạo ra một biểu đồ và các đường cong lưới tương tự với các đường vĩ tuyến và kinh tuyến. Mô tả một điểm trên một mặt tham số (giống như Hình 16.6.5) bằng cách chọn ra các giá trị đặc biệt của u và v giống như là cho các giá trị vĩ độ và kinh độ của một điểm vậy.*



Hình 16.6.8



Hình 16.6.9

Một trong những ứng dụng của mặt tham số trong đồ họa máy tính. Hình 16.6.9 cho thấy kết quả của cố gắng vẽ đồ thị hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bằng cách giải phương trình cho z và vẽ bán cầu trên và bán cầu dưới một cách riêng biệt. Phần của hình cầu đã bị mất đi bởi vì của hệ thống lưới hình chữ nhật được sử dụng bởi các máy tính. Các hình ảnh tốt hơn trong Hình 16.6.9 được tạo bởi máy tính bằng cách sử dụng phương trình tham số như trong Ví dụ 4.

Ví dụ 5. Hãy tìm một biểu diễn tham số của mặt trụ

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

Giải Mặt trụ có một biểu diễn đơn giản là $r = 2$ trong hệ trục toạ độ trụ, do đó ta chọn các tham số θ và z trong hệ trục toạ độ trụ. Khi đó phương trình tham số của mặt trụ là

$$x = 2\cos\theta \qquad y = 2\sin\theta \qquad z = z$$

trong đó $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ và $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Ví dụ 6. Hãy tìm một hàm vectơ biểu diễn một elliptic paraboloid $z^2 = x^2 + 2y^2$.

Giải Nếu ta xem x và y là các tham số, thì phương trình tham số là

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

và phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\mathbf{k}$$

Tổng quát, một mặt được cho trước bởi đồ thị của một hàm theo x và y, tức là, với phương trình có dạng $z = f(x, y)$, luôn có thể được xem như một mătj tham số bằng cách chọn x và y là các tham số và viết phương trình dưới dạng

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Biểu diễn tham số (cũng được gọi là tham số hoá) các mặt là không duy nhất. Ví dụ tiếp theo chỉ ra hai cách để them số hoá một mặt nón.

Ví dụ 7. Hãy tìm biểu diễn tham số của mặt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, tức là nửa trên của mặt nón $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Giải [1] Khi chọn x và y là các tham số thì ta có

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Do đó phương trình của mặt là

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$$

Giải [2] Một biểu diễn khác được suy ra bằng cách chọn các tham số trên hệ trục tọa độ cực r và θ. Một điểm (x, y, z) trên mặt nón thỏa $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ và $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. Phương trình vectơ của mặt nón là

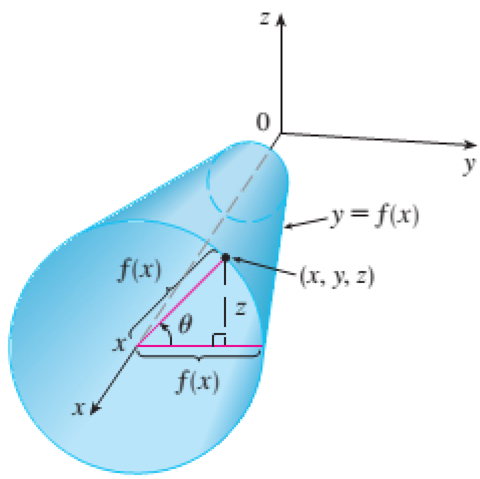
$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + 2r\mathbf{k}$$

trong đó $r \geqslant 0$ và $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Các mặt tròn xoay

Các mặt tròn xoay có thể được tham số hoá và vẽ đồ thị thông qua hệ thống máy tính. Chẳng hạn, hãy xem xét mặt S có được bằng cách xoay đường cong $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, quanh trục x, trong đó $f(x) \geqslant 0$. Cho θ là góc của phép quay và được minh hoạ trong Hình 16.6.10. Nếu (x, y, z) là một điểm trên S, thì

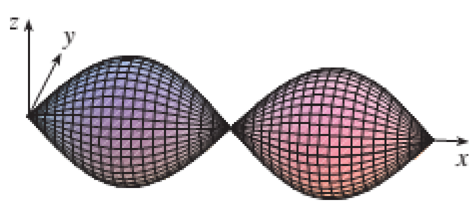
$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\sin\theta \tag{16.6.3}$$



Hình 16.6.10

Do đó ta lấy x và θ là các tham số và như trong phương trình (16.6.3) là phương trình tham số của S. Miền tham số được cho bởi $a \leqslant \mathbf{x} \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Ví dụ 8. Hãy tìm phương trình tham số cho các mặt được tạo bởi khi quay một đường cong $y = \sin x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, quanh trục x. Hãy áp dụng các phương trình này để vẽ đồ thị mặt tròn xoay này.



Hình 16.6.11

Giải Từ phương trình (16.6.3), phương trình tham số là

$$x = x \qquad y = \sin x\cos\theta \qquad z = \sin x\sin\theta$$

và miền tham số là $0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Hãy sử dụng một máy tính để vẽ đồ thị của phương trình tham số này và quay hình đã vẽ ta được đồ thị như trong Hình 16.6.11.

Ta cũng có thể áp dụng phương trình (16.6.3) để biểu diễn một mặt tròn xoay bằng cách quay quanh trục y hoặc z. (Xem Bài tập 30).

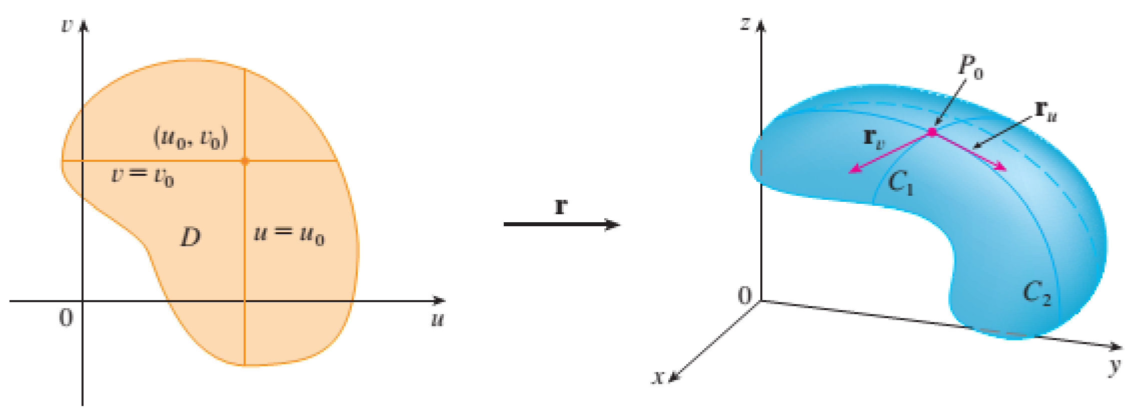
Mặt phẳng tiếp xúc

Bây giờ ta sẽ tìm các mặt tiếp xúc của một mặt tham số S được cho bởi phương trình vectơ

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

tại một điểm P_0 có toạ độ $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Nếu ta cho u không đổi bằng cách đặt $u = u_0$, thì $\mathbf{r}(u_0, v)$ trở thành một hàm vectơ theo tham số v và đường cong lưới C_1 nằm trên S. (Xem Hình 16.6.12). Vectơ tiếp xúc với C_1 tại P_0 được suy ra bằng các lấy đạo hàm riêng của $\mathbf{r}$ theo v:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k} \tag{16.6.4}$$



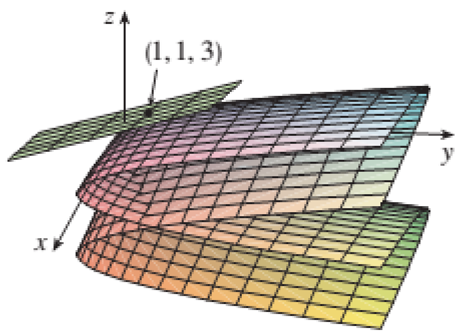
Hình 16.6.12

Tương tự, nếu ta chọn v không đổi và đặt $v = v_0$, ta cũng có một đường cong lưới C_2 được cho bởi $\mathbf{r}(u, v_0)$ nằm trên S, và vectơ tiếp xúc tại P_0 là

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k} \tag{16.6.5}$$

Nếu $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ khác 0, thì mặt S được gọi là **trơn** (nó không có "góc đỉnh"). Với một mặt trơn, **mặt tiếp xúc** là mặt phẳng chứa các vectơ tiếp xúc $\mathbf{r}_u$ và $\mathbf{r}_v$, và vectơ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ là vectơ tiếp tuyến với mặt tiếp xúc.

Ví dụ 9. Hãy tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt có phương trình tham số $x = u^2, y = v^2, z = u + 2v$ tại điểm $(1, 1, 3)$.



Hình 16.6.13: Mặt phẳng tiếp xúc tại $(1, 1, 3)$

Giải Trước hết ta hãy tính các vectơ tiếp xúc

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = 2v\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Do đó vectơ tiếp tuyến của mặt tiếp xúc là

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\mathbf{i} - 4u\mathbf{j} + 4uv\mathbf{k}$$

Chú ý rằng điểm $(1, 1, 3)$ ứng với các giá trị tham số $u = 1$ và $v = 1$, do đó vectơ tiếp tuyến là

$$-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Do đó phương trình của mặt tiếp xúc tại $(1, 1, 3)$ là

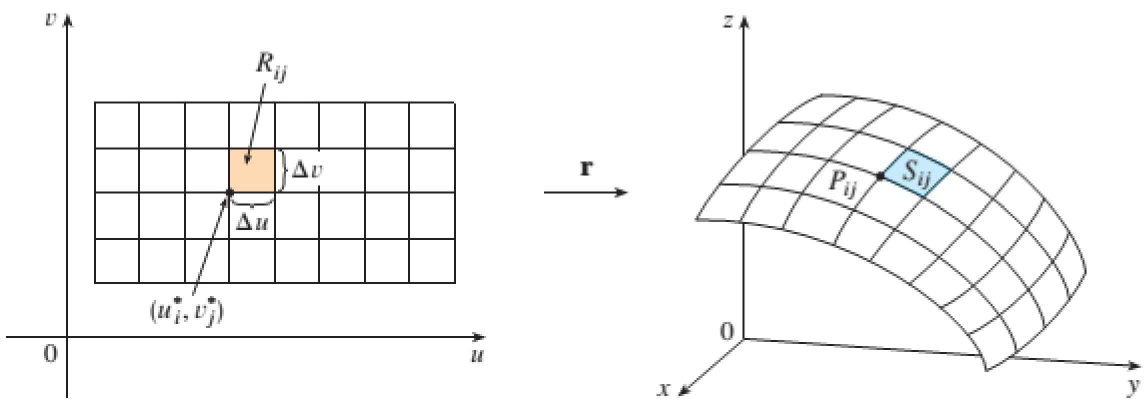
$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

hay

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Diện tích mặt

Ta sẽ định nghĩa diện tích của mặt có phương trình tham số tổng quát được cho bởi phương trình (16.6.1). Để đơn giản trước tiên ta xem xét một mặt có miền tham số là miền chữ nhật D và ta chia nó là hai hình chữ nhật nhỏ R_{ij}. Ta chọn (u_i^*, v_i^*) là điểm góc đỉnh bên trái phía dưới của R_{ij}. (Xem Hình 16.6.14).



Hình 16.6.14: Ảnh của hình chữ nhật con R_{ij} là phần nối S_{ij}.

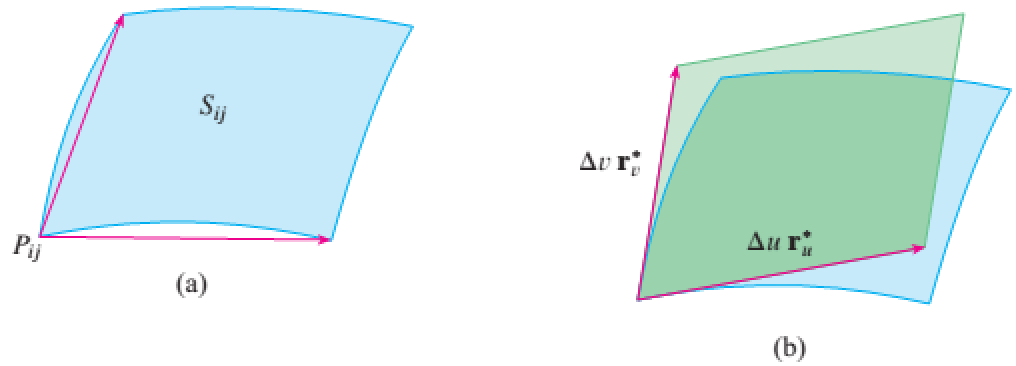
Phần S_{ij} của mặt S ứng với R_{ij} được gọi là *phần nối* và điểm P_{ij} với tọa độ vectơ là $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ là một trong các góc đỉnh của nó. Đặt

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{và} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

là các vectơ tiếp xúc tại P_{ij} được cho bởi phương trình (16.6.4) và (16.6.5).

Hình 16.6.15(a) cho ta thấy hai cạnh của phần nối giao nhau tại P_{ij} có thể được xấp xỉ bằng các vectơ. Các vectơ này, lần lượt, có thể được xấp xỉ bởi các vectơ $\triangle u\mathbf{r}_u^*$ và $\triangle v\mathbf{r}_v^*$ vì các đạo hàm riêng được xấp xỉ bởi các đạo hàm thương. Do vậy ta xấp xỉ S_{ij} bởi hình bình hành xác định bởi các vectơ $\triangle u\mathbf{r}_u^*$ và $\triangle v\mathbf{r}_v^*$. Hình bình hành này được chỉ ra trong Hình 16.6.15(b) và nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với S tại P_{ij}. Diện tích của hình bình hành là

$$|(\triangle u\mathbf{r}_u^*) \times (\triangle v\mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\triangle u\triangle v$$



Hình 16.6.15: Xấp xỉ một phần nối bằng hình bình hành

và do đó diện tích xấp xỉ của S là

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \triangle u \triangle v$$

Trực giác cho ta biết rằng xấp xỉ này tốt hơn khi ta tăng sô lượng các hình chữ nhật nhỏ, và ta nhận ra rằng hai đại lượng tổng này là tổng Riemann trong tích phân bội $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dudv$. Điều này dẫn đến định nghĩa sau đây

Định nghĩa 16.5. Nếu một mặt tham số trơn S được cho bởi phương trình

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

và S được phủ khi (u, v) thay đổi trong miền tham số D, thì **diện tích mặt** của S là

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| dA$$

trong đó $\quad \mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

Ví dụ 10. Hãy tìm diện tích mặt cầu có bán kính a.

Giải Trong ví dụ 4 ta có phương trình tham số

$$x = a\sin\phi\cos\theta \qquad y = a\sin\phi\cos\theta \qquad z = a\cos\phi$$

trong đó miền tham số là

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \phi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Trước hết ta tính tích có hướng của các vectơ tiếp xúc

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & a - a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\mathbf{k}\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = a^2\sqrt{\sin^2\phi} = a^2\sin\phi\end{aligned}$$

do $\sin\phi \geqslant 0$ với $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Do đó, theo định nghĩa 16.5, diện tích của mặt cầu là

$$\begin{aligned}A &= \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi d\phi d\theta \\ &= a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\phi d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2\end{aligned}$$

Diện tích mặt được cho bởi đồ thị của một hàm

Trong trường hợp đặc biệt của một mặt S với phương trình $z = f(x, y)$, trong đó (x, y) trên D và f có các đạo hàm riêng liên tục, ta lấy x và y là tham số. Các phương trình tham số là

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

cho nên

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

và

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{16.6.6}$$

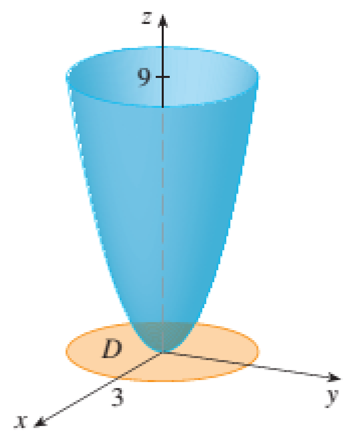
Vậy ta có

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \tag{16.6.7}$$

và công thức diện tích mặt theo định nghĩa 16.5 thành

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dA \tag{16.6.8}$$

Ví dụ 11. Hãy tìm diện tích của một phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm trên mặt phẳng $z = 9$.



Hình 16.6.16

Giải Mặt phẳng giao giữa paraboloid trong đường tròn $x^2 + y^2 = 9, z = 9$. Do đó mặt được cho nằm trên quả cầ D có tâm tại gốc tọa độ và bán kính 3. (Xem Hình 16.6.16). Áp dụng công thức (16.6.8) ta có

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dA \end{aligned}$$

Chuyển sang hệ trục tọa độ cực ta được

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= \left[2\pi \frac{1}{8} \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1) \end{aligned}$$

Câu hỏi còn lại ở đây là liệu định nghĩa của ta về diện tích mặt 16.5 phù hợp với công thức diện tích mặt từ giải tích một biến (8.2.4).

Ta xét mặt S được tạo bằng cách quay đường cong $y = f(x), a \leqslant x \leqslant b$, quanh trục x, trong đó $f(x) \geqslant 0$ và f' liên tục. Từ phương trình (16.6.3) ta có phương trình tham số của S là

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\sin\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Để tính diện tích mặt S ta cần các vectơ tiếp xúc

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x &= \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\mathbf{j} + f'(x)\sin\theta\mathbf{k}\\ \mathbf{r}_\theta &= -f(x)\sin\theta\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\mathbf{k}\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta\\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta\end{vmatrix}\\ &= f(x)f'(x)\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\mathbf{j} - f(x)\sin\theta\mathbf{k}\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{[f(x)]^2[1 + [f'(x)]^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\end{aligned}$$

bởi vì $f(x) \geqslant 0$. Do đó diện tích của S là

$$\begin{aligned}A &= \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dA\\ &= \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dxd\theta\\ &= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx\end{aligned}$$

Đây chính là công thức xác định diện tích mặt tròn xoay trong giải tích một biến (8.2.4).

Bài tập 16.6. .

1-2 Hãy xác định xem điểm P và Q có thuộc mặt cho trước không.

1. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle 2u+3v, 1+5u-v, 2+u+v\rangle$, $P(7,10,4), Q(5,22,5)$.

2. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u+v, u^2-v, u+v^2\rangle$, $P(3,-1,5), Q(-1,3,4)$.

3-6 *Hãy xác định mặt với phương trình vectơ cho trước*

3. $\boldsymbol{r}(u,v) = (u+v)\boldsymbol{i} + (3-v)\boldsymbol{j} + (1+4u+5v)\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{r}(u,v) = 2\sin u\boldsymbol{i} + 3\cos u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, 0 \leqslant v \leqslant 2$

4. $\boldsymbol{r}(s,t) = \langle s, t, t^2 - s^2\rangle$

5. $\boldsymbol{r}(s,t) = \langle s\sin 2t, s^2, s\cos 2t\rangle$

7-12 *Hãy sử dụng mộtmáy vi tính để vẽ đồ thị của mặt tham số. Dựa vào hình ảnh vừa vẽ hãy chỉ ra các đường cong lưới với u không đổi và với v không đổi.*

7. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u^2, v^2, u+v\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u, v^3, -v\rangle$, $-2 \leqslant u \leqslant 2, -2 \leqslant v \leqslant 2$

9. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u\cos v, u\sin v, u^5\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u, \sin(u+v), \sin v\rangle$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi, -\pi \leqslant v \leqslant \pi$

11. $x = \sin v, y = \cos u\sin 4v, z = \sin 2u\sin 4v$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

12. $x = \sin u, y = \cos u\sin v, z = \sin v\sin 4v$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

13-18 *Hãy kết hợp các phương trình với các đồ thị tương ứng được đánh dấu từ I-VI và hãy giải thích lý do tại sao chọn như vậy. Hãy xác định một họ các đường cong lưới khi u không đổi và v không đổi.*

13. $\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$

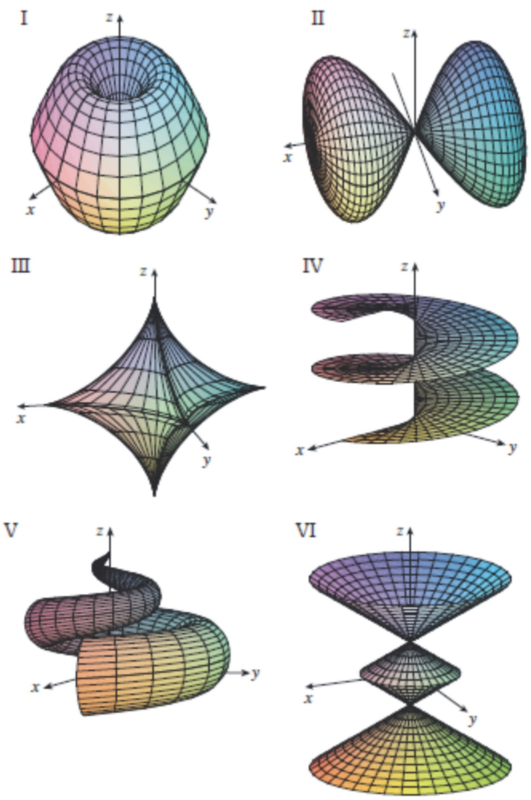
14. $\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + \sin u\boldsymbol{k}, -\pi \leqslant u \leqslant \pi$

15. $\boldsymbol{r}(u,v) = \sin v\boldsymbol{i} + \cos u \sin 2v\boldsymbol{j} + \sin u \sin 2v\boldsymbol{k}$

16. $x = (1-u)(3+\cos v)\cos 4\pi u, y = (1-u)(3+\cos v)\sin 4\pi u, z = 3u + (1-u)\sin v$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v, y = \sin^3 u \cos^3 v, z = \sin^3 v$

18. $x = (1-|u|)\cos v, y = (1-|u|)\sin v, z = u$



19-26 *Hãy tìm biểu diễn tham số của các mặt sau đây.*

19. *Mặt phẳng đi qua điểm gốc tọa độ chứa vectơ* $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ *và* $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

20. *Mặt phẳng đi qua điểm* $(0,-1,5)$ *và chứa các vectơ* $\langle 2,1,4\rangle$ *và* $\langle -3,2,5\rangle$.

21. *Một phần của hyperboloid* $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ *nằm trên mặt phẳng* yz.

22. *Một phần của ellipsoid* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ *nằm trên mặt phẳng* xz.

23. *Một phần của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *nằm trên hình nón* $z = \sqrt{x^2+y^2}$

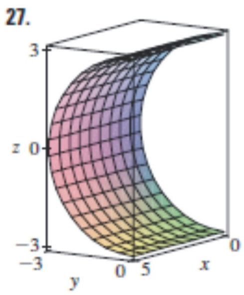
24. Một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ nằm trên mặt phẳng $z = -2$ và $z = 2$.

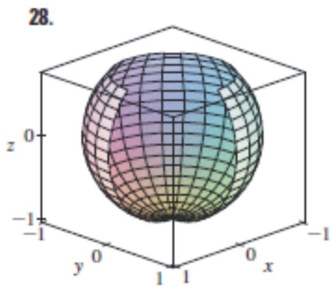
25. Một phần của mặt trụ $y^2 + z^2 = 16$ nằm trên mặt phẳng $x = 0$ và $x = 5$.

---

26. Một phần của mặt phẳng $z = x + 3$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

27-28 Hãy sử dụng một hệ thống máy tính để phác họa các đồ thị như các hình dưới đây





29. Hãy tìm phương trình tham số của các mặt được tạo bởi khi xoay đường $y = e^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 3$ quanh trục Ox và hãy phác họa đồ thị của mặt đó.

30. Hãy tìm phương trình tham số của các mặt được tạo bởi khi xoay đường $x = 4y^2 - y^4, -2 \leqslant y \leqslant 2$ quanh trục Oy và hãy phác họa đồ thị của mặt đó.

31. (a) Chuyện gì xảy ra với hình ống xoán ốc trong ví dụ 2 (Xem Hình 16.6.5) nếu ta thay $\cos u$ bởi $\sin u$ và $\sin u$ bởi $\cos u$?

(b) Chuyện gì xảy ra nếu ta thay $\cos u$ bởi $\cos 2u$ và $\sin u$ bởi $\sin 2u$?

32. Một mặt có phương trình tham số

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\sin\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\sin(\theta/2)$$

trong đó $-\dfrac{1}{2} \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}$ và $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, được gọi là ***dải Mobius***. Hãy vẽ đồ thị của mặt này với nhiều hướng nhìn. Có điều gì là bất thường không?

33-36 Hãy tìm một phương trình của mặt tiếp xúc với một mặt tham số cho trước tại một điểm đặc biệt.

33. $x = u + v, y = 3y^2, z = u - v$; $(2, 3, 0)$

34. $x = u^2 + 1, y = v^3 + 1, z = u + v$; $(5, 2, 3)$

35. $\boldsymbol{r}(u, v) = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$; $u = 2, v = \pi/3$

36. $\boldsymbol{r}(u, v) = \sin u\boldsymbol{i} + \cos u\sin v\boldsymbol{j} + \sin v\boldsymbol{k}$; $u = \pi/6, v = \pi/6$

37-38 *Hãy tìm phương trình của mặt tiếp xúc với một mặt tham số cho trước tại một điểm đặc biệt. Hãy vẽ đồ thị của mặt tham số và mặt tiếp xúc đó.*

37. $\boldsymbol{r}(u, v) = u^2\boldsymbol{i} + 2u\sin v\boldsymbol{j} + u\cos v\boldsymbol{k}$; $u = 1, v = 0$.

38. $\boldsymbol{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j} - u\boldsymbol{k}$; $(-1, -1, -1)$

39-50 *Hãy tìm diện tích của mặt.*

---

39. *Một phần của mặt phẳng* $3x + 2y + z = 6$ *nằm trên một phần tám đầu tiên.*

40. *Một phần của mặt phẳng có phương trình vectơ* $\boldsymbol{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v\rangle$ *được cho bởi* $0 \leqslant u \leqslant 2, -1 \leqslant v \leqslant 1$.

41. *Một phần của mặt phẳng* $x + 2y + 3z = 1$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 3$.

42. *Một phần của mặt nón* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *nằm giữa mặt phẳng* $y = x$ *và mặt trụ* $y = x^2$.

43. *Mặt* $z = \dfrac{2}{3}(x^{2/3} + y^{2/3})$, $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

44. *Một phần của mặt* $z = 1 + 3x + 2y^2$ *nằm trên hình tam giác có các đỉnh* $(0, 0), (0, 1)$ *và* $(2, 1)$.

45. *Một phần của mặt* $z = xy$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$.

46. *Một phần của paraboloid* $x = y^2 + z^2$ *nằm trong mặt trụ* $y^2 + z^2 = 9$.

47. *Một phần của mặt* $y = 4x + z^2$ *nằm giữa các mặt phẳng* $x = 0, x = 1, z = 0$ *và* $z = 1$.

48. *Hình đinh ốc (hình xoắn ốc) có phương trình vectơ* $\boldsymbol{r}(u, v) = u\cos v\boldsymbol{i} + u\sin v\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$

49. *Mặt có phương trình tham số* $x = u^2, y = uv, z = \frac{1}{2}v^2, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2$.

50. *Một phần của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = a^2$*, trong đó* $0 < a < b$.

---

51. *Nếu phương trình của mặt* S *là* $z = f(x, y)$*, trong đó* $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ *và bạn biết rằng* $|f_x| \leqslant 1$ *và* $|f_y| \leqslant 1$*, bạn nói gì về* $A(S)$*?*

52-53 *Hãy tìm diện tích của mặt chính xác đến bốn chữ số thập phân bằng cách biểu diễn diện tích này dưới dạng một tích phân thông thường và sử dụng máy tính để tính tích phân đó.*

52. *Một phần của mặt* $z = \cos(x^2 + y^2)$ *nằm trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$.

53. *Một phần của mặt* $z = e^{-x^2-y^2}$ *nằm trên quả cầ* $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

---

54. *Hãy tính chính xác đến bồn chữ số thập phân, diện tích của mặt* $z = (1+x^2)/(1+y^2)$ *nằm trên hình vuông* $|x| + |y| \leqslant 1$. *Hãy minh họa bằng các vẽ đồ thị của mặt đó.*

55. (a) *Hãy áp dụng Midpoint Rule trong tích phân bội (hãy xem Mục 15.1) với sáu hình vuông xấp xỉ diện tích của mặt* $z = 1/(x^2 + y^2 + z^2), 0 \leqslant x \leqslant 6, 0 \leqslant y \leqslant 4$.

    (b) *Hãy sử dụng một hệ thống máytính để xấp xỉ diện tích trong câu (a) chính xác đến bốn chữ số thập phân. Hãy so sánh với câu trả lời trong câu (a).*

56. *Hãy tìm diện tích của mặt có phương trình vectơ* $\boldsymbol{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v \rangle, 0 \leqslant u \leqslant \pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. *Hãy cho kết quả chính xác đến bốn chữ số thập phân.*

57. *Hãy tìm diện tích chính xác của mặt* $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2, 1 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

58. (a) *Hãy thiết lập, nhưng không tính, một tích phân bội là diện tích của mặt có phương trình tham số* $x = au\cos v, y = bu\sin v, z = u^2, 0 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

    (b) *Hãy loại bỏ các tham số chỉ ra rằng mặt này là một elliptic paraboloid và thiết lập một tích phân bội khác cho diện tích mặt này.*

(c) *Hãy áp dụng phương trình tham số trong câu (a) với $a = 2$ và $b = 3$ để vẽ đồ thị mặt.*

(d) *Trong trường hợp $a = 2, b = 3$ hãy sử dụng một hệ thống máy tính để tính diện tích mặt chính xác đến bốn chữ sô thập phân.*

59.

(a) *Hãy chỉ ra rằng các phương trình tham số $x = a \sin u \cos v, y = b \sin u \sin v, z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ là một ellipsoid.*

(b) *Hãy áp dụng các phương trình tham số trong câu (a) để vẽ đồ thị ellipsoid trong trường hợp $a = 1, b = 2, c = 3$.*

(c) *Thiết lập, nhưng không tính, một tích phân bội cho diện tích mặt của ellipsoid trong câu (b).*

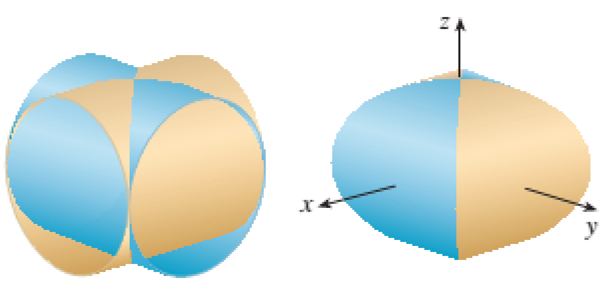
60. (a) *Hãy chỉ ra rằng các phương trình tham số $x = a \cosh u \cos v, y = b \cosh u \sin v, z = c \sinh u$ biểu thị cho một hyperboloid.*

(b) *Hãy áp dụng các phương trình tham số trong câu (a) để vẽ đồ thị ellipsoid trong trường hợp $a = 1, b = 2, c = 3$.*

(c) *Thiết lập, nhưng không tính, một tích phân bội cho diện tích mặt của ellipsoid trong câu (b) nằm giữa các mặt phẳng $z = -3$ và $z = 3$.*

61. *Hãy tính diện tích của một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ nằm trong paraboloid $z = x^2 + y^2$.*

62. *Hình bên dưới chỉ ra các mặt được tạo thành khi mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$ giao với mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$. Hãy tính diện tích mặt đó.*

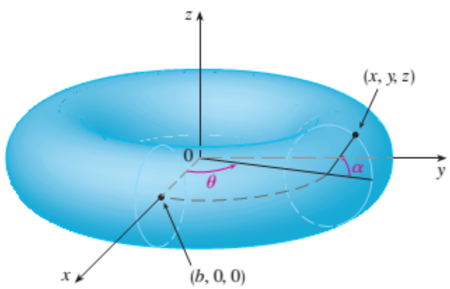


63. *Hãy tính diện tích của một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$.*

64. *(a) Hãy tìm biểu diễn tham số của một hình xuyến được tạo ra khi xoay một quả cầu quanh trục z trong mặt phẳng xz có tâm $(b, 0, 0)$ và bán kính $a < b$. [Gợi ý: Hãy chọn θ và α là các tham số chỉ ra trong hình.]*

(b) Hãy áp dụng phương trình tham số trong câu (a) để vẽ đồ thị của hình xuyến đó ứng với các giá trị a và b khác nhau.

(c) Hãy áp dụng biểu diễn trong câu (a) để tính diện tích của hình xuyến đó.



16.7 Tích Phân Mặt

Mối liên hệ giữa tích phân mặt và diện tích mặt cũng tương tự như mối liên hệ giữa tích phân đường và độ dài cung. Giả sử f là một hàm ba biến có miền xác định chứa mặt S. Ta sẽ xác định tích phân mặt của f trên S theo một xách là, trong trường hợp $f(x, y, z) = 1$, giá trị của tích phân mặt bằng với diện tích của mặt S. Ta bắt đầu với các mặt tham số và sau đó xét trường hợp đặc biệt với S là đồ thị của một hàm hai biến.

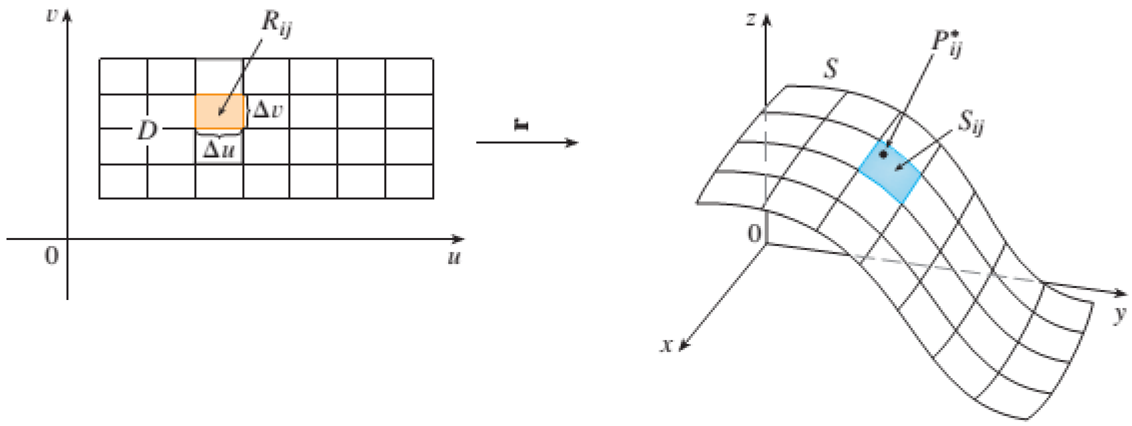
Mặt Tham Số

Giả sử rằng một mặt S có một phương trình vectơ:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Trước hết ta giả sử rằng miền tham số D là một miền hình chữ nhật và ta chia nó ra thành các hình chữ nhật nhỏ R_{ij} với chiều rộng và chiều dài lần lượt là $\triangle u$ và $\triangle v$. Khi đó mặt S được chia thành các phần nhỏ S_{ij} như trong Hình 16.7.1. Ta tính f tại một điểm P_{ij}^* trên mỗi phần, nhân với diện tích $\triangle S_{ij}$ của phần đó, và dạng tổng Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\triangle S_{ij}$$



Hình 16.7.1

Sau đó ta lấy giới hạn khi số các phần nhỏ này tăng và định nghĩa **tích phân mặt của f trên mặt S** là

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\triangle S_{ij} \tag{16.7.1}$$

Chú ý rằng công thức này tương tự với định nghĩa tích phân đường (16.2.2) và và cũng tương tự với tích phân bội trong (15.5.5).

Để tính tích phân mặt trong phương trình (16.7.1) ta xấp xỉ một khoảng diện tích $\triangle S_{ij}$ bởi diện tích xấp xỉ theo hình bình hành trong mặt phẳng tiếp tuyến. Theo quy ước của ta trong Mục 16.6 ta có xấp xỉ:

$$\triangle S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\triangle u \triangle v$$

trong đó

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

là các vectơ tiếp tuyến tại các điểm góc của S_{ij}. Nếu các thành phần này liên tục và $\mathbf{r}_u$ và $\mathbf{r}_v$ là khác không và không song song trên miên trong của D, từ định nghĩa 16.7.1, ngay cả khi D không phải là miền chữ nhật,

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dA \tag{16.7.2}$$

Ta có thể so sánh với công thức của tích phân đường:

$$\int_C f(x,y,z)ds \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

Cũng quan sát thấy rằng

$$\iint_S 1dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dA = A(S)$$

Công thức (16.7.2) cho phép ta tính tích phân mặt bằng cách chuyển nó về tích phân bội trên một miền tham số D. Khi áp dụng công thức này, hãy nhớ rằng $f(\mathbf{r}(u,v))$ được tính khi ta viết $x = x(u,v), y = y(u,v)$ và $z = z(u,v)$ trong công thức $f(x,y,z)$.

Ví dụ 1. Hãy tính tích phân mặt $\iint_S x^2 dS$, trong đó S là mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Giải Tương tự như Ví dụ 4 trong Mục 16.6, ta áp dụng biểu diễn tham số

$$x = \sin\phi\cos\theta \quad y = \sin\phi\sin\theta \quad z = \cos\phi \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

nghĩa là

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$

Như trong Ví dụ 10 Mục 16.6, ta tính được:

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sin\phi$$

Do đó, theo công thức (16.7.2)

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 dS &= \iint_D (\sin\phi\cos\theta)^2 |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\phi\cos^2\theta\sin\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta \int_0^{\pi}(\sin\phi - \sin\phi\cos^2\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Tích phân mặt có ứng dụng tương tự như các tích phân mà chúng ta đã xem xét trước đó. Chẳng hạn, nếu một lá mỏng (một lá nhôm) có hình dạng mặt S và mật độ (khối lượng trên một đơn vị diện tích) tại một điểm (x,y,z) là $\rho(x,y,z)$, thì tổng **khối lượng** của lá là

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)dS$$

và **tâm khối** là $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, trong đó

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\rho(x,y,z)dS \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\rho(x,y,z)dS \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\rho(x,y,z)dS$$

Mômen của lực quán tính được định nghĩa như trước đó (Bài tập 41).

Đồ thị

Một mặt S bất kỳ có phương trình $z = g(x, y)$ có thể được xem như một mặt tham số có phương trình tham số

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

và do đó ta có

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Vậy,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{16.7.3}$$

và

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

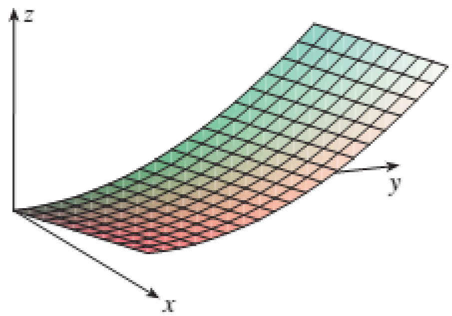
Do đó, trong trường hợp này, công thức (16.7.2) trở thành

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA \tag{16.7.4}$$

Các công thức tương tự được áp dụng khi ta chiếu S lên mặt phẳng yz hoặc xz. Chẳng hạn, nếu S là một mặt có phương trình $y = h(x, z)$ và D là hình chiếu của nó lên mặt phẳng xz, khi đó

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,h(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA$$

Ví dụ 2. Hãy tính $\iint_S ydS$, trong đó S là mặt $z = x + y^2, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2$ (Xem Hình 16.7.2)



Hình 16.7.2

Giải Bởi vì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Công thức (16.7.4) cho ta

$$\begin{aligned}
\iint_S y dS &= \iint_D y\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \\
&= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2} dy dx \\
&= \int_0^1 dx \sqrt{2} \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2} dy \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}\left[(1 + 2y^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

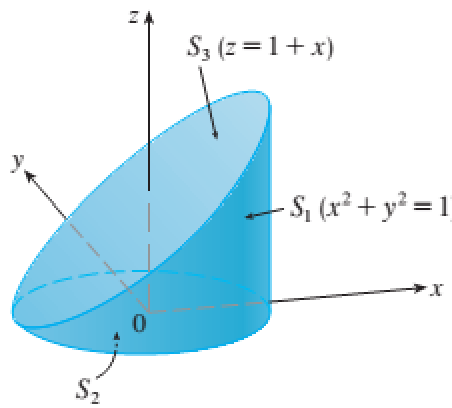
Nếu S là một mặt trơn từng khúc, có nghĩa là, hợp của các mặt $S_2, S_2, ..., S_n$ chỉ giao nhau tren đường biên của chúng, khi đó tích phân mặt của f trên S được xác định bởi

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + ... + \iint_{S_n} f(x,y,z)dS$$

Ví dụ 3. Hãy tính $\displaystyle\iint_S z dS$, trong đó S là mặt có cạnh S_1 được cho bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, mà đáy của nó là S_2 cho bởi $x^2 + y^2 \leqslant 1$ trong mặt phẳng $z = 0$, và đỉnh S_3 là một phần của mặt phẳng $z = 1 + x$ nằm trên S_2.

Giải Mặt S được chỉ ra trong Hình 16.7.3. (Ta có thể thay đổi vị trí của các trục để có thể hình thấy S rõ hơn). Với S_1 ta sử dụng các tham số θ và z (hãy xem ví dụ 5) và viết phương trình tham số có dạng

$$x = \cos\theta \quad y = \sin\theta \quad z = z$$



Hình 16.7.3

trong đó

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{và} \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$$

Do đó,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta 0 & \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

và

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Cho nên, tích phân mặt trên S_1 là

$$\begin{aligned}
\iint_S z dS &= \iint_D z|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z dz d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Do S_2 nằm trên mặt phẳng $z = 0$, ta có

$$\iint_{S_2} z dS = \iint_{S_2} 0 dS = 0$$

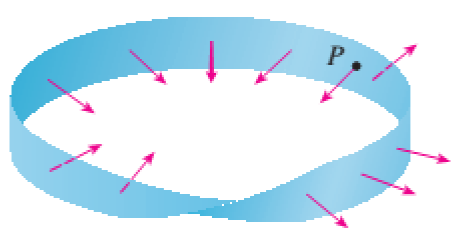
Mặt S_3 nằm trên quả cầ đơn vị D và nó là một phần của mặt phẳng $z = 1 + x$. Do đó, lấy $g(x, y) = 1 + x$ trong công thức (16.7.4) và chuyển đổi sang toạ độ cực, ta có

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} zdS &= \iint_D (1+x)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1dA} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1+1+0}rdrd\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r + r^2\cos\theta drd\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta)d\theta \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Vậy,

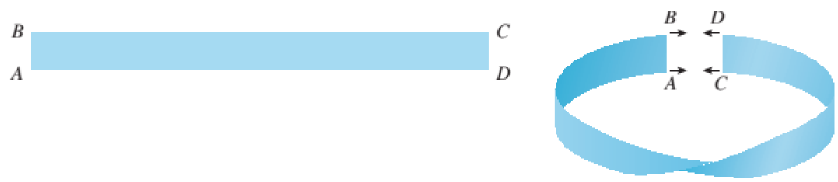
$$\begin{aligned}
\iint_S zdS &= \iint_{S_1} zdS + \iint_{S_2} zdS + \iint_{S_3} zdS \\
&= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\pi = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi
\end{aligned}$$

Mặt có hướng



Hình 16.7.4: Một băng Mobius

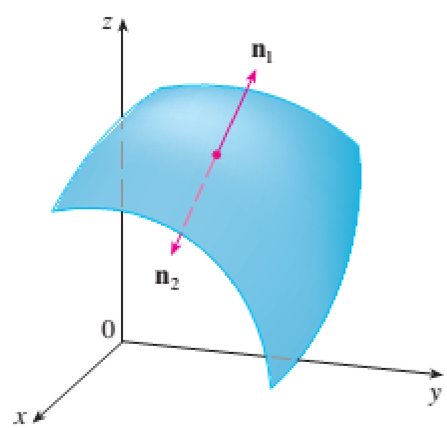
Để định nghĩa tích phân mặt trong các trường vectơ, ta cần loại trừ các mặt không có hướng chẳng hạn như một băng Mobius được chỉ ra trng Hình 16.6.4. [Nó được đặt tên theo một nhà toán học hình học August Mobius (1790-1868)]. Bạn cũng có thể tự tạo ra một băng tương tự bằng cách lấy một tờ giấy hình chữ nhật, cho nó xoắn một nửa, và dán hai đầu cạnh lại với nhau như trong Hình 16.7.5. Nếu một con kiến bắt



Hình 16.7.5: Xây dựng một dải Mobius

đầu di chuyển dọc theo dải Mobius tại một điểm, thì nó sẽ dừng lại ở "phía bên kia" của dải (nghĩa là, phía trên của nó là hướng ngược lại). Khi đó, nếu con kiến tiếp tục bò trên cùng một hướng, nó sẽ kết thúc trở lại tại cùng một điểm mà không bao gi vượt qua một cạnh. (Nếu bạn tạo ra một băng Mobius, hãy thử vẽ một đường bút chì ở giữa nó). Do đó, một băng Mobius thật sự chỉ có một hướng. Bạn có thể vẽ ra đồ thị của một dải Mobius bằng cácj áp dụng phương trình tham số trong bài tập 32 Mục 16.6.

Trở về sau ta chỉ xem xét các mặt có hướng (hai-hướng). Trước tiên ta xét một mặt S có một mặt phẳng tiếp tuyến tại mọi điểm (x, y, z) trên S (trừ các điểm biên). Có hai vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}_1$ và $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ tại (x, y, z). (Xem Hình 16.7.6).

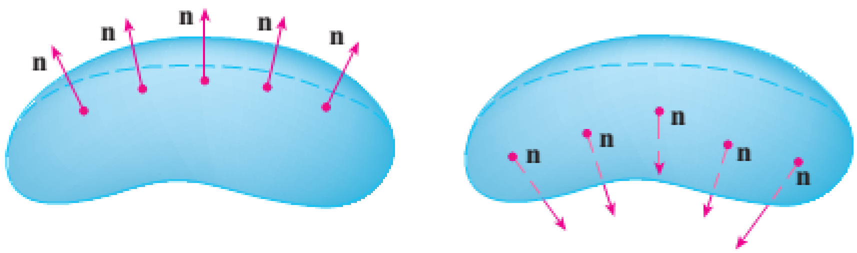


Hình 16.7.6

Nếu có thể chọn một vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ tại mỗi điểm (x, y, z) sao cho $\mathbf{n}$ thay đổi liên tục trên S, khi đó S được gọi là **mặt có hướng** và vectơ n được cho sẽ cung cấp cho S một **hướng**. Có hai hướng có thể có cho bất kỳ một mặt có hướng nào. (xem Hình

16.6.7).

Với một mặt $z = g(x, y)$ được cho bởi đồ thị của g, ta áp dụng phương trình (16.7.3) để



Hình 16.7.7: Hai hướng của một mặt định hướng

liên kết với mặt có hướng được cho bởi vectơ pháp tuyến đơn vị

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{16.7.5}$$

Do thành phần $\mathbf{k}$ dương, nó cho ta hướng *phía trên* của mặt.

Nếu S là một mặt có hướng trơn được cho dưới dạng tham số bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(u, v)$, thì nó có hướng với vectơ pháp tuyến đơn vị được xác định

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{16.7.6}$$

và hướng ngược lại được cho bởi $-\mathbf{n}$. Chẳng hạn, trong Ví dụ 4 Mục 16.6 ta có biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + a\cos\phi\mathbf{k}$$

trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Khi đó trong Ví dụ 10 Mục 16.6 ta thấy rằng

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\mathbf{k}$$

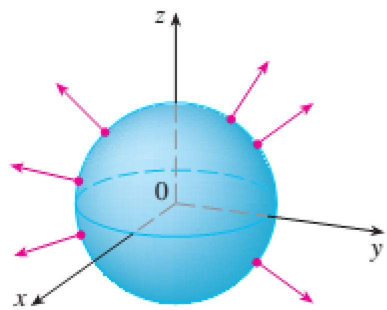
và

$$|r_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2\sin\phi$$

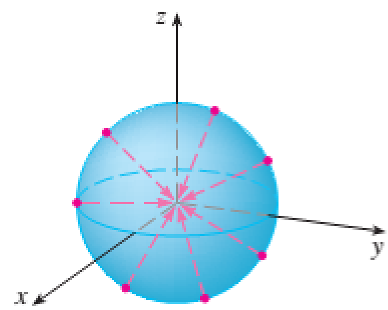
Do đó hướng của $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ được xác định bởi vectơ pháp tuyến

$$\mathbf{n} = \frac{r_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|r_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Quan sát rằng **n** chỉ ra cùng hướng với vectơ toạ độ, nghĩa là, hướng ra ngoài mặt cầu (xem Hình 16.6.8). Hướng ngược lại (hướng vào trong) có được nếu ta đảo ngược thứ tự của tham số bởi vì $r_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -r_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.



Hình 16.7.8: Hướng dương



Hình 16.7.9: Hướng âm

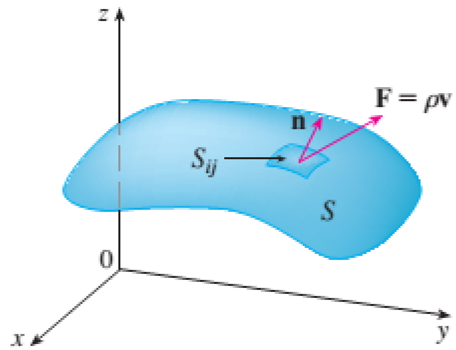
Đối với một **mặt khép kín**, nghĩa là, một mặt có biên là miền E, ta quy ước rằng **hướng dương** là hướng mà vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài E, và các vectơ pháp tuyến hướng vào trong chỉ ra hướng âm (Xem Hình 16.6.8 và 16.6.9).

Tích phân mặt của Trường Vectơ

Giả sử rằng S là một mặt có hướng với vectơ pháp tuyến **n**, và tưởng tượng một chất lỏng có mật độ $\rho(x, y, z)$ và trường vận tốc $\mathbf{v}(x, y, z)$ chảy qua S. (Hãy nghĩ rằng S là một mặt ảo không cản trở dòng chảy đi qua, giống như một lưới đánh cá). Khi đó, tốc độ của dòng chảy (khối lượng trên một đơn vị thời gian) trên một đơn vị diện tích là $\rho\mathbf{v}$. Nếu ta chí S thành các miền nhỏ hơn S_{ij}, như trong Hình 16.6.10 (so với Hình 16.6.1), thì S_{ij} gần như là phẳng và do đó ta có thể xấp xỉ khối lượng của chất lỏng đi qua S_{ij} trên một đơn vị thời gian theo hướng của vectơ pháp tuyến **n** bởi đại lượng

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

trong đó $\rho, \mathbf{v}$ và **n** được tính tại một điểm nào đó trên S_{ij}. (Nhắc lại rằng thành phần của vectơ $\rho\mathbf{v}$ theo hướng của vectơ **n** là $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$). Lấy tổng các lượng này và đi qua giới hạn



Hình 16.7.10

ta được, theo như định nghĩa (16.7.1), tích phân mặt của hàm $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ trên S:

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_S \rho(x,y,z)\mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)dS \tag{16.7.7}$$

và nó giải thích về tốc độ dòng chảy qua S.

Nếu như ta viết $\mathbf{F}=\rho\mathbf{v}$, thì $\mathbf{F}$ cũng là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ và tích phân trong phương trình (16.7.7) trở thành

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

Một tích phân mặt của dạng này rất thường xảy ra trong vật lý, thậm chí khi $\mathbf{F}$ không bằng $\rho\mathbf{v}$, và nó được gọi là *tích phân mặt* (hay *tích phân dòng*) của $\mathbf{F}$ trên S.

Định nghĩa 16.6. Nếu $\mathbf{F}$ là một trường vectơ liên tục xác định trên một mặt S có hướng với vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$, thì **tích phân mặt của F trên** S là

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

Tích phân này cũng được gọi là **thông lượng dòng** của $\mathbf{F}$ đi qua S.

Theo định nghĩa 16.6 nói rằngtích phân mặt của một trường vectơ trên S bằng với tích phân mặt của thành phần pháp tuyến của nó trên S (như đã định nghĩa).

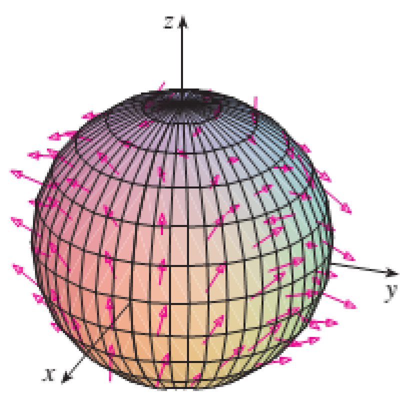
Nếu S được cho bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(u,v)$, thì $\mathbf{n}$ được cho bởi phương trình (16.7.6), và từ định nghĩa 16.6 và phương trình (16.7.2) ta có

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot dS &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}dS\\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\right]|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dA\end{aligned}$$

trong đó D là miền tham số. Do đó ta có

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)dA \tag{16.7.8}$$

Ví dụ 4. Hãy tìm thông lượng dòng của trường vectơ $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+y\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ đi qua mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2=1$.



Hình 16.7.11

Giải Như trong ví dụ 1 , ta áp dụng biểu diễn tham số

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=\sin\phi\cos\theta\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+\cos\phi\mathbf{k}\quad 0\leqslant\phi\leqslant\pi\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

Khi đó

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta))=\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\mathbf{j}+\cos\phi\mathbf{k}$$

và từ Ví dụ 10 Mục 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta=\sin^2\phi\cos\theta\mathbf{i}+\sin^2\phi\sin\theta\mathbf{j}+\sin\phi\cos\phi\mathbf{k}$$

Do đó,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta))\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

và theo công thức (16.7.8), thông lượng dòng được tính bởi

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot dS &= \iint_S \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta)dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta)d\phi d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \\
&= 0 + \int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \quad \left(\text{bởi vì } \int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = 0\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

với cùng cách tính như trong ví dụ 1 .

Nếu, chẳng hạn, trường vectơ trong ví dụ 4 là một trường vận tốc mô tả một dòng chảy có mật độ 1, thì câu trả lời là $4\pi/3$, biểu thị tốc độ của dòng chảy đi qua một mặt cầu đơn vị khối lượng trên một đơn vị thời gian.

Trong trường hợp một mặt S được cho bởi đồ thị $z = g(x,y)$, ta có thể xem x và y là các tham số và áp dụng phương trình (16.7.3) để viết

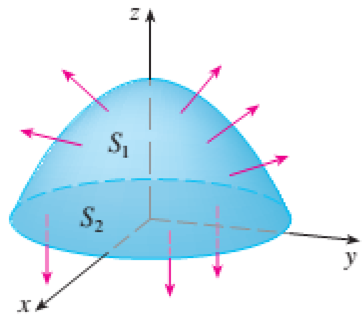
$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k})\cdot\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Vì thế công thức (16.7.8) thành

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot dS = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA \tag{16.7.9}$$

Công thức này được giả sử khi mặt S hướng lên trên; ứng với hướng xuống dưới ta chỉ cần nhân nó với -1. Tương tự ta cũng có các công thức khi S được cho bởi $y = h(x,z)$ hoặc $x = k(y,z)$. (Xem các bài tập 37 và 38).

Ví dụ 5. Hãy tính $\iint_S \mathbf{F}\cdot dS$, trong đó $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ và S là biên của miền E giới hạn bởi paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt mặt phẳng $z = 0$.



Hình 16.7.12

Giải S bao gồm một mặt parabol bên trên S_1 và một đường tròn phía dưới S_2. (Xem Hình 16.6.12). Bởi vì S là một mặt khép kín, ta áp dụng quy ước về chiều dương (hướng ra bên ngoài). Điều này có nghĩa là S_1 hướng lên trên và ta áp dụng phương trình (16.7.9) với D là hình chiếu của S_1 lên mặt phẳng xy, là quả cầ $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Bởi vì

$$P(x, y, z) = y \quad Q(x, y, z) = x \quad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

trên S_1 và

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

ta có

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot dS &= \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA \\
&= \iint_D \left[-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2\right] dA \\
&= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos\theta \sin\theta - r^2) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\theta \sin\theta) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos\theta \sin\theta\right) d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Đường tròn S_2 hướng xuống dưới, nên vectơ pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ và ta có

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \iint_D (-z) dA = \iint_D 0 dA = 0$$

bởi vì $z = 0$ trên S_2. Cuối cùng, ta tính, theo định nghĩa, $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$ là tổng của các tích phân mặt của $\mathbf{F}$ trên các thành phần S_1 và S_2:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot dS = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Mặc dù ta đã thúc đẩy tích phân mặt của một trường vectơ qua một ví dụ về dòng chảy của chất lỏng, khái niệm này cũng phát sinh trong một số tình huống vật lý khác. Chẳng hạn, nếu $\mathbf{E}$ là một trường ellip (hãy xem Ví dụ 1 Mục 16.1), khi đó tích phân mặt

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot dS$$

được gọi là **dòng điện E** đi qua mặt S. Một trong những định luật tĩnh điện quan trọng là **Định Luật Gauss**, phát biểu rằng điện tích trong một mặt khép kín S là

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot dS \tag{16.7.10}$$

trong đó ε_0 là hằng số (được gọi là hằng số điện môi trong không gian) phụ thuộc vào những đơn vị được sử dụng. (Trong hệ SI, $\varepsilon \approx 8.8542 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$). Do đó, nếu một trường vectơ $\mathbf{F}$ trong ví dụ 4 biểu diễn một điện trường, ta có thể kết luận rằng điện tích trong S là $Q = \dfrac{4}{3}\pi\varepsilon_0$.

Một ứng dụng khác của tích phân mặt là trong nghiên cứu về dòng nhiệt. Giả sử rằng nhiệt độ tại một điểm (x, y, z) trong một vật thể là $u(x, y, z)$. Khi đó **dòng nhiệt** được xác định như một trường vectơ

$$\mathbf{F} = -K\nabla u$$

trong đó K là một hằng số thực nghiệm xác định được gọi là **độ dẫn điện** của chất. Tốc độ của dòng chảy qua mặt S trong vật thể được cho bởi tích phân mặt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = -K \iint_S \nabla u \cdot dS$$

Ví dụ 6. Nhiệt độ u trên một quả bóng kim loại tỷ lệ với bình phương khoảng cách từ tâm của quả bóng đó. Hãy tính tốc độ của nhiệt lượng qua một quả cầ S có bán kính a với tâm đặt tại tâm của quả bóng.

Giải Lấy tâm của quả bóng là tại điểm gốc tọa độ, ta có

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

trong đó C là hệ số tỷ lệ. Khi đó nhiệt lượng là

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\nabla u = -KC(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

trong đó K là tính dẫn điện của kim loại. Thay vì áp dụng biểu thức tham số của đĩ như trong ví dụ 4 , ta thấy rằng vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài quả cầ $x^2+y^2+z^2 = a^2$ tại điểm (x, y, z) là

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

và do đó

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Nhưng trên S ta có $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, nên $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Do đó tốc độ nhiệt lượng đi qua S là

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -2aKC \iint_S dS \\ = -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3\end{aligned}$$

Bài tập 16.7. .

---

1. *Cho S là mặt ranh giới của hình hộp khép kín bởi các mặt $x = 0, x = 2, y =, y = 4, z = 0$ và $z = 6$. Hãy xấp xỉ $\iint_S e^{-0.1(x+y+z)}dS$ bằng cách áp dụng công thức tổng Riemann như trong định nghĩa 16.6, lấy các miền S_{ij} là các miền chữ nhật là các mặt của hình hộp S và các điểm P_{ij}^* là tâm của các hình chữ nhật.*

2. *Một mặt S chứa mặt trụ $x^2 + y^2 = 1, -1 \leqslant z \leqslant 1$ cùng với các quả cầ đỉnh và đáy của nó. Giả sử rằng bạn biết rằng f là một hàm liên tục với*

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \quad f(0, \pm 1, 0) = 3 \quad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Hãy tính các giá trị của $\iint_S f(x, y, z)dS$ bằng cách áp dụng một tổng Riemann, lấy các miền S_{ij} là bốn nửa hình trụ và đỉnh và đáy quả cầ.

3. *Cho H là một hình bán cầu $x^2+y^2+z^2=50, z \geqslant 0$, và giả sử f là một hàm liên tục với $f(3,4,5)=7$, $f(3,-4,5)=8, f(-3,4,5)=9$ và $f(-3,-4,-5)=12$. Bằng cách chia H thành 4 miền, hãy tính giá trị của $\iint_H f(x,y,z)dS$.*

4. *Giả sử rằng $f(x,y,z)=g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, trong đó g là một hàm một biến thỏa mãn $g(2)=-5$. Hãy tính $\iint_S f(x,y,z)dS$, trong đó S là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$.*

5-20 *Hãy tính các tích phân mặt sau:*

5. $\iint_S (x+y+z)dS$, *trong đó S l một hình bình hành có phương trình tham số $x = u+v, y=u-v, z=1+2u+v, 0 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v \leqslant 1$.*

6. $\iint_S xyzdS$, *trong đó S là mặt nón có phương trình tham số $x=u\cos v, y=u\sin v, z = u, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi/2$.*

7. $\iint_S ydS$, *trong đó S là mặt helicoid có phương trình vectơ $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle, 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant \pi$.*

8. $\iint_S (x^2+y^2)dS$, *trong đó S là mặt có phương trình vectơ $\boldsymbol{r}(u,v) = \langle 2uv, u^2-v^2, u^2+v^2\rangle u^2+v^2 \leqslant 1$.*

9. $\iint_S x^2yzdS$, *trong đó S là một phần của mặt phẳng $z=1+2x+3y$ xác định trên hình chữ nhật $[0,3]\times[0,2]$.*

10. $\iint_S xzdS$, *trong đó S là một phần của mặt phẳng $2x+2y+z=4$ nằm trên một phần tám đường tròn đầu tiên.*

11. $\iint_S xdS$, *trong đó S là miền tam giác có các đỉnh $(1,0,0), (0,-2,0), (0,0,4)$.*

12. $\iint_S ydS$, *trong đó S là mặt $z=\dfrac{2}{3}(x^{3/2}+y^{3/2}), 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.*

13. $\iint_S x^2z^2dS$, *trong đó S là một phần của mặt nón $z^2=x^2+y^2$ nằm giữa các mặt $z=1$ và $z=3$.*

14. $\displaystyle\iint_S z\,dS$, *trong đó S là mặt $x = y + 2z^2, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$.*

15. $\displaystyle\iint_S y\,dS$, *trong đó S là một phần của paraboloid $y = x^2 + z^2$ bên trong mặt trụ $x^2 + z^2 = 4$.*

16. $\displaystyle\iint_S y^2\,dS$, *trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và phía trên mặt phẳng xy.*

17. $\displaystyle\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$, *trong đó S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geqslant 0$.*

18. $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, *trong đó S là ranh giới của miền đóng giữa mặt trụ $y^2 + z^2 = 9$ và các mặt phẳng $x = 0$ và $x + y = 5$.*

19. $\displaystyle\iint_S (z + x^2y)\,dS$, *trong đó S là một phần của mặt trụ $y^2 + z^2 = 1$ nằm giữa các mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$ trong phần tám thứ nhất.*

20. $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$, *trong đó S là một phần của mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$ giữa các mặt phẳng $z = 0$ và $z = 2$, cùng với các hình tròn đỉnh và đáy của nó.*

21-32 *Hãy tính các tích phân mặt $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$ với $\boldsymbol{F}$ là trường vectơ cho trước và S là mặt có hướng. Nói cách khác, hãy tìm thông lượng của $\boldsymbol{F}$ đi qua S. Với các mặt khép kín, hãy sử dụng định hướng dương (hướng ra ngoài).*

21. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = ze^{xy}\boldsymbol{i} - 3ze^{xy}\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, *$S$ là hình bình hành trong bài tập 5 được định hướng lên trên.*

22. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, *$S$ là mặt helicoid trong bài tập 7 được định hướng lên trên.*

23. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$, *$S$ là một phần của mặt paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$ nằm trên miền hình vuông $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ được định hướng lên trên.*

24. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, *$S$ là một phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa các mặt phẳng $z = 1$ và $z = 3$ được định hướng xuống dưới.*

25. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, *S là một phần của mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=4$ *trong một phần tám đầu tiên, hướng về điểm gốc tọa độ.*

26. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, *S là nửa mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=25, y \geqslant 0$, *được định hướng theo hướng dương của trục y.*

27. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$, *S chứa mặt paraboloid* $y = x^2+z^2, 0 \leqslant y \leqslant 1$, *và hình tròn* $x^2+z^2 \leqslant 1, y = 1$.

28. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy\boldsymbol{i} + 4x^2\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$, *S là mặt* $z = xe^y$, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, *được định hướng lên trên.*

29. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$, *S là hình ống có các đỉnh* $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

30. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, *S là ranh giới của các miền khép kín giới hạn bởi mặt trụ* $x^2+z^2=1$ *và các mặt phẳng* $y=0$ *và* $x+y=2$.

31. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, *S là một nửa mặt trụ* $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-y^2}, 0 \leqslant x \leqslant 2$.

32. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\boldsymbol{i} + (z-y)\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, *S là một khối tứ diện có các đỉnh* $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ *và* $(0,0,1)$.

---

33. *Hãy tính* $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$ *chính xác đến bốn chữ số thập phân, trong đó S là mặt* $z = xe^y, 0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

34. *Hãy tính* $\iint_S x^2yzdS$ *chính xác, trong đó S là mặt* $z = xy, 0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

35. *Hãy tính* $\iint_S (x^2y^2z^2)dS$ *chính xác đến bốn chữ số thập phân, trong đó S là một phần của mặt paraboloid* $z = 3-2x^2-y^2$ *nằm trên mặt phẳng xy.*

36. *Hãy tìm thông lượng dòng của*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \sin(xyz)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + z^2e^{x/5}\boldsymbol{k}$$

đi qua một phần của mặt trụ $4y^2+z^2=4$ *nằm trên mặt phẳng xy và giữa hai mặt* $x=-2$ *và* $x=2$ *được định hướng lên trên. Hãy minh họa bằng cách sử dụng một hệ thống máy tính để vẽ mặt trụ và trường vectơ đó trên cùng một hình.*

37. *Hãy tìm một công thức cho* $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot dS$ *tương tự với vông thức* (16.7.9) *trong trường hợp* S *được cho bởi* $y = h(x,z)$ *và* $\boldsymbol{n}$ *là vectơ pháp tuyến đơn vị chỉ theo hướng bên trái.*

38. *Hãy tìm một công thức cho* $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot dS$ *tương tự với vông thức* (16.7.9) *trong trường hợp* S *được cho bởi* $x = k(y,z)$ *và* $\boldsymbol{n}$ *là vectơ pháp tuyến đơn vị chỉ theo hướng thông thường (tức là, chỉ theo hướng của người nhìn khi các trục được vẽ theo hướng thông thường).*

39. *Hãy tìm tâm khối của bán cầu* $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0$, *nếu nó có mật độ hằng.*

40. *Hãy tìm khối lượng của một mặt phễu mỏng trong mặt nón* $z\sqrt{x^2+y^2}, -1\leqslant z\leqslant 4$, *nếu hàm mật độ của nó là* $\rho(x,y,z) = 10 - z$.

41. (a) *Cho trước một biểu thức tích phân của mômen lực quán tính* I_z *theo trục* z *của một tờ mỏng có dạng mặt* S *nếu hàm mật độ của nó là* ρ.

    (b) *Hãy tính mômen lực quán tính theo trục* z *của mặt phễu trong bài tập 40.*

42. *Cho* S *là một phần của mặt cầu* $x^2+y^2+z^2=25$ *nằm trên mặt phẳng* $z=4$. *Nếu* S *có mật độ hằng* k, *hãy tìm (a) tâm khối (b) mômen lực quán tính theo trục* z.

43. *Một chất lỏng có mật độ* $870kg/m^3$ *và lưu thông với vận tốc* $\boldsymbol{v} = z\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$, *trong đó* x, y *và* z *được đo bằng mét và các thành phần của* $\boldsymbol{v}$ *được đo bằng mét trên giây. Hãy tìm tốc độ dòng chảy qua mặt trụ* $x^2+y^2=4, 0\leqslant z\leqslant 1$.

44. *Nước biển có mật độ* $1025kg/m^3$ *và lưu chuyển trong một trường vận tốc* $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$, *trong đó* x, y *và* z *được đo bằng mét và các thành phần của* $\boldsymbol{v}$ *được đo bằng mét trên giây. Hãy tính tốc độ dòng chảy ra ngoài một hình bán cầu* $x^2+y^2+z^2=9, z\geqslant 0$.

45. *Hãy áp dụng định luật Gauss để tính điện tích chứa trong một mặt bán cầu* $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0$, *nếu điện trường là*

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$$

46. *Hãy áp dụng định luật Gauss để tính điện tích chứa trong một mặt ống có các đỉnh* $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ *nếu điện trường là*

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

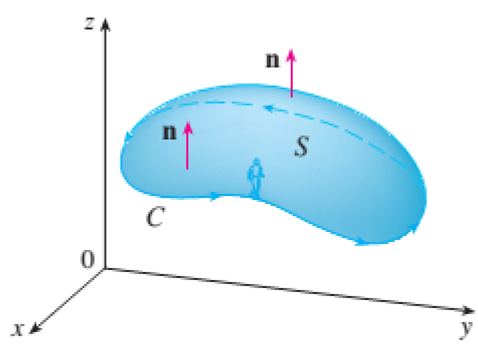
47. Nhiệt độ tại điểm (x, y, z) trong một chất điểm có độ dẫn $K = 6.5$ là $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Hãy tính tốc độ dòng nhiệt truyền bên trong mặt trụ $y^2 + z^2 = 6, 0 \leqslant x \leqslant 4$.

48. Nhiệt độ tại một điểm trong một quả bóng có độ dẫn K tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ tâm của quả bóng đó. Hãy tính tốc độ truyền nhiệt bên trong một mặt cầu S có bán kính a và tâm đặt tại tâm của quả bóng đó.

49. Cho $\boldsymbol{F}$ là một trường bình phương nghịch đảo, nghĩa làm $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = c\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$ với hằng số c, trong đó $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ Hãy chỉ ra rằng thông lượng của $\boldsymbol{F}$ qua mặt cầu S với tâm tại gốc toạ độ không phụ thuộc vào bán kính của S.

16.8 Định Lý Stokes

Định lý Stokes được xem như là một phiên bản nhiều chiều của định lý Green. Trong khi định lý Green đề cập từ tích phân bội trên một miền phẳng D đến tích phân đường bao quanh mặt phẳng đó, thì định l Stokes đề cập từ tích phân mặt trên một mặt S đến tích phân đường trên các đường cong biên của S (đường cong trong không gian). Hình 16.8.1 chỉ ra một mặt có hướng và một vectơ pháp tuyến đơn vị **n**. Hướng của mặt S dẫn ra **chiều dương của đường cong biên** C được chỉ ra trong hình. Điều này có nghĩa là nếu bạn đi bộ theo chiều dương xung quanh C và đầu hướng theo chiều của vectơ pháp tuyến **n**, thì mặt đó sẽ luôn ở bên trái của bạn.



Hình 16.8.1

Định lý 16.10. *Cho S là một mặt có hướng trơn từng khúc bị chặn bởi một đường cong biên C đóng, đơn, và trơn từng khúc theo chiều dương. Cho $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ mà các* *thành phần của nó có đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở trong* $\mathbb{R}^3$ *chứa* S*. Khi đó*

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S curl\ \boldsymbol{F} \cdot dS$$

Bởi vì

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} dS \quad \text{và} \quad \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

Định lý Stokes nói rằng tích phân đường trên đường biên của S của thành phần tiếp tuyến của $\mathbf{F}$ bằng với tích phân mặt trên S của thành phần curl của $\mathbf{F}$.

Đường biên theo chiều dương của mặt có hướng S thường được viết là ∂S, cho nên định lý Stokes có thể biểu diễn dưới dạng

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{16.8.1}$$

[Phần trong khung: Định lý Stokes được đặt tên theo tên của một nhà toán học - vật lý học Ailen tên là Sir George Stokes (1819-1903). Stokes là một giáo sư tại trường đại học Cambrige (thực ra ông ấy có cùng vị trí với các giáo sư toán như Newton, Lucasian) và ông đặc biệt lưu tâm đến dòng chất lỏng và ánh sáng. Cái mà chúng ta gọi là định lý Stokes thực ra được phát hiện bởi một nhà vật lý học tên là Sir William Thomson (1824-1907). Stokes nghiên cứu định lý này từ một lá thư gửi từ Thomson vào năm 1850 và ông yêu cầu sinh viên chứng minh nó như một bài kiểm tra tại trường Cambrige vào năm 1854. Ta không biết được rằng có sinh viên nào có thể chứng minh được hay không.]

Có một sự tương tự giữa các định lý Stokes, định lý Green và Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân. Như trước đây, có một tích phân chứa các đạo hàm bên vế trái của phương trình (16.8.1) (nhơ lại rằng curl $\mathbf{F}$ là dạng viết gọn của đạo hàm của $\mathbf{F}$) và vế phải chứa giá trị của $\mathbf{F}$ chỉ trên biên của S.

Thật ra, trong trường hợp đặc biệt trong đó S là phẳng và nằm trong mặt phẳng xy với chiều hướng lên trên, vectơ pháp tuyến đơn vị là $\mathbf{k}$, tích phân mặt trở thành tích phân bội, và định l Stokes trở thành

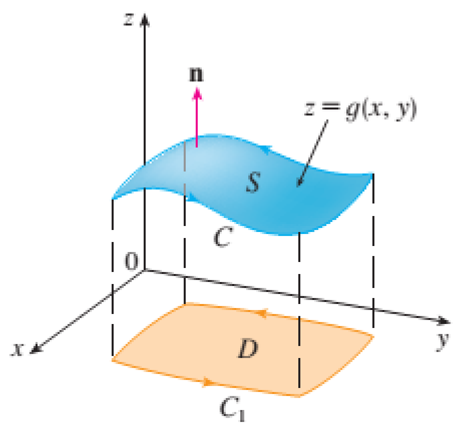
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA$$

Đây chính là dạng vectơ của định lý Green được cho trong phương trình (16.5.9). Do đó ta thấy rằng định lý Green thực ra là trường hợp đặc biệt của định lý Stokes.

Mặc dù định lý Stokes đối với chúng ta rất khó để chứng minh cho trường hợp tổng quát, nhưng ta có thể chứng minh cho trường hợp S là một đồ thị và $\mathbf{F}, S$ và C đều xác định.

Chứng minh định lý Stokes cho trường hợp đặc biệt. Ta giả sử rằng phương trình của S là $z = g(x, y), (x, y) \in D$, trong đó g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và D là miền phẳng đơn liên có biên C_1 ứng với C. Nếu S có chiều hướng lên trên, thì chiều dương của C tương ứng với chiều dương của C_1. (Xem Hình 16.8.2). Ta cũng được cho trước $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, trong đó các đạo hàm riêng của P, Q và R liên tục.

Do S là đồ thị của một hàm, nên ta áp dụng công thức (16.7.9) với $\mathbf{F}$ được thay bởi curl $\mathbf{F}$.



Hình 16.8.2

Kết quả là

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot dS = \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \quad (16.8.2)$$

trong đó các đạo hàm riêng của P, Q và R được tính tại điểm $(x, y, g(x, y))$. Nếu

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leqslant x \leqslant b$$

là biểu diễn tham số của C_1, khi đó biểu diễn tham số của C là

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = g(x(t), y(t)) \quad a \leqslant x \leqslant b$$

Dựa vào quy tắc đổi biến, ta được

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right) dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}\right] dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dA
\end{aligned}$$

trong đó ta vừa áp dụng định lý Green ở bước cuối cùng. Khi đó, áp dụng quy tắc đổi biến và nhớ rằng P, Q và R là các hàm theo biến x, y và z và z lại là một hàm theo hai biến x, y, ta được

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = &\iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\right] dA \\
&- \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)\right] dA
\end{aligned}$$

Bốn số hạng trong công thức tích phân bội này bị triệt tiêu và sáu số hạng còn lại có thể được sắp xếp để trở thành vế phải của phương trình (16.8.2). Do đó,

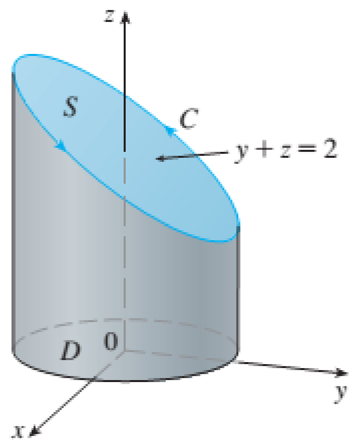
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F}\cdot dS$$

□

Ví dụ 1. Hãy tính $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, trong đó $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ và C là đường giao tuyến của mặt phẳng $y + z = 2$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$. (Hướng của C ngược chiều kim đồng hồ khi tầm nhìn từ phía bên trên).

Giải Đường giao tuyến C (ellipse) được chỉ ra trong Hình 16.8.3. Mặc dù $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ có thể tính được trực tiếp, nhưng nó sẽ được tính dễ hơn nhiều bằng cách áp dụng định lý Stokes. Trước tiên ta tính

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k}$$



Hình 16.8.3

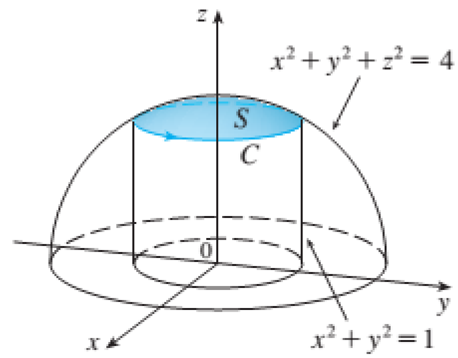
Có rất nhiều mặt có đường biên là C, tuy nhiên thuận tiện nhất mà miền ellipse S nằm trong mặt phẳng $y + z = 2$ bị chặn bởi C. Nếu ta lấy chiều của S hướng xuống dưới, thì C sẽ theo chiều dương. Hình chiếu D của S lên mặt phẳng xy là hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant 1$ và do đó khi áp dụng phương trình $z = g(x, y) = 2 - y$ ta có

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \iint_D (1 + 2y) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \sin\theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Áp dụng định lý Stokes để tính tích phân $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS$, trong đó $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ và S là một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trên mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và phía trên mặt phẳng xy (Xem Hình 16.8.4).

Giải Để tìm đường biên C ta giải phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và $x^2 + y^2 = 1$. Trừ hai vế ta có $z^2 = 3$ và do đó $z = \sqrt{3}$ (bởi vì z>0). Do đó C là đường tròn được cho bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. Phương trình vectơ của C là

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$



Hình 16.8.4

nên

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

Ta cũng có

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin t\mathbf{j} + \cos t\sin t\mathbf{k}$$

Theo định lý Stokes,

$$\begin{aligned}\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \int_C \mathbf{F} \cdot dS &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t\sin t + \sqrt{3}\sin t\cos t\right) dt \\ &= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0dt = 0\end{aligned}$$

Chú ý rằng trong ví dụ 2 ta tính tích phân mặt một cách đơn giản khi chỉ biết các giá trị của $\mathbf{F}$ trên biên C. Điều này có nghĩa là nếu ta có một mặt có hướng khác có cùng biên C, thì ta có cùng giá trị của tích phân mặt!

Một cách tổng quát, nếu S_1 và S_2 là các mặt có hướng có cùng biên C và cả hai đều thỏa các giả thiết của định l Stokes, khi đó

$$\iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS \tag{16.8.3}$$

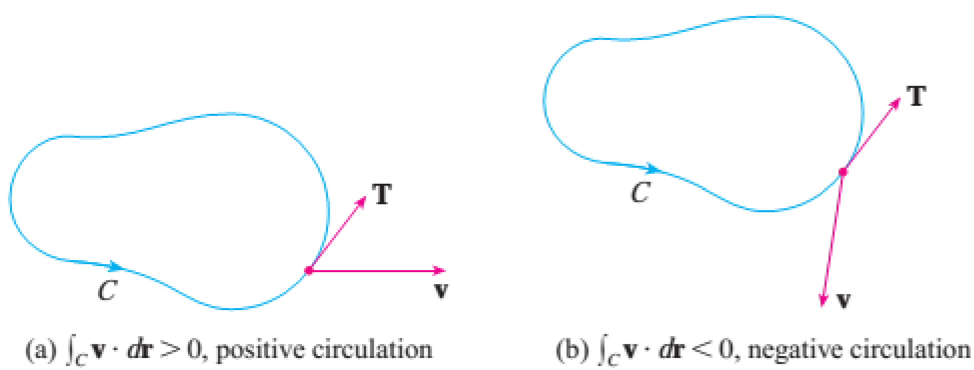
Công thức này rất hữu dụng khi ta lấy tích phân trên một mặt rất khó trong khi trên mặt còn lại thì dễ hơn.

Bây giờ ta sẽ áp dụng định lý Stokes để đưa ra ý nghĩa của vectơ curl. Giả sử rằng C là một đường cong kín đóng và $\mathbf{v}$ biểu diễn một trường vận tốc dòng chảy. Xét tích phân đường sau đây

$$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v}\cdot \mathbf{T}ds$$

và nhắc lại rằng $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}$ là thành phần của vectơ $\mathbf{v}$ theo hướng của vectơ tiếp tuyến $\mathbf{T}$. Nó có nghĩa là nếu hướng của vectơ $\mathbf{v}$ càng gần với hướng của $\mathbf{T}$ thì giá trị của $\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}$ sẽ càng lớn hơn. Do vậy $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ là độ đo của lượng chất lỏng lưu thông quanh C và nó được gọi là **circulation** của $\mathbf{v}$ quanh C. (Xem Hình 16.8.5).

Bây giờ hãy đặt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trong dòng chất lỏng và S_a là quả cầu nhỏ có



Hình 16.8.5

bán kính a và tâm P_0. Khi đó $(\text{curl }\mathbf{F})(P) \approx (\text{curl }\mathbf{F})(P_0)$ với mọi điểm P trên S_a bởi vì curl $\mathbf{F}$ liên tục. Theo định lý Stokes, ta xấp xỉ được circulation quanh đường tròn C_a:

$$\begin{aligned}\int_{C_a} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_{S_a} \text{curl }\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{curl }\mathbf{v}\cdot \mathbf{n}dS \\ &\approx \iint_{S_a} \text{curl }\mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}(P_0)dS = \text{curl }\mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}(P_0)\pi a^2\end{aligned}$$

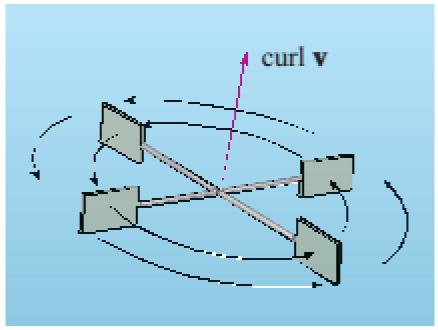
Công thức xấp xỉ này sẽ tốt hơn khi $a \to 0$ và ta có

$$\text{curl }\mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}(P_0) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\pi a^2}\int_{C_a}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \qquad (16.8.4)$$

Phương trình (16.8.4) cho ta mối liên hệ giữa curl và circulation. Nó chỉ ra rằng curl $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ là độ đo của chất lỏng xoáy quanh trục $\mathbf{n}$. HIệu ứng uốn curl là lớn nhất ở các trục song

song với curl **v**.

Cuối cùng, ta đề cập đến định lý Stokes có thể được áp dụng để chứng minh định lý 16.8



Hình 16.8.6

(phát biểu rằng nếu curl $\mathbf{F} = 0$ trên toàn bộ $\mathbb{R}^3$, thì $\mathbf{F}$ bảo toàn). Từ các định lý 16.2 và 16.3 , ta biết rằng $\mathbf{F}$ là bảo toàn nếu $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ với mọi đường đóng C. Cho trước C, giả sử rằng ta có thể tìm một mặt có hướng S mà biên của nó là C. (Điều này có thể chứng minh, nhưng đòi hỏi phải có một số kỹ thuật). Khi đó định lý Stokes cho ta

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S 0 \cdot dS = 0$$

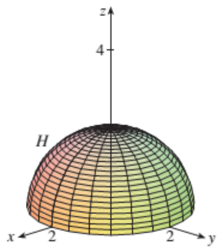
Một đường cong không đơn có thể được chia thành nhiều đường cong đơn, và các tích phân trên các đường cong này đều bằng 0. Cộng các tích phân này lại với nhau, ta có $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ với mọi đường cong đóng C.

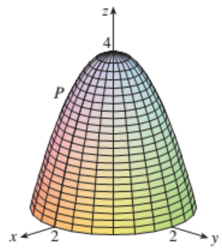
Bài tập 16.8. .

---

1. *Một hình bán cầu H và một phần của paraboloid P được chỉ ra trong hình. Giả sử $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$ mà các đạo hàm riêng của nó liên tục. Hãy giải thích tại sao ta có*

$$\iint_H \textit{curl } \boldsymbol{F} \cdot dS = \iint_P \textit{curl } \boldsymbol{F} \cdot dS$$





2-6 Hãy áp dụng định lý Stokes để tính $\iint_S \text{curl } \boldsymbol{F} \cdot dS$.

2. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 2y\cos z\boldsymbol{i} + e^x \sin z\boldsymbol{j} + xe^y\boldsymbol{k}$, *S là hình bán cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geqslant 0$, *hướng lên trên.*

3. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2z^2\boldsymbol{i} + y^2z^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$, *S là một phần của paraboloid* $z = x^2 + y^2$ *nằm bên trong mặt trụ* $x^2 + y^2 = 4$, *hướng lên trên.*

4. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \tan^{-1}(x^2yz^2)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + x^2z^2\boldsymbol{k}$, *S là mặt nón* $x = \sqrt{y^2 + z^2}, 0 \leqslant x \leqslant 2$, *hướng theo chiều dương của trục x.*

5. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xyz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + x^2yz\boldsymbol{k}$, *S chứa đỉnh và bốn mặt (không chứa đáy) của một hình ống có các đỉnh là* $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, *hướng ra ngoài.*

6. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^{xy}\boldsymbol{i} + e^{xz}\boldsymbol{j} + x^2z\boldsymbol{k}$, *S là nửa mặt ellipsoid* $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ *bên phải của mặt phẳng xz, hướng theo chiều dương của trục y.*

2-6 Hãy áp dụng định lý Stokes để tính $\iint_C \text{curl } \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$. *Trong mỗi trường hợp C có hướng ngược chiều kim đồng hồ.*

7. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x + y^2)\boldsymbol{i} + (y + z^2)\boldsymbol{j} + (z + x^2)\boldsymbol{k}$, *C là miền tam giác có các đỉnh* $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ *và* $(0, 0, 1)$.

8. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i} + (x + yz)\boldsymbol{j} + (xy - \sqrt{z})\boldsymbol{k}$, *C là đường biên của mặt phẳng* $3x + 2y + z = 1$ *trong phần tám đầu tiên.*

9. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = yz\boldsymbol{i} + 2xz\boldsymbol{j} + e^{xy}\boldsymbol{k}$, *C là đường tròn* $x^2 + y^2 = 16, z = 5$.

10. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$, *C là đường giao tuyến của mặt phẳng* $x + z = 5$ *và mặt trụ* $x^2 + y^2 = 9$.

11. (a) *Hãy áp dụng định lý Stokes để tính* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2 z\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

và C *là đường giao tuyến của mặt phẳng* $x + y + z = 1$ *và mặt trụ* $x^2 + y^2 = 9$ *có hướng ngược chiều kim đồng hồ.*

(b) *Hãy phác họa cả mặt phẳng và mặt trụ với các miền được chọn sao cho bạn có thể nhìn thấy đường* C *và mặt được mô tả trong câu (a).*

(c) *Hãy tìm phương trình tham số của* C *và áp dụng nó để vẽ đồ thị của* C.

12. (a) *Hãy áp dụng định lý Stokes để tính* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2 y\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$$

và C *là đường giao tuyến của mặt hyperboloic paraboloid* $z = y^2 - x^2$ *và mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$ *có hướng ngược chiều kim đồng hồ như trên.*

(b) *Hãy phác họa cả mặt phẳng và mặt trụ với các miền được chọn sao cho bạn có thể nhìn thấy đường* C *và mặt được mô tả trong câu (a).*

(c) *Hãy tìm phương trình tham số của* C *và áp dụng nó để vẽ đồ thị của* C.

13-15 *Hãy chứng minh rằng định lý Stokes đúng với trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *và mặt* S *cho trước.*

13. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, S *là mặt nón* $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leqslant z \leqslant 4$, *hướng xuống dưới.*

14. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -2yz\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, S *là một phần của mặt paraboloid* $z = 5 - x^2 - y^2$ *nằm trên mặt phẳng* $z = 1$, *hướng xuống dưới.*

15. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$, S *là hình bán cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geqslant 0$, *hướng theo chiều dương của trục* y.

16. *Cho C là một đường cong đơn, khép kín, trơn nằm trên mặt phẳng $x + y + z = 1$. Hãy chỉ ra rằng tích phân đường*

$$\int_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

chỉ phụ thuộc vào diện tích của miền khép kín trong C và không phụ thuộc vào hình dạng của C và vị trí của nó trong mặt phẳng.

17. *Một chất điểm di chuyển dọc các đoạn thẳng từ điểm gốc tọa độ đến các điểm $(1,0,0), (1,2,1), (0,2,1)$, và trở lại điểm gốc tọa độ dưới sự ảnh hưởng của trường lực*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = z^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + 4y^2\boldsymbol{k}$$

Hãy tìm công thực hiện.

18. *Hãy tính*

$$\int_C (y + \sin x)dx + (z^2 + \cos y)dy + x^3 dz$$

trong đó C là đường cong $\boldsymbol{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin 2t \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [Gợi ý: Hãy quan sát rằng C nằm trên mặt $z = 2xy$].

19. *Nếu S là một mặt cầu và $\boldsymbol{F}$ thỏa mãn các giả thiết của định lý Stokes, hãy chỉ ra rằng $\iint_S$ curl $\boldsymbol{F} \cdot dS = 0$.*

20. *Giả sử rằng S và C thỏa mãn các giả thiết của định lý Stokes và f, g có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục. Hãy áp dụng các Bài tập 24 và 26 trong Mục 16.5 để chứng minh các biểu thức sau*

(a) $\displaystyle\int_C (f\nabla g) \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot dS$

(b) $\displaystyle\int_C (f\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

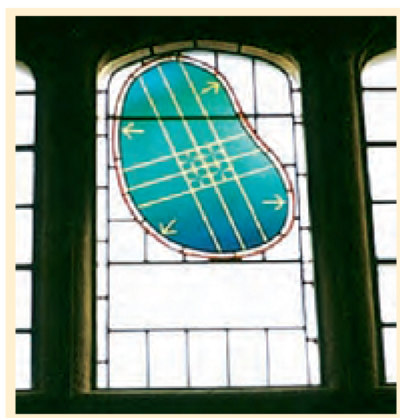
(c) $\displaystyle\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

Dự Án: Ba người và hai định lý

Mặc dù hai trong số các định lý quan trọng của giải tích vectơ được đặt theo tên của George Green và George Stokes, một người thứ ba, William Thomson (cũng được biết với tên Lord Kelvin), đã đóng một vai trò quan trọng trong việc xây dựng, phổ biến v ứng dụng cả hai kết quả này. Cả ba người đều có cùng mối quan tâm làm thế nào để hai định lý này có thể giải thích và dự đoán các hiện tượng vật lý trong lĩnh vực điện, từ và dòng chảy chất lỏng. Các hiện tượng này được đưa ra trên các ghi chú ở các trang 1109 và 1147.

Hãy viết một bài báo cáo về câu chuyện nguồn gốc lịch sử của định lý Green và định lý Stokes. Giải thích sự tương đồng và mối liên hệ giữa các định lý này. Hãy thảo luận vai trò của Green, Thomson và Stokes trong việc khám phá ra những định lý này và làm cho chúng được biết đến rộng rãi. Hãy chỉ ra làm thế nào cả hai định lý này phát sinh từ các nghiên cứu về điện, từ và được tìm ra từ các bài toán vật lý.

Từ điển được soạn thảo bởi Gillispie [2] cung cấp các dữ liệu ban đầu về tiểu sử và khoa học thông tin. Quyển sách viết bởi Hutchinson [5] mô tả về cuộc sông của Stokes và quyển của Thomson [8] viết về tiểu sử của Lord Kelvin. Các bài báo của Grattan-Guinness [3] và Gray [4] và quyển sách của Cannell [1] cung cấp nền tảng về cuộc đời phi thường và các công trình của Green. Các thông tin về lịch sử và toán học cũng được tìm thấy trong các quyển sách của Katz [6] và Kline [7].



1. D.M. Cannell, *George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841: The background to His Lif and Work* (Philedelphia: Society for industrial and Applied Mathematics, 2001).

2. C.C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York: Scriber's, 1974).

See the article on green by P.J. Wallis in Volume XV and the articles on Thomson by Jed Buchwald and on Stokes by E.M. Parkinson in Volume XIII.

3. I. Grattan-Guinness, "Why dis George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism?", *Amer. Math. Monthly, Vol 102 (1995), pp. 387-96.*

4. J. Gray, "There was a jolly miller", *The New Scientist*, Vol. 139 (1993), pp. 24-27.

5. G.E. Hutchinson, *The Enchanted Voyage anf Other Studies* (Westport, CT: Greenwood Press, 1978).

6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (New York: HarperCollins, 1993), pp. 678-80.

7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972), pp. 683-85.

8. Sylvanus P. Thomson, *The Life of Lord Kelvin* (New York: Chelsea, 1976).

16.9 Định lý Divergence

Trong Mục 16.5 ta viết lại định lý Green dưới dạng vectơ như sau

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}(x,y)dA$$

trong đó C là đường biên có chiều dương của miền phẳng D. Nếu như ta đang tìm kiếm để mở rộng định lý vào trong trường vectơ $\mathbb{R}^3$, thì ta có thể đoán rằng

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_E \text{div } \mathbf{F}(x,y,z)dV \qquad (16.9.1)$$

trong đó S là mặt giới hạn trong miền E. Nó chỉ ra rằng phương trình (16.9.1) là đúng, dưới các giả thiết thích hợp, và nó được gọi là Định lý Divergence. Chú ý rằng sự tương đồng giữa định lý Green và định lý Stoke ở chỗ chúng liên quan đến tích phân của đạo hàm của một hàm (div $\mathbf{F}$ trong trường hợp này) trên một miền với tích phân của hàm gốc $\mathbf{F}$ trên biên của miền giới hạn đó.

Lúc này, bạn có thể muốn xem xét các dạng miền khác nhau mà ta có thể gặp trong quá trình tính tích phân bội ba trong Mục 15.7. Ta phát biểu và chứng minh định lý Divergence cho miền E mà đồng thời là loại 1, loại 2, 3 và ta gọi các miền đó là **các miền đơn khối** (Chẳng hạn, các miền bị chặn bởi ellipsoid hoặc hình hộp chữ nhật là các miền đơn khối). Biên của E là một mặt khép kín, và ta áp dụng quy ước, đã được đề cập trong Mục 16.6, mà có chiều dương hướng ra ngoài, nghĩa là, vectơ pháp tuyến đơn vị **n** hướng từ E.

Định lý 16.11 (Định lý Divergence)**.** *Cho E là một miền đơn khối và S là mặt biên của E, được hướng theo chiều dương (hướng ra ngoài). Cho $\boldsymbol{F}$ là một trường vectơ có các hàm thành phần có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở chứa E. Khi đó*

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS = \iiint_E div\ \boldsymbol{F} dV$$

Định lý Divergence phát biểu rằng, dưới các điều kiện cho trước, thông lượng của **F** đi qua mặt biên của E bằng tích phân bội ba của divergence của **F** trên E.

Chứng minh. Cho $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Khi đó

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

nên

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Nếu **n** là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của S, thì tích phân mặt bên vế trái của định lý Divergence là

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_C (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh định lý Divergence, ta cần phải chứng minh đầy đủ ba phương trình sau

$$\iint_S P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dV \tag{16.9.2}$$

$$\iint_S Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dV \tag{16.9.3}$$

$$\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV \tag{16.9.4}$$

Để chứng minh phương trình (16.9.4) ta áp dụng giả thiết rằng E là miền loại 1:

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

trong đó D là hình chiếu của E lên mặt phẳng xy. Dựa vào phương trình 15.7.6 ta có

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) dz \right] dA$$

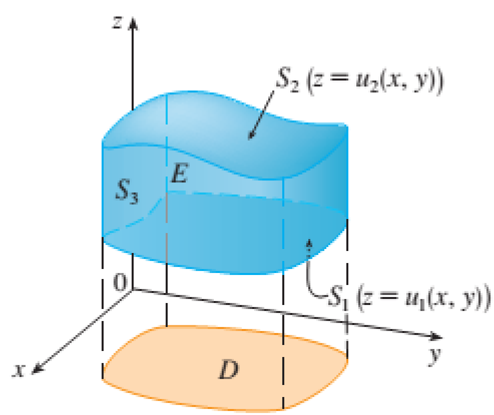
và do đó, theo Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_D \left[R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y)) \right] dA \tag{16.9.5}$$

Mặt giới hạn S bao gồm ba thành phần: mặt đáy S_1, mặt đỉnh S_2 và mặt phẳng đứng S_3, nằm trên đường biên của D (Xem Hình 16.8.1, có thể xảy ra trường hợp S_3 không xuất hiện, như trường hợp của mặt cầu). Chú ý rằng trên S_3 ta có $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, vì $\mathbf{k}$ nằm dọc và $\mathbf{n}$ nằm ngang, và do đó

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_3} 0 dS = 0$$

Vì vậy, cho dù có hay không một mặt phẳng đứng ta có thể viết



Hình 16.9.1

$$\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \tag{16.9.6}$$

Phương trình của S_2 là $z = u_2(x,y), (x,y) \in D$, và vectơ pháp tuyến ngoài $\mathbf{n}$ chỉ lên trên, nên từ phương trình (16.7.9) (với $\mathbf{F}$ được thay bởi $R\mathbf{k}$) ta có

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D R(x,y,u_2(x,y)) dA$$

Trên S_1 ta có $z = u_1(x, y)$, nhưng ở đây vectơ pháp tuyến ngoài $\mathbf{n}$ hướng xuống dưới, nên ta nhân nó cho -1:

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y)) dA$$

Do đó phương trình (16.9.6) suy ra

$$\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \left[R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))\right] dA$$

So sánh với phương trình (16.9.5) ta có

$$\iint_S R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Phương trình (16.9.2) và (16.9.3) được chứng minh tương tự bằng cách biểu diễn E là miền loại 2 hoặc loại 3, theo thứ tự đó. □

Ví dụ 1. Hãy tìm thông lượng của trường vectơ $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ trên một quả cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Giải Trước hết ta tính divergence của $\mathbf{F}$:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

Mặt cầu đơn vị S là biên của quả cầu B được cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. Theo định lý Divergence thông lượng dòng là

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_B 1 dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

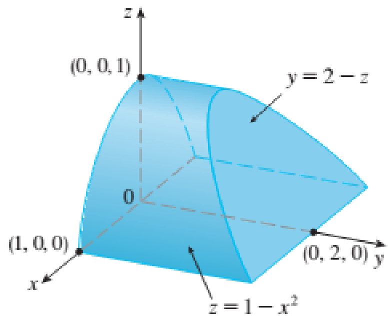
Ví dụ 2. Hãy tính $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot dS$, trong đó

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + \sin(xy)\mathbf{k}$$

và S mặt của miền E giới hạn bởi mặt trụ parabolic $z = 1 - x^2$ và các mwạt phẳng $z = 0, y = 0$ và $y + z = 2$ (Xem hình 16.9.2).

Giải Sẽ rất khó khăn để tính tích phân mặt trực tiếp (Ta có thể tính bốn tích phân mặt tương ứng với bốn phần của S). Hơn thế nữa, divergence của $\mathbf{F}$ ít phức tạp hơn $\mathbf{F}$:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin xy) = y + 2y = 3y$$



Hình 16.9.2

Do đó ta áp dụng định lý Divergence để biến đổi tích phân mặt cho trước thành tích phân bội ba. Cách đơn giản nhất để tính tích phân bội ba là biểu diễn E thành miền loại 3:

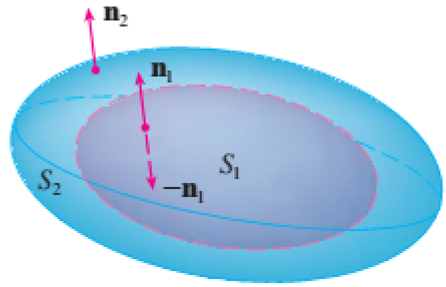
$$E = \{(x, y, z)| -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2, 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot dS &= \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iiint_E 3y dV \\
&= 3 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} y dy dz dx = 3 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2} dz dx \\
&= \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} [(x^2+1)^3 - 8] dx \\
&= - \int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7) dx = \frac{184}{35}
\end{aligned}$$

Mặc dù ta vừa chứng minh định lý Divergence chỉ trong trường hợp các miền đơn khối, nhưng ta cũng có thể chứng minh cho các miền có thể biểu diễn thành hợp của các miền đơn khối. (Kỹ thuật chứng minh cũng tương tự như kỹ thuật ta đã áp dụng trong Mục 16.4 để mở rộng định lý Green).

Ví dụ, hãy xét miền E nằm giữa các mặt khép kín S_1 và S_2. Khi đó miền giới hạn của E là $S = S_1 \cup S_2$ và pháp tuyến $\mathbf{n}$ được cho bởi $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ trên S_1 và $\mathbf{n} = n_2$ trên S_2. (Xem



Hình 16.9.3

Hình 16.9.3). Áp dụng định lý Divergence cho S ta được:

$$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \tag{16.9.7}$$

$$= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS \tag{16.9.8}$$

$$= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot dS \tag{16.9.9}$$

Ví dụ 3. Trong ví dụ 5 Mục 16.1 ta đã xét điện trường

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

trong đó điện tích Q được đặt tại điểm gốc tọa độ và $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ là vectơ tọa độ. Hãy áp dụng định lý Divergence để chỉ ra rằng dòng điện $\mathbf{E}$ đi qua mặt khép kín S_2 bao quanh điểm gốc tọa độ là

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot dS = 4\pi \varepsilon Q$$

Giải Khó khăn ở đây là chúng ta không có phương trình tường minh cho S_2 bởi vì nó là một mặt khép kín bất kỳ quanh gốc tọa độ. Mặt đơn giản nhất có thể chọn là mặt cầu, nên ta lấy S_1 là một quả cầu nhỏ có bán kính a và tâm tại gốc toạ độ. Bạn có thể kiểm chứng rằng div $\mathbf{E} = 0$ (Xem bài tập 23). Do đó phương trình (16.9.7) cho ta

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot dS = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot dS + \iiint_E \text{div } \mathbf{E} dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot dS = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

Trong công thức trên ta tính tích phân mặt trên S_1 bởi vì S_1 là mặt cầu. Vectơ pháp tuyến tại $\mathbf{x}$ là $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Do đó,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

do phương trình của S_1 là $|\mathbf{x}| = a$. Do đó ta có

$$\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot dS = int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi \varepsilon Q$$

Điều này chỉ ra rằng dòng điện của $\mathbf{E}$ là $4\pi\varepsilon Q$ qua một mặt S_2 bấy kỳ chứa điểm gốc tọa độ. [Đây là trường hợp đặc biệt của Định Luật Gauss (phương trình (16.7.7)). Liên hệ giữa ε và ε_0 là $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$].

Một ứng dụng khác của định lý Divergence là trong khoa học chất lỏng. Cho $\mathbf{v}(x, y, z)$ là một trường vận tốc của một chất lỏng có mật độ hằng ρ. Khi đó $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ là tốc độ của dòng chảy trên một đơn vị diện tích. Nếu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trong đó và B_a là một quả cầu tâm P_0 và bán kính bé a, thì div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $F(P_0)$ với mọi điểm trong B_a vì $\div \mathbf{F}$ liên tục. Ta xấp xỉ thông lượng trên biên của hình cầu S_a như sau:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot dS = \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F} dV \approx \iiint_{B_a} \text{div } \mathbf{F}(P_0) dV = \text{div } \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Công thức xấp xỉ này đúng hơn khi $a \to 0$ và

$$\text{div } \mathbf{F}(P_0) = \lim a \to 0 \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot dS \tag{16.9.10}$$

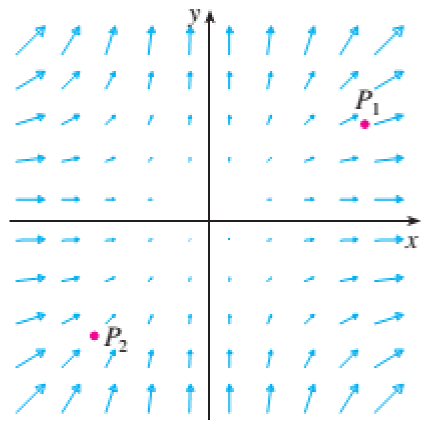
Phương trình (16.9.10) nói rằng div $\mathbf{F}(P_0)$ là tốc độ của thông lượng dòng bên ngoài trên một đơn vị thể tích tại P_0 (Đây là nguyên nhân có cái tên *divergence*). Nếu div $\mathbf{F}(P) > 0$ thì dòng chảy lưu lượng hướng ra ngoài gần P và P được gọi là một **điểm nguồn**. Nếu div $\mathbf{F}(P) < 0$ thì dòng chảy lưu lượng hướng vào trong gần P và P được gọi là một **điểm lún**.

Với một trường vectơ như trong Hình 16.9.4, xuất hiện các vectơ kết thúc gần điểm P_1, cho nên div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ và P_1 là điểm nguồn. Gần P_2, mặt khác, các mũi tên đến dài hơn các mũi tên đi. Ở đây, thông lượng dòng là hướng vào trong, nên div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ và P_2 là điểm lún. Ta áp dụng công thức của $\mathbf{F}$ để xác nhận điều này. Bởi vì, $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ ta có div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, dương khi $y > -x$. Do vậy, các điểm trên đường thẳng $y = -x$ là các điểm nguồn và các điểm còn lại là các điểm lún.

Bài tập 16.9. .

1-4 *Hãy kiểm chứng lại rằng định lý Divergence là đúng cho các trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *trên miền* E

1. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3x\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$, *$E$ là hình ống giới hạn bởi các mặt phẳng* $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ *và* $z = 1$.



Hình 16.9.4: Trường vectơ $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

2. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, *E là hình khối giới hạn bởi paraboloid* $z = 4 - x^2 - y^2$ *và mặt phẳng* xy.
3. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \langle z, y, x\rangle$, *E là khối cầu* $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$.
4. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \langle x^2, -y, z\rangle$, *E là khối trụ* $y^2 + z^2 \leqslant 9, 0 \leqslant x \leqslant 2$.

5-15 *Hãy áp dụng định lý Divergence để tính các tích phân mặt* $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$, *nghĩa là, tính các thông lượng dòng của* $\boldsymbol{F}$ *qua* S

5. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xye^z\boldsymbol{i} + xy^2z^3\boldsymbol{j} - ye^z\boldsymbol{k}$, *S là mặt của hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và các mặt phẳng* $x = 2, y = 2$ *và* $z = 1$.
6. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$, *S là mặt của hình hộp giới hạn bởi các mặt phẳng* $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0$ *và* $z = c$, *trong đó* a, b *và* c *là các số dương.*

7. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3xy^2\boldsymbol{i} + xe^z\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$, *S là khối giới hạn bởi mặt trụ* $y^2 + z^2 = 1$ *và các mặt phẳng* $x = -1$ *và* $x = 2$.

8. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 + y^3)\boldsymbol{i} + (y^3 + z^3)\boldsymbol{j} + (z^3 + x^3)\boldsymbol{k}$, *S là mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ và bán kính 2.*
9. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2 \sin y\boldsymbol{i} + x \cos y\boldsymbol{j} - xz \sin y\boldsymbol{k}$, *S là mặt "cầu phẳng"* $x^8 + y^8 + z^8 = 8$.

10. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$, *S là mặt tứ diện được cho bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt*
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

11. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\cos z + xy^2)\boldsymbol{i} + xe^{-z}\boldsymbol{j} + (\sin y + x^2 z)\boldsymbol{k}$, *S là mặt khối giới hạn bởi paraboloid* $z = x^2 + y^2$ *và mặt phẳng* $z = 4$.

12. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^4\boldsymbol{i} - x^3z^2\boldsymbol{j} + 4xy^2z\boldsymbol{k}$, *S là mặt khối giới hạn bởi mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$ *và các mặt phẳng* $z = x + 2$ *và* $z = 0$.

13. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = |\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, *S chứa hình bán cầu* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *và đĩa* $x^2 + y^2 \leqslant 1$ *trong mặt phẳng xy.*

14. $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{r}|^2\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, *S là mặt cầu có bán kính R và tâm tại gốc tọa độ.*

15. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = e^y \tan z\boldsymbol{i} + y\sqrt{3 - x^2}\boldsymbol{j} + x\sin y\boldsymbol{k}$, *S là khối nằm trên mặt phẳng xy và dưới mặt* $z = 2 - x^4 - y^4, -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1$.

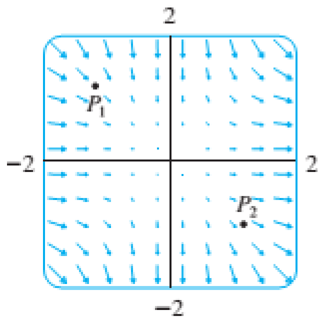
---

16. *Hãy sử dụng một hệ thống máy tính để vẽ ra trường vectơ* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \sin x \cos^2 y\boldsymbol{i} + \sin^3 y \cos^4 z\boldsymbol{j} + \sin^5 z \cos^6 x\boldsymbol{k}$ *trong hình ống được cắt từ phần tám đường tròn và các mặt phẳng* $x = \pi/2, y = \pi/2$ *và* $z = \pi/2$. *Sau đó hãy tính thông lượng dòng đi qua mặt ống này.*

17. *Hãy áp dụng định lý Devergence để tính* $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z^2x\boldsymbol{i} + (\frac{1}{3}y^3 + \tan z)\boldsymbol{j} + (x^2z + y^2)\boldsymbol{k}$ *và S là nửa trên của mặt cầu* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *[Gợi ý: Chú ý rằng S không là mặt khép kín. Trước tiên hãy tính các tích phân trên* S_1 *và* S_2, *trong đó* S_1 *là đĩa* $x^2 + y^2 \leqslant 1$, *hướng xuống dưới và* $S_2 = S \cup S_1$*].*

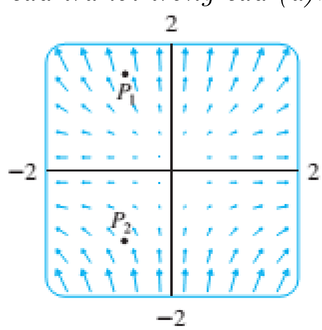
18. *Cho* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\tan^{-1}(y^2)\boldsymbol{i} + z^3 ln(x^2 + 1)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. *Hãy tìm thông lượng dòng của* $\boldsymbol{F}$ *đi qua một phần paraboloid* $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ *nằm trên mặt phẳng* $z = 1$ *và hướng lên trên.*

19. *Một trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *được chỉ ra trong hình. Hãy sử dụng giải thích của devergence trong mục này để xác định xem div* $\boldsymbol{F}$ *là dương hay âm tại* P_1 *và* P_2.



20. (a) *Các điểm P_1 và P_2 là các điểm nguồn hay điểm lún với trường vectơ được cho trong hình vẽ? Hãy cho một lời giải thích trong hình.*

    (b) *Cho $\boldsymbol{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, hãy sử dụng định nghĩa của divergence để kiểm chứng lại câu trả lời trong câu (a).*



21-22 *Hãy vẽ trường vectơ và dự đoán rằng ở đâu thì div $\boldsymbol{F} > 0$ và div $\boldsymbol{F} < 0$. Sau đó hãy tính div $\boldsymbol{F}$ để kiểm tra dự đoán của bạn.*

21. $\boldsymbol{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$

22. $\boldsymbol{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

---

23. *Hãy kiểm chứng rằng div $E = 0$ với điện trường* $\boldsymbol{E}(x) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{x}$

24. *Hãy áp dụng định lý Divergence để tính*

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)dS$$

trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25-30 *Hãy chứng minh các mệnh đề sau đây, giả sử rằng S và E thỏa mãn các điều kiện của định lý Divergence và các hàm vô hướng và các thành phầncủa trường vectơcó các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.*

25. $\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$, *trong đó* $\boldsymbol{a}$ *là vectơ hằng.*

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

27. $\iint_S curl\ \boldsymbol{F} \cdot dS = 0$

28. $\iint_S D_n f dS = \iiint_E \nabla^2 f dV$

29. $\iint_S (f\nabla g) \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$

30. $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV$

31. *Giả sử rằng S và E thỏa mãn các điều kiện của định lý Divergence và f là một hàm vô hướng với các đạo hàm riêng liên tục. Chứng minh rằng*

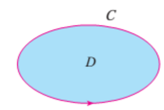
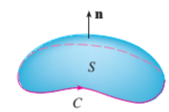
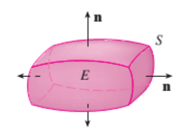
$$\iint_S f\boldsymbol{n} dS = \iiint_E \nabla f dV$$

Các tích phân mặt và tích phân bội ba của cáchàm vectơ là các vectơ được xác định bởi tích phân của từng thành phần. [Gợi ý: Hãy áp dụng định lý Divergence cho $\boldsymbol{F} = f\boldsymbol{c}$, trong đó $\boldsymbol{c}$ là vectơ hằng bất kỳ.]

32. *Một khối rắn có miền xác định E có mặt S và nó được nhúng vào một chất lỏng có mật độ ρ. Ta lập một hệ trục tọa độ sao cho mặt phẳng xy trùng với bề mặt của chất lỏng đó , và các giá trị dương của z đo độ sâu vật đó nhúng xuống chất lỏng. Khi đó áp suất tại độ sâu z là $p = \rho g z$, trong đó g là gia tốc trọng lực (xem Mục 8.3). Tổng số lực đẩy lên chất rắn phụ thuộc vào phân phối áp suất được cho bởi tích phân mặt*

$$\boldsymbol{F} = -\iint_S p\boldsymbol{n} dS$$

trong đó $\boldsymbol{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài. Hãy áp dụng kết quả của bài tập 31 để chỉ ra rằng $\boldsymbol{F} = -W\boldsymbol{k}$, trong đó W là khối lượng của chất lỏng bị chất rắn chiếm

Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân	$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$	
Định lý Cơ bản của Tích Phân Đường	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$	
Định Lý Green	$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C Pdx + Qdy$	
Định Lý Stokes	$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	
Định Lý Divergence	$\iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot dS$	

*chỗ. (Chú ý rằng **F** hướng lên trên bởi vì z hướng xuống dưới). Kết quả của* Quy tắc Archimedes*: Tổng lực đẩy tác động lên một vật thể bằng với trọng lượng của chất lỏng bị chiếm chỗ.*

16.10 Tóm tắt

Các kết quả chính của chương này là các kết quả trong nhiều chiều của Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân. Để giúp cho đọc giả ghi nhớ được chúng, chúng tôi đã tổng hợp lại trong mục này (không có các giả thiết) đề các đọc giả có thể hiểu được sự tương tự giữa chúng một cách dễ dàng hơn. Lưu ý rằng trong mỗi trường hợp chúng tôi có tích phân của "đạo hàm" trên một miền ở bên trái, và bên phải chó các giá trị của hàm ban đầu trên *biên* của miền xác định.

Ôn tập

Kiểm tra định nghĩa

1. Trường vectơ là gì? Hãy cho ba ví dụ vật lý về trường vectơ.

2. (a) Thế nào là trường vectơ bảo toàn?
   (b) Hàm thế năng là gì?

3. (a) Hãy viết định nghĩa của tích phân đường của một hàm vô hướng f trên một đường cong C ứng với độ dài cung.
   (b) Làm thế nào để tính tích phân đó?
   (c) Hãy viết biểu thức tính khối lượng và xác định tâm khối củamột sợi dây mỏng có hình dạng như một đường cong C nếu sợi dây có hàm mật độ $\rho(x, y)$.
   (d) Hãy viết các định nghĩa của tích phân đường trên C của một hàm vô hướng f theo biến x, y và z.
   (e) Làm thế nào để tính các tích phân này?

4. (a) Hãy định nghĩa tích phân đường của một trường vectơ $\mathbf{F}$ trên một đường cong trơn C được cho bởi hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$.
   (b) Nếu $\mathbf{F}$ là một trường lực, tích phân đường này biểu diễn cho đại lượng nào?
   (c) Nếu $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$, điều gì liên quan giữa tích phân đường của $\mathbf{F}$ và các tích phân đường của các hàm thành phần P, Q và R.

5. Hãy phát biểu Định lý Cơ bản của tích phân đường.

6. (a) Có ý nghĩa gì khi nói $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ độc lập với đường lấy tích phân?
   (b) Nếu bạn biết rằng $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ là độc lập với đường lấy tích phân, bạn có thể nói gì về $\mathbf{F}$?

7. Hãy phát biểu định lý Green.

8. Hãy viết các biểu thức tính diện tích giới hạn bởi đường cong C theo tích phân đường trên C.

9. Giả sử rằng $\mathbf{F}$ là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$.

(a) Hãy xác định curl **F**.

(b) Hãy xác định div **F**.

(c) Nếu **F** là một trường vận tốc trong dòng lỏng, hãy đưa ra các giải thích vật lý cho các đại lượng curl **F** và div **F**.

10. Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, làm thế nào để kiểm tra xác định xem **F** có bảo toàn hay không? Điều gì xảy ra nếu **F** là một trường vectơ trên $\mathbb{R}^3$.

11. (a) Mặt tham số là gì? Các đường cong lưới của chúng là gì?

    (b) Hãy viết một biểu thức tính diện tích của một mặt tham số.

    (c) Diện tích của một mặt được cho bởi phương trình $z = g(x, y)$ là gì?

12. (a) Hãy viết ra định nghĩa của tích phân mặt cho một hàm vô hướng f trên mặt S.

    (b) Làm thế nào để tính tích phân nếu S là mặt tham số được cho bởi một hàm vectơ $\mathbf{r}(t)$.

    (c) Tính tương tự với S được cho bởi $z = g(x, y)$.

    (d) Nếu một miếng kim loại mỏng có hình dạng của một mặt S, và mật độ tại (x, y, z) là $\rho(x, y, z)$, viết các biểu thức tính khối lượng và tâm khối của miếng kim loại đó.

13. (a) Thế nào là mặt có hướng? Hãy cho một ví dụ của một mặt không có hướng.

    (b) Hãy định nghĩa tích phân mặt (thông lượng dòng) của một trường vectơ **F** trên mặt có hướng S có vectơ pháp tuyến **n**.

    (c) Làm thế nào để tính tích phân nếu S là mặt tham số được cho bởi phương trình vectơ $\mathbf{r}(u, v)$.

    (d) Tính tương tự nếu S được cho bởi phương trình $z = g(x, y)$.

14. Hãy phát biểu định lý Stokes.

15. Hãy phát biểu định lý Divergence.

16. Các định lý sau đây tương tự như thế nào: Định lý Cơ bản của Phép tính Vi tích phân, định lý Green, định lý Stokes, và định lý Divergence?

Câu hỏi Đúng-Sai

Hãy kiểm tra xem các phát biểu dưới đây là đúng hay sai, hãy giải thích tại sao. Nếu nó sai, hãy giải thích tại sao hoặc cho một ví dụ phản chứng.

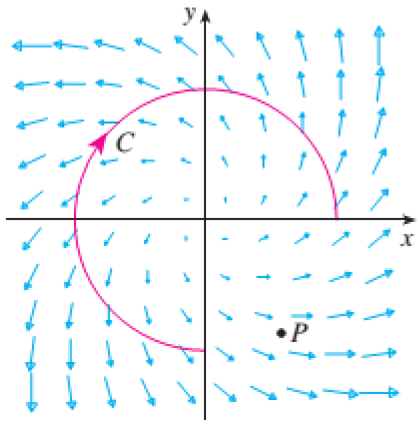
1. Nếu **F** là một trường vectơ, thì div **F** cũng là một trường vectơ.
2. Nếu **F** là một trường vectơ, thì curl **F** cũng là một trường vectơ.
3. Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục mọi cấp trên $\mathbb{R}^3$, thì div (curl ∇f) $= 0$.
4. Nếu f có các đạo hàm riêng liên tục mọi cấp trên $\mathbb{R}^3$ và C là một đường tròn bất kỳ, thì $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.
5. Nếu $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ và $P_y = Q_x$ trên một miền mở D, thì **F** bảo toàn.
6. $\int_{-C} f(x,y)ds = -\int_C f(x,y)ds$
7. Nếu **F** và **G** là các trường vectơ và div $\mathbf{F}$ = div $\mathbf{G}$ thì $\mathbf{F} = \mathbf{G}$.
8. Công thực hiện bởi một trường lực bảo toàn khi một chất điểm di chuyển quanh một đường cong kín bằng không.
9. Nếu **F** và **G** là các trường vectơ, thì
$$\text{curl } (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{curl } \mathbf{F} + \text{curl } \mathbf{G}$$
10. Nếu **F** và **G** là các trường vectơ, thì
$$\text{curl } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \text{curl } \mathbf{F} \cdot \text{curl } \mathbf{G}$$
11. Nếu S là một mặt cầu và **F** là một trường vectơ hằng, thì $\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = 0$.
12. Có một trường vectơ **F** thỏa mãn
$$\text{curl } \mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Bài tập 16.10. .

---

1. *Một trường vectơ* $\boldsymbol{F}$*, một đường cong* C *và một điểm* P *được chỉ ra trong hình.*
   (a) *Đại lượng* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *là dương, âm hay bằng không? Hãy giải thích.*

(b) Đại lượng div $\boldsymbol{F}(P)$ là dương, âm hay bằng không? Hãy giải thích.



2-9 *Hãy tính các tích phân đường*

2. $\displaystyle\int_S x ds$, *C là một cung của parabola* $y = x^2$ *từ điểm* $(0,0)$ *đến* $(1,1)$.

3. $\displaystyle\int_C yz\cos x ds$, $C : x = t, y = 3\cos t, z = 3\sin t, 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

4. $\displaystyle\int_C y dx + (x + y^2) dy$, *C là ellipse* $4x^2 + 9y^2 = 36$ *có chiều ngược chiều kim đồng hồ.*

5. $\displaystyle\int_C y^3 dx + x^2 dy$, *C là một cung của parabola* $x = 1 - y^2$ *từ điểm* $(0, -1)$ *đến* $(0, 1)$.

6. $\displaystyle\int_C \sqrt{xy} dx + e^y dy + xz dz$, *C được cho bởi* $\boldsymbol{r}(t) = t^4\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

7. $\displaystyle\int_C xy dx + y^2 dy + yz dz$, *C là đoạn thẳng nối từ điểm* $(1, 0, -1)$ *đến* $(3, 4, 2)$.

8. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x, y) = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$ *và C được cho bởi* $\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + (1 + t)\boldsymbol{j}, 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

9. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, *trong đó* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^z\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$ *và C được cho bởi* $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

10. *Hãy tính công thực hiện bởi trường lực*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

khi một chất điểm di chuyển từ điểm $(3, 0, 0)$ *đến* $(0, \pi/2, 3)$ *trên*

   (a) *một đường thẳng.*

   (b) *một đường đinh ốc* $x = 3\cos t, y = t, z = 3\sin t$.

11-12 *Hãy chỉ ra rằng* $\boldsymbol{F}$ *là trường vectơ bảo toàn. Sau đó hãy tìm một hàm* f *thỏa mãn* $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

11. $\boldsymbol{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\boldsymbol{i} + (e^y + x^2e^{xy})\boldsymbol{j}$

12. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \sin y\boldsymbol{i} + x\cos y\boldsymbol{j} - \sin z\boldsymbol{k}$

13-14 *Hãy chỉ ra rằng* $\boldsymbol{F}$ *là trường vectơ bảo toàn và áp dụng giả thiết này để tính* $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ *trên đường cong cho trước.*

13. $\boldsymbol{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\boldsymbol{i} + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)\boldsymbol{j}$, $C : \boldsymbol{r}(t) = (t + \sin\pi t)\boldsymbol{i} + (2t + \cos\pi t)\boldsymbol{j}, 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^y\boldsymbol{i} + (xe^y + e^z)\boldsymbol{j} + ye^z\boldsymbol{k}$, C *là đoạn thẳng nối từ điểm* $(0, 2, 0)$ *đến* $(4, 0, 3)$.

---

15. *Hãy chứng tỏ rằng định lý Green là đúng với tích phân đường* $\int_C xy^2dx - x^2ydy$, *trong đó* C *chứa parabola* $y = x^2$ *từ điểm* $(-1, 1)$ *đến* $(1, 1)$ *và đoạn thẳng nối từ điểm* $(1, 1)$ *đến* $(-1, 1)$.

16. *Hãy áp dụng định lý Green để tính*

$$\int_C \sqrt{1 + x^3}dx + 2xydy$$

trong đó C *là miền tam giác có các đỉnh* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *và* $(1, 3)$.

17. *Hãy áp dụng định lý Green để tính* $\int_C x^2y dx - xy^2 dy$, *trong đó* C *là đường tròn* $x^2 + y^2 = 4$ *có chiều ngược chiều kim đồng hồ.*

18. *Hãy tính curl* $\boldsymbol{F}$ *và div* $\boldsymbol{F}$ *nếu*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = e^{-x} \sin y \boldsymbol{i} + e^{-y} \sin z \boldsymbol{j} + e^{-z} \sin x \boldsymbol{k}$$

19. *Hãy chỉ ra rằng không có trường vectơ* $\boldsymbol{G}$ *thỏa mãn*

$$\text{curl } \boldsymbol{G} = 2x\boldsymbol{i} + 3yz\boldsymbol{j} - xz^2\boldsymbol{k}$$

20. *Hãy chỉ ra rằng, với các điều kiệns của các trường vectơ* $\boldsymbol{F}$ *và* $\boldsymbol{G}$ *thì*

$$\text{curl } (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}\text{div } \boldsymbol{G} - G\text{div } \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}$$

21. *Nếu* C *là một đường cong đơn trơn bất kỳ khéo kín và* f *và* g *là các hàm khả vi, hãy chỉ ra rằng* $\int_C f(x)dx + g(y)dy = 0$.

22. *Nêú* f *và* g *là hai hàm khả vi, hãy chỉ ra rằng*

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. *Nếu* f *là một hàm điều hoà, nghĩa là,* $\nabla^2 f = 0$, *hãy chi ra rằng tích phân đường* $int f_y dx - f_x dy$ *là độc lập với mọi miền đơn liên* D.

24. (a) *Hãy phác họa đường cong* C *với các phương trình tham số*

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = \sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

    (b) *Hãy tính* $\int_C 2xe^{2y}dx + (2x^2e^{2y} + 2y \cot z)dy - y^2 \csc^2 z dz$.

25. *Hãy tính diện tích của một phần của mặt* $z = x^2 + 2y$ *trên miền tam giác có các đỉnh là* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *và* $(1, 2)$.

26. (a) *Hãy tìm phương trình của mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm* $(4, -2, 1)$ *với mặt tham số* S *được cho bởi*

$$\boldsymbol{r}(u, v) = v^2\boldsymbol{i} - uv\boldsymbol{j} + u^2\boldsymbol{k} \quad 0 \leqslant u \leqslant 3, -3 \leqslant v \leqslant 3$$

(b) *Hãy sử dụng một máy tính để vẽ mặt S và mặt phẳng tiếp tuyến đã tìm trong câu (a).*

(c) *Thiết lập, nhưng không tính, tích phân để tính diện tích mặt S.*

(d) *Nếu*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1+x^2}\boldsymbol{i} + \frac{x^2}{1+y^2}\boldsymbol{j} + \frac{y^2}{1+z^2}\boldsymbol{k}$$

hãy tính $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$ *chính xác đến bốn chữ số thập phân.*

27-30 *Hãy tính các tích phân mặt*

27. $\iint_S z dS$ *trong đó S là một phần của paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = 4$.*

28. $\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$*, trong đó S là một phần của mặt phẳng $z = 4 + x + y$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.*

29. $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$*, trong đó $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xz\boldsymbol{i}2y\boldsymbol{j} + 3x\boldsymbol{k}$ và S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và hướng ra ngoài.*

30. $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$*, trong đó $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ và S là một phần của paraboloid $z = x^2 + y^2$ bên dưới mặt phẳng $z = 1$ và hướng lên trên.*

---

31. *Hãy chứng tỏ rằng định lý Stokes là đúng với trường vectơ $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, trong đó S là một phần của paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trên mặt phẳng xy và S hướng lên trên.*

32. *Hãy áp dụng định lý Stokes để tính* $\iint_S \operatorname{curl} \boldsymbol{F} \cdot dS$*, trong đó $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2yz\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + z^3e^{xy}\boldsymbol{k}$, S là một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ nằm trên mặt phẳng $z = 1$ và S hướng lên trên.*

33. *Hãy áp dụng định lý Stokes để tính* $\iint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$*, trong đó $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$, C là tam giác có các đỉnh $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ và $(0, 0, 1)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ bên trên.*

34. *Hãy áp dụng định lý Divergence để tính tích phân mặt* $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$*, trong đó* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ *và* S *là mặt của hình khối được giới hạn bởi mặt trụ* $x^2 + y^2 = 1$ *và các mặt phẳng* $z = 0$ *và* $z = 2$*.*

35. *Hãy chứng tỏ rằng định lý Divergence là đúng với trường vectơ* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$*, trong đó* E *là quả cầu đơn vị* $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$*.*

36. *Hãy tính thông lượng dòng bên ngoài của*

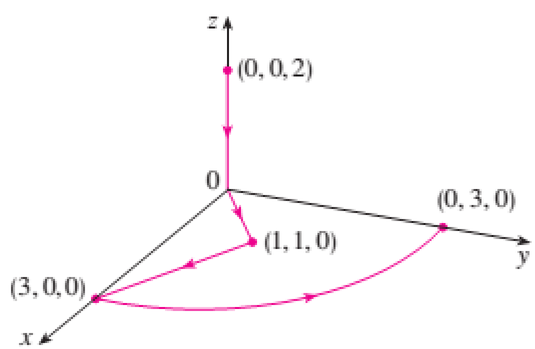
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

qua ellipsoid $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$*.*

37. *Cho*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\boldsymbol{i} + (x^3z - 3x)\boldsymbol{j} + (x^2y + 2z)\boldsymbol{k}$$

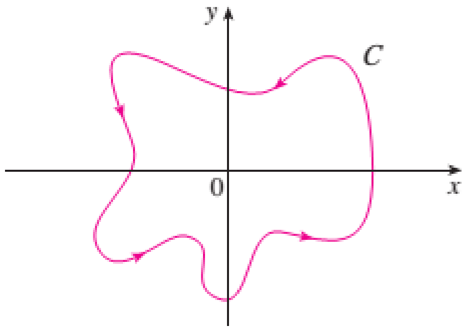
Hãy tính $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$*, trong đó* C *là đường cong với điểm đầu* $(0, 0, 2)$ *và điểm cuối* $(0, 3, 0)$ *được chỉ ra trong hình.*



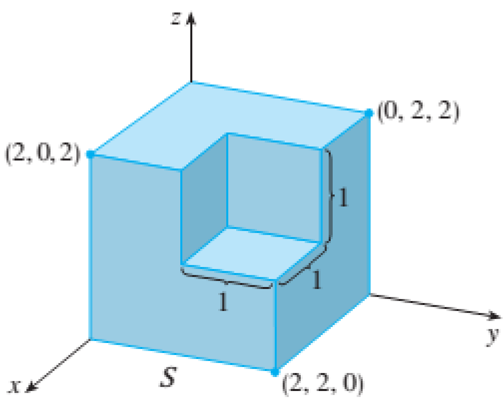
38. *Cho*

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\boldsymbol{i} + (2y^3 + 2xy^2y + 2x)\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

Hãy tính $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$*, trong đó* C *được cho như trong hình vẽ.*



39. *Hãy tính* $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$*, trong đó* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ *và* S *là mặt có hướng ra ngoài được chỉ ra trong hình (mặt biên của hình ống với một góc đã bị khuyết đi).*



40. *Nếu các thành phần của* $\boldsymbol{F}$ *có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và* S *là mặt phẳng biên của miền đơn liên, hãy chỉ ra rằng* $\iint_S \text{curl } \boldsymbol{F} \cdot dS = 0$*.*

41. *Nếu* $\boldsymbol{a}$ *là một vectơ hằng,* $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ *và* S *là mặt có hướng, trơn với đường biên* C *đơn, đóng trơn và hướng theo chiều dương, hãy chỉ ra rằng*

$$\iint_S 2\boldsymbol{a} \cdot dS = \int_C (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

Bài toán mở rộng

1. Cho S là một mặt tham số trơn và cho P là một điểm sao cho mỗi đường bắt đầu từ P giao với S cùng một lúc. **Góc khối** $\Omega(S)$ đối diện bởi S tại P là tập hợp các

đường thẳng bắt đầu từ P và đi qua S. Cho $S(a)$ là giao tuyến của $\Omega(S)$ với bề mặt của mặt cầu tâm P và bán kính a. Khi đó số đo của góc khối (đơn vị steradian) được xác định bởi

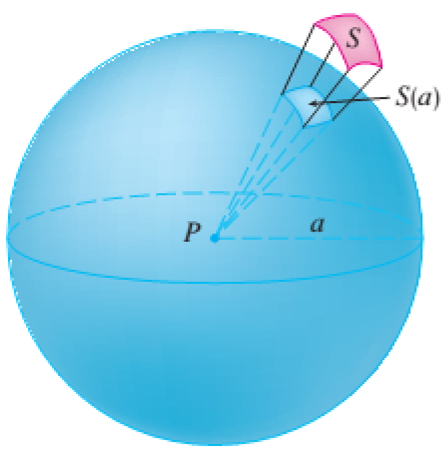
$$|\Omega(S)| = \frac{\text{diện tích } S(a)}{a^2}$$

Hãy áp dụng định lý Divergence cho phần của $\Omega(S)$ giữa $S(a)$ và S để chỉ ra rằng

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3} dS$$

trong đó $\mathbf{r}$ là bán kính vectơ từ điểm P đến một điểm bất kỳ trên S, $r = |\mathbf{r}|$, và vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ lấy từ điểm P.

Điều này chỉ ra rằng định nghĩa của số đo của góc khối không phụ thuộc và bán kính a của mặt cầu. Do đó số đo của góc khối bằng diện tích lấy trên một mặt cầu *đơn vị*. (Chú ý sự tương tự với định nghĩa của số đo radian). Tổng góc khối cho bởi hình cầu tại tâm của nó vì vậy bằng 4π steradian.



2. Hãy tìm một đường cong C đóng, đơn, có chiều dương có tích phân đường

$$\int_C (y^3 - y)dx - 2x^3 dy$$

đạt giá trị cực đại.

3. Cho C là một đường cong trong không gian đơn, đóng, trơn từng khúc nằm trên mặt phẳng có vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ và có chiều dương ứng với $\mathbf{n}$. Hãy chỉ

ra rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi C là

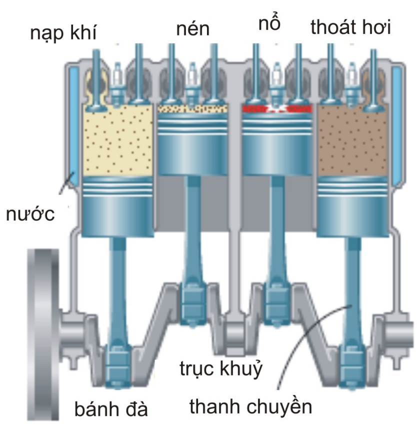
$$\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$$

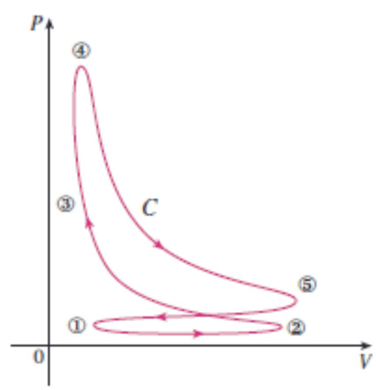
4. Xem xét hình dạng của một mặt có phương trình tham số $x = \sin u, y = \sin v, z = \sin(u + v)$. Trước hết hãy vẽ đồ thị mặt đó theo nhiều hướng nhìn khác nhau. Hãy giải thích tại sao sự xuất hiện của các đồ thị này bằng cách xác định vết của các mặt nằm ngang $z = 0, z = \pm 1$ và $z = \pm\frac{1}{2}$.

5. Hãy chứng minh mệnh đề sau đây

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{curl } \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{curl } \mathbf{F}$$

6. Hình ảnh này mô tả một chuỗi các sự kiện trong mỗi xy lanh của bộ bốn xy lanh trong động cơ. Tất cả các piston di chuyển lên xuống và được kết nối bởi một cánh tay xoay để xoay các trục khuỷu. Cho $P(t)$ và $V(t)$ lần lượt là áp suất và thể tích bên trong một xy lanh tại thời điểm t, trong đó $a \leqslant t \leqslant b$ cho một chu lỳ đầy đủ. Đồ thị cho thấy cách thay đổi của P và V thông qua một chu lỳ của động cơ bốn thì.





Trong kỳ nạp (từ 1 đến 2) một hỗn hợp không khí và xăng ở áp suất khí quyển bị kéo vào một xi lanh qua van nạp như di chuyển piston đi xuống. sau đó piston nhanh chóng nén kết hợp với các van đóng cửa trong hành trình nén (từ 2 đến 3) trong đó tăng áp lực và khối lượng giảm. 3 tại các đốt cháy sparkplug nhiên liệu, tăng nhiệt độ và áp suất tại khối lượng gần như liên tục đến 4. Sau đó, với van đóng, mở rộng nhanh chóng buộc các piston đi xuống trong thời gian đột quỵ điện (từ 4 đến 5). Van xả mở ra, nhiệt độ và giảm áp lực, và năng lượng cơ học lưu trữ trong một bánh đà quay đẩy piston đi lên, buộc các sản phẩm thải ra khỏi nhà van xả trong kỳ xả. Van xả đóng và van hút mở ra. Chúng ta bây giờ quay trở lại tại 1 và chu kỳ bắt đầu một lần nữa.

(a) Hãy chỉ ra rằng công thực hiện lên piston trong một chu lỳ của động cơ bốn thì là $W = \int_C PdV$, trong đó C là đường cong trong mặt phẳng PV được chỉ ra trong hình. [Gợi ý: Lấy $x(t)$ là khoảng cách từ piston đến đỉnh của xy lanh và lưu ý rằng lực tác động lên poston là $\mathbf{F} = AP(t)\mathbf{i}$, trong đó A là diện tích của đỉnh piston. Sau đó $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, trong đó C_1 được cho bởi $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}, a \leqslant t \leqslant b$. Một phương pháp khác là tính tổng Riemann trực tiếp].

(b) Hãy áp dụng công thức (16.5.9) để chỉ ra rằng công thực hiện là chênh lệch bởi các diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai vòng lặp của C.