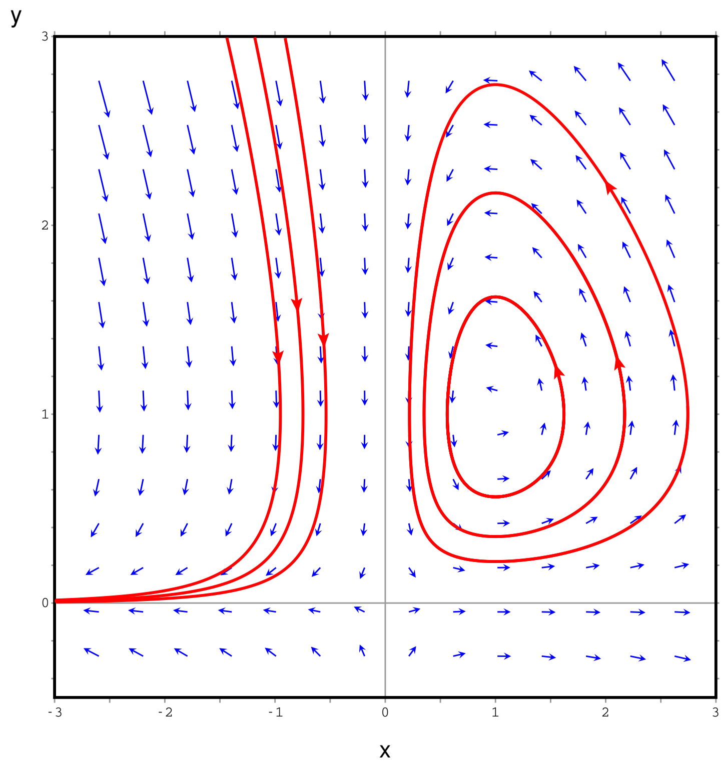
Bài giảng Tích phân bội và Giải tích vectơ

Huỳnh Quang Vũ



Tập bài giảng này về tích phân Riemann của hàm nhiều biến và Giải tích vectơ cho sinh viên ngành toán ở trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh. Nội dung bài giảng tương ứng với những phần cuối trong các giáo trình vi tích phân phổ biến hiện nay như của J. Stewart [Ste12], có chú ý tới đặc thù là cho sinh viên ngành toán, có yêu cầu cao hơn về tính chính xác và hàm lượng lý thuyết. Đối với sinh viên khá giỏi bài giảng hướng tới trình độ ở các phần tương ứng trong các giáo trình giải tích kinh điển như [Rud76], [Lan97].

Dấu ✓ ở một bài tập là để lưu ý người đọc đây là một bài tập đặc biệt có ích hoặc quan trọng, nên làm. Những phần có đánh dấu * là tương đối khó hơn, không bắt buộc. Có thể giáo trình này vẫn còn được đọc lại sau khi môn học kết thúc, khi đó những phần * này sẽ thể hiện rõ hơn ý nghĩa.

Để làm một số bài tập cần dùng một phần mềm máy tính chẳng hạn như Matlab hay Maxima.

- Hướng dẫn sử dụng phần mềm Maxima
- Hướng dẫn sử dụng phần mềm Matlab

Huỳnh Quang Vũ

Địa chỉ: Khoa Toán-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 227 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, Thành phố Hồ Chí Minh, Email: `hqvu@hcmus.edu.vn`

Tài liệu này sẽ được tiếp tục sửa chữa và bổ sung. Bản mới nhất có trên web ở địa chỉ: http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu//gt3.pdf. Mã nguồn LaTeX có ở http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/gt3.tar.gz.

Mục lục

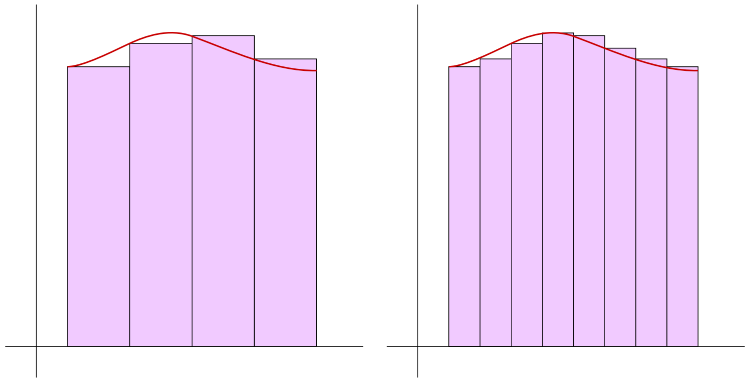
Chương 1 Tích phân bội

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu tích phân Riemann trong không gian nhiều chiều.

1.1 Tích phân trên hình hộp

Tích phân trên không gian nhiều chiều là sự phát triển tương tự của tích phân một chiều. Do đó các ý chính đã quen thuộc và không khó, người đọc có thể xem lại phần tích phân một chiều để dễ theo dõi hơn.

Cho I là một hình hộp, và $f : I \to \mathbb{R}$. Ta muốn tính tổng giá trị của hàm f trên hình hộp I. Ta chia nhỏ hình hộp I bằng những hình hộp con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi hình hộp nhỏ hơn đó, giá trị của hàm f sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ f bằng một hàm hằng. Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của f.



Sau đây là một cách giải thích hình học. Giả sử thêm hàm f là không âm, ta muốn tìm "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của hàm f bên trên hình hộp I. Ta sẽ xấp xỉ khối đó bằng những hình hộp với đáy là một hình hộp con của I và chiều cao là một giá trị của f trong hình hộp con đó. Ta hy vọng rằng khi số hình hộp tăng lên thì ta sẽ gần hơn giá trị đúng của thể tích.

Hình hộp và thể tích của hình hộp

Dưới đây ta bắt đầu làm chính xác hóa các ý tưởng ở trên.

Trong môn học này khi nói đến không gian $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, thì ta dùng cấu trúc tuyến tính, chuẩn, khoảng cách, và tích trong Euclid, cụ thể nếu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì chuẩn (tức chiều dài) của x là

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

khoảng cách giữa x và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ là

$$\|x - y\| = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right)^{1/2},$$

và tích trong giữa x với y là

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Ta định nghĩa một **hình hộp n-chiều** trong $\mathbb{R}^n$ là một tập con của $\mathbb{R}^n$ có dạng $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ với $a_i < b_i$ với mọi $1 \le i \le n$, tức là tích của nđoạn thẳng. Ví dụ một hình hộp 1-chiều là một đoạn thẳng trong $\mathbb{R}$.

Để khởi đầu về thể tích của hình hộp, chúng ta hãy xét trường hợp một chiều. Chiều dài của đoạn thẳng $[a,b]$ bằng bao nhiêu?

Ta muốn khái niệm chiều dài toán học mô phỏng khái niệm chiều dài vật lý thường dùng trong đời sống từ xưa. Như vậy trước hết chiều dài của một đoạn thẳng $[a,b]$ là một số thực không âm. Vì chiều dài vật lý không phụ thuộc vào cách đặt hệ tọa độ, nếu ta tịnh tiến đoạn thẳng thì chiều dài không thay đổi, vậy nếu kí hiệu chiều dài của đoạn $[a,b]$ là $|[a,b]|$ thì cần có $|[a+c,b+c]| = |[a,b]|$. Nếu n là số nguyên dương, thì vì đoạn thẳng $[0,na]$ gồm n đoạn thẳng $[0,a],[a,2a],[2a,3a],\ldots,[(n-1)a,na]$, nên ta muốn có tính chất "cộng tính" thể hiện qua $|[0,na]| = n|[0,a]|$. Điều này dẫn tới $|[0,a]| = n|[0,\frac{1}{n}a]|$, hay $|[0,\frac{1}{n}a]| = \frac{1}{n}|[0,a]|$. Do đó với m,n là số nguyên dương thì $|[0,\frac{m}{n}a]| = \frac{m}{n}|[0,a]|$. Trong trường hợp riêng, ta có $|[0,\frac{m}{n}]| = \frac{m}{n}|[0,1]|$. Vì mọi số thực a là giới hạn của một dãy các số hữu tỉ, nên nếu như ta muốn chiều dài có "tính liên tục" thì ta cần có $|[0,a]| = a|[0,1]|$, do đó phải có $|[a,b]| = |[0,b-a]| = (b-a)|[0,1]|$. Để chuẩn hóa ta thường lấy $|[0,1]| = 1$, và như thế $|[a,b]| = (b-a)$.

Như vậy quan trọng hơn là chiều dài có những tính chất như mong muốn như ở trên, còn giá trị cụ thể được xác định duy nhất do cách chọn chiều dài đơn vị, giống như việc chọn đơn vị đo trong vật lý.

Lý luận tương tự cho số chiều cao hơn, ta có thể đưa ra định nghĩa ngắn gọn sau:

Định nghĩa. **Thể tích** (volume) n-chiều của hình hộp $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ được định nghĩa là số thực $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$.

Ta thường dùng kí hiệu $|I|$ để chỉ thể tích của I. Khi số chiều $n=1$ ta thường thay từ thể tích bằng từ **chiều dài** (length). Khi $n=2$ ta thường dùng từ **diện tích** (area).

Đối với khái niệm tổng, lý luận tương tự như đối với khái niệm thể tích, ta có thể đi đến kết luận là tổng của một hàm hằng c trên hình hộp I là $c|I|$.

Chia nhỏ hình hộp

Một **phép chia**, hay một **phân hoạch** (partition) của một khoảng $[a,b]$ là một tập con hữu hạn của khoảng $[a,b]$ mà chứa cả a và b. Ta có thể đặt tên các phần tử của một phép chia là $x_0,x_1,\ldots,x_m$ với $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Mỗi khoảng $[x_{i-1},x_i]$ là một **khoảng con** của khoảng $[a,b]$ tương ứng với phép chia.

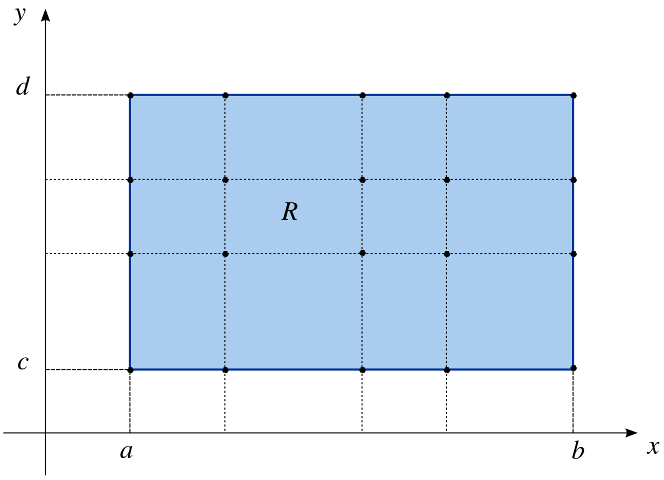
Một phép chia của hình hộp $I = \prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$ là một tích Descartes của các phép chia của các khoảng $[a_i,b_i]$. Cụ thể nếu mỗi P_i là một phép chia của khoảng $[a_i,b_i]$ thì $P = \prod_{i=1}^n P_i$ là một phép chia của hình hộp I. Xem ví dụ ở hình 1.1.1.

Một **hình hộp con** ứng với một phép chia P của một hình hộp I là một tích các khoảng con của các cạnh của hình hộp I. Cụ thể một hình hộp con của hình hộp I có dạng $\prod_{i=1}^n T_i$ trong đó T_i là một khoảng con của khoảng $[a_i,b_i]$ ứng với phép chia P_i. Đặt $SR(P)$ là tập hợp tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P. Người đọc có thể hình dung các trường hợp 1, 2, 3 chiều để dễ theo dõi.

Tích phân trên hình hộp

Cho I là một hình hộp, và $f: I \to \mathbb{R}$. Với một phép chia P của I, thành lập **tổng Riemann**[1]

[1] Bernard Riemann là người đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854, mặc dù tích phân đã được dùng trước đó.



Hình 1.1.1: Một phép chia của hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ gồm những điểm mà các tọa độ thứ nhất tạo thành một phép chia của $[a,b]$ và các tọa độ thứ hai tạo thành một phép chia của $[c,d]$.

$$\sum_{R\in SR(P)} f(x_R)|R|$$

ở đây tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con R của P, và x_R là một điểm bất kì thuộc R. Đây là một xấp xỉ của "tổng giá trị" của f trên I. Nếu $f\geq 0$ thì đây là một xấp xỉ của "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f bên trên I.

"Giới hạn" của tổng Riemann khi phép chia "mịn hơn" sẽ là tích phân của hàm f trên I, kí hiệu là $\int_I f$.

Vậy $\int_I f$ đại diện cho"tổng giá trị"của hàm f trên I. Nếu $f\geq 0$ thì $\int_I f$ đại diện cho "thể tích" của khối bên dưới đồ thị của f bên trên I.[2]

Để làm chính xác ý tưởng trên ta cần làm rõ quá trình qua giới hạn. Chúng ta sẽ dùng một cách trình bày do Jean Gaston Darboux đề xuất năm 1870.

Khi nói về tích phân Riemann ta **chỉ xét hàm bị chặn**. Nhớ lại rằng cho tích phân của hàm một biến để xét tích phân của hàm không bị chặn cần lấy giới hạn của tích phân để thu được "tích phân suy rộng", một khái niệm mà ta không khảo sát trong môn học này. Vậy giả sử f bị chặn.

Gọi $L(f,P)=\sum_{R\in SR(P)}(\inf_R f)|R|$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các hình hộp con ứng với phép chia P, là **tổng dưới** hay **xấp xỉ dưới** ứng với P.

Tương tự, $U(f,P)=\sum_{R\in SR(P)}(\sup_R f)|R|$ là **tổng trên** hay **xấp xỉ trên** ứng với P.

Cho P và P' là hai phép chia của hình hộp I. Nếu $P\subset P'$ thì ta nói P' là **mịn hơn** P.

Bổ đề (chia mịn hơn thì xấp xỉ tốt hơn). *Nếu phép chia P' là mịn hơn phép chia P thì $L(f,P')\geq L(f,P)$ và $U(f,P')\leq U(f,P)$.*

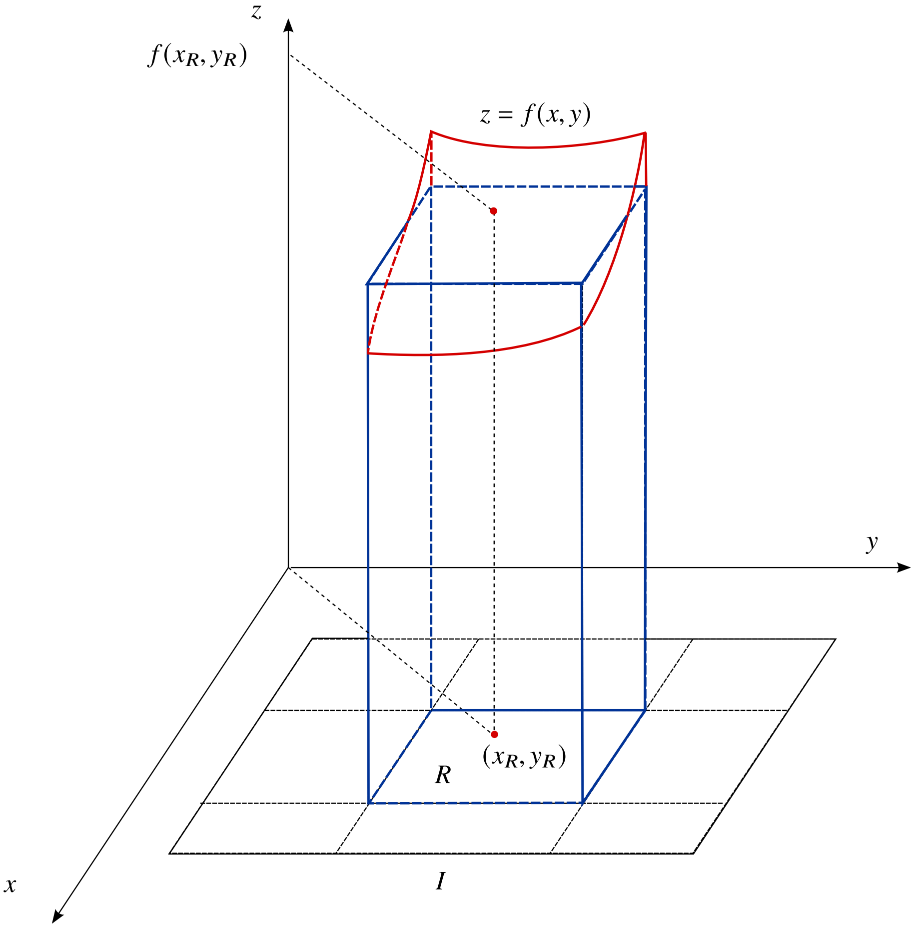
Đây một ưu điểm quan trọng của xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới bởi vì ta có thể thấy với tổng Riemann thì chia mịn hơn không nhất thiết dẫn tới xấp xỉ tốt hơn, xem bài tập 1.1.7.

Chứng minh. Mỗi hình hộp con R' của P' nằm trong một hình hộp con R của P. Ta có $\inf_{R'} f\geq \inf_R f$. Vì thế

$$\sum_{R'\subset R, R'\in SR(P')}(\inf_{R'} f)|R'|\geq \sum_{R'\subset R, R'\in SR(P')}(\inf_R f)|R'| = \inf_R f\sum_{R'\subset R, R'\in SR(P')}|R'| = (\inf_R f)|R|.$$

Lấy tổng hai vế của bất đẳng thức trên theo tất cả hình hộp con R của P ta được $L(f,P')\geq L(f,P)$. ◻

[2]Kí hiệu $\int$ do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính vi tích phân vào thế kỉ 17. Nó đại diện cho chữ cái "s" trong chữ Latin "summa" (tổng).



Hình 1.1.2: Xấp xỉ Riemann.

Bổ đề (xấp xỉ dưới ≤ xấp xỉ trên). *Nếu P và P′ là hai phép chia bất kì của cùng một hình hộp thì* $L(f,P) \le U(f,P')$.

Chứng minh. Với hai phép chia P và P' bất kì thì luôn có một phép chia P'' mịn hơn cả P lẫn P', chẳng hạn nếu $P = \prod_{i=1}^n P_i$ và $P' = \prod_{i=1}^n P_i'$ thì có thể lấy $P'' = \prod_{i=1}^n P_i''$ với $P_i'' = P_i \cup P_i'$. Khi đó $L(f,P) \le L(f,P'') \le U(f,P'') \le U(f,P')$. □

Một hệ quả là chặn trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các xấp xỉ dưới $\sup_P L(f,P)$ và chặn dưới lớn nhất của của tập hợp tất cả các xấp xỉ trên $\inf_P U(f,P)$ tồn tại, và $\sup_P L(f,P) \le \inf_P U(f,P)$.

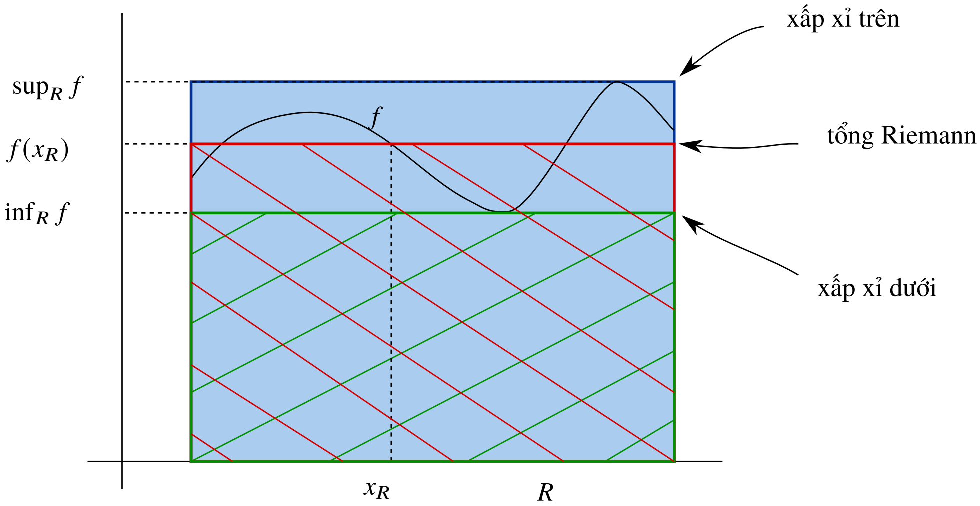
Định nghĩa (tích phân Riemann). Cho hình hộp I. Hàm $f : I \to \mathbb{R}$ là **khả tích** (integrable) nếu f bị chặn và $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$. Nếu f khả tích thì **tích phân** (integral) của f được định nghĩa là số thực $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$, và được kí hiệu là $\int_I f$.

Ví dụ. Nếu c là hằng số thì $\int_I c = c|I|$.

Khi số chiều $n = 1$ ta có tích phân của hàm một biến quen thuộc từ trung học và đã được khảo sát trong môn Giải tích 1, với $\int_{[a,b]} f$ thường được viết là $\int_a^b f(x)\, dx$. Như vậy **ta thừa hưởng tất cả các kết quả về tích phân hàm một biến đã có trong Giải tích 1**, chẳng hạn như công thức Newton–Leibniz để tính tích phân.

Khi $n = 2$ ta có **tích phân bội hai,** thường được viết là $\iint_I f(x,y)\, dA$ hay $\iint_I f(x,y)\, dxdy$. Khi $n = 3$ ta có **tích phân bội ba**, thường được viết là $\iiint_I f(x,y,z)\, dV$ hay $\iiint_I f(x,y,z)\, dxdydz$.

Ghi chú. Hiện giờ dx, $dxdy$, $dxdydz$, dA, dV chỉ là kí hiệu để chỉ loại tích phân, không có ý nghĩa độc lập.



Hình 1.1.3: Xấp xỉ dưới ≤ xấp xỉ Riemann ≤ xấp xỉ trên.

1.1.4 Mệnh đề. *Cho f bị chặn trên hình hộp I. Khi đó f là khả tích trên I nếu và chỉ nếu với mọi $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.*

Như vậy hàm khả tích khi và chỉ khi xấp xỉ trên và xấp xỉ dưới có thể gần nhau tùy ý.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Cho f khả tích. Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P và P' sao cho

$$L(f,P) > -\epsilon + \int_I f$$

và

$$U(f,P') < \epsilon + \int_I f.$$

Lấy P'' mịn hơn cả P và P'. Khi đó

$$U(f,P'') - L(f,P'') \le U(f,P') - L(f,P) < 2\epsilon$$

($\Leftarrow$) Giả sử với $\epsilon > 0$ cho trước bất kì có phép chia P sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Bất đẳng thức này dẫn tới $U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon$, do đó $\inf_P U(f,P) < \sup_P L(f,P) + \epsilon$, hay $0 \le \inf_P U(f,P) - \sup L(f,P) < \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$. Do đó $\inf_P U(f,P) = \sup_P L(f,P)$. □

Tính chất của tích phân

Ta có những tính chất tương tự trường hợp một biến:

1.1.5 Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên hình hộp I thì:*

(a) $f + g$ khả tích và $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.

(b) Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_I cf = c\int_I f$.

(c) Nếu $f \le g$ thì $\int_I f \le \int_I g$.

Chứng minh. Ta chứng minh phần (a), các phần còn lại được để ở phần bài tập.

Với một phép chia P của I, trên một hình hộp con R ta có $\inf_R f + \inf_R g \le f(x) + g(x)$, $\forall x \in R$. Suy ra $\inf_R f + \inf_R g \le \inf_R(f+g)$. Do đó $L(f,P) + L(g,P) \le L(f+g,P)$.

Cho $\epsilon > 0$, có phép chia P sao cho $L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và có phép chia P' sao cho $L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Lấy phép chia P'' mịn hơn cả P và P' thì $L(f,P'') \geq L(f,P) > \int_I f - \epsilon$ và $L(g,P'') \geq L(g,P') > \int_I g - \epsilon$. Suy ra

$$L(f+g,P'') \geq L(f,P'') + L(g,P'') > \int_I f + \int_I g - 2\epsilon.$$

Tương tự, có phép chia Q sao cho

$$U(f+g,Q) \leq U(f,Q) + U(g,Q) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Lấy phép chia Q' mịn hơn cả P'' và Q thì ta được

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < L(f+g,Q') \leq U(f+g,Q') < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon.$$

Hệ thức này dẫn tới $U(f+g,Q') - L(f+g,Q') < 4\epsilon$, do đó $f+g$ khả tích, hơn nữa

$$\int_I f + \int_I g - 2\epsilon < \int_I (f+g) < \int_I f + \int_I g + 2\epsilon,\ \forall \epsilon > 0,$$

do đó $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. □

* Đọc thêm

Có thể định nghĩa tích phân Riemann như sau. Ta nói f là khả tích trên I nếu có một số thực, gọi là tích phân của f trên I, kí hiệu là $\int_I f$, có tính chất là với mọi $\epsilon > 0$ có $\delta > 0$ sao cho nếu tất cả các cạnh của các hình chữ nhật con của P đều có chiều dài nhỏ hơn δ thì với mọi cách chọn điểm x_R thuộc hình hộp con R của P ta có $\left|\sum_R f(x_R)|R| - \int_I f\right| < \epsilon$. Có thể chứng minh rằng định nghĩa này tương đương với định nghĩa của Darboux.

Có thể hỏi nếu ta dùng những cách xấp xỉ khác thì có mang tới cùng một tích phân hay không? Nếu ta muốn tích phân có những tính chất thường dùng, gồm chẳng hạn tính tuyến tính, thì thực ra chỉ có duy nhất một loại tích phân thỏa các tính chất đó, xem [Lan97, tr. 575].

Bài tập

1.1.6. Một hồ nước hình chữ nhật kích thước 4m×8m có độ sâu không đều. Người ta đo được chiều sâu tại một số điểm trên hồ như trong bảng sau. Ví dụ trong bảng này độ sâu tại điểm cách bờ trái 5m và bờ trên 1m là 4,6m. Hãy ước lượng lượng nước trong hồ.

vị trí	1	3	5	7
1	3,1	4,5	4,6	4.,0
3	3,7	4,1	4,5	4,4

1.1.7. Hãy cho một ví dụ minh họa rằng xấp xỉ Riemann ứng với một phép chia mịn hơn không nhất thiết tốt hơn.

1.1.8. ✓ Chứng minh các tính chất ở 1.1.5.

1.1.9. Hãy cho một ước lượng cho giá trị của tích phân (nghĩa là cho biết tích phân có thể có giá trị từ đâu tới đâu)

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} e^{x^2y^3}\, dxdy.$$

1.1.10. Điều sau đây là đúng hay sai, giải thích:

$$\iint_{[0,1]\times[1,4]} (x^2 + \sqrt{y})\sin(xy^2)\, dA = 10.$$

1.1.11. Giả sử f liên tục trên hình hộp I và $f(x) \geq 0$ trên I. Chứng minh rằng nếu $\int_I f = 0$ thì $f = 0$ trên I.

1.2 Sự khả tích

Qua ý của tích phân, ta thấy việc xấp xỉ dựa trên một giả thiết: nếu biến thay đổi ít thì giá trị của hàm thay đổi ít. Như vậy sự khả tích phụ thuộc chặt chẽ vào sự liên tục.

Đây là một điều kiện đủ cho sự khả tích mà ta sẽ dùng thường xuyên:

1.2.1 Định lý (liên tục thì khả tích). *Một hàm liên tục trên một hình hộp thì khả tích trên đó.*

Chứng minh. Chứng minh chủ yếu dựa vào tính liên tục đều của của hàm. Ta dùng các kết quả sau trong Giải tích 2 (xem chẳng hạn [Lan97, tr. 193]):

(a) Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

(b) Một hàm thực liên tục trên một tập con compắc của $\mathbb{R}^n$ thì liên tục đều.

(c) Một hàm thực liên tục trên một tập compắc thì bị chặn.

Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên hình hộp I. Khi đó f liên tục đều trên I, do đó cho trước $\epsilon > 0$, có $\delta > 0$ sao cho $\|x - y\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(y) < \epsilon$.

Lấy một phép chia P của I sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong một hình hộp con là nhỏ hơn δ. Điều này không khó: nếu chiều dài mỗi cạnh của một hình hộp nhỏ hơn α thì chiều dài của một đường chéo của hình hộp đó nhỏ hơn $\sqrt{n}\alpha$.

Với hai điểm x, y bất kì thuộc về một hình hộp con R thì $f(x) - f(y) < \epsilon$. Suy ra $\sup_R f - \inf_R f \leq \epsilon$. Vì thế

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R| \leq \epsilon \sum_R |R| = \epsilon |I|$$

Theo tiêu chuẩn 1.1.4 ta có kết quả. □

Tập có thể tích không

Ví dụ sau cho thấy một hàm không liên tục vẫn có thể khả tích.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với phép chia P bất kì của $[0,1]$ sao cho chiều dài của các khoảng con nhỏ hơn $\frac{\epsilon}{2}$ thì sai khác giữa $U(f,P)$ và $L(f,P)$ nhỏ hơn ϵ. Vì thế hàm f khả tích. Chú ý rằng f không liên tục tại $\frac{1}{2}$.

Ví dụ. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Với bất kì phép chia P nào của khoảng $[0,1]$ ta có $L(f,P) = 0$ and $U(f,P) = 1$. Do đó f không khả tích. Chú ý rằng f không liên tục tại bất kì điểm nào.

1.2.2 Định nghĩa. Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ được gọi là có **thể tích (n-chiều) không** (of content zero) nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ hữu hạn các hình hộp n-chiều $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^m U_i \supset C$ và $\sum_{i=1}^m |U_i| < \epsilon$.

Nói cách khác, một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có thể tích không nếu ta có thể phủ tập đó bằng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì.

Khi $n = 2$ ta thay từ "thể tích không" bởi từ "diện tích không".

Ví dụ. (a) Tập rỗng $\emptyset$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 1$.

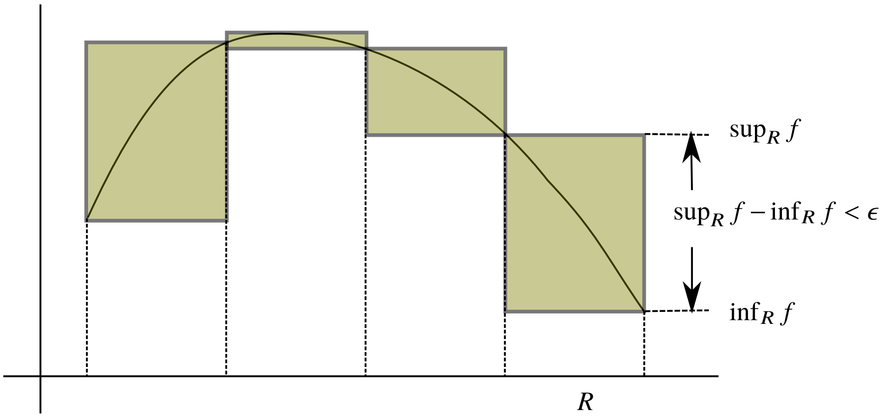
(b) Tập hợp gồm một điểm trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 1$.

(c) Một đoạn thẳng nằm ngang hay thẳng đứng trong $\mathbb{R}^2$ có diện tích không.

(d) Hội của hai tập có thể tích không là một tập có thể tích không.

1.2.3 Mệnh đề. *Đồ thị của một hàm khả tích trên một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Chứng minh. Cho f khả tích trên hình hộp $I \subset \mathbb{R}^n$. Cho trước $\epsilon > 0$ có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) = \sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon$. Đồ thị của hàm f, tập $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$, được phủ bởi họ tất cả các hình hộp $R \times [\inf_R f, \sup_R f]$.



Tổng thể tích của các hình hộp này chính là $\sum_R (\sup_R f - \inf_R f)|R|$, nhỏ hơn ϵ. □

Ví dụ. Đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$. Vậy một đoạn thẳng, một đoạn parabola, một đường tròn thì có diện tích không.

1.2.4 Định lý (liên tục trừ ra trên tập có thể tích không thì khả tích). *Một hàm thực bị chặn trên một hình hộp và liên tục trên hình hộp đó trừ ra một tập có thể tích không thì khả tích trên hình hộp đó.*

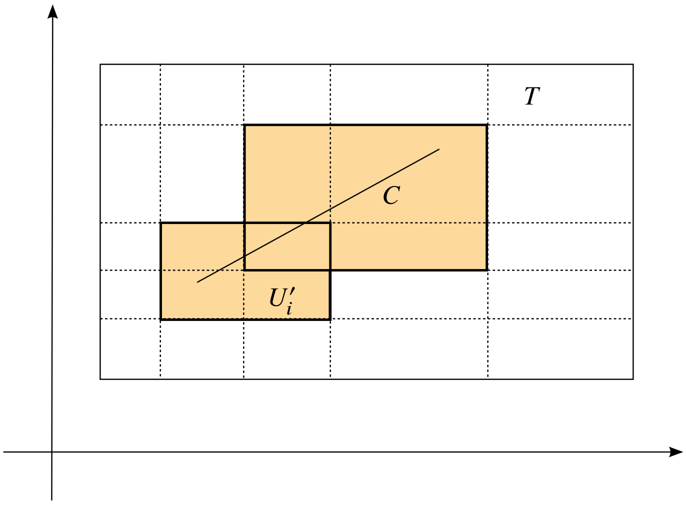
Chứng minh. Giả sử f là một hàm thực bị chặn trên hình hộp I, do đó có số thực M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$. Cho C là tập hợp các điểm thuộc I mà tại đó hàm f không liên tục. Giả thiết cho C có thể tích không.

Ý của chứng minh là dùng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ để phủ C và dùng tính bị chặn của f đối với phần này. Trên phần của hình hộp còn lại thì f liên tục đều, ta sử dụng lập luận như trong phần chứng minh của 1.2.1. Để dễ theo dõi hơn người đọc có thể tiến hành cho một ví dụ cụ thể như ở hình 1.2.5.

Cho $\epsilon > 0$, có một họ các hình hộp $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ phủ C và có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ. Có thể giả sử mỗi hình hộp U_i là một hình hộp con của I, bằng cách thay U_i bởi $U_i \cap I$ nếu cần. Ta muốn tách rời C khỏi các hình hộp ngoài họ này. Mở rộng mỗi hình hộp U_i thành một hình hộp U_i' chứa trong I có thể tích không quá hai lần thể tích của U_i sao cho phần trong của U_i' chứa U_i (ở đây ta xét phần trong tương đối với I, nghĩa là các tập được xét được coi là tập con của không gian I.) Như vậy ta có được một họ mới $\{U_i'\}_{1 \leq i \leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn 2ϵ, hội các phần trong của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{U_i'}$ thì T rời khỏi C do đó f liên tục trên T.

Bây giờ ta làm tương tự như ở 1.2.1. Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i' làm các điểm chia trên các cạnh của I. Vì T là compắc nên f liên tục đều trên T, do đó ta có thể lấy được một phép chia P' mịn hơn P sao cho với bất kì hình hộp con R của P' chứa trong T thì $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Khi đó với P' ta có

$$\sum_{R \subset T} (\sup_R f - \inf_R f)|R| < \epsilon \sum_{R \subset T} |R| \leq \epsilon |I|.$$



Hình 1.2.5: Một trường hợp: C là một đoạn thẳng.

Nếu hình hộp con R của P' không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i' nào đó, do đó

$$\sum_{R \not\subset T} (\sup_R f - \inf_R f)|R| \leq \sum_{R \not\subset T} 2M|R| = 2M \sum_{R \not\subset T} |R| = 2M \sum_{i=1}^{m} |U_i'| < 2M2\epsilon.$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta có $U(f, P') - L(f, P') < (|I| + 4M)\epsilon$. Từ đó ta kết luận hàm f khả tích. □

1.2.6 Định lý. *Giả sử f và g là hàm bị chặn trên một hình hộp I và $f(x) = g(x)$ trên I trừ ra một tập con có thể tích không. Khi đó f khả tích trên I khi và chỉ khi g khả tích trên I, và khi đó $\int_I f = \int_I g$.*

Vậy **giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.**

Chứng minh. Đặt $h = g - f$ thì h bị chặn, và $h(x) = 0$ trừ ra trên một tập C có thể tích không. Ta chỉ cần chứng minh h khả tích và $\int_I h = 0$, sau đó dùng 1.1.5. Ta tiến hành giống như cách chứng minh 1.2.4.

Cho trước $\epsilon > 0$, ta có một họ $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn ϵ và hội các phần trong (tương đối với không gian I) của các hình hộp này chứa C. Đặt $T = I \setminus \cup_{i=1}^{m} \overset{\circ}{U_i}$ thì T rời khỏi C do đó $h = 0$ trên T.

Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i làm các điểm chia trên các cạnh của I. Trên T thì

$$\sum_{R \subset T} (\sup_R f)|R| = \sum_{R \subset T} (\inf_R f)|R| = 0.$$

Do h bị chặn nên có số $M > 0$ sao cho $|h(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$. Nếu hình hộp con R không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i nào đó, do đó

$$\sum_{R \not\subset T} (\sup_R h)|R| \leq \sum_{R \not\subset T} M|R| = M \sum_{R \not\subset T} |R| = M \sum_{i=1}^{m} |U_i| < M\epsilon.$$

Tương tự:

$$\sum_{R \not\subset T} (\inf_R h)|R| \geq \sum_{R \not\subset T} -M|R| = -M \sum_{R \not\subset T} |R| = -M \sum_{i=1}^{m} |U_i| > -M\epsilon.$$

Vậy $-M\epsilon < L(h,P) \le U(h,P) < M\epsilon$.
Từ đây ta có thể kết luận hàm h khả tích và $\int_I h = 0$. □

Điều kiện cần và đủ cho sự khả tích

Trong phần này chúng ta sẽ trả lời hoàn chỉnh vấn đề khả tích. Nếu người đọc thấy quá khó hoặc không có đủ thời gian thì chỉ cần nắm được phát biểu kết quả chính là 1.2.8.

1.2.7 Định nghĩa (độ đo không). Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ là có **độ đo không** (of measure zero) nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một họ các hình hộp $(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset C$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| < \epsilon$.

Nói cách khác, một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có độ đo không nếu ta có thể phủ tập đó bằng một họ **đếm được** các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì.

Ví dụ. Một tập có thể tích không thì có độ đo không.

Một mệnh đề $P(x)$ được gọi là đúng **hầu như khắp nơi** (hầu khắp) (almost everywhere) nếu nó đúng với mọi x trừ ra trên một tập có độ đo không, tức là tập hợp tất cả x sao cho $P(x)$ không đúng có độ đo không. Đối với tích phân thì có thể hiểu sơ lược tập có độ đo không là tập "không đáng kể".

Dưới đây là câu trả lời hoàn chỉnh cho vấn đề khả tích, thường được gọi là điều kiện khả tích Lebesgue:

1.2.8 Định lý (khả tích = bị chặn + liên tục hầu khắp). *Một hàm thực bị chặn trên một hình hộp là khả tích trên hình hộp đó khi và chỉ khi tập hợp những điểm tại đó hàm không liên tục có độ đo không.*

1.2.9 Ví dụ. Sau đây là một ví dụ kinh điển về một hàm khả tích có tập hợp các điểm không liên tục có độ đo không nhưng không có thể tích không.

Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rõ ràng f không liên tục tại các số hữu tỉ. Mặt khác có thể chứng minh là f liên tục tại các số vô tỉ (bài tập 1.2.16). Tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ có độ đo không nhưng không có thể tích không (bài tập 1.2.17).

Hóa ra hàm f khả tích. Thực vậy, cho $\epsilon > 0$, gọi C_ϵ là tập hợp các số hữu tỉ x trong $[0,1]$ sao cho nếu $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản thì $\frac{1}{q} \ge \epsilon$. Vì $0 \le p \le q \le \frac{1}{\epsilon}$, nên tập C_ϵ là hữu hạn. Ta phủ C_ϵ bằng một họ U gồm hữu hạn các khoảng con rời nhau của khoảng $[0,1]$ có tổng chiều dài nhỏ hơn ϵ. Các điểm đầu mút của các khoảng này sinh ra một phép chia P của khoảng $[0,1]$. Ta có $\sum_{R \in U} (\sup_R f)|R| \le \sum_{R \in U} |R| < \epsilon$. Trong khi đó nếu số $x = \frac{p}{q}$ ở dạng tối giản không thuộc C_ϵ thì $\frac{1}{q} < \epsilon$, do đó $\sum_{R \notin U} (\sup_R f)|R| < \epsilon \sum_{R \notin U} |R| \le \epsilon$. Vậy $U(f,P) < 2\epsilon$. Từ đây ta kết luận f khả tích, hơn nữa $\int_{[0,1]} f = 0$.

* Chứng minh 1.2.8

Cho f là một hàm bị chặn trên miền xác định là $D \subset \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa **dao động** (oscillation) của f tại $x \in D$ là số thực

$$o(f,x) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{B(x,\delta) \cap D} f - \inf_{B(x,\delta) \cap D} f \right) = \lim_{\delta \to 0} \left(\sup_{B(x,\delta) \cap D} f - \inf_{B(x,\delta) \cap D} f \right).$$

Rõ ràng $o(f,x)$ được xác định và không âm.

1.2.10 Bổ đề. *Hàm f liên tục tại x khi và chỉ khi $o(f,x)=0$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử $o(f,x)=0$. Cho trước $\epsilon>0$, có $\delta>0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f < \epsilon$. Suy ra $f(y)-f(x)<\epsilon$ và $f(x)-f(y)<\epsilon$, vì thế $|f(y)-f(x)|<\epsilon$ với mọi $y\in B(x,\delta)\cap D$. Vậy f liên tục tại x.

($\Leftarrow$) Giả sử f liên tục tại x. Cho $\epsilon>0$, có $\delta>0$ sao cho $|f(y)-f(x)|<\epsilon$ với mọi $y\in B(x,\delta)\cap D$. Vì vậy với mọi $y,z\in B(x,\delta)\cap D$ ta có $|f(y)-f(z)|<2\epsilon$. Suy ra $\sup_{B(x,\delta)} f - \inf_{B(x,\delta)} f \le 2\epsilon$. Vậy $o(f,x)=0$. □

Chứng minh phần điều kiện đủ của 1.2.8. Phần này được phát triển từ chứng minh của 1.2.4, dùng kĩ thuật trong 1.2.9.

Giả sử $|f(x)|\le M$ với mọi x trong hình hộp I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f không liên tục, và giả sử C có độ đo không.

Cho trước $\epsilon>0$. Đặt $C_\epsilon=\{x\in I \mid o(f,x)\ge\epsilon\}$. Khi đó theo 1.2.11, C_ϵ là một tập compắc, chứa trong C, do đó theo 1.2.12 C_ϵ có thể tích không. Như trong phần chứng minh của 1.2.4, có một họ hữu hạn các hình hộp $(U_1,U_2,\dots,U_m)$, mỗi hình hộp này chứa trong I, sao cho C_ϵ được phủ bởi họ các phần trong đối với I của các U_i, nghĩa là $C\subset\bigcup_{i=1}^m \mathring{U}_i$, và $\sum_{i=1}^m |U_i|<\epsilon$.

Đặt $T=I\setminus\bigcup_{i=1}^m \mathring{U}_i$. Khi đó T rời khỏi C_ϵ. Với mỗi $x\in T$ thì $o(f,x)<\epsilon$. Có hình hộp R_x là lân cận của x trong I sao cho $\sup_{R_x} f-\inf_{R_x} f<\epsilon$. Vì T compắc, mọi phủ mở có một phủ con hữu hạn (xem chẳng hạn [Lan97, tr. 203]), nên họ $\{\mathring{R}_x \mid x\in T\}$ phủ T có một phủ con hữu hạn $\{R_j \mid j=1,2,\dots,k\}$.

Các hình hộp U_i và R_j, $1\le i\le m$ và $1\le j\le k$ sinh ra một phép chia P của I, được tạo ra từ các tọa độ đỉnh của các hình hộp.

Nếu hình hộp con R của P nằm trong T thì $R\subset R_j$ nào đó, vì thế $\sup_R f-\inf_R f<\epsilon$. Do đó

$$\sum_{R\subset T}(\sup_R f-\inf_R f)|R|<\epsilon\sum_{R\subset T}|R|<\epsilon|I|.$$

Nếu hình hộp con R của P không chứa trong T thì $R\subset U_i$ nào đó. Do đó

$$\sum_{R\not\subset T}(\sup_R f-\inf_R f)|R|\le\sum_{R\not\subset T}2M|R|=2M\sum_{R\not\subset T}|R|=2M\sum_{i=1}^m|U_i|<2M\epsilon$$

Từ hai đánh giá trên ta có $U(f,P)-L(f,P)<(|I|+2M)\epsilon$. Ta kết luận hàm f khả tích. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng các bổ đề sau:

1.2.11 Bổ đề. *Với mọi $\epsilon>0$, tập $\{x\in D \mid o(f,x)\ge\epsilon\}$ là tập đóng trong D.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng $A=\{x\in D\mid o(f,x)<\epsilon\}$ là tập mở trong D. Giả sử $x\in A$. Có $\delta>0$ sao cho $\sup_{B(x,\delta)\cap D} f-\inf_{B(x,\delta)\cap D} f<\epsilon$. Lấy $y\in B(x,\delta)\cap D$. Lấy $\delta'>0$ sao cho $B(y,\delta')\subset B(x,\delta)$. Khi đó $\sup_{B(y,\delta')\cap D} f-\inf_{B(y,\delta')\cap D} f<\sup_{B(x,\delta)\cap D} f-\inf_{B(x,\delta)\cap D} f<\epsilon$. Điều này dẫn tới $y\in A$. □

1.2.12 Bổ đề. *Một tập compắc có độ đo không thì có thể tích không.*

Chứng minh. Giả sử C là compắc và có độ đo không. Cho $\epsilon>0$, có họ các hình hộp đóng $U_1,U_2,\dots$ sao cho $\cup_{i=1}^\infty U_i\supset C$ và $\sum_{i=1}^\infty|U_i|<\epsilon/2$. Mở rộng kích thước tất cả các cạnh của mỗi U_i để được hình hộp U_i' sao cho $|U_i'|<2|U_i|$. Khi đó $\mathring{U}_i'$ chứa U_i, do đó $\bigcup_{i=1}^\infty\mathring{U}_i'\supset C$, và $\sum_{i=1}^\infty|U_i'|<\epsilon$. Vì C compắc nên họ $(\mathring{U}_i')_{i=1}^\infty$ có một họ con hữu hạn $(\mathring{U}_{i_k}')_{k=1}^n$ thỏa $\bigcup_{k=1}^n\mathring{U}_{i_k}'\supset C$. Suy ra $\sum_{k=1}^n|\mathring{U}_{i_k}'|<\epsilon$. Vậy C có thể tích không. □

Chứng minh phần điều kiện cần của 1.2.8. Giả sử $|f(x)| \le M$ với mọi x trong hình hộp I và f khả tích trên I. Gọi C là tập các điểm trong I tại đó f liên tục. Với $m \in \mathbb{Z}^+$ đặt $C_{1/m} = \{x \in I \mid o(f,x) \ge 1/m\}$. Khi đó $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{1/m}$. Ta sẽ chứng minh mỗi tập $C_{1/m}$ có thể tích không, và do đó theo 1.2.13 tập C có độ đo không.

Cho $\epsilon > 0$. Vì f khả tích nên có phép chia P của I sao cho $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Tập $C_{1/m}$ gồm các điểm trong (đối với I) của một số hình hộp con của P, họ tất cả các hình hộp như vậy ta gọi là S, và các điểm biên của một số hình hộp con khác, họ tất cả các hình hộp như vậy ta gọi là T.

Nếu $R \in S$ thì R có điểm trong $x \in C_{1/m}$. Do đó $\sup_R f - \inf_R f \ge o(f,x) \ge 1/m$. Vậy

$$\epsilon > \sum_{R \in S} (\sup_R f - \inf_R f)|R| \ge \sum_{R \in S} \frac{1}{m}|R|.$$

Vậy ta được

$$\sum_{R \in S} |R| < m\epsilon.$$

Theo 1.2.14 tập T có thể tích không. Có một phủ Q của T bằng hữu hạn các hình hộp sao cho tổng thể tích của các hình hộp này nhỏ hơn ϵ. Do đó $C_{1/m}$ được phủ bởi họ $S \cup Q$ với tổng thể tích nhỏ hơn $(m+1)\epsilon$. Ta kết luận $C_{1/m}$ có thể tích không. □

Trong chứng minh trên ta đã dùng các bổ đề sau.

1.2.13 Bổ đề. *Hội của một họ đếm được các tập có thể tích không là một tập có độ đo không.*

Chứng minh. Giả sử C_i, $i \in \mathbb{Z}^+$ là một tập có thể tích không. Đặt $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Cho $\epsilon > 0$. Với mỗi i có một họ hữu hạn các hình hộp $\{U_{i,j} \mid 1 \le j \le n_i\}$ phủ C_i và $\sum_{j=1}^{n_i} |U_{i,j}| < \frac{\epsilon}{2^i}$.

Bây giờ ta liệt kê các tập $U_{i,j}$ theo thứ tự

$$U_{1,1}, U_{1,2}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots$$

Đây là một phủ đếm được của C có tổng diện tích nhỏ hơn $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$. Vậy C có độ đo không. □

1.2.14 Bổ đề. *Biên của một hình hộp có thể tích không.*

Chứng minh. Do 1.2.13 ta chỉ cần chứng minh mỗi mặt của một hình hộp n-chiều có thể tích không trong $\mathbb{R}^n$. Mỗi mặt của hình hộp là một tập hợp D các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \le x_j \le b_j$ khi $j \ne i$, và $x_i = c$ với $c = a_i$ hoặc $c = b_i$. Cho trước $\epsilon > 0$. Lấy hình hộp R phủ D có chiều dài cạnh ở chiều thứ i đủ nhỏ, cụ thể R gồm các điểm có dạng $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ với $a_j \le x_j \le b_j$ khi $j \ne i$ và $c - \delta \le x_i \le c + \delta$. Khi đó $|R| = 2\delta \prod_{j \ne i}(b_j - a_j) < \epsilon$ nếu δ đủ nhỏ. □

Bài tập

1.2.15. Các hàm sau có khả tích không? Nếu hàm khả tích thì tích phân của nó bằng bao nhiêu?

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1,\ x \ne \frac{1}{2}, \\ 0, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & 0 \le x \le 1,\ 0 < y \le 1, \\ 0, & 0 \le x \le 1,\ y = 0. \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} 4, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ (x,y) \ne (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 5, & (x,y) \ne (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \ne x, \\ x, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y = x. \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \ne x^2, \\ x^2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y = x^2. \end{cases}$

1.2.16. Chứng tỏ hàm được định nghĩa trong ví dụ 1.2.9 liên tục tại các số vô tỉ.

1.2.17. Chứng tỏ tập hợp các số hữu tỉ trong khoảng $[0,1]$ có độ đo không nhưng không có thể tích không.

1.2.18. Mệnh đề 1.2.6 có còn đúng không nếu thay thể tích không bằng độ đo không?

1.2.19. Chứng tỏ hội của một tập có độ đo không với một tập có thể tích không thì có độ đo không.

1.2.20. Chứng tỏ nếu f khả tích thì $|f|$ khả tích và $\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$.

1.3 Tích phân trên tập tổng quát

Chúng ta chỉ xét các tập con của $\mathbb{R}^n$. Để ngắn gọn hơn ta thường dùng từ **miền** (region) để chỉ một tập như vậy. Chúng ta **chỉ xét những miền bị chặn**. Nhớ lại rằng trong Giải tích 1 để xét tích phân trên khoảng không bị chặn ta đã phải dùng tới giới hạn của tích phân và xây dựng khái niệm tích phân suy rộng.

Cho D là một miền bị chặn, và cho $f : D \to \mathbb{R}$. Vì D bị chặn nên có hình hộp I chứa D. Mở rộng hàm f lên hình hộp I thành hàm $F : I \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa. Ta nói f là khả tích trên D nếu F khả tích trên I, và khi đó tích phân của f trên D được định nghĩa là tích phân của F trên I:

$$\int_D f = \int_I F.$$

Để tích phân của f trên D được định nghĩa thì F phải bị chặn trên I, do đó **f phải bị chặn trên D**.

Bổ đề. *Tích phân $\int_D f$ không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp I.*

Chứng minh. Giả sử F_1 là mở rộng của f lên $I_1 \supset D$ bằng không ngoài D, và F_2 là mở rộng của f lên $I_2 \supset D$ bằng không ngoài D. Ta cần chứng minh điều sau: nếu F_1 khả tích trên I_1 thì F_2 khả tích trên I_2, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_2} F_2$.

Đặt $I_3 = I_1 \cap I_2$ thì I_3 là một hình hộp con của I_1, và F_3 là mở rộng của f lên $I_3 \supset D$ bằng không ngoài D. Ta chứng minh điều sau là đủ: F_1 khả tích trên I_1 khi và chỉ khi F_3 khả tích trên I_3, và $\int_{I_1} F_1 = \int_{I_3} F_3$.

Đặt hàm F_1' xác định trên I_1 sao cho F_1' trùng với F_1 trừ ra trên biên của I_3, nơi mà F_1' được định nghĩa là bằng không. Vì F_1' chỉ khác F_1 trên một tập có thể tích không nên theo 1.2.6 F_1' khả tích khi và chỉ khi F_1 khả tích, và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_1} F_1$.

Một phép chia bất kì P của I_3 sinh ra một phép chia P' của I_1 bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_1. Nếu một hình hộp con R ứng với P' không chứa trong I_3 thì $\sup_R F_1' = \inf_R F_1' = 0$ (ở chỗ này có dùng giả thiết F_1' bằng không trên biên của I_3). Điều này dẫn tới $U(F_1', P') = U(F_1'|_{I_3}, P)$ và $L(F_1', P') = L(F_1'|_{I_3}, P)$. Do đó ta kết luận nếu $F_1'|_{I_3}$ khả tích thì F_1' khả tích và $\int_{I_1} F_1' = \int_{I_3} F_1'|_{I_3}$.

Ngược lại, một phép chia bất kì P' của I_1 sinh ra một phép chia P'' của I_1 mịn hơn P' bằng cách thêm vào tọa độ các đỉnh của I_3. Hạn chế P'' lên I_3 ta được một phép chia P của I_3. Giống như đoạn vừa rồi, $U(F_1', P'') = U(F_1'|_{I_3}, P)$ và $L(F_1', P'') = L(F_1'|_{I_3}, P)$. Do đó nếu F_1' khả tích thì $F_1'|_{I_3}$ khả tích và $\int_{I_3} F_1'|_{I_3} = \int_{I_1} F_1'$.

Cuối cùng, hàm $F_1'|_{I_3}$, hạn chế của F_1' xuống I_3, chỉ có thể khác F_3 trên biên của I_3, một tập có thể tích không. Do đó $F_1'|_{I_3}$ khả tích khi và chỉ khi F_3 khả tích, và $\int_{I_3} F_1'|_{I_3} = \int_3 F_3$. □

Ghi chú. Khi D là một hình hộp thì định nghĩa tích phân này trùng với định nghĩa đã có.

Thể tích

Ta định nghĩa thể tích thông qua tích phân:

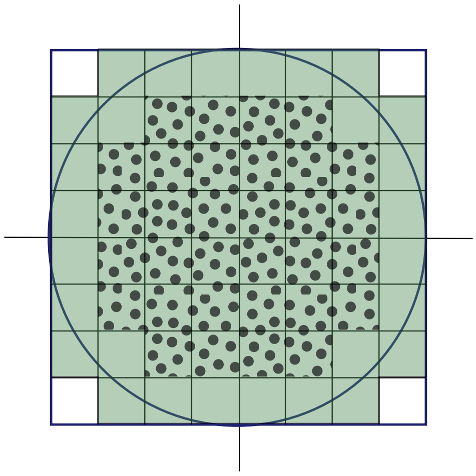
Định nghĩa. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. **Thể tích** n-chiều của D được định nghĩa là tích phân của hàm 1 trên D:

$$|D| = \int_D 1.$$

Nếu D là hình hộp thì định nghĩa này trùng với định nghĩa của hình hộp đã có.

Ta thường thay từ thể tích[3] bằng từ chiều dài khi $n = 1$ và bằng từ diện tích khi $n = 2$.

Có thể giải thích định nghĩa thể tích ở trên như sau. Đặt miền bị chặn D vào trong một hình hộp I. Xét hàm có giá trị bằng 1 trên D và bằng 0 ngoài D. Hàm này thường được gọi là gọi là



Hình 1.3.1: Xấp xỉ ngoài và xấp xỉ trong diện tích của một hình tròn.

hàm đặc trưng của D, kí hiệu là χ_D:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa nói rằng

$$|D| = \int_I \chi_D.$$

Xét một phép chia P của I. Ta có $U(\chi_D, P) = \sum_R (\sup_R \chi_D)|R| = \sum_{R\cap D\neq\emptyset} |R|$, bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà có phần chung khác rỗng với D, chính là một xấp xỉ trên thể tích của D. Trong khi đó $L(\chi_D, P) = \sum_R (\inf_R \chi_D)|R| = \sum_{R\subset D} |R|$, bằng tổng thể tích của các hình chữ nhật con của I mà nằm trong D, chính là một xấp xỉ dưới thể tích của D. Tập D có thể tích khi và chỉ khi hai xấp xỉ này có thể gần nhau tùy ý, và số thực duy nhất nằm giữa được gọi là thể tích của D.

Xấp xỉ dưới và xấp xỉ trên của thể tích có thể gần nhau tùy ý khi các hình hộp phủ phần biên có tổng thể tích nhỏ tùy ý. Ta có:

1.3.2 Định lý. *Một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều khi và chỉ khi biên của nó có thể tích n-chiều không.*

Chứng minh 1.3.2. Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, lấy một hình hộp I chứa D. Tập hợp các điểm không liên tục của χ_D là chính tập biên ∂D của D. Vậy χ_D khả tích khi và chỉ khi ∂D có độ đo không. Biên của một tập con của $\mathbb{R}^n$ luôn là một tập đóng, ngoài ra vì D bị chặn nên ∂D cũng bị chặn, do đó ∂D là compắc. Do 1.2.12, ta biết ∂D có độ đo không khi và chỉ khi nó có thể tích không. □

Ví dụ (hình tròn có diện tích). Xét hình tròn cho bởi $x^2 + y^2 \leq R^2$. Biên của hình tròn này là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. Đường tròn này là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới. Nửa đường tròn trên là đồ thị của hàm $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$. Theo 1.2.3, tập này có diện tích không. Tương tự nửa đường tròn dưới có diện tích không. Vậy đường tròn có diện tích không, do đó theo 1.3.2 ta kết luận hình tròn có diện tích.

[3] còn được gọi là thể tích Jordan

1.3.3 Ví dụ. Tương tự, một hình tam giác thì có diện tích vì biên của nó là một hội của hữu hạn những đoạn thẳng, là những tập có diện tích không.

Ví dụ. Tập hợp $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ có biên đúng bằng $[0,1]$, do đó tập này không có chiều dài (xem thêm 1.2.17).

Sự khả tích

Tương tự trường hợp hình hộp 1.2.8, ta có:

1.3.4 Định lý (khả tích trên tập có thể tích = bị chặn + liên tục hầu khắp). *Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Khi đó f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.*

Chứng minh. Cho I là một hình hộp chứa D và cho F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Tích phân $\int_D f$ tồn tại nếu và chỉ nếu tích phân $\int_I F$ tồn tại. Theo 1.2.8 ta biết tích phân $\int_I F$ tồn tại khi và chỉ khi F liên tục hầu khắp trên I. Tập E các điểm tại đó F không liên tục gồm tập C các điểm trên D mà tại đó f không liên tục và có thể những điểm khác trên biên của D. Như vậy $C \subset E \subset (C \cup \partial D)$. Do giả thiết, ∂D có thể tích không. Nếu C có độ đo không thì $C \cup \partial D$ có độ đo không (xem 1.2.19), dẫn đến E có độ đo không, do đó F khả tích. Ngược lại, nếu F khả tích thì E có độ đo không, do đó C có độ đo không. □

Tương tự 1.2.3 ta có:

1.3.5 Mệnh đề. *Đồ thị của một hàm khả tích trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Chứng minh. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và $f : D \to \mathbb{R}$. Gọi I là một hình hộp chứa D và F là mở rộng của f lên I, bằng không ngoài D. Vì f khả tích nên F khả tích trên I. Theo 1.2.3, đồ thị của F có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Đồ thị của f là một tập con của đồ thị của F. □

Ví dụ (quả cầu có thể tích). Xét quả cầu cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$. Nửa mặt cầu trên là đồ thị của hàm $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ với (x, y) thuộc về hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$. Vì hình tròn có diện tích và hàm trên liên tục, nên theo 1.3.4 hàm trên khả tích, và theo 1.3.5 thì đồ thị của nó có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự nửa mặt cầu dưới cũng có thể tích không, do đó mặt cầu có thể tích không, và do 1.3.2 nên quả cầu có thể tích.

Tính chất của tích phân

Những tính chất sau là hệ quả đơn giản của những tính chất tương ứng cho hình hộp 1.1.5:

1.3.6 Mệnh đề. *Nếu f và g khả tích trên D thì:*

(a) $f + g$ khả tích và $\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$.

(b) Với mọi số thực c thì cf khả tích và $\int_D cf = c\int_D f$.

(c) Nếu $f \le g$ thì $\int_D f \le \int_D g$.

Chứng minh. Ta chứng minh phần (a), các phần còn lại được để ở phần bài tập. Lấy một hình hộp I chứa D và gọi F và G lần lượt là mở rộng của f và g lên I, bằng 0 ngoài D. Theo định nghĩa của tích phân, do f và g khả tích trên D nên F và G khả tích trên I. Theo tính chất của tích phân trên hình hộp (1.1.5), ta có $(F+G)$ khả tích trên I và

$$\int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G.$$

Vì $(F+G)$ là mở rộng của $(f+g)$ lên I bằng 0 ngoài D nên $(F+G)$ khả tích trên I dẫn tới $(f+g)$ khả tích trên D. Hơn nữa

$$\int_D (f+g) = \int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G = \int_D f + \int_D g.$$

□

Tương tự như kết quả cho hình hộp 1.2.6, ta có:

1.3.7 Mệnh đề. *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, f và g bị chặn trên D, và $f(x) = g(x)$ trừ ra một tập có thể tích không. Khi đó f khả tích khi và chỉ khi g khả tích, và khi đó $\int_D f = \int_D g$.*

Vậy **giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.**

Chứng minh. Lấy một hình hộp I chứa D. Gọi F và G là các mở rộng của f và g lên I, bằng không ngoài D. Khi đó $F(x) = G(x)$ trên I trừ ra một tập có thể tích không. Nếu f khả tích trên D thì F khả tích trên I. Từ đây theo 1.2.6 thì G khả tích trên I, nên g khả tích trên D, và $\int_D f = \int_I F = \int_I G = \int_D g$. □

1.3.8 Hệ quả (thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng tới tích phân). *Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, C là tập con của D có thể tích không, và f bị chặn trên D. Khi đó f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \setminus C$, và khi đó $\int_D f = \int_{D\setminus C} f$.*

Chứng minh. Đặt hàm g xác định trên D sao cho $g(x) = f(x)$ trên $D \setminus C$ và $g(x) = 0$ trên C. Do 1.3.7 g cũng khả tích trên D và $\int_D g = \int_D f$. Mặt khác từ định nghĩa của tích phân ta có $\int_D g = \int_{D\setminus C} g = \int_{D\setminus C} f$. □

1.3.9 Hệ quả. *Cho D_1 và D_2 là hai tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. Giả sử $D_1 \cap D_2$ có thể tích không. Nếu f khả tích trên D_1 và trên D_2 thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$, và*

$$\int_{D_1\cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Kết quả này cho phép ta **tính tích phân trên một miền bằng cách chia miền đó thành những miền đơn giản hơn**. Đây là dạng tổng quát của công thức quen thuộc cho hàm một biến: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Chứng minh. Đặt f_1 xác định trên $D = D_1 \cup D_2$ sao cho $f_1 = f$ trên D_1 và $f_1 = 0$ trên $D \setminus D_1$. Tương tự, đặt f_2 xác định trên D sao cho $f_2 = f$ trên D_2 và $f_2 = 0$ trên $D \setminus D_2$. Vì f khả tích trên D_1 nên từ định nghĩa tích phân ta có ngay f_1 khả tích trên D và $\int_D f_1 = \int_{D_1} f$. Tương tự f_2 khả tích trên D và $\int_D f_2 = \int_{D_2} f$.

Ta có $f_1 + f_2 = f$ trên $D \setminus (D_1 \cap D_2)$. Vì $f_1 + f_2$ khả tích trên D và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không nên do 1.3.7 f khả tích trên D và

$$\int_D f = \int_D (f_1+f_2) = \int_D f_1 + \int_D f_2 = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

□

Trong mệnh đề trên lấy $f = 1$ ta có kết quả: Nếu D_1 và D_2 có thể tích và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không thì $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$. Đây chính là tính chất "cộng tính" của thể tích. Ứng dụng, khi tính diện tích một hình ta vẫn thường chia hình đó thành những hình đơn giản hơn bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong, rồi cộng các diện tích lại.

Bài tập

1.3.10. Tại sao khoảng (a,b) có chiều dài bằng $(b-a)$?

1.3.11. Tại sao miền phẳng bên dưới đồ thị $y = 1 - x^2$, bên trên đoạn $-1 \le x \le 1$ có diện tích?

1.3.12. Tại sao một khối tứ diện thì có thể tích?

1.3.13. Hàm sau có khả tích không, nếu có thì tích phân bằng bao nhiêu?

(a)

$$f(x,y) = 4,\ 0 < x < 1,\ 0 \le y < 2.$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ 3, & 1 < x \le 2,\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

1.3.14. Chứng minh 1.3.6.

1.3.15. Giả sử $A \subset \mathbb{R}^n$, A có thể tích. Cho $c \in \mathbb{R}$. Chứng tỏ $\int_A c = c|A|$.

1.3.16. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, A và B có thể tích. Chứng tỏ $|A| \le |B|$.

1.3.17. Giả sử $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, f khả tích trên A và B, và $f \ge 0$. Chứng tỏ $\int_A f \le \int_B f$.

1.3.18. Chứng tỏ tích phân của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không thì bằng không.

1.3.19. Tìm tập $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho tích phân

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA$$

đạt giá trị lớn nhất.

1.3.20. * Chứng tỏ một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không khi và chỉ khi nó có thể tích và thể tích đó bằng không. Như vậy thể tích không chính là có thể tích bằng không!

1.4 Công thức Fubini

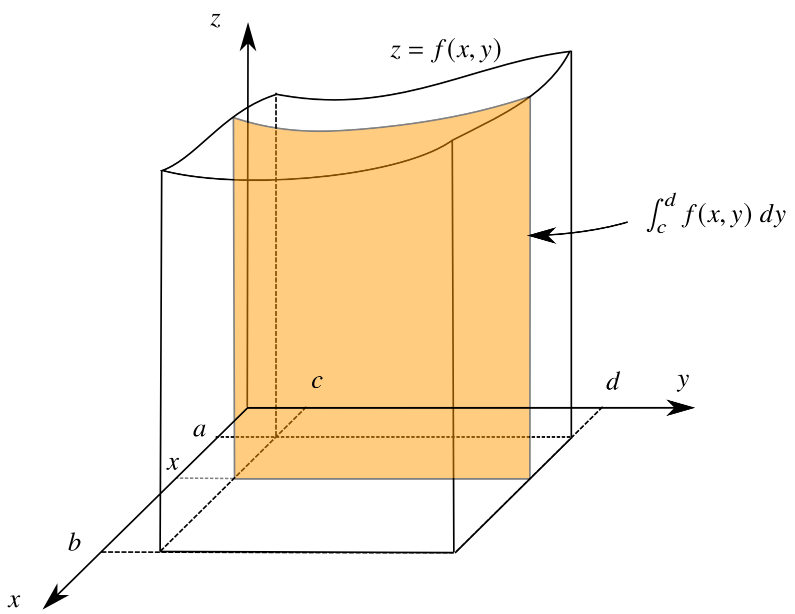
Công thức Fubini trong không gian hai chiều có dạng:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Một tích phân của tích phân được gọi là một **tích phân lặp** (iterated integral). Công thức Fubini đưa bài toán tính tích phân bội về bài toán tính tích phân của hàm một biến.

Về mặt số lượng công thức Fubini nói rằng tổng giá trị của hàm trên hình chữ nhật bằng tổng của các tổng giá trị trên các đoạn cắt song song.

Ta có thể giải thích bằng hình học công thức trên như sau. Giả sử $f > 0$. Khi đó $\int_{[a,b]\times[c,d]} f$ là "thể tích" của khối bên dưới mặt $z = f(x,y)$ bên trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$. Khi đó $\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ là "diện tích" của mặt cắt (cross-section) của khối bởi mặt phẳng $x = x_0$. Vậy công thức Fubini nói rằng **thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song.**



Có thể giải thích công thức này bằng cách xấp xỉ thể tích của khối như sau. Chia khoảng $[a,b]$ thành những khoảng con. Ứng với những khoảng con này, khối được cắt thành những mảnh bởi những mặt cắt song song. Vì chiều dài mỗi khoảng con là nhỏ, ta có thể xấp xỉ thể tích của mỗi mảnh bởi diện tích một mặt cắt nhân với chiều dài của khoảng con.

Chi tiết hơn, ta xấp xỉ theo tổng Riemann: Giả sử $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ là một phép chia của khoảng $[a,b]$ và $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ là một phép chia của khoảng $[c,d]$. Với x_i^* là điểm đại diện bất kì thuộc khoảng con $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ và y_j^* là điểm bất kì thuộc $\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j]$ thì

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx &\approx \sum_{i=1}^m \left(\int_c^d f(x_i^*,y)\,dy\right)|\Delta x_i| \\
&\approx \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n f(x_i^*,y_j^*)|\Delta y_j|\right)|\Delta x_i| \\
&= \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} f(x_i^*,y_j^*)|\Delta x_i||\Delta y_j| \\
&\approx \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy.
\end{aligned}$$

1.4.1 Định lý (công thức Fubini[4]). *Cho A là một hình hộp trong $\mathbb{R}^m$ và B là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$. Cho f khả tích trên hình hộp $A \times B$ trong $\mathbb{R}^{m+n}$. Giả sử với mỗi $x \in A$ tích phân $\int_B f(x,y)\,dy$ tồn tại. Khi đó*

$$\boxed{\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right) dx.}$$

Chứng minh. Chứng minh này đơn giản là một cách viết chính xác cách giải thích bằng xấp xỉ với tổng Riemann ở trên. Gọi P là một phép chia bất kì của hình hộp $A \times B$. Khi đó P là tích của một phép chia P_A của A và một phép chia P_B của B.

Đối với tổng dưới, ta có:

$$\begin{aligned}
L\left(\int_B f(x,y)\,dy, P_A\right) &= \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\int_B f(x,y)\,dy\right)|R_A| \\
&\geq \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A} L(f(x,\cdot),P_B)\right)|R_A| \\
&\geq \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\sum_{R_B}\left[\inf_{y\in R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&\geq \sum_{R_A}\left(\inf_{x\in R_A}\sum_{R_B}\left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&= \sum_{R_A}\left(\sum_{R_B}\left[\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)\right]|R_B|\right)|R_A| \\
&= \sum_{R_A\times R_B}\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A||R_B| \\
&= \sum_{R_A\times R_B}\inf_{R_A\times R_B} f(x,y)|R_A\times R_B| = L(f,P).
\end{aligned}$$

Tương tự, thay inf bởi sup ta được $U(\int_B f(x,y)\,dy, P_A) \leq U(f,P)$. Từ đây ta suy ra ngay định lý. □

Ví dụ. Tính tích phân $\iint_{[0,1]\times[2,3]} x\,dxdy$.

Vì hàm $(x,y)\mapsto x$ là liên tục trên hình chữ nhật $[0,1]\times[2,4]$ nên tích phân trên tồn tại, công thức Fubini áp dụng được, cho:

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} x\,dxdy = \int_0^1\left(\int_2^4 x\,dy\right)dx = \int_0^1 xy\big|_{y=2}^{y=4}\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\big|_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Ta cũng có thể áp dụng công thức Fubini theo thứ tự khác:

$$\iint_{[0,1]\times[2,4]} x\,dxdy = \int_2^4\left(\int_0^1 x\,dx\right)dy = \int_2^4 \frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_2^4 \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}y\Big|_{y=2}^{y=4} = 1.$$

1.4.2 Hệ quả (thể tích của miền dưới đồ thị). *Giả sử f là hàm xác định, không âm trên miền bị chặn $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi E là miền dưới đồ thị của f bên trên miền D, tức $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid x \in D,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Nếu E có thể tích thì thể tích đó bằng tích phân của f trên D:*

$$\boxed{|E| = \int_D f.}$$

[4]Guido Fubini chứng minh một dạng tổng quát của công thức vào đầu thế kỉ 20, nhưng những kết quả dạng này đã được biết trước đó khá lâu.

Đây là một công thức mà ta đã hướng tới ngay từ đầu khi xây dựng tích phân nhưng phải tới giờ mới xây dựng được.

Chứng minh. Vì E có thể tích nên nó bị chặn, có một hình hộp chứa nó. Ta có thể lấy hình hộp đó là $I \times [0,c]$ với I là một hình hộp n-chiều trong $\mathbb{R}^n$ chứa D và c đủ lớn. Áp dụng công thức Fubini:

$$|E| = \int_E 1 = \int_{I\times[0,c]} \chi_E = \int_I \left(\int_0^c \chi_E(x,y)\,dy \right) dx.$$

Nếu $x \in I \setminus D$ thì $\chi_E(x,y) = 0\ \forall y \in [0,c]$, do đó $\int_0^c \chi_E(x,y)\,dy = 0$. Nếu $x \in D$ thì $\chi_E(x,y) = 1$ khi và chỉ khi $0 \le y \le f(x)$, do đó $\int_0^c \chi_E(x,y)\,dy = \int_0^{f(x)} 1\,dy = f(x)$. Do đó

$$|E| = \int_D \left(\int_0^c \chi_E(x,y\,dy \right) dx = \int_D f(x)\,dx.$$

$\square$

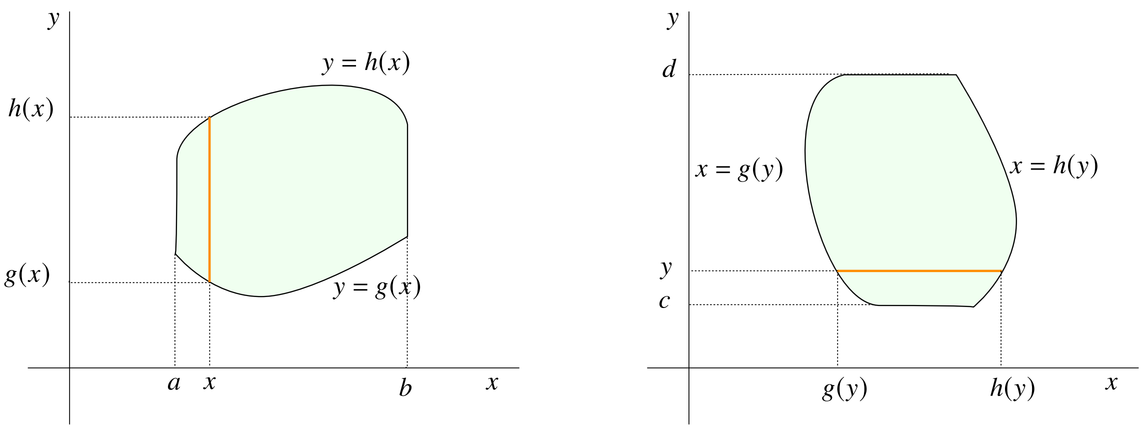
Ví dụ (tính diện tích tam giác). Xét D là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$, với $a,b>0$. Đây là miền dưới đồ thị $y = \frac{b}{a}x$ với $0 \le x \le a$. Như ta đã biết ở 1.3.3, tam giác D có diện tích. Vậy

$$|D| = \int_0^a \frac{b}{a}x\,dx = \frac{1}{2}ab.$$

Công thức Fubini cho miền phẳng

Việc áp dụng công thức Fubini sẽ dễ dàng hơn đối với những miền "đơn giản". Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều đứng** (vertically simple region) nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$. Đây là một miền giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng đứng nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng.

Tương tự, một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều ngang** (horizontally simple region) nếu nó có dạng $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ g(y) \le x \le h(y)\}$.



Hình 1.4.3: Miền hai chiều đơn giản.

1.4.4 Mệnh đề. *Cho miền đơn giản theo chiều đứng $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$. Giả sử f, g và h liên tục. Khi đó*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Công thức có thể đúng dưới những điều kiện tổng quát hơn như ở 1.4.2 nhưng chúng ta chỉ phát biểu ở dạng thường dùng trong môn học này. Trường hợp miền đơn giản theo chiều nằm ngang là tương tự.

Chứng minh. Ta chỉ ra với những điều kiện này thì miền D có diện tích. Do g và h bị chặn nên D bị chặn. Ta chứng tỏ biên của D có diện tích không. Ta có thể kiểm tra là phần trong của D là tập $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ g(x) < y < h(x)\}$. Thật vậy, giả sử $a < x_0 < b$ và $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Có số $\epsilon > 0$ sao cho $g(x_0) < y_0 - \epsilon$ và $h(x_0) > y_0 + \epsilon$. Do g và h liên tục nên có khoảng mở U chứa x_0 sao cho với $x \in U$ thì $g(x) < y_0 - \epsilon$ và $h(x) > y_0 + \epsilon$. Suy ra hình chữ nhật mở $U \times (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ được chứa trong D, mà đó là một lân cận mở của điểm (x_0, y_0). Từ đây có thể suy ra biên của D là hội của đồ thị của g và h và hai đoạn thẳng $\{(a,y) \mid g(a) \le y \le h(a)\}$ và $\{(b,y) \mid g(b) \le y \le h(b)\}$. Do 1.3.5 các tập này có diện tích không.

Lấy một hình chữ nhật $I = [a,b] \times [c,d]$ chứa D. Gọi F là mở rộng của f lên I bằng không ngoài D. Vì f liên tục trên tập có diện tích D nên f khả tích trên D, do đó F khả tích trên I. Ngoài ra $\int_c^d F(x,y)\, dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy$ tồn tại. Áp dụng công thức Fubini cho F:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, dxdy &= \iint_I F(x,y)\, dxdy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx. \end{aligned}$$

□

Ghi chú. Trong trường hợp miền không đơn giản ta có thể tìm cách chia miền thành những phần đơn giản để tính, dựa trên cơ sở 1.3.9.

Ví dụ (tính diện tích hình tròn). Xét hình tròn D cho bởi phương trình $x^2 + y^2 \le R^2$. Áp dụng công thức ở 1.4.4 cho hàm $f = 1$, $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, với $-R \le x \le R$, hay nhanh hơn dùng 1.4.13, ta có

$$|D| = \iint_D 1\, dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\, dy \right) dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Đổi biến $x = R\sin t$, $dx = R\cos t\, dt$, $x = -R \implies t = -\pi/2$, $x = R \implies t = \pi/2$, ta được

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2 \cos^2 t\, dt = \pi R^2.$$

Vậy diện tích của hình tròn bán kính R là πR^2.

Ví dụ. Tính tích phân $\iint_D e^{y^2}\, dA$, trong đó D là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(4,2)$, $(0,2)$.

Các giả thiết ở 1.4.4 được thỏa. Ta có thể miêu tả D theo hai cách

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2y\}.$$

Theo cách miêu tả thứ nhất, tức là xem D là miền đơn giản theo chiều đứng, thì công thức Fubini cho:

$$I = \iint_D e^{y^2}\, dA = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2} e^{y^2}\, dy \right) dx.$$

Tuy nhiên người ta biết nguyên hàm của hàm e^{y^2} theo biến y không phải là một hàm sơ cấp, do đó không có công thức cho nó.

Ta chuyển hướng dùng cách miêu tả thứ hai, xem D là miền đơn giản theo chiều ngang:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^{2y} e^{y^2}\, dx \right) dy = \int_0^2 x e^{y^2} \Big|_{x=0}^{x=2y}\, dy = \int_0^2 2y e^{y^2}\, dy = e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\ &= e^4 - 1. \end{aligned}$$

Công thức Fubini cho miền ba chiều

Tương tự trường hợp hai chiều ta có thể nói về miền ba chiều đơn giản. Một tập con của $\mathbb{R}^3$ được gọi là một **miền đơn giản theo chiều trục z** nếu nó có dạng $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,\ f(x,y)\le z\le g(x,y)\}$. Đây là miền nằm giữa hai đồ thị có cùng miền xác định. Một đường thẳng cùng phương với trục z nếu cắt miền này thì phần giao là một đoạn thẳng. Tương tự có khái niệm miền đơn giản theo chiều trục x và trục y.

Tương tự trường hợp hai chiều 1.4.4, ta có:

1.4.5 Mệnh đề. *Cho miền $D\subset\mathbb{R}^2$ có diện tích, và miền $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D,\ g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$. Giả sử f, g và h bị chặn và liên tục. Khi đó*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy.$$

Chứng minh. Ta chỉ ra với những điều kiện này thì E có thể tích. Vì g và h bị chặn trên D nên E bị chặn. Ta chứng minh biên của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Giống như trong chứng minh cho trường hợp hai chiều ở trên (1.4.4), có thể kiểm biên của E là hội của đồ thị của g và h, miền D, và mặt "bên hông" của E, tập $\{(x,y,z)\mid (x,y)\in\partial D,\ g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$. Theo 1.3.5 đồ thị của g và h, và miền D đều có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$.

Đặt D trong một hình chữ nhật I trong $\mathbb{R}^2$. Có một khoảng $[a,b]$ sao cho hình hộp $I\times[a,b]$ chứa E. Mặt bên hông của E là một tập con của tập $\partial D\times[a,b]$. Vì ∂D có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$ nên cho trước $\epsilon>0$ ta có thể phủ ∂D bằng hữu hạn hình chữ nhật với tổng diện tích nhỏ hơn ϵ. Lấy tích của mỗi hình chữ nhật đó với khoảng $[a,b]$ ta được một phủ của $\partial D\times[a,b]$ bởi các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn $\epsilon(b-a)$. Vậy mặt bên hông của E có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$, do đó E có thể tích.

Lấy mở rộng F của f lên $I\times[a,b]$ sao cho F bằng không ngoài E. Nếu $(x,y)\notin D$ thì F có giá trị 0 trên $\{(x,y)\}\times[a,b]$. Nếu $(x,y)\in D$ thì $\int_a^b F(x,y,z)\,dz=\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz$. Áp dụng công thức Fubini cho F:

$$\begin{aligned}\iiint_{I\times[a,b]} F(x,y,z)\,dV&=\iint_I\left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz\right)dA\\&=\iint_D\left(\int_a^b F(x,y,z)\,dz\right)dA\\&=\iint_D\left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dA.\end{aligned}$$

□

Ví dụ. Tính tích phân $\iiint_E x\,dV$ với E là khối tứ diện với các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.

Bước chính là miêu tả khối E. Ta có thể xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, là miền bên dưới mặt phẳng P qua ba điểm $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ và bên trên tam giác D với các đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ trong mặt phẳng xy.

Trước hết cần viết phương trình mặt phẳng P. Ta có hai vectơ cùng phương với mặt phẳng này là $(0,0,3)-(1,0,0)=(-1,0,3)$ và $(0,0,3)-(0,2,0)=(0,-2,3)$. Vectơ tích có hướng $(-1,0,3)\times(0,-2,3)=(6,3,2)$ vuông góc với mặt phẳng P, là một vectơ pháp tuyến. Một điểm (x,y,z) nằm trên P khi và chỉ khi vectơ $(x,y,z)-(0,0,3)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $(6,3,2)$, đồng nghĩa với tích vô hướng của hai vectơ này bằng 0. Vậy phương trình của P là $(x,y,z-3)\cdot(6,3,2)=0$, tức là $6x+3y+2z=6$. Nếu ta nhớ dạng tổng quát của phương trình mặt phẳng là $ax+by+cz=d$ thì bằng cách thế giá trị vào ta có thể tìm được phương trình của P nhanh chóng hơn.

Ta có thể chọn coi tam giác D là miền đơn giản theo chiều trục y trong mặt phẳng xy. Khi đó ta có một miêu tả:

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2-2x, 0\le z\le (6-6x-3y)/2\}.$$

Một miêu tả khối E như một miền đơn giản lập tức cho cách viết tích phân trên E như là tích phân lặp, chú ý là các điều kiện áp dụng công thức Fubini ở 1.4.5 đều được thỏa:

$$\begin{aligned}
\iiint_E x\,dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} \left(\int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} x\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x\left(3-3x-\frac{3}{2}y\right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x(3-3x)y - \frac{3}{4}xy^2 \right)\Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx \\
&= \int_0^1 (3x^3-6x^2+3x)\,dx = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Tính tích phân bằng máy tính

Nhờ công thức Fubini các tích phân nhiều chiều có thể được đưa về các tích phân một chiều. Các tích phân một chiều có thể được tính đúng hoặc tính xấp xỉ. Việc tính xấp xỉ về nguyên lý khá đơn giản, dựa trên việc tính một tổng Riemann. Trong thực tế tính xấp xỉ cần một lượng tính toán lớn và thích hợp để dùng máy tính.

Việc tính đúng nói chung phức tạp hơn. Chúng ta đã thấy từ những môn học trước rằng tính đúng tích phân hàm một biến nói chung là khó và mỗi loại tích phân cần phương pháp riêng. Người ta đã đưa ra những phương pháp chuyên biệt để tính tích phân, cũng như soạn những bản tích phân rất lớn. Rõ ràng ít người có thể nắm hết những phương pháp như vậy, cũng như việc sử dụng chúng hay tìm trong bảng sẽ mất nhiều thời gian và công sức. Trong những trường hợp khác việc tính toán đơn giản nhưng dài. Do đó việc tính tích phân thích hợp để lập trình cho máy tính.

Có một thuật toán phức tạp, gọi là thuật toán Risch, cho phép xác định một hàm cho trước có nguyên hàm sơ cấp hay không, và nếu có thì cho công thức, do đó giải quyết hoàn toàn vấn đề tính đúng tích phân. Các phần mềm tính toán kí hiệu (còn được gọi là các hệ Đại số máy tính - Computer Algebra System) thường có cài đặt các thuật toán tính tích phân ở mức độ khác nhau. Một số phần mềm tính toán kí hiệu:

Maxima Cài một phần thuật toán Risch. Phần mềm mã nguồn mở, kích thước nhỏ:
http://maxima.sourceforge.net

Mathematica Có giao diện web miễn phí: http://www.wolframalpha.com

Matlab Được sử dụng phổ biến trong tính toán số chuyên nghiệp và trong công nghiệp.

SageMath Có thể truy cập gói cài toàn bộ thuật toán Risch. Có giao diện web: https://cocalc.com

Bài tập

1.4.6. Cho hàm

$$\begin{aligned}
f:[0,1]\times[0,1] &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x\le y \\ xy, & x>y. \end{cases}
\end{aligned}$$

Hàm f có khả tích không? Nếu f khả tích thì tích phân của nó bằng bao nhiêu?

1.4.7. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, y\le x^2, \\ xy^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, y>x^2. \end{cases}$$

(a) Giải thích vì sao hàm f khả tích.

(b) Tính tích phân của hàm f. Giải thích đầy đủ cơ sở cho các tính toán này.

1.4.8. Tính:

(a) Giải thích vì sao tích phân sau tồn tại và tính nó:

$$\iint_D (\sqrt{x} - y^2)\, dA$$

trong đó D là miền bao bởi các đường cong $y = x^2$, $x = y^4$.

(b) Gọi D là miền được bao bởi các đường cong $x = y^2$, $y - x = 3$, $y = -3$, $y = 2$. Tính $\iint_D x\, dA$.

(c) Gọi D là miền trong góc phần tư thứ nhất, nằm bên trên đường hyperbola $xy = 1$, bên trên đường thẳng $y = x$, bên dưới đường thẳng $y = 2$. Tính $\iint_D y\, dA$.

(d) Tính tích phân của hàm x^2y^3 trên miền được bao bởi các đường $y = 4x^2$, $y = 5 - \sqrt{3}x^2$.

1.4.9. Giải thích vì sao có thể đổi thứ tự tích phân trong các tích phân lặp sau và hãy tính chúng:

(a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x e^{-y^2}\, dy \right) dx$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 2}\, dx \right) dy$.

(c) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 \cos(x^2)\, dx \right) dy$.

(d) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y \cos(x^2)\, dx \right) dy$.

(e) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy \right) dx$.

1.4.10. Tính:

(a) Tính tích phân $\iiint_E y\, dV$ trong đó E là khối tứ diện với 4 đỉnh $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ và $(0,0,1)$.

(b) Tính tích phân $\iiint_E z\, dV$ trong đó E là khối được bao bởi các mặt $z = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = 1$, $z = 2x + 3y$.

(c) Tìm thể tích của khối được bao bởi các mặt $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 - x + y$, $y = 1 - x^2$.

1.4.11. Cho f là hàm liên tục, hãy viết lại tích phân $\int_{-1}^1 \int_{|x|}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$ theo thứ tự $dx\, dz\, dy$.

1.4.12. Tính $\int_0^2 \int_0^1 \int_{z^2}^4 x^3 z \cos(y^2)\, dy\, dx\, dz$.

1.4.13. Giả sử f và g liên tục và $f \le g$ trên $[a,b]$. Gọi D là miền giữa đồ thị của f và g, tức $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$. Chứng minh rằng

$$|D| = \int_a^b \left(g(x) - f(x) \right) dx.$$

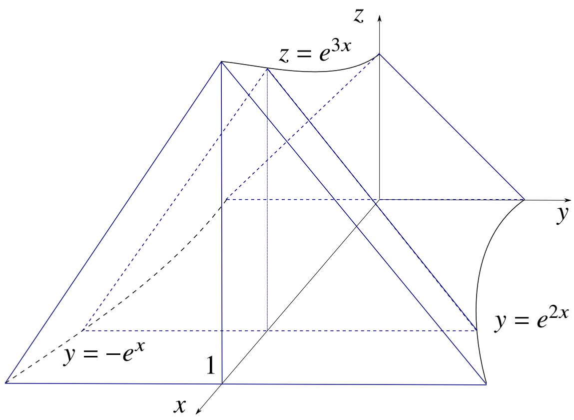
1.4.14. Cho g liên tục trên hình hộp $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, chứng tỏ

$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} g(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f g(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

1.4.15 (thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song). Giả sử tập $E \subset \mathbb{R}^3$ có thể tích. Giả sử $a \le z \le b$ với mọi $(x,y,z) \in E$. Giả sử với mỗi $z \in [a,b]$ tập $E_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z) \in E\}$ có diện tích . Chứng tỏ

$$|E| = \int_a^b |E_z|\, dz.$$

1.4.16. Tính thể tích của khối được miêu tả trong hình 1.4.17.

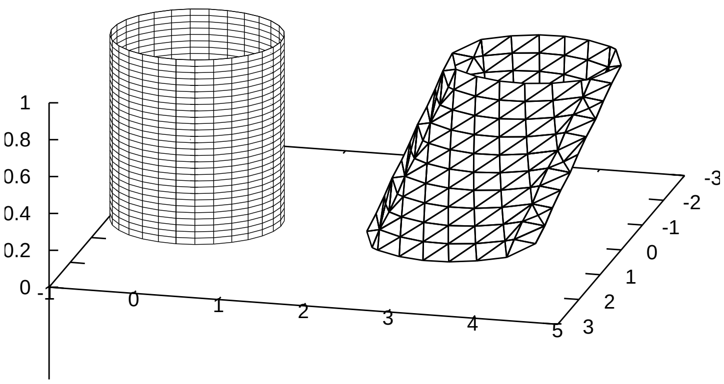


Hình 1.4.17:

1.4.18 (khối tròn xoay). Cho f là hàm liên tục trên khoảng $[a,b]$ và $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$. Chứng tỏ khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền dưới đồ thị của f quanh trục x có thể tích và thể tích bằng $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

1.4.19 (nguyên lý Cavalieri[5]). Nếu hai khối ba chiều có thể tích, và có một phương sao cho mọi mặt phẳng với phương đó cắt hai khối theo hai mặt cắt có cùng diện tích, thì hai khối đó có cùng thể tích.

1.4.20. Chứng tỏ rằng thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + (y-z-3)^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ bằng với thể tích của khối bao bởi mặt $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ (hình 1.4.21).



Hình 1.4.21: Mặt $x^2 + y^2 = 1$ (trái) và mặt $x^2 + (y-z-3)^2 = 1$ (phải).

1.4.22. * Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Giả sử $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ liên tục.

(a) Trên hình chữ nhật $[a,b]\times[c,d]$ bất kì, dùng định lý Fubini, hãy chứng tỏ

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dA = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dA.$$

(b) Dùng phần (a), chứng tỏ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Đây là một chứng minh dùng tích phân bội của một định lý quen thuộc trong môn Giải tích 2 nói rằng nếu các đạo hàm riêng cấp hai đều liên tục thì thứ tự lấy đạo hàm không ảnh hưởng tới kết quả.

[5]Bonaventura Francesco Cavalieri là một nhà toán học Ý sống vào đầu thế kỉ 17.

1.5 Công thức đổi biến

Nhớ lại trong tích phân hàm một biến, để tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ta thường làm như sau. Đặt $x = \sin t$ thì $dx = \cos t\,dt$, $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = 1$ tương ứng $t = \pi/2$, và

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Mục đích của bài này là khảo sát tổng quát hóa phương pháp ở trên lên nhiều chiều: Với tích phân $\int_A f(x)\,dx$, nếu đổi biến $x = \varphi(u)$ thì tích phân sẽ biến đổi như thế nào?

Nhắc lại về vi phân

Người đọc có thể xem lại nội dung này trong môn Giải tích 2, hoặc [Lan97].

Cho D là một tập con của $\mathbb{R}^n$, x là một **điểm trong** của D. Nhắc lại kí hiệu $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,1)$ là các vectơ tạo thành cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$. **Đạo hàm riêng** của $f : D \to \mathbb{R}$ theo biến thứ i tại x được định nghĩa là số thực

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}.$$

Đây chính là đạo hàm một biến của hàm f khi xem f chỉ là hàm theo biến x_i, là tỉ lệ, hay tốc độ thay đổi của giá trị của hàm so với giá trị của biến thứ i tại điểm đang xét.

Tổng quát hơn xét hàm $f : D \to \mathbb{R}^m$. Nếu tất cả các đạo hàm riêng của các hàm thành phần của f tồn tại và liên tục tại x thì ta nói f **khả vi liên tục** (continuously differentiable) hay **trơn** (smooth) tại x. Ma trận các đạo hàm riêng của f tại x được gọi là **ma trận Jacobi** của f tại x, kí hiệu là $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$.

Ví dụ. Khi $m = 1$ ma trận Jacobi $J_f(x)$ chính là **vectơ gradient**

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Nếu có một hàm tuyến tính $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho có một quả cầu $B(x,\epsilon) \subset D$ và một hàm $r : B(x,\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ thỏa mãn:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + r(h), \forall h \in B(x,\epsilon)$$

và $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, thì ánh xạ $f'(x)$ (còn được kí hiệu là $df(x)$) được gọi là **đạo hàm** (derivative - dẫn xuất) của f tại x. Vậy đạo hàm cho một xấp xỉ tuyến tính của hàm:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)(h).$$

Rõ ràng nếu hàm có đạo hàm (khả vi) thì nó liên tục.

Nếu f khả vi liên tục tại x thì f có đạo hàm tại x, và ánh xạ tuyến tính $f'(x)$ có thể biểu diễn trong cơ sở tuyến tính chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$ bởi ma trận Jacobi $J_f(x)$, tức là $f'(x)(h) = J_f(x)\cdot h$, trong đó phép nhân bên vế phải là phép nhân ma trận.

Cần nhấn mạnh rằng theo quan điểm tổng quát thì đạo hàm tại một điểm là một ánh xạ tuyến tính chứ không phải là một số thực hay một ma trận.

Nếu v là một vectơ đơn vị (tức vectơ có chiều dài bằng 1) thì ta suy ra ngay

$$f'(x)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Vậy $f'(x)(v)$ là đạo hàm theo hướng của f tại x theo hướng v, đo tỉ lệ thay đổi của f theo hướng v tại x.

Cho U, V, W là tập mở của $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^l$, $\mathbb{R}^p$ theo thứ tự đó, cho $f : U \to V$ and $g : V \to W$ có đạo hàm khi đó ta có công thức đạo hàm hàm hợp

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Nếu viết theo ma trận biểu diễn thì công thức này cho

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

Phép đổi biến

Cho A và B là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $f : A \to B$ được gọi là một **phép vi đồng phôi** (diffeomorphism) hay một phép vi phôi, hay một **phép đổi biến** nếu f là song ánh, khả vi liên tục, và ánh xạ ngược f^{-1} cũng khả vi liên tục.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^n$ phép tịnh tiến $x \mapsto x + a$ là một phép đổi biến.

Giả sử f là một phép vi đồng phôi trên một tập mở. Từ đẳng thức $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ với mọi x, lấy đạo hàm hai vế, theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp thì $(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{id}$ (identity: ánh xạ đồng nhất), hay $(f^{-1})'(y) \circ f'(x) = \mathrm{id}$ với $y = f(x)$. Tương tự do $(f \circ f^{-1})(y) = y$ nên $f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}$, hay $f'(x) \circ (f^{-1})'(y) = \mathrm{id}$. Hai điều này dẫn tới $(f^{-1})'(y)$ chính là ánh xạ ngược của $f'(x)$, do đó

$$J_{f^{-1}}(y) = (J_f(x))^{-1}. \tag{1.5.1}$$

Điều ngược lại là nội dung của một định lý rất quan trọng:

Định lý (định lý hàm ngược). *Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ mở và $f : D \to \mathbb{R}^n$ khả vi liên tục tại x. Nếu $f'(x)$ khả nghịch thì x có một lân cận mà trên đó f là một vi đồng phôi. Nói cách khác, nếu $\det(J_f(x)) \neq 0$ thì có một lân cận mở U của x và một lân cận mở V của $f(x)$ sao cho $f : U \to V$ là song ánh và $f^{-1} : V \to U$ là khả vi liên tục .*

Hệ quả. *Giả sử U và V là các tập mở của $\mathbb{R}^n$, và $f : U \to V$ là một song ánh khả vi liên tục. Nếu $\det J_f$ luôn khác không thì f là một vi đồng phôi.*

Hệ quả này cho thấy ta có thể kiểm tra tính vi đồng phôi mà không cần phải đi tìm đạo hàm của ánh xạ ngược. Điều này thuận tiện trong ứng dụng.

Công thức đổi biến cho vi phân và tích phân

Định lý (công thức đổi biến). *Công thức đổi biến*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det \varphi'| \tag{1.5.2}$$

được thỏa dưới những giả thiết: A là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một phép đổi biến từ A lên $\varphi(A)$, A và $\varphi(A)$ có thể tích, f và $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ khả tích [Spi65, tr. 65–67].

Có một cách viết hình thức dễ nhớ tương tự trường hợp một chiều như sau:
Đặt

$$x = \varphi(u)$$

thì

$$\boxed{dx = |\det \varphi'(u)|\, du.}$$

Nếu

$$x \in X \iff u \in U$$

thì

$$\boxed{\int_X f(x)\, dx = \int_U f(\varphi(u))|\det \varphi'(u)|\, du.}$$

Để tính toán, nhớ rằng

$$\det \varphi' = \det J_\varphi.$$

Nếu viết $x = x(u)$ và $\frac{\partial x}{\partial u} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)_{i,j}$ thì có thể viết một cách hình thức dễ nhớ công thức cho đổi biến của dạng vi phân:

$$dx = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| du.$$

Dấu trị tuyệt đối có thể được bỏ đi nếu ta biết dấu của $\det \varphi'$. Nếu $\det \varphi'$ luôn dương thì φ được gọi là một **vi đồng phôi bảo toàn định hướng** (orientation-preserving diffeomorphism). Nếu $\det \varphi'$ luôn âm thì φ được gọi là một **vi đồng phôi đảo ngược định hướng** (orientation-reversing diffeomorphism).

Như trường hợp một chiều, đổi biến có thể dùng để làm cho hàm dưới dấu tích phân, tức dạng vi phân, đơn giản hơn. Trong trường hợp nhiều chiều, đổi biến hay được dùng để làm cho miền lấy tích phân đơn giản hơn.

Ví dụ (đổi biến một chiều). Đây là phương pháp đổi biến trong tích phân cho hàm một biến quen thuộc. Thực vậy, cho $x = \varphi(t)$ với $t \in [a, b]$, ở đây φ liên tục và $\varphi : (a, b) \to \varphi((a, b))$ là một vi đồng phôi. Cho f khả tích trên $\varphi([a, b])$. Theo công thức đổi biến:

$$\int_{\varphi((a,b))} f(x)\, dx = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt.$$

Do $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ nên hoặc $\varphi'(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$ hoặc $\varphi'(t) < 0$, $\forall t \in (a, b)$. Vì vậy hoặc φ là hàm tăng hoặc φ là hàm giảm trên $[a, b]$.

Nếu φ là hàm tăng (bảo toàn định hướng) thì $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$. Do đó, dùng 1.3.8 để chuyển đổi giữa tích phân trên khoảng mở và tích phân trên khoảng đóng, ta được

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt &= \int_{[a,b]} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{(a,b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \\
&= \int_{(\varphi(a),\varphi(b))} f(x)\, dx = \int_{[\varphi(a),\varphi(b)]} f(x)\, dx \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Nếu φ là hàm giảm (đảo ngược định hướng) thì $\varphi([a, b]) = [\varphi(b), \varphi(a)]$ và $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$. Do đó

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt &= -\int_{(a,b)} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt \\
&= -\int_{(\varphi(b),\varphi(a))} f(x)\, dx \\
&= -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Trong cả hai trường hợp ta được công thức đổi biến cho tích phân hàm một biến:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Nếu ta giả sử hàm f liên tục thì trong Giải tích 1 công thức đổi biến được chứng minh bằng cách dùng công thức Newton–Leibniz và qui tắc đạo hàm hàm hợp, và chỉ cần hàm φ là trơn.

Ví dụ (đổi biến hai chiều). Với phép đổi biến $(u,v)\mapsto(x,y)$ người ta thường dùng kí hiệu

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

Với kí hiệu này công thức đổi biến có dạng như sau. Nếu phép đổi biến $(u,v)\mapsto(x,y)$ mang tập A thành tập B thì

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy=\iint_A f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv.$$

Một cách hình thức ta có thể viết:

$$\boxed{dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv.}$$

Chú ý rằng, do 1.5.1:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

Tọa độ cực

Một điểm $P=(x,y)$ trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ có thể được miêu tả bằng hai số thực (r,θ), với r là khoảng cách từ O tới P, và $0\le\theta\le 2\pi$ là góc từ vectơ $(1,0)$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OP}$. Vậy $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r\ge 0$, $0\le\theta\le 2\pi$.

Tuy nhiên tương ứng $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ này không là song ánh và không liên tục trên tia Ox. Vì vậy ta phải hạn chế miền xác định là mặt phẳng bỏ đi tia Ox. Khi đó ánh xạ ngược là

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\ge 0\}\\ (r,\theta) &\mapsto (x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta).\end{aligned}$$

Ta tính được $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta)=r>0$, vì vậy đây là một phép đổi biến. Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$\boxed{dxdy=r\,drd\theta.}$$

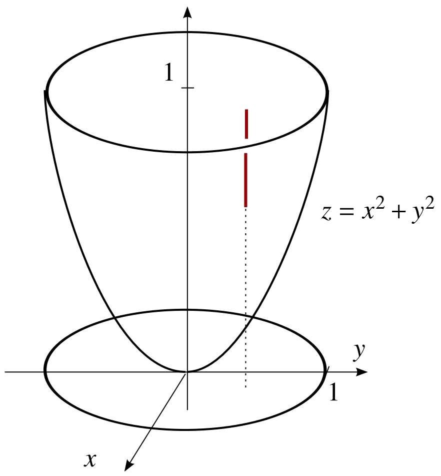
Ví dụ (tích phân trên hình tròn). Gọi $B'^2(O,R)$ là hình tròn đóng tâm O bán kính R. Để áp dụng công thức đổi biến ta dùng phép vi đồng phôi φ từ hình chữ nhật mở $(0,R)\times(0,2\pi)$ sang miền D là $B'^2(O,R)$ bỏ đi đường tròn biên và tia Ox. Giả sử f khả tích trên $B'^2(O,R)$. Tập bị bỏ đi có diện tích không, do đó nó không ảnh hưởng đến tích phân, theo 1.3.8, nên:

$$\begin{aligned}\iint_{B'^2(O,R)} f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x,y)\,dxdy&=\iint_{(0,R)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta\\ &=\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,drd\theta.\end{aligned}$$

Chẳng hạn diện tích của hình tròn là:

$$|B'^2(O,R)|=\iint_{B'^2(O,R)} 1\,dxdy=\int_0^R\int_0^{2\pi} 1\cdot r\,d\theta\,dr=\pi R^2.$$

Như vậy chú ý rằng với mục đích lấy tích phân thì để đơn giản ta thường lấy cận trong tọa độ cực là $r\ge 0$ và $0\le\theta\le 2\pi$.



Ví dụ. Cho E là khối được bao bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 1$. Tính $\iiint_E z\,dxdydz$.

"Bao" ở đây chỉ là một miêu tả trực quan, vì thế ta nên vẽ hình rồi từ đó đưa ra một miêu tả toán học, tức là miêu tả dưới dạng tập hợp.

Xem E là một khối đơn giản theo chiều trục z, nằm trên mặt $z = x^2 + y^2$, dưới mặt $z = 1$. Như vậy $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 1\}$. Chiếu khối E xuống mặt phẳng xOy ta được hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$. Áp dụng công thức Fubini:

$$\begin{aligned}
\iiint_E z\,dxdydz &= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{x^2+y^2}^{1} z\,dz\right) dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x^2+y^2}^{1} dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{2}\left(1-\left(x^2+y^2\right)^2\right) dxdy\\
&= \iint_{0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\left(r^2\right)^2\right) r\,drd\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(r-r^5)\,d\theta\right) dr = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Trong ví dụ này một điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ được miêu tả bằng cách dùng tọa độ cực (r, θ) để miêu tả (x, y). Người ta thường gọi hệ tọa độ (r, θ, z) là hệ **tọa độ trụ**.

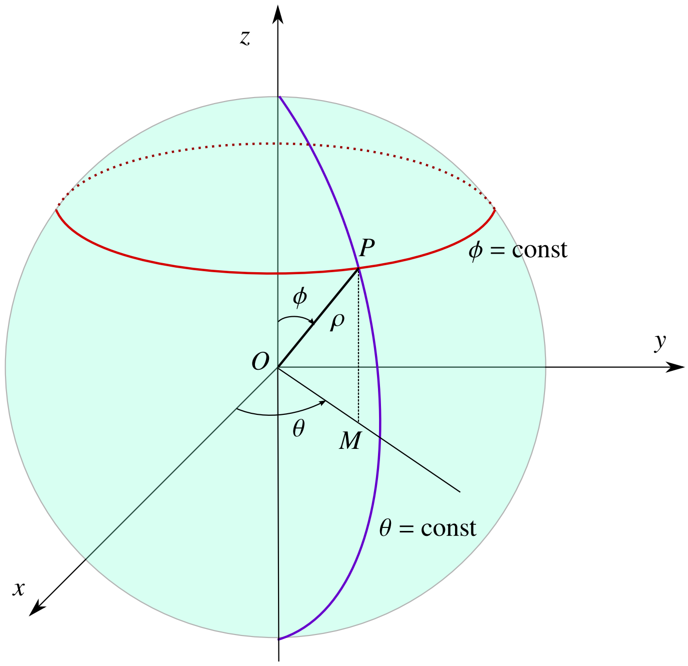
Tọa độ cầu

Một điểm $P = (x, y, z)$ trong $\mathbb{R}^3$ có thể được miêu tả bằng bộ ba số thực (ρ, ϕ, θ), với ρ là khoảng cách từ O tới P, ϕ là góc giữa vectơ $(0, 0, 1)$ (tia Oz) và vectơ $\overrightarrow{OP}$, và nếu gọi $M = (x, y, 0)$ là hình chiếu của điểm P xuống mặt phẳng Oxy thì θ là góc từ vectơ $(1, 0, 0)$ (tia Ox) tới vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Trong hình 1.5.3 ta tính được ngay $z = PM = \rho\cos\phi$, $OM = \rho\sin\phi$, $x = OM\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = OM\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta$. Tương tự như trường hợp tọa độ cực, để có một phép đổi biến thực sự ta phải hạn chế miền xác định bằng cách bỏ đi tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \ge 0\}$, tức một nửa của mặt phẳng xOz, ứng với $\rho = 0$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned}
\varphi : (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \ge 0\}\\
(\rho, \phi, \theta) &\mapsto (x, y, z) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)
\end{aligned}$$

là một song ánh, có $\det J_\varphi(\rho, \phi, \theta) = \rho^2\sin\phi > 0$. Vậy đây là một phép đổi biến. Cũng như trường hợp tọa độ cực, phần bị bỏ đi thường không ảnh hưởng tới tích phân nên ta thường không nhắc tới chi tiết kĩ thuật này.



Hình 1.5.3: ρ = const ứng với một mặt cầu. Trên mỗi mặt cầu các đường ϕ = const là các đường vĩ tuyến, các đường θ = const là các đường kinh tuyến, với $0 \leq \rho$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Bộ (ρ, ϕ, θ) đại diện cho (cao độ, vĩ độ, kinh độ) của một điểm trong không gian.

Một cách hình thức, có thể nhớ rằng

$$\boxed{dxdydz = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta.}$$

Có tài liệu dùng thứ tự trong tọa độ cầu là (ρ, θ, ϕ). Thứ tự tọa độ trong tọa độ cầu liên quan tới định hướng trên mặt cầu, tuy không ảnh hưởng tới tích phân bội nhưng sẽ ảnh hưởng tới tích phân mặt ở chương sau.

Ví dụ (thể tích quả cầu). Gọi $B^3(O,R)$ là quả cầu mở tâm O bán kính R trong $\mathbb{R}^3$. Thể tích của quả cầu này là:

$$|B^3(O,R)| = \iiint_{B^3(O,R)} 1 \, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Sau đây là một số ví dụ các phép đổi biến khác.

Ví dụ (diện tích hình bầu dục). Một hình bầu dục (e-líp, ellipse) D trong mặt phẳng là tập hợp các điểm thỏa

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1$$

trong đó $a, b > 0$. Viết lại công thức ở dạng

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 \leq 1,$$

ta thấy có thể làm phép đổi biến

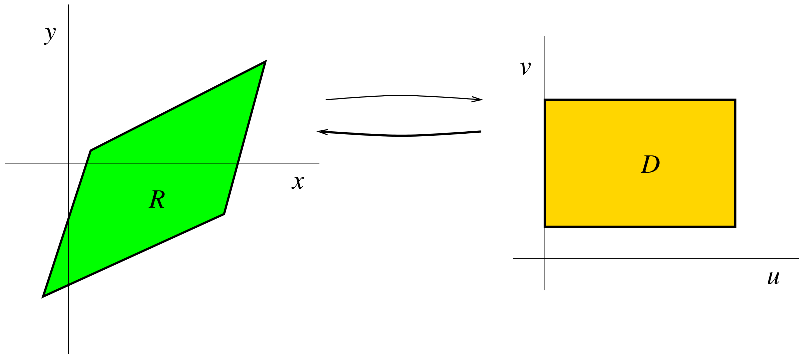
$$u = \frac{x-x_0}{a}$$
$$v = \frac{y-y_0}{b}.$$

Phép đổi biến này đưa hình bầu dục về hình tròn $u^2 + v^2 \leq 1$. Đây chẳng qua là một phép co dãn (vị tự) trục tọa độ biến hình bầu dục thành hình tròn hợp với phép tịnh tiến về gốc tọa độ. Ta tính được $dudv = \frac{1}{ab}dxdy$, từ đó

$$|D| = \iint_D 1\ dxdy = \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1 \cdot ab\ dudv = ab \iint_{u^2+v^2\leq 1} 1\ dudv = ab\pi.$$

Ví dụ. Tính $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\ dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, và $3x - y = 8$.

Đặt $u = x - 2y$ và $v = 3x - y$. Miền bao bởi các đường thẳng $u = 0$, $u = 4$, $v = 1$, và $v = 8$ là hình chữ nhật $D = [0,4] \times [1,8]$ trong mặt phẳng (u, v).



Vì

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$$

nên ánh xạ $(x, y) \mapsto (u, v)$ là một phép đổi biến từ phần trong của D sang phần trong của R. Biên của D và R không ảnh hưởng đến tích phân vì chúng có diện tích không và ta đang lấy tích phân hàm liên tục (xem 1.3.8).

Chú ý rằng

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{5}.$$

Công thức đổi biến cho:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\ dxdy &= \iint_D \frac{u}{v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\ dudv \\ &= \frac{1}{5}\iint_D \frac{u}{v}\ dudv = \frac{1}{5}\int_0^4 \left(\int_1^8 \frac{u}{v}\ dv\right)\ du = \frac{8}{5}\ln 8. \end{aligned}$$

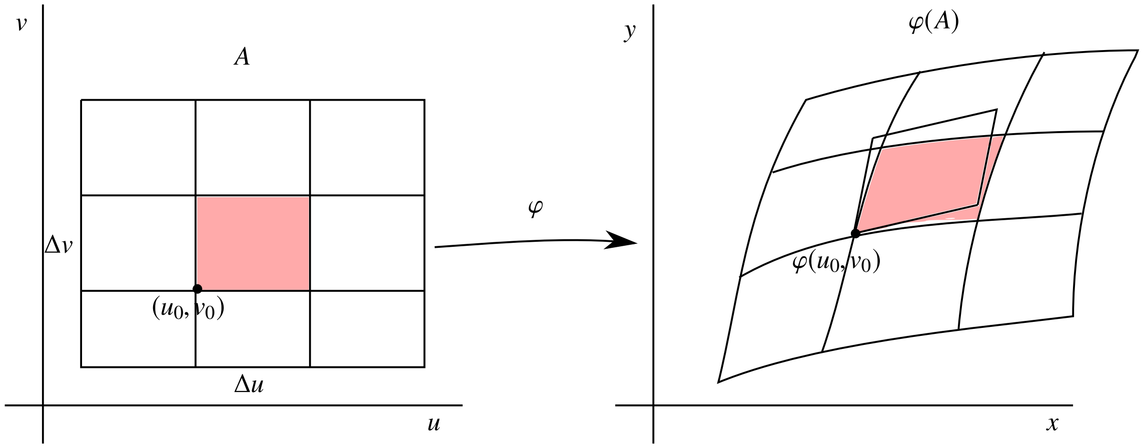
Giải thích công thức đổi biến

Chúng ta sẽ không chứng minh công thức đổi biến vì một chứng minh sẽ khó và dài vượt khỏi phạm vi môn học này. Các quyển sách [Lan97], [Rud76], [Spi65], [Mun91] có chứng minh công thức này dưới những giả thiết khác nhau. Ngày nay công thức đổi biến thường được chứng minh ở dạng tổng quát hơn thông qua tích phân Lebesgue.

Dưới đây chúng ta đưa ra một giải thích, tuy chưa phải là một chứng minh, nhưng sẽ giúp ta hiểu rõ hơn công thức (xem thêm [Ste12]).

Để cho đơn giản, xét trường hợp A là một hình chữ nhật. Ánh xạ φ mang miền A trên mặt phẳng (u, v) sang miền $\varphi(A)$ trên mặt phẳng (x, y).

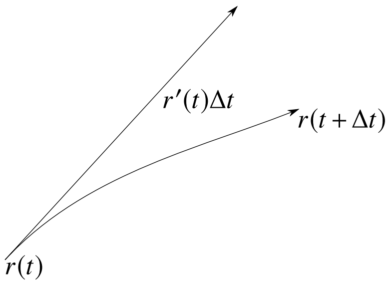
Xét một phép chia A thành những hình chữ nhật con. Ta xem tác động của φ lên một hình chữ nhật con đại diện $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$, có diện tích $\Delta u \Delta v$. Hàm trơn φ mang mỗi cạnh của



Hình 1.5.4: Minh họa công thức đổi biến.

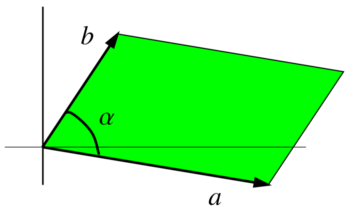
hình chữ nhật này thành một đoạn cong trên mặt phẳng (x, y), do đó ta được một "hình chữ nhật cong" trên mặt phẳng (x, y) với một đỉnh là điểm $\varphi(u_0, v_0)$.

Bây giờ ta tính diện tích hình chữ nhật cong này bằng cách xấp xỉ tuyến tính. Đoạn cong từ $\varphi(u_0, v_0)$ tới $\varphi(u_0 + \Delta u, v_0)$ sẽ được xấp xỉ tuyến tính bằng một đoạn thẳng tiếp tuyến tại $\varphi(u_0, v_0)$. Vì vectơ tiếp xúc chính là $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ nên đoạn tiếp tuyến này cho bởi vectơ $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$.



Hình 1.5.5: Xấp xỉ tuyến tính đường cong: $r(t + \Delta t) - r(t) \approx r'(t)\Delta t$.

Tương tự, đoạn cong $\varphi(u_0, v_0 + \Delta v)$ được xấp xỉ bởi vectơ tiếp xúc $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$. Vậy hình chữ nhật cong được xấp xỉ bởi hình bình hành sinh bởi hai vectơ tiếp xúc trên.



Vấn đề bây giờ là tính diện tích hình bình hành sinh bởi hai vectơ. Giả sử $a = (a_1, a_2)$ và $b = (b_1, b_2)$, diện tích của hình bình hành sinh bởi a và b là

$$\begin{aligned} |a||b|\sin\alpha &= \sqrt{|a|^2|b|^2(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{|a|^2|b|^2 - \langle a, b\rangle^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \\ &= |\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}| = |\det(a, b)|. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Ta vừa được một kết quả đáng chú ý, giải thích ý nghĩa hình học của định thức: giá trị tuyệt đối của định thức của ma trận chính là diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ cột của ma trận. Bản thân dấu của định thức cũng có thể được giải thích, nhưng ta gác việc này lại.

Người đọc kỹ tính có thể thắc mắc rằng công thức tính diện tích thông qua hàm sin ở trên chưa được thiết lập trong lý thuyết của chúng ta. Đây là một phản đối xác đáng. Lý luận trên chưa phải là một chứng minh mà chỉ cho thấy sự không mâu thuẫn với những kết quả đã biết. Xem thêm ở các bài tập 1.5.28, 1.5.29, 1.5.30, 1.5.31.

Trở lại công thức đổi biến, vậy diện tích của hình bình hành sinh bởi hai vectơ $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u$ và $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v$ là

$$\begin{aligned}\left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u, \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v\right)\right| &= \left|\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\right|\Delta u\Delta v\\ &= |\det J_\varphi(u_0,v_0)|\Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Điều này cũng giải thích sự xuất hiện của dấu trị tuyệt đối.

Bài tập

Một số bài tập tính toán có thể dùng máy tính và tính xấp xỉ.

1.5.7. Tính:

(a) Tính thể tích của khối được bao bởi mặt $z = 4 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng xOy.

(b) Tính thể tích của khối được bao bởi mặt $z = 9 - x^2 - y^2$, $y \le x$, trong góc phần tám thứ nhất (tức $x, y, z \ge 0$).

(c) Tính tích phân $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}$ trong đó D là miền được bao bởi hai đường cong $x^2 + y^2 = 4$ and $x^2 + y^2 = 9$.

(d) Tính tích phân $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$ trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 9$, đường thẳng $y = 0$ và $y = \sqrt{3}x$.

(e) Tính tích phân $\iint_D \frac{y^2}{x^2}\, dA$ trong đó D là miền trong góc phần tư thứ nhất bao bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, đường thẳng $y = 0$ và $y = x$.

(f) Tính tích phân $\iint_D x^2\, dA$ trong đó D là miền được bao bởi e-líp $3x^2 + 4y^2 = 8$.

(g) Tính tích phân $\iiint_E \cos\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\right]\, dV$ trong đó E là quả cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(h) Tính thể tích của khối được bao phía trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và được bao phía dưới bởi mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(i) Tìm thể tích của khối bị chặn trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và bị chặn dưới bởi mặt nón $z^2 = 3x^2 + 3y^2$, $z \ge 0$.

(j) Tìm thể tích của khối bị chặn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

(k) Tính thể tích của miền phía dưới mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ phía trên mặt phẳng $z = 1/\sqrt{2}$.

(l) Tính thể tích của khối bên dưới mặt $z = 4 - x^2 - y^2$ bên trên mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

(m) Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt $z = 9 - x^2 - y^2$, $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$.

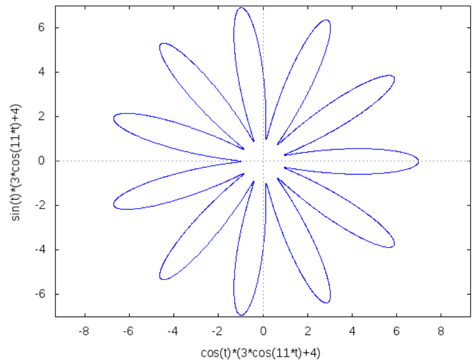
(n) Tính thể tích của khối được bao bởi các mặt $z = 3 - 2y$, $z = x^2 + y^2$.

(o) Tính tích phân $\iiint_E x\, dV$ trong đó E là khối được bao bởi hai mặt $z = 6 - x^2 - y^2$ và $z = x^2 + 3y^2$.

1.5.8. Tính thể tích của khối được miêu tả bởi điều kiện $x^2 + y^2 \le z^2 \le 3(x^2 + y^2)$, $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

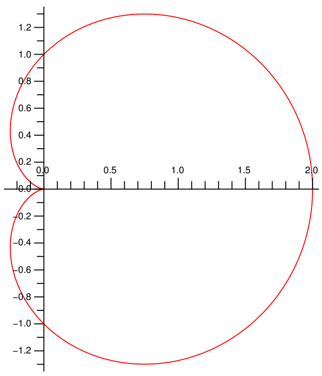
1.5.9. Tính:

(a) Tính diện tích của miền được bao bởi đường cong hình bông hoa $r = 4 + 3\cos(11\theta)$ (đây là đường trong mặt phẳng xy được cho bởi phương trình tham số $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ với r như trên).



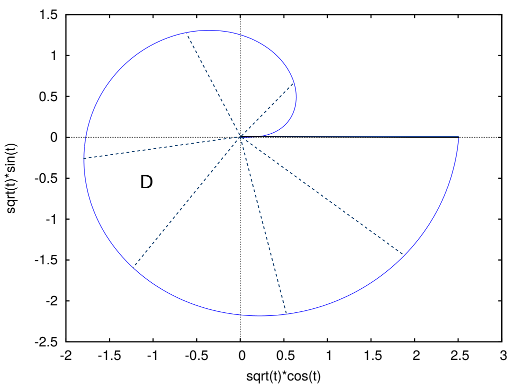
Hình 1.5.10: Đường $r = 4 + 3\cos(11\theta)$.

(b) Tính diện tích miền được bao bởi đường cong hình trái tim $r = 1 + \cos\theta$.



Hình 1.5.11: Đường $r = 1 + \cos\theta$.

(c) Đường cong trong mặt phẳng xy cho bởi phương trình $r = \sqrt{\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ cùng với tia Ox bao một miền D hình vỏ ốc được vẽ trong hình 1.5.12. Hãy tính tích phân $\iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$.



Hình 1.5.12: Đường $r = \sqrt{\theta}$.

1.5.13. Tính:

(a) Tính tích phân $\iint_R (x^2 + 2xy)\, dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y = 2x + 3$, $y = 2x + 1$, $y = 5 - x$, $y = 2 - x$.

(b) Tính tích phân $\iint_R (x+y)^2 \, dA$ trong đó R là hình bình hành bao bởi các đường thẳng $y=-x$, $y=-x+1$, $y=2x$, $y=2x-3$.

(c) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong $y^2=x$, $y^2=2x$, $y=1/x$, $y=2/x$.

(d) Tính diện tích của miền phẳng được bao bởi các đường cong $y^2=x$, $3y^2=x$, $y=x^2$, $y=2x^2$.

1.5.14. Xét khối bầu dục E được bao bởi mặt có phương trình $x^2+2y^2+3z^2=4$. Hãy tính thể tích của E bằng cách đổi biến để đưa về thể tích của quả cầu. Tìm công thức thể tích của khối bầu dục tổng quát.

1.5.15. Tìm diện tích của miền phẳng được bao bởi đường cong $x^2-2xy+2x+3y^2-2y=2$.

1.5.16. Gọi D là miền phẳng được xác định bởi $x^4+x^2+3y^4+y^2-2y \le 1$. Hãy tính tích phân $\iint_D x \, dxdy$. Hãy tổng quát hóa.

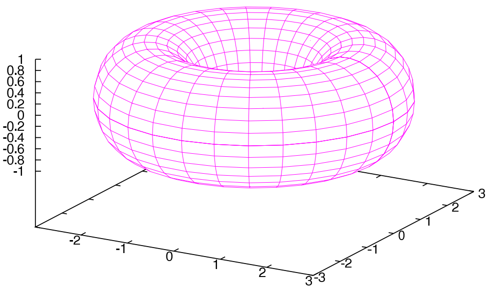
1.5.17. Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm $f(x)=x-x^3$ và trục x quanh trục y.

1.5.18. Dùng máy tính hãy vẽ mặt cầu mấp mô cho bởi phương trình trong tọa độ cầu $\rho = 1+\sin^2(3\theta)\sin^4(5\phi)$. Tính thể tích của khối bao bởi mặt này.

1.5.19. Hãy giải bài 1.4.18 (thể tích khối tròn xoay) bằng cách đổi biến.

1.5.20. Giải bài 1.4.20 bằng cách dùng công thức đổi biến.

1.5.21. Mặt xuyến (torus) có thể được miêu tả như là mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay quanh trục z một đường tròn trên mặt phẳng Oyz không cắt trục z. Hãy kiểm tra rằng mặt xuyến có phương trình dạng

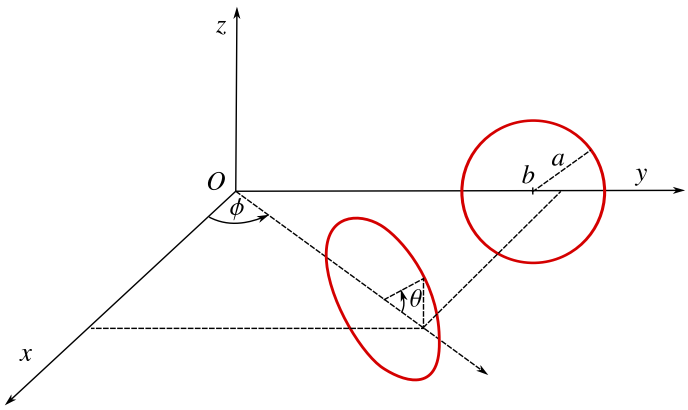


Hình 1.5.22: Mặt xuyến.

ẩn:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2,\ 0<a<b,$$

và dạng tham số: $((b+a\cos\theta)\cos\phi, (b+a\cos\theta)\sin\phi, a\sin\theta)$, $0\le\phi,\ \theta\le 2\pi$. (Hình 1.5.23.) Hãy tính thể



Hình 1.5.23:

tích của khối bao bởi mặt xuyến.

1.5.24 (thể tích của khối nón). Giả sử D là một miền trong mặt phẳng Oxy. Cho A là một điểm phía trên mặt phẳng Oxy trong $\mathbb{R}^3$. Tập hợp tất cả các điểm nằm trên các đoạn thẳng nối A với các điểm thuộc D được gọi là một **khối nón** hay khối chóp. Chẳng hạn một khối tứ diện là một khối nón. Miền D được gọi là đáy của khối nón, còn khoảng cách từ A tới mặt phẳng Oxy được gọi là chiều cao của khối nón. Hãy chứng tỏ nếu đáy có diện tích thì khối nón có thể tích, và **thể tích của khối nón đúng bằng một phần ba diện tích đáy nhân chiều cao**.

1.5.25 (thể tích quả cầu nhiều chiều). Tọa độ cầu trong $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, được cho bởi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1, && r>0,\ 0<\varphi_1<\pi\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, && 0<\varphi_2<\pi\\
&\vdots\\
x_i &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{i-1}\cos\varphi_i, && 0<\varphi_i<\pi\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, && 0<\varphi_{n-1}<2\pi\\
x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hãy dùng tọa độ cầu để kiểm công thức sau cho thể tích của quả cầu $B^n(R) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2\}$:

$$|B^n(R)| = \begin{cases} \dfrac{2(2\pi)^{(n-1)/2}}{1\cdot 3\cdots n}R^n, & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\ \dfrac{(2\pi)^{n/2}}{2\cdot 4\cdots n}R^n, & \text{nếu } n \text{ chẵn.}\end{cases}$$

1.5.26. Sau đây là một cách khác để tính thể tích quả cầu (xem chẳng hạn [Ang97], [Lan97, tr. 598]).

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \iint_{x_1^2+x_2^2\leq 1}\left(\int_{x_3^2+\cdots+x_n^2\leq 1-x_1^2-x_2^2} 1\right)\, dx_1 dx_2.$$

(c) Suy ra $|B^n(1)| = \frac{2\pi}{n}|B^{n-2}(1)|$. Từ đó tính $|B^n(R)|$.

1.5.27. Sau đây là một cách nữa để tính thể tích quả cầu.

(a) Dùng công thức đổi biến, chứng tỏ $|B^n(R)| = |B^n(1)|R^n$.

(b) Dùng công thức Fubini, chứng tỏ

$$|B^n(1)| = \int_{-1}^{1} |B^{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right)|\, dx_n.$$

(c) Đưa bài toán về việc tính tích phân $\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\, dt$. Từ đó tính $|B^n(R)|$.

1.5.28. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ một phép quay quanh gốc tọa độ một góc α có thể được miêu tả bằng 2 cách: Trong tọa độ cực, đó là ánh xạ $(r,\theta) \mapsto (r, \theta+\alpha)$. Tương ứng trong tọa độ Euclid đó là

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ một phép quay quanh gốc tọa độ mang một hình có diện tích thành một hình có cùng diện tích.

1.5.29 (phép dời hình bảo toàn thể tích). Một phép dời hình, còn gọi là một phép đẳng cấu hình học (isometry) trong $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa là một song ánh φ từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó bảo toàn khoảng cách, tức $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Một ma trận $n \times n$ là trực giao nếu các vectơ cột của nó tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Nói cách khác ma trận A là trực giao nếu $A^T A = I$ trong đó A^T là ma trận chuyển vị của A. Có thể chứng minh rằng bất kì một phép dời hình nào cũng có dạng $\varphi(x) = A \cdot x + b$ trong đó A là một ma trận $n \times n$ trực giao và $b \in \mathbb{R}^n$ (xem chẳng hạn [Mun91, tr. 173]). Ví dụ, trong mặt phẳng một phép dời hình bất kì là một hợp của các phép tịnh tiến, phép quay, và phép lấy đối xứng qua một đường thẳng.

Dùng công thức đổi biến, hãy chứng tỏ thể tích của một hình không thay đổi qua một phép dời hình.

1.5.30 (định thức bằng thể tích của hình bình hành). Áp dụng công thức đổi biến cho hình hộp $(0,1)^n$ và phép đổi biến tuyến tính T cho bởi $T(e_i) = v_i$, $1 \le i \le n$, hãy chứng tỏ rằng thể tích của hình bình hành sinh bởi n vectơ $v_1, \dots, v_n$ trong $\mathbb{R}^n$ bằng $|\det(v_1, \dots, v_n)|$.

Một chứng minh trực tiếp cho ý nghĩa này của định thức mà không dùng công thức đổi biến có ở [Lan97, tr. 584] hoặc [VuSto].

1.5.31 (góc giữa hai vectơ). Cho a và b là hai vectơ khác 0 trong không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ với tích trong Euclid. Ta định nghĩa góc giữa a và b là số thực $\alpha \in [0,\pi]$ sao cho

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{\|a\|\,\|b\|}.$$

Nếu góc giữa hai vectơ này là $\pi/2$, tức là nếu $a \cdot b = 0$, thì ta nói a và b vuông góc với nhau. Hình chiếu của a lên b được định nghĩa là vectơ

$$\|a\|\cos\alpha\frac{b}{\|b\|} = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2}b.$$

Các định nghĩa này tương thích với cách tiếp cận trong môn lượng giác ở trung học. (Lưu ý hàm cos có thể được định nghĩa trước khái niệm góc này, xem chẳng hạn ở [Spi94, tr. 300].)

Chứng tỏ, bằng cách dùng công thức đổi biến của tích phân, rằng diện tích của tam giác sinh bởi a và b bằng $\frac{1}{2}\|a\|\,\|b\|\sin\alpha$.

1.5.32. Hãy chứng minh công thức đổi biến cho trường hợp phép đổi biến là một phép tịnh tiến.

1.5.33. * Chứng tỏ từ công thức đổi biến (1.5.2) có thể suy ra, nếu phép đổi biến xác định trên cả $\mathbb{R}^n$ thì không cần yêu cầu tập A là mở (tất nhiên vẫn phải bị chặn).

1.6 Ứng dụng của tích phân bội

Tích phân là tổng, đó là ý nghĩa chính của tích phân. Vì vậy mỗi khi có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Tích phân còn có vai trò như phép biến đổi ngược của vi phân, cho phép chuyển một bài toán vi phân về một bài toán tích phân (ví dụ xem 2.7.1).

Về cơ bản, nếu tại mỗi điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng đó dĩ nhiên là $\sum_{i=1}^n f(x_i)$. Nếu tập hợp D các điểm đang xét là vô hạn thì hàm $f : D \to \mathbb{R}$ có khi được gọi là **hàm mật độ** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là $\int_D f$.

Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm x_i, $1 \le i \le n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$. Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử $f : D \to \mathbb{R}$, thì giá trị trung bình của f được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân: $\frac{1}{|D|}\int_D f$.

Ví dụ. Nhiệt độ tại điểm (x, y) trên mặt phẳng là $50e^{-x^2-y^2}$ (độ Celcius). Hãy tìm nhiệt độ trung bình trên đĩa tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ.

Gọi D là đĩa tròn $x^2 + y^2 \le 1$. Nhiệt độ trung bình trên D được cho bởi

$$\begin{aligned}\frac{1}{|D|}\iint_D 50e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} 50e^{-r^2} r\,d\theta\,dr \\ &= 50\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 31,6.\end{aligned}$$

Tâm khối lượng

Ta giới thiệu khái niệm tâm khối lượng (center of mass). Trong trường hợp hai chất điểm có khối lượng m_1 tại điểm p_1 và có khối lượng m_2 tại điểm p_2 thì tâm khối lượng của hệ hai điểm này, theo nguyên tắc đòn bẩy của vật lý, nằm tại điểm

$$\frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}.$$

Đối với hệ gồm n chất điểm, bằng qui nạp ta tìm được vị trí của tâm khối lượng là

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_ip_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

với tổng khối lượng là $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

Xét trường hợp khối lượng liên tục, giả sử ta có một khối vật chất chiếm phần không gian E trong $\mathbb{R}^3$. Tại mỗi điểm $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gọi $\rho(p)$ là mật độ khối lượng của khối tại p, đó là giới hạn của khối lượng trung bình quanh p, có thể hiểu là khối lượng tại điểm p. Khối lượng của khối chính là tích phân của mật độ khối lượng:

$$m = \int_E \rho.$$

Từ công thức của trường hợp rời rạc ở trên ta suy ra vị trí của tâm khối lượng trong trường hợp liên tục sẽ là

$$\frac{\int_E \rho p}{\int_E \rho} = \frac{\int_E \rho p}{m}.$$

Ở đây tích phân của hàm vectơ được hiểu là vectơ tích phân của từng thành phần. Cụ thể hơn, nếu $p = (x, y, z)$ thì tâm khối lượng nằm ở điểm $\frac{1}{m}(\int_E \rho x, \int_E \rho y, \int_E \rho z)$.

Ví dụ. Ta tìm tâm khối lượng của nửa hình tròn đồng chất. Gọi D là nửa trên của hình tròn tâm O bán kính R và gọi hằng số ρ là mật độ khối lượng của nó. Khối lượng của khối này là $m = \iint_D \rho\, dA = \rho\pi R^2/2$. Tọa độ của tâm khối lượng là

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m}\iint_D \rho x\, dxdy = 0, \\ y &= \frac{1}{m}\iint_D \rho y\, dxdy = \frac{\rho}{m}\int_0^R \int_0^\pi (r\sin\theta) r\, d\theta\, dr = \frac{4}{3\pi}R. \end{aligned}$$

Xác suất của sự kiện ngẫu nhiên

Một biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào $\mathbb{R}$. Trong trường hợp tập giá trị D của X là hữu hạn thì ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \le f(x) \le 1$ là xác suất để X có giá trị x, kí hiệu là $P(X = x)$. Hàm f được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X. Xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \sum_{x \in C} f(x).$$

Một hệ quả là $\sum_{x\in D} f(x) = P(X \in D) = 1$. Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (expected value) theo xác suất của X được cho bởi:

$$E(X) = \sum_{x\in D} x f(x).$$

Ví dụ. Xét một trò chơi với con xúc sắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là $f(10) = 5/6$ và $f(60) = 1/6$. Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất X. Ta có $E(X) = 10 \cdot \frac{5}{6} + 60 \cdot \frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$, như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi.

Trong trường hợp biến ngẫu nhiên liên tục, tập giá trị của biến ngẫu nhiên X là một tập con vô hạn D của $\mathbb{R}$. Tương tự với trường hợp rời rạc, có một hàm phân bố xác suất, hay mật độ xác suất (probability density function) $f : D \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \ge 0$ và xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$P(X \in C) = \int_C f.$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $P(X \in D) = \int_D f = 1$.

Trung bình hay kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X được cho bởi:

$$E(X) = \int_D x f.$$

Chú ý sự tương tự của công thức này với công thức của tâm khối lượng.

Ví dụ. Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \ge 0$ là thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất theo năm. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0,1e^{-0,1t}$. Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành sẽ là

$$P(0 \le T \le 2) = \int_0^2 0,1e^{-0,1t}\, dt \approx 18\%.$$

Trong trường hợp có n biến ngẫu nhiên thì tập giá trị của biến ngẫu nhiên là một tập con của $\mathbb{R}^n$, hàm phân bố xác suất sẽ là một hàm n biến, và các tích phân trên sẽ là tích phân bội.

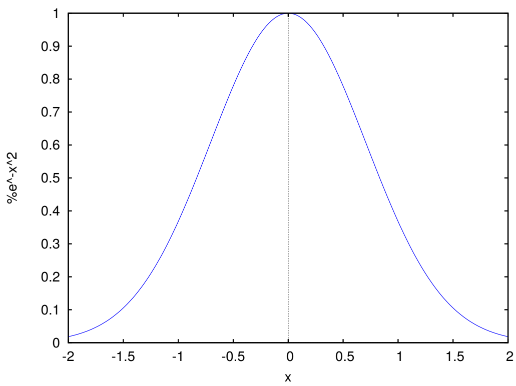
Ví dụ. Xét tình huống một chuyến xe buýt thường tới trạm trễ, nhưng không quá 10 phút, và đợi ở trạm 5 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ xe tới trạm, gọi là X, được cho bởi $f_1(x) = -0,02x + 0,2$, $0 \leq x \leq 10$. Một người thường đi xe buýt vào giờ này nhưng hay bị trễ, có khi tới 20 phút. Hàm mật độ xác suất của giờ người này tới trạm, gọi là Y, được cho bởi $f_2(y) = -0,005y + 0,1$, $0 \leq y \leq 20$. Hỏi xác suất để người này đón được chuyến xe buýt này là bao nhiêu?

Ở đây có hai biến xác suất độc lập nên hàm phân bố xác suất chung là $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Xác suất cần tìm được cho bởi

$$\begin{aligned} P(Y \leq X+5) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 10,\ y\leq x+5\}} f(x,y)\, dxdy \\ &= \int_0^{10}\int_0^{x+5} f(x,y)\, dy\, dx \approx 65\%. \end{aligned}$$

Tính $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$

Tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ rất quan trọng trong môn Xác suất (xem 1.6.11). Ở đây ta sẽ tính nó thông qua tích phân bội.



Hình 1.6.1: Đường cong e^{-x^2} thường được gọi là đường hình chuông.

Gọi $B'(R)$ là hình tròn đóng tâm 0 bán kính R, tức $B'(R) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$. Gọi $I(R)$ là hình vuông tâm 0 với chiều dài cạnh $2R$, tức $I(R) = [-R,R]\times[-R,R]$.

Vì $B'(R) \subset I(R) \subset B'(R\sqrt{2})$ nên

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA \leq \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA \leq \iint_{B'(R\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}\, dA.$$

Vì

$$\iint_{B'(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} re^{-r^2}\, dA = \pi(1-e^{-R^2}),$$

nên từ bất đẳng thức trên, lấy giới hạn ta được

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi.$$

Mặt khác theo công thức Fubini:

$$\iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\, dy\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)^2,$$

nên

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{I(R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

Vậy ta được công thức nổi tiếng:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.}$$

Bài tập

1.6.2. Tính:

(a) Tìm tâm khối lượng của hình chữ nhật đồng chất $[-1,1]\times[-2,2] \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Tìm tâm khối lượng của vật có hình dạng một miếng mỏng chiếm miền trên mặt phẳng bao bởi đường $y = 12,37x^2$ và đường $y = 8,5$ với hàm mật độ khối lượng $\rho(x,y) = 103,6x^4y^{1,2}$.

(c) Tìm tâm khối lượng của hình trái tim ở hình 1.5.11.

(d) Tìm tâm khối lượng của hình vỏ ốc ở hình 1.5.12.

(e) Chứng tỏ tâm khối lượng của một tam giác chính là trọng tâm (giao điểm của ba đường trung tuyến) của tam giác.

(f) Tìm tâm khối lượng của một khối đồng chất có dạng hình nón nhọn cân chiều cao là h và với đáy là hình tròn bán kính R.

(g) Tìm tâm khối lượng của khối tứ diện đồng chất được bao bởi các mặt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a,b,c > 0$.

1.6.3. Cho $D \subset \mathbb{R}^2$ là một tập đồng chất, có diện tích, đối xứng qua gốc tọa độ O tức là nếu $p \in D$ thì $-p \in D$. Hãy tìm tâm khối lượng của D. (Có thể giả sử D mở nếu muốn, tuy thực ra không cần, xem bài 1.5.33.)

1.6.4. Xét một mô hình đơn giản cho cấu trúc hành tinh Trái đất, gồm phần lõi cứng ở gần tâm có mật độ khối lượng cao và phần ngoài có mật độ khối lượng giảm dần từ trong ra ngoài. Gọi ρ là khoảng cách từ một điểm tới tâm, thì mật độ khối lượng tại điểm đó được mô hình hóa như sau:

$$f(\rho) = \begin{cases} 13\cdot 10^9, & 0 \le \rho \le 1000,\\ \frac{13\cdot 10^{12}}{\rho}, & 1000 \le \rho \le 6400,\end{cases}$$

ở đây đơn vị khối lượng là kg và đơn vị chiều dài là km. Hãy ước lượng khối lượng của Trái đất.

1.6.5. Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^n$ có tâm khối lượng ở p, chứng tỏ

$$\int_D (x-p)\, dV = 0.$$

Công thức trên có thể hiểu là tích phân của hàm vectơ, tức là với mọi $1 \le i \le n$ thì

$$\int_D (x_i - p_i)\, dV = 0.$$

1.6.6. Khu trung tâm thành phố được miêu tả như một hình chữ nhật $[0,1]\times[0,2]$ với đơn vị chiều dài là km. Giá đất trong khu vực này trong được mô hình hóa bằng hàm p, ở vị trí $(x,y) \in [0,1]\times[0,2]$ thì $p(x,y) = 200 - 10(x-\frac{1}{2})^2 - 15(y-1)^2$ (triệu đồng/m^2). Hãy tính giá đất trung bình ở khu vực này.

1.6.7. Giả sử rằng gốc tọa độ ở trung tâm thành phố và mật độ dân số tại điểm có tọa độ (x,y) có mô hình $p(x,y) = 2000(x^2+y^2)^{-0,2}$ người trên km^2, hãy tìm số dân trong bán kính 5 km từ trung tâm thành phố.

1.6.8. Một cái bồn có dạng hình hộp với chiều rộng 3 mét, chiều dài 4 mét, chiều cao 5 mét chứa đầy nước. Ta cần tính công W – năng lượng cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bồn qua mặt trên của bồn.

(a) Gọi x là khoảng cách từ một chất điểm trong bồn tới mặt trên của bồn. Giải thích vì sao công để đưa chất điểm này ra khỏi bồn là $x\rho g$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000$ kg/m^3, hằng số trọng lực là $g = 9,8$ m/s^2.

(b) Thiết lập công thức $W = \int_0^5 x\rho g \cdot 3 \cdot 4\, dx$. Tính W.

1.6.9. Kim tự tháp Vua Khufu là kim tự tháp lớn nhất ở Ai Cập, được xây dựng trong khoảng từ năm 2580 TCN tới 2560 TCN. Đáy của nó là một hình vuông với chiều dài cạnh là 230,4 mét và chiều cao là 146,5 mét.

(a) Hãy ước lượng thể tích của kim tự tháp.

(b) Kim tự tháp được làm bằng đá vôi. Mật độ khối lượng của đá vôi vào khoảng 2400 kg/m^3. Hãy ước lượng khối lượng của kim tự tháp.

(c) Hãy ước lượng công xây dựng kim tự tháp này. (Công này ít nhất bằng thế năng trọng trường của khối kim tự tháp.)

(d) Mỗi người nhận khoảng 2000 kcal năng lượng mỗi ngày từ thức ăn. Giả sử mỗi người dùng được 20% năng lượng đó để làm việc, 340 ngày một năm, trong 20 năm, thì cần ít nhất bao nhiêu người để xây dựng kim tự tháp này? (Giả sử họ không có máy móc, chưa kể những phần khác của công việc và những yếu tố khác, nên đây chỉ là một ước lượng thô.)

1.6.10. Hai công ty sản xuất hai sản phẩm cạnh tranh với nhau. Gọi X, Y là biến xác suất ứng với thời điểm hư hỏng của hai sản phẩm tính theo thời gian từ khi sản phẩm được sản xuất (theo năm), và giả sử hai biến này là độc lập với nhau. Giả sử các hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(x) = 0,2e^{-0,2x}$ và $g(y) = 0.1e^{-0,1y}$. Hãy tính xác suất sản phẩm của công ty thứ nhất bị hư trước sản phẩm của công ty thứ hai trong thời gian bảo hành 3 năm.

1.6.11. ✓ Chứng tỏ hàm được dùng trong mô hình phân bố chuẩn (normal distribution) của môn Xác suất

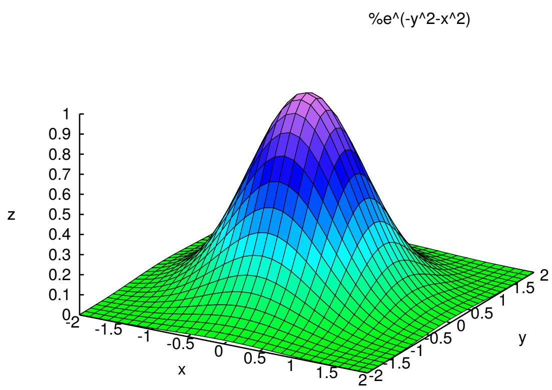
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

thỏa mãn tính chất cần có của hàm phân bố xác suất: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx=1$.

1.6.12. ✓ Hãy đưa ra một giải thích cho công thức sau, thường được dùng trong xác suất khi có hai biến ngẫu nhiên:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \pi.$$

Từ đó hãy đưa ra công thức cho mô hình phân bố chuẩn của hai biến ngẫu nhiên.



Hình 1.6.13: Hàm $e^{-(x^2+y^2)}$.

1.6.14 (hàm Gamma). Hàm Gamma là một mở rộng của hàm giai thừa lên tập hợp các số thực. Ta định nghĩa

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad z \in \mathbb{R},\ z > 0.$$

(a) Chứng tỏ $\Gamma(z)$ được xác định.

(b) Kiểm tra rằng $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Suy ra với số nguyên dương n thì $\Gamma(n+1) = n!$.

(c) Kiểm tra công thức $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(d) Chứng tỏ thể tích của quả cầu n-chiều bán kính R (xem 1.5.25) có thể được viết ngắn gọn là

$$|B^n(R)| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n.$$

1.6.15 (công thức Pappus). Hãy tìm lại công thức của Pappus[6]: Thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền phẳng quanh một trục bên ngoài bằng diện tích của miền nhân với chiều dài của đường đi của tâm khối lượng của miền.

Cụ thể hơn, gọi D là miền bao bởi hai đồ thị của hai hàm f và g trên đoạn $[a,b]$, với $0 \le g(x) \le f(x)$ trên $[a,b]$. Gọi (x_0, y_0) là tâm khối lượng của D. Khi đó thể tích của khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay miền D quanh trục x bằng $2\pi y_0 |D|$.

Ứng dụng, hãy tìm lại công thức thể tích của khối xuyến.

[6]Pappus xứ Alexandria, một nhà hình học sống vào thế kỉ thứ 4 sau Công nguyên.

1.7 * Thay thế tích phân Riemann bằng tích phân Lebesgue

Từ đầu môn học tới đây ta sử dụng tích phân Riemann, do Bernard Riemann xây dựng chặt chẽ vào giữa thế kỉ 19. Thực ra phép tích tích phân đã được sử dụng rộng rãi trước Riemann. Ý tưởng về cách tính thể tích bằng xấp xỉ rồi qua giới hạn đã có từ thời Archimedes hơn 200 năm trước Công nguyên.

Vào đầu thế kỉ 20 Henri Lebesgue đã xây dựng nên một tích phân mới trên $\mathbb{R}^n$ tổng quát hơn tích phân Riemann, theo nghĩa là hàm nào khả tích Riemann thì khả tích Lebesgue, và tích phân Lebesgue của hàm đó trùng với tích phân Riemann của hàm đó. Tích phân Lebesgue có những ưu điểm lớn so với tích phân Riemann, đặc biệt là với quá trình qua giới hạn.

Ngày nay lý thuyết tích phân được xây dựng không chỉ cho $\mathbb{R}^n$ mà cho tập bất kì được trang bị một độ đo. Độ đo và tích phân Lebesgue trở thành một trường hợp riêng của lý thuyết độ đo và tích phân tổng quát.

Trong môn học này chúng ta vẫn học tích phân Riemann vì nó đơn giản hơn, dễ hiểu hơn so với tích phân tổng quát. Trong các tính toán cho một số đối tượng thường gặp như trong môn này thì tích phân Riemann là đủ dùng.

Sẽ bổ ích nếu chúng ta điểm sơ qua tích phân Lebesgue, đặc biệt là vì các định lý chính của môn học của chúng ta như công thức đổi biến và công thức Fubini ngày nay thường được phát biểu và chứng minh một cách tổng quát hơn trong lý thuyết tích phân Lebesgue.

Độ đo Lebesgue

Có một họ đặc biệt M các tập con của $\mathbb{R}^n$ được gọi là họ các tập đo được Lebesgue. Họ này có một số tính chất sau:

- kín dưới phép hội, giao đếm được và phép lấy phần bù trong $\mathbb{R}^n$,
- chứa tất cả các tập mở và tập đóng của $\mathbb{R}^n$.

Có một hàm đặc biệt $\mu : M \to [0,\infty]$, được gọi là **độ đo Lebesgue** trên $\mathbb{R}^n$. Họ này có một số tính chất sau:

- độ đo Lebesgue cho phép giá trị ∞, ví dụ $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$,
- độ đo của một hình hộp $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ bằng $\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$,
- có tính cộng tính đếm được,
- tập có độ đo không như định nghĩa ở 1.2.7 chính là tập đo được Lebesgue có độ đo Lebesgue bằng 0,
- nếu một tập có thể tích Riemann thì nó đo được Lebesgue và thể tích Riemann của tập đó bằng với độ đo Lebesgue của nó.

Theo một nghĩa nhất định có duy nhất một đối tượng toán học với những tính chất như vậy, vì thế độ đo Lebesgue là phát triển phù hợp của khái niệm thể tích Riemann mà ta đã xét trong môn học này.

Hàm khả tích Lebesgue

Cho $\Omega \in M$ là một tập đo được Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$. Một hàm $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một hàm đo được nếu ảnh ngược của mỗi tập mở là một tập đo được Lebesgue.

Cho f là một hàm đo được không âm. Nếu trong tích phân Riemann ta xấp xỉ hàm bằng các hàm hằng trên từng hình hộp con thì giờ ta cũng làm như vậy, chỉ khác là ta thay hình hộp bằng tập đo được. Cụ thể ta xấp xỉ dưới bằng cách dùng những hàm thuộc tập S những hàm không âm đo được có hữu hạn giá trị, tức hàm bậc thang, có dạng

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{C_i}$$

với $C_i = s^{-1}(c_i)$. Giá trị của xấp xỉ này là $\int_\Omega s = \sum_{i=1}^k c_i \mu(C_i)$. Ta định nghĩa tích phân Lebesgue của f là

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\left\{\int_\Omega s \mid s \in S, s \le f\right\}.$$

Cho f là hàm đo được tùy ý. Đặt $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ và $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ thì $f = f^+ - f^-$ và ta định nghĩa

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Nếu tích phân là một số thực thì hàm được gọi là khả tích Lebesgue.

Tích phân Lebesgue có những tích chất như tích phân Riemann, như tính tuyến tính. Đặc biệt, một hàm khả tích Riemann thì khả tích Lebesgue và khi đó tích phân Riemann có cùng giá trị với tích phân Lebesgue.

Công thức Fubini và công thức đổi biến

Phát biểu công thức Fubini cho tích phân Lebesgue có đơn giản hơn một chút:

Định lý. *Cho f khả tích Lebesgue trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Khi đó*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

Sự đơn giản hơn này là do cách hiểu như sau: tích phân $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\, dy$ có thể không tồn tại với mọi x, nhưng có thể chứng minh được nó tồn tại hầu khắp.

Công thức đổi biến cũng được thỏa với giả thiết đơn giản hơn:

Định lý. *Giả sử A là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, φ là một vi đồng phôi từ A lên $\varphi(A)$, và $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ khả tích Lebesgue, thì $f \circ \varphi |\det \varphi'|$ khả tích Lebesgue trên A, và*

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)|\det \varphi'|.$$

Các định lý hội tụ

Tích phân Lebesgue có những tính chất quan trọng liên quan tới việc qua giới hạn mà tích phân Riemann không có. Điều này khiến tích phân Lebesgue có ưu thế trong các nghiên cứu lý thuyết. Dưới đây là một kết quả nổi bật:

Định lý (định lý hội tụ bị chặn). *Cho $(f_m)_m$ là một dãy hàm số đo được hội tụ từng điểm về một hàm f. Nếu dãy hàm $(f_m)_m$ bị chặn từng điểm bởi một hàm khả tích, tức là $\forall x, \forall m, |f_m(x)| \le g(x)$ với g khả tích, thì f khả tích và dãy các tích phân của f_m hội tụ về tích phân của f.*

Để tìm hiểu thêm có thể đọc các giáo trình về lý thuyết độ đo, các sách như [Rud76, Rud86, Ang97].

Chương 2 Giải tích vectơ

Trong chương trước chúng ta đã khảo sát thể tích của miền trong không gian n-chiều và tích phân trên những miền đó. Tuy nhiên những câu hỏi chẳng hạn như về chu vi của đường tròn, diện tích của mặt cầu, hay nói chung là độ đo của tập con "k-chiều" trong không gian n-chiều với $k < n$ và tích phân trên đó thì chúng ta chưa xét. Chương này sẽ trả lời những câu hỏi này cho trường hợp đường ($k = 1$) và mặt ($k = 2$).

2.1 Tích phân đường

Đường

Khi nói tới một "đường" ta thường nghĩ tới một "con đường", tức là một tập hợp điểm, ví dụ một đường thẳng hay một đường tròn. Mục đích của chúng ta trong chương này là thực hiện các đo đạc trên đường, chẳng hạn như đo chiều dài của đường. Các đo đạc đó sẽ được thực hiện qua một chuyến đi trên con đường. Tuy nhiên ta có thể đi trên một con đường theo nhiều cách khác nhau, và ta chưa có căn cứ để cho rằng các đo đạc bằng các cách đi khác nhau trên cùng một con đường sẽ cho ra cùng một kết quả. Do đó trước mắt chúng ta sẽ làm việc với từng cách đi cụ thể mà ta gọi là đường đi.

Một **đường đi** (path) là một ánh xạ từ một khoảng đóng $[a,b]$ vào $\mathbb{R}^n$ (một tương ứng mỗi thời điểm với một vị trí).

Tập hợp các điểm mà đường đi đã đi qua được gọi là **vết của đường đi** (trace) (đây là "con đường" như đã bàn ở trên). Với đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ thì vết của r tập ảnh $r([a,b]) = \{r(t) \mid t \in [a,b]\}$.

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là:

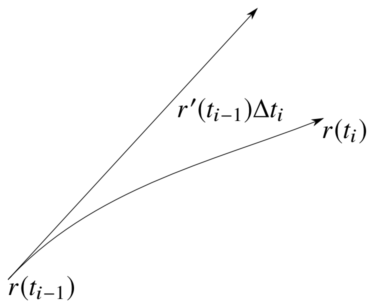
- **đóng** (closed) hay **kín** nếu $r(a) = r(b)$, tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- **đơn** (simple) nếu nó không đi qua điểm nào hai lần (không có điểm tự cắt). Chính xác hơn, nếu r không phải là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a,b]$; nếu r là đường đóng thì nó được gọi là đơn nếu r là đơn ánh trên $[a,b)$.
- **liên tục** nếu r là hàm liên tục trên $[a,b]$.

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **trơn** (smooth) nếu r là hàm trơn trên $[a,b]$, nghĩa là nếu r mở rộng được thành một hàm trơn trên một khoảng (c,d) chứa $[a,b]$. Điều này đồng nghĩa với việc r có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

Nếu r là một đường đi trơn thì đạo hàm $r'(t)$ có ý nghĩa vật lý là **vận tốc** chuyển động (velocity) tại thời điểm t. Độ lớn của vận tốc $\|r'(t)\|$ là **tốc độ** (speed) tại thời điểm t.

Chiều dài của đường đi

Cho đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a,b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le m$, ta xấp xỉ tuyến tính đường đi: $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Nói cách khác, ta xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều với vận tốc không đổi $r'(t_{i-1})$. Quãng đường đi được trong khoảng thời gian từ t_{i-1} tới t_i được xấp xỉ bởi vectơ $r'(t_{i-1})\Delta t_i$, với chiều dài là $\|r'(t_{i-1})\Delta t_i\|$.



Hình 2.1.1: Xấp xỉ tuyến tính: $r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})\Delta t_i$.

Như vậy "chiều dài" của đường đi được xấp xỉ bởi $\sum_{i=1}^{m} \|r'(t_{i-1})\| \Delta t_i$. Đây chính là tổng Riemann của hàm $\|r'(t)\|$ trên khoảng $[a,b]$.

Vậy ta đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa. Chiều dài của đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là

$$\int_a^b \|r'(t)\| \ dt.$$

Định nghĩa này chứa công thức đã quen biết: quãng đường đi được = tốc độ × thời gian.

Ví dụ. Giả sử một vật di chuyển trên một đường với tốc độ hằng v, trong khoảng thời gian từ a tới b. Khi đó quãng đường vật đã đi được có chiều dài là $\int_a^b v \ dt = v(b-a)$, đúng như ta chờ đợi.

Tích phân đường loại một

Cho đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Giả sử f là một hàm thực xác định trên vết của đường, tức $f : r([a,b]) \to \mathbb{R}$. Ta muốn tính **tổng giá trị của hàm trên đường**.

Ta làm một cách tương tự như đã làm khi định nghĩa chiều dài đường đi. Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. Trên khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$ ta xấp xỉ tuyến tính đường đi $r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Khi đó phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này ta xấp xỉ hàm f bởi hàm hằng với giá trị $f(r(t_{i-1}))$. Do đó tổng giá trị của f trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $f(r(t_{i-1}))\|r'(t_{i-1})\|\Delta t_i$. Tổng giá trị của f trên đường r được xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{m} f(r(t_{i-1}))\|r'(t_{i-1})\|\Delta t_i.$$

Vậy ta định nghĩa:

Định nghĩa. Cho f là một hàm xác định trên vết của đường $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Tích phân của f trên r được kí hiệu là $\int_r f \ ds$ và được định nghĩa là:

$$\boxed{\int_r f \ ds = \int_a^b f(r(t))\|r'(t)\| \ dt.}$$

Để có tích phân thì đường đi phải khả vi. Nếu đường đi chỉ **khả vi từng khúc**, tức là có các số $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$ sao cho trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$ ánh xạ r là khả vi, thì gọi r_i là hạn chế của đường r lên khoảng $[t_{i-1}, t_i]$, ta định nghĩa.

$$\int_r f \ ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{r_i} f \ ds.$$

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\int_r 1\ ds = \int_a^b \|r'(t)\|\ dt$ là chiều dài của đường đi r.

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $r(t) = (x(t), y(t))$, khi đó

$$\int_r f\ ds = \int_a^b f((x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt.}$$

Tích phân đường loại hai

Cho đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ và cho F là một trường vectơ xác định trên vết của r. Ta muốn tính **tổng thành phần của trường cùng chiều đường đi**.

Ví dụ. Trong vật lý, nếu một vật di chuyển theo một đường dưới tác động của một trường lực thì tổng tác động của lực, tức tổng thành phần của lực cùng chiều chuyển động, được gọi là **công** (work) của trường lực. Trong trường hợp đơn giản, nếu lực là hằng $\vec{F}$ và vật chuyển động đều trên một đường thẳng theo một vectơ $\vec{s}$ thì công của lực bằng $\left\|\vec{F}\right\| \cos(\vec{F}, \vec{s})\, \|\vec{s}\| = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le m$, ta xấp xỉ đường bằng xấp xỉ tuyến tính: $r(t) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1})$. Khi đó phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Trên phần đường này trường F có thể được xấp xỉ bằng trường hằng, đại diện bởi vectơ $F(r(t_{i-1}))$. Tổng của thành phần cùng chiều đường đi của trường F trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng $F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$. Tổng thành phần tiếp tuyến của F dọc theo r được xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^m F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i$.

Vậy ta định nghĩa:

Định nghĩa. Cho F là một trường vectơ trên vết của một đường đi $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Tích phân của F trên r được kí hiệu là $\int_r F \cdot d\vec{s}$ và được định nghĩa là:

$$\boxed{\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\ dt.}$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một.

Ghi chú. Có một số cách kí hiệu khác cho tích phân đường loại hai, chẳng hạn $\int_r F \cdot d\vec{r}$, $\int_r F \cdot d\vec{l}$.

Ví dụ. Xét trường hợp hai chiều, $n = 2$. Viết $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ và $r(t) = (x(t), y(t))$. Khi đó

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\ dt.$$

Ta đưa ra hai tích phân mới:

$$\boxed{\int_r P(x, y)\ dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\ dt.}$$

$$\boxed{\int_r Q(x, y)\ dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\ dt.}$$

Người ta thường viết

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_r P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy.$$

Một cách hình thức có thể nhớ rằng

$$\boxed{d\vec{s} = r'(t)\ dt, \quad dx = x'(t)\ dt, \quad dy = y'(t)\ dt.}$$

Đổi biến và sự phụ thuộc vào đường đi

Như đã bàn ở đầu chương, ta rất quan tâm tới việc các kết quả đo đạc có thay đổi hay không nếu ta đi theo những đường đi khác nhau trên cùng một con đường.

Cho $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ là một phép vi đồng phôi, tức một phép đổi biến. Nếu $\varphi'(t) > 0$ với mọi $t \in [c,d]$ thì ta nói φ **bảo toàn định hướng** (orientation-preserving). Nếu $\varphi'(t) < 0$ với mọi $t \in [c,d]$ thì ta nói φ **đảo ngược định hướng** (orientation-reversing).

Nếu $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ là một đường đi thì $r \circ \varphi$ là một đường đi cùng vết với r. Ta nói $r \circ \varphi$ và r sai khác một phép đổi biến. Ta có kết quả đơn giản sau đây về sự bất biến của tích phân đường qua một phép đổi biến.

2.1.2 Định lý (đổi biến trong tích phân đường). *(a) Tích phân đường loại một không thay đổi qua phép đổi biến.*

(b) Tích phân đường loại hai không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng và đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Chứng minh. Cho f là một hàm thực và F là một trường vectơ xác định trên vết của đường $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Cho $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ là một phép đổi biến. Ta xét trường hợp φ đảo ngược định hướng, trường hợp còn lại là tương tự. Theo công thức đổi biến của tích phân bội, với phép đổi biến $u = \varphi(t)$ thì

$$\begin{aligned}
\int_r f\, ds = \int_a^b f(r(u))|r'(u)|\, du &= \int_c^d f(r(\varphi(t)))|r'(\varphi(t))||\varphi'(t)|\, dt \\
&= \int_c^d f(r(\varphi(t)))|r'(\varphi(t))\varphi'(t)|\, dt \\
&= \int_c^d f(r\circ\varphi(t))|(r\circ\varphi)'(t)|\, dt \\
&= \int_{r\circ\varphi} f\, ds.
\end{aligned}$$

Trong khi đó

$$\begin{aligned}
\int_r F\cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(u))\cdot r'(u)\, du &= \int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]|\varphi'(t)|\, dt \\
&= -\int_c^d [F(r(\varphi(t)))\cdot r'(\varphi(t))]\varphi'(t)\, dt \\
&= -\int_c^d F(r\circ\varphi(t))\cdot (r\circ\varphi)'(t)\, dt \\
&= -\int_{r\circ\varphi} F\cdot d\vec{s}.
\end{aligned}$$

□

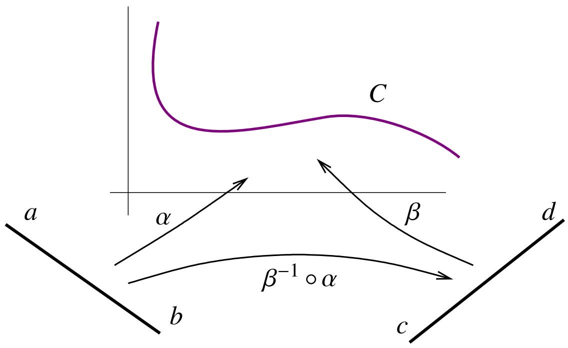
Ví dụ. Cả hai loại tích phân đường không thay đổi dưới một phép tịnh tiến của biến thời gian $t \mapsto t + c$ với $c \in \mathbb{R}$.

Ví dụ. Với đường đi $r(t)$, $t \in [a,b]$ thì đường $r(a+b-t)$, $t \in [a,b]$, khởi đầu ở $r(b)$ và kết thúc ở $r(a)$, được gọi là **đường ngược** của đường r, kí hiệu là $-r$. Ta nói đường $-r$ trái chiều với đường r. Định lý 2.1.2 nói **nếu đảo ngược định hướng của đường thì tích phân đường loại một không thay đổi trong khi đó tích phân đường loại hai bị đổi dấu.**

Đường đi $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **chính qui** (regular) nếu r trơn trên $[a,b]$ và vận tốc $r'(t)$ luôn khác không.

Ghi chú. Trong quyển sách của Stewart [Ste12] thuật ngữ đường trơn chính là thuật ngữ đường chính qui ở đây.

2.1.3 Bổ đề. *Giả sử $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ và $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ là hai đường đi đơn chính qui với cùng vết.*
(a) Nếu α và β không đóng thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a,b) \to (c,d)$ là một vi đồng phôi.
(b) Nếu α và β đóng, [1] *đặt $\beta(t_1) = \alpha(a)$ và $\alpha(s_1) = \beta(c)$, thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a,b) \setminus \{s_1\} \to (c,d) \setminus \{t_1\}$ là một vi đồng phôi.*



Chú ý rằng $\alpha = \beta \circ (\beta^{-1} \circ \alpha)$, mệnh đề nói rằng hai đường đi đơn chính qui với cùng vết khác biệt bởi một phép đổi biến. Mệnh đề sẽ được chứng minh ở phần sau. Từ mệnh đề này ta đưa ra định nghĩa về định hướng:

Định nghĩa (định hướng). Ta nói hai đường đi đơn chính qui có cùng vết α và β là **có cùng định hướng** nếu phép vi đồng phôi $\beta^{-1} \circ \alpha$ có đạo hàm luôn dương. Ngược lại nếu $\beta^{-1} \circ \alpha$ có đạo hàm luôn âm thì ta nói α và β là **trái định hướng**.

Từ bổ đề 2.1.3 và định lý 2.1.2 ta có kết quả chính của phần này:

2.1.4 Định lý (tích phân trên đường cong). *(a) Tích phân đường loại một dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết thì bằng nhau.*

(b) Tích phân đường loại hai dọc theo hai đường đi đơn chính qui có cùng vết thì bằng nhau nếu cùng định hướng và đối nhau nếu trái định hướng.

Như vậy ta có thể nói đến tích phân đường loại một (chẳng hạn chiều dài) trên một **tập điểm**, ví dụ như một đường tròn, một đồ thị, … nếu tập điểm ấy là vết của một đường đi đơn chính qui nào đó. Trong trường hợp này ta nói vết đó là một **đường cong** (curve).

Để tính tích phân trên một đường cong ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui bất kì để thực hiện tính toán. Đối với tích phân đường loại hai thì ta được cho thêm một "định hướng" trên đường cong và ta có thể chọn một đường đi đơn chính qui có cùng định hướng bất kì để tính.

Ví dụ. Giả sử hàm thực f xác định trên khoảng $[a,b]$. Gọi γ là một đường chính qui bất kì đi từ a tới b. Vì khoảng $[a,b]$ cũng là vết của đường đơn chính qui $\alpha(t) = t$ với $t \in [a,b]$ nên

$$\int_\gamma f\, ds = \int_\alpha f\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Đây chính là tích phân của hàm f trên khoảng $[a,b]$. Vậy tích phân của hàm thực trên khoảng là một trường hợp riêng của tích phân đường loại một.

[1] Không còn khả năng khác, vì nếu α đóng thì β cũng phải đóng. Điều này đưa về việc một đường tròn thì không thể đồng phôi với một đoạn thẳng, một kết quả trong môn Tôpô.

Ví dụ (chiều dài của đường tròn). Xét đường đi $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, một đường đi với tốc độ hằng quanh đường tròn tâm O bán kính R. Chiều dài của đường này là $\int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$. Nếu ta lấy một đường đi khác $\alpha(t) = (R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t))$, $0 \le t \le 1$, thì chiều dài của đường này là $\int_0^1 2\pi R\, dt = 2\pi R$.

Bây giờ ta có thể nói chiều dài của đường tròn bằng $2\pi R$, không phụ thuộc vào cách chọn một tham số hóa đơn chính qui để tính. (Chúng ta không nói là đã tìm ra công thức chiều dài của đường tròn, vì khi đưa ra tham số hóa chúng ta đã thừa nhận những tính chất nhất định về đường tròn, trong đó có thừa nhận số π, góc t, hàm cos và hàm sin.)

Ví dụ. Cho trường $\vec{F}(x,y) = (2y, -3x)$ và C là đường cong $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, định hướng từ $(0,0)$ tới $(1,1)$. Hãy tính $I = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s}$.

Ta cần đưa ra một tham số hóa cho đường cong C. Vì C là một đồ thị, ta có ngay tham số hóa $C_1(x) = (x, x^2)$, $0 \le x \le 1$. Ta cũng có thể dùng các tham số hóa khác như $C_2(y) = (\sqrt{y}, y)$, $0 \le y \le 1$, hoặc $C_3(t) = (\ln t, \ln^2 t)$, $1 \le t \le e$. Đây đều là các đường đi đơn, chính qui với vết C, theo định hướng đã cho. Với C_1:

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_1(x))\cdot C_1'(x)\, dx = \int_0^1 (2x^2, -3x)\cdot(1, 2x)\, dx = -\frac{4}{3}.$$

Với C_2:

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(C_2(y))\cdot C_2'(y)\, dy = \int_0^1 (2y, -3\sqrt{y})\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}, 1\right) dy = -\frac{4}{3}.$$

Với C_3:

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_1^e \vec{F}(C_3(t))\cdot C_3'(t)\, dt = \int_1^e (2\ln^2 t, -3\ln t)\cdot\left(\frac{1}{t}, \frac{2\ln t}{t}\right) dt \\ &= \int_1^e -4\frac{\ln^2 t}{t}\, dt = -\frac{4}{3}\ln^3 t|_1^e = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Liên hệ giữa hai loại tích phân đường

Nếu α và β là hai đường đi đơn chính qui cùng định hướng ứng với đường cong C thì theo 2.1.3 ta có $\alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ trong đó $\varphi'(t) > 0$ với $a < t < b$ (trong trường hợp đường đóng ta giả sử hai đường có cùng điểm đầu và điểm cuối). Vì $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$ nên hai vectơ $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương cùng hướng. Từ đó ta đưa ra định nghĩa **hướng tiếp tuyến** của đường cong được định hướng C, vết của một đường đi đơn chính qui $r(t)$ theo hướng đã cho, $a \le t \le b$, tại điểm $p = r(t)$, $a < t < b$, là hướng của vectơ vận tốc $r'(t)$. Hướng tiếp tuyến tại một điểm trên đường cong được định hướng không phụ thuộc vào cách chọn đường đi đơn chính qui trên đó. Vì vậy **việc định hướng cho đường cong đồng nghĩa với việc chọn hướng tiếp tuyến**.

Tại điểm $p = r(t)$ **vectơ tiếp tuyến cùng chiều đơn vị** được định nghĩa, đó là $T(p) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$, không phụ thuộc vào cách chọn đường đi r theo định hướng của C.

Nếu F là một trường vectơ trên C thì

$$\begin{aligned}\int_C F\cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \left[F(r(t))\cdot\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}\right] |r'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b [F(r(t))\cdot T(r(t))]\, |r'(t)|\, dt = \int_C F\cdot T\, ds.\end{aligned}$$

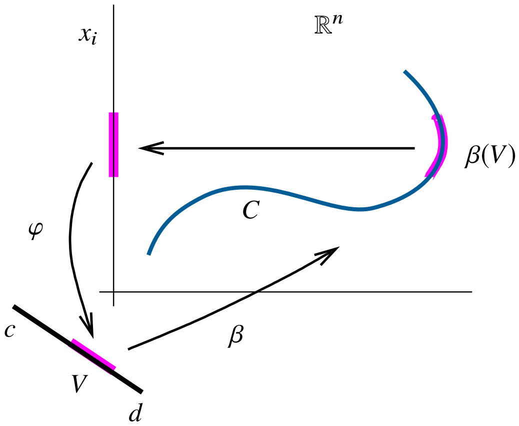
Vậy trong trường hợp này tích phân đường loại hai có thể được biểu diễn qua tích phân đường loại một. Biểu thức trên cũng khẳng định lại ý nghĩa của tích phân loại hai, đó là tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường.

* Chứng minh bổ đề 2.1.3

Chứng minh này chứa những kĩ thuật hữu ích mà ta sẽ sử dụng lại sau này.

Chứng minh 2.1.3. Ta viết chứng minh cho trường hợp đường đi không đóng; trường hợp đường đóng cũng giống như vậy. Trên (a,b) thì $\beta^{-1}\circ\alpha$ đã là một song ánh (xem thêm 2.1.15). Cái chính cần được kiểm tra đó là việc $\beta^{-1}\circ\alpha$ là hàm trơn (việc $\alpha\circ\beta^{-1}$ trơn là tương tự). Viết $\beta(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$. Xét điểm $\beta(t_0)$ với $t_0\in(c,d)$. Do $\beta'(t_0) = (x_1'(t_0),\ldots,x_n'(t_0)) \neq 0$ nên có chỉ số i sao cho $x_i'(t_0)\neq 0$. Áp dụng định lý hàm ngược cho hàm x_i, có một khoảng mở $V\subset(c,d)$ chứa t_0 trên đó hàm x_i là một vi đồng phôi. Do đó x_i có hàm ngược trơn $\varphi : x_i(V)\to V$, $\varphi(x_i) = t$. Suy ra với $t\in V$ thì

$$\beta(t) = (x_1(\varphi(x_i)),\ldots,x_{i-1}(\varphi(x_i)),x_i,x_{i+1}(\varphi(x_i)),\ldots,x_n(\varphi(x_i))).$$



Như vậy $\beta(V)$ là đồ thị của một hàm theo biến x_i và trên $\beta(V)$ thì ánh xạ ngược β^{-1} trùng với hợp của ánh xạ chiếu xuống tọa độ thứ i và ánh xạ φ:

$$\begin{array}{ccccc} \beta(V) & \xrightarrow{p_i} & x_i(V) & \xrightarrow{\varphi} & V \\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \mapsto & x_i & \mapsto & t. \end{array}$$

Do đó trên $\alpha^{-1}(\beta(V))$ thì $\beta^{-1}\circ\alpha = (\varphi\circ p_i)\circ\alpha$.

Điểm mấu chốt còn lại là kiểm tra rằng $\alpha^{-1}(\beta(V))$ là một tập mở trong (a,b). Do α và β là song ánh nên $[a,b]\setminus\alpha^{-1}(\beta(V)) = \alpha^{-1}(\beta([c,d]\setminus V))$. Vì $[c,d]\setminus V$ là tập đóng bị chặn của $\mathbb{R}$ nên nó compắc, do đó tập $\beta([c,d]\setminus V)$ là compắc, nên đóng trong $\mathbb{R}^n$, dẫn tới $\alpha^{-1}(\beta([c,d]\setminus V))$ là đóng trong $[a,b]$. Vậy $\alpha^{-1}(\beta(V))$ phải là một tập mở trong $[a,b]$, và vì nó không chứa a hay b nên nó là tập mở trong (a,b). □

Bài tập

2.1.5. Tính:

(a) Chiều dài của đường $r(t) = (2\sqrt{2}t, e^{-2t}, e^{2t})$, $0\le t\le 1$.

(b) Tìm khối lượng của sợi dây hình parabol $y = x^2$, $1\le x\le 2$, với mật độ khối lượng $\rho(x,y) = y/x$.

(c) $\int_C \sin z^2\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz$, với C là đường $(2,t,e^t)$, $0\le t\le 1$.

(d) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, với $\vec{F}(x,y,z) = (\sin z, z, -xy)$ và C là đường $(\cos\theta,\sin\theta,\theta)$, $0\le\theta\le 9\pi/4$.

(e) Tìm công của trường $\vec{F}(x,y,z) = (y-x^2, z^2+x, yz)$ trên đường (t,t^2,t^3), $0\le t\le 1$.

2.1.6. Cho trường $F(x,y) = \left(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}\right)$. Tính tích phân đường của trường này dọc theo một đường đi từ điểm $(0,0)$ tới điểm $(1,1)$ bằng các cách sau:

(a) dùng đường thẳng,

(b) dùng đường gấp khúc,

(c) dùng đường khác.

2.1.7. (a) Một vật di chuyển trong trường trọng lực của Quả đất từ một điểm có cao độ 100 mét đến một điểm có cao độ 200 mét. Hỏi công của trọng lực là âm, bằng không, hay dương?

(b) Cho C là một đường và n là vectơ pháp tuyến. Hỏi $\int_C n \cdot d\vec{s}$ là âm, bằng không, hay dương?

2.1.8. Phân tử DNA trong không gian ba chiều có hình dạng đường xoắn ốc kép, mỗi đường có thể được mô hình hóa bởi đường $(R\sin t, R\cos t, ht)$ (hãy vẽ đường này). Bán kính của mỗi đường xoắn ốc khoảng 10 angstrom (1 angstrom = 10^{-8} cm). Mỗi đường xoắn ốc xoắn lên khoảng 34 angstrom sau mỗi vòng xoay. Hãy ước tính chiều dài của mỗi vòng xoay của phân tử DNA.

2.1.9. Một sợi dây với hai đầu cố định dưới tác động của trọng trường sẽ có hình dạng một đường xích (catenary) với phương trình $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, với cosh là hàm hyperbolic cosine cho bởi $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

Đài tưởng niệm Gateway Arch ở Saint Louis nước Mỹ có dạng một đường xích đảo ngược. Vị trí điểm tâm hình học (cũng là tâm khối lượng của mặt cắt vuông góc) (centroid) của cổng được thiết kế theo công thức $y = 693,8597 - 68,7672\cosh 0,0100333x$ với y là khoảng cách tới mặt đất và $-299,2239 \leq x \leq 299,2239$, đơn vị đo là feet.

(a) Hãy tính chiều dài của đường tâm hình học.

(b) Mỗi mặt cắt vuông góc với đường tâm hình học là một tam giác đều chỉ xuống đất. Diện tích của mặt cắt này là $125,1406\cosh 0,0100333x$. Dùng bài 2.1.14, hãy tính thể tích của Gateway Arch.

2.1.10. Cầu Akashi-Kaikyo ở Nhật Bản hiện là một trong những cây cầu treo dài nhất thế giới. Hai tháp cao 297m tính từ mặt biển. Chiều dài nhịp chính (khoảng cách giữa hai tháp) là 1991m. Mỗi sợi cáp chính có dạng một đường parabola. Điểm thấp nhất của sợi cáp chính cách mặt biển khoảng 97m. Hãy tính chiều dài của một sợi cáp chính, bằng tính chính xác hoặc tính xấp xỉ.

2.1.11. Khi nào thì chiều dài của một đường đi bằng 0?

2.1.12. Cho đường đi chính qui $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Đặt

$$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| \, du.$$

Hàm s được gọi là **hàm chiều dài** (arc-length function) của r. Đặt chiều dài của r là $l = s(b)$.

(a) Chứng tỏ hàm $s(t)$ có hàm ngược trơn. Gọi hàm đó là $t(s)$, $0 \leq s \leq l$.

(b) Kiểm tra rằng đường $\alpha(s) = r(t(s))$ có cùng vết với đường r. Chứng tỏ tốc độ của α luôn là 1.

Việc thay r bởi α được gọi là **tham số hóa lại theo chiều dài** (reparametrization by arc-length). Chú ý rằng $\frac{ds}{dt}(t) = \|r'(t)\|$. Điều này thường được viết dưới dạng kí hiệu là $ds = \|r'(t)\|\,dt$.

2.1.13 (độ cong của đường cong). Giả sử đường γ trong $\mathbb{R}^3$ được tham số hóa theo chiều dài có vết C. **Độ cong** của đường (curvature) là tốc độ biến thiên của phương chuyển động, được cho bởi $k = |\gamma''|$.

(a) Chứng tỏ độ cong của một đường tròn bán kính R đúng bằng $\frac{1}{R}$ tại mọi điểm.

(b) Đặt $T = \gamma'$ thì T là vectơ tiếp xúc đơn vị của γ. Chứng tỏ $T' \perp T$.

(c) Giả sử với mọi s thì $T'(s) = \gamma''(s) = k(s) \neq 0$. Đặt $N = T'/|T'|$ thì N là một vectơ pháp tuyến (normal) đơn vị của C. Đặt $B = T \times N$. Chứng tỏ tại mỗi điểm trên đường cong thì bộ ba $\{T, N, B\}$ là một cơ sở tuyến tính trực chuẩn cho $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ $T' = kN$.

2.1.14 (thể tích của khối ống). * Xét một khối ống là một tập $E \subset \mathbb{R}^3$ với đường γ là đường tâm khối lượng, tức là mỗi mặt cắt D_p của E vuông góc với đường γ tại điểm p nhận điểm p làm tâm khối lượng. Ta tìm công thức tích thể tích của E.

(a) Ta sẽ dùng công thức đổi biến của tích phân để đưa về trường hợp tâm nằm trên đường thẳng. Giả sử γ được tham số hóa theo chiều dài, và có gia tốc luôn khác không. Đặt $T = \gamma'$, $N = T'/|T'|$ và $B = T \times N$. Xét phép đổi biến $(u, v, s) \mapsto \gamma(s) + uN + vB$. Tính định thức của ma trận Jacobi của phép đổi biến này.

(b) Chứng minh rằng nếu ống có mặt cắt đủ nhỏ thì thể tích của khối ống đúng bằng

$$\int_\gamma |D_p| \, ds.$$

(c) Ứng dụng, hãy tìm lại công thức Pappus ở 1.6.15.

2.1.15. Liên quan tới phần chứng minh của 2.1.3: Chứng minh rằng nếu $\psi : [a, b] \to [c, d]$ là một song ánh liên tục thì $\psi(a) = c$ và $\psi(b) = d$, hoặc $\psi(a) = d$ và $\psi(b) = c$. Suy ra nếu α và β là hai đường đi liên tục, đơn, không đóng, có cùng vết, thì chúng có cùng tập điểm đầu và điểm cuối, tức là $\{\alpha(a), \alpha(b)\} = \{\beta(c), \beta(d)\}$.

2.2 Công thức Newton–Leibniz

Định nghĩa. Một trường vectơ F được gọi là **bảo toàn** (conservative) nếu có hàm thực f, gọi là một **hàm thế** (potential function) của F, sao cho $\nabla f = F$.

Vectơ $\nabla f(x)$ đại diện cho đạo hàm $f'(x)$, vì thế ta có thể hiểu là $f' = F$: hàm thế f chính là một **nguyên hàm** của hàm F.

Một trường bảo toàn còn được gọi là một **trường gradient**.

Ví dụ (trường hằng). Giả sử $c \in \mathbb{R}^n$ và F là trường trên $\mathbb{R}^n$ cho bởi $F(x) = c$. Một nguyên hàm của F là $f(x) = c \cdot x$, vậy F là bảo toàn.

Định lý (công thức Newton–Leibniz). *Giả sử r là một đường đi trơn bắt đầu ở A và kết thúc ở B. Cho f là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của r. Khi đó:*

$$\boxed{\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).}$$

Định lý trên có một hệ quả là tích phân $\int_r \nabla f \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi r từ điểm A tới điểm B. Ta nói tích phân này là **độc lập với đường đi.**

Công thức trên có thể được hiểu như:

$$\int_A^B f' = f(B) - f(A).$$

Đây là dạng tổng quát hóa của công thức Newton–Leibniz của hàm một biến, do đó còn được gọi là **Định lý cơ bản của tích phân đường**.

Chứng minh. Giả sử $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $r(a) = A$ và $r(b) = B$. Khi đó theo công thức Newton–Leibniz của hàm một biến:

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t)\, dt = f \circ r(b) - f \circ r(a).$$

□

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn trong D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi.*

Hệ quả (tích phân của trường bảo toàn trên đường đi kín bằng không). *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn kín trong D bằng không.*

Những kết quả trong phần trên có thể được mở rộng cho các đường trơn từng khúc.

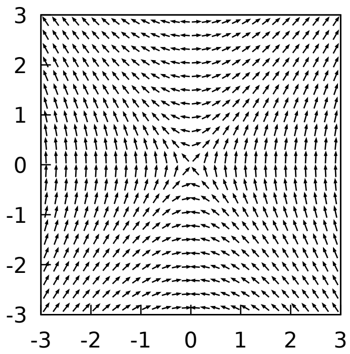
Ví dụ. Tính tính phân $\int_C y dx + (x+6y)dy$ trong đó C là một đường đi từ $(1,0)$ tới $(2,1)$.

Ta tìm một hàm thế cho trường $(y, x+6y)$. Ta giải hệ phương trình đạo hàm riêng để tìm nguyên hàm:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x+6y. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất ta được $f(x,y) = \int y\, dx = xy + D(y)$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $D'(y) = 6y$, suy ra $D(y) = \int 6y\, dy = 3y^2 + E$. Vậy ta tìm được một hàm thế là $f(x,y) = xy + 3y^2$. Suy ra tích phân đã cho bằng $f(2,1) - f(1,0) = 5$.

Ví dụ. Dự đoán trường vectơ trong hình sau có bảo toàn quanh điểm giữa hay không?



Lấy một đường kín quanh điểm giữa, chẳng hạn một đường tròn hay đường vuông, ta thấy tích phân của trường dọc theo đường đó bằng 0. Do đó ta dự đoán trường trong hình là bảo toàn.

Ý nghĩa vật lý của khái niệm trường bảo toàn

Ví dụ. Xét vật có khối lượng m ở trong không gian gần bề mặt quả đất. Ta xấp xỉ bằng cách giả sử trọng trường không đổi trong phần không gian này. Nếu ta đặt trục z vuông góc với mặt đất, chỉ ra ngoài, và gốc tọa độ trên mặt đất thì trọng lực tác động lên vật là $\vec{F} = -mg\vec{k} = (0,0,-mg)$ trong đó $g \approx 9,8$ m/s^2 là hằng số trọng trường gần mặt đất. Ta tìm được hàm thế của trường này có dạng $f(z) = -mgz + C$. Trong vật lý ta thường cho thế năng của vật ở trên mặt đất là dương, còn thế năng tại mặt đất bằng 0, do đó thế năng của vật được cho bởi hàm $U(z) = mgz$. Như vậy hàm thế trong vật lý là đối của hàm thế trong toán.

Ví dụ (trường trọng lực). Chính xác hơn, giả sử một vật có khối lượng M nằm ở gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$, và một vật có khối lượng m nằm ở điểm $\vec{r} = (x, y, z)$. Theo cơ học Newton, vật có khối lượng m sẽ chịu tác động của lực hấp dẫn từ vật có khối lượng M bằng

$$F(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

Ta tìm một nguyên hàm cho F bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -mMG\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -mMG\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -mMG\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, lấy tích phân theo x ta được

$$f(x,y,z) = \int -mMG\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx = \frac{mMG}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + C(y,z).$$

Thay vào hai phương trình còn lại, ta được $C(y,z)$ thực sự chỉ là một hằng số C. Vậy trường trọng lực là một trường bảo toàn với một hàm thế là $f(\vec{r}) = \frac{mMG}{|\vec{r}|}$.

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của **tổng lực** F. Giả sử trường F là bảo toàn với f là một hàm thế. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $r(t)$. Giả sử $r(t_0) = x_0$ và $r(t_1) = x_1$. Ta định nghĩa **động năng** (kinetic energy) (năng lượng từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}m|r'(t)|^2$; và **thế năng** (potential energy) (năng lượng từ vị trí) của vật là $U(x) = -f(x)$.

Theo định lý cơ bản của tích phân đường:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = f(x_1) - f(x_0) = -(U(x_1) - U(x_0)).$$

Vậy công của trường bằng đối của biến thiên thế năng. Mặt khác theo cơ học Newton: $F = ma = mr''$. Do đó:

$$\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} mr''(t) \cdot r'(t)\, dt.$$

Bây giờ chú ý hệ thức (xem 2.2.16) $(r' \cdot r')' = r'' \cdot r' + r' \cdot r'' = 2r'' \cdot r'$, hay $r'' \cdot r' = \frac{1}{2}(|r'|^2)'$, ta biến đổi

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} F \cdot d\vec{s} &= \int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}(|r'(t)|^2)'\, dt \\ &= \frac{1}{2}m|r'(t_1)|^2 - \frac{1}{2}m|r'(t_0)|^2 = K(t_1) - K(t_0).\end{aligned}$$

Vậy công của trường bằng biến thiên động năng. Ta kết luận $K(t) + U(r(t))$ không đổi, vậy **tổng động năng và thế năng, tức năng lượng cơ học, được bảo toàn trong quá trình chuyển động trong trường bảo toàn.**

Điều kiện cần để trường vectơ phẳng là bảo toàn

Định lý (điều kiện cần để trường bảo toàn). *Nếu trường $F = (P, Q)$ trơn và bảo toàn trên một tập mở chứa tập D thì trên D ta phải có*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Chứng minh. Giả sử f là hàm thế của F. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ và $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Với giả thiết về tính trơn như trên thì các đạo hàm riêng của P và Q tồn tại và liên tục trên D, và $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Vì $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau, do đó $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. □

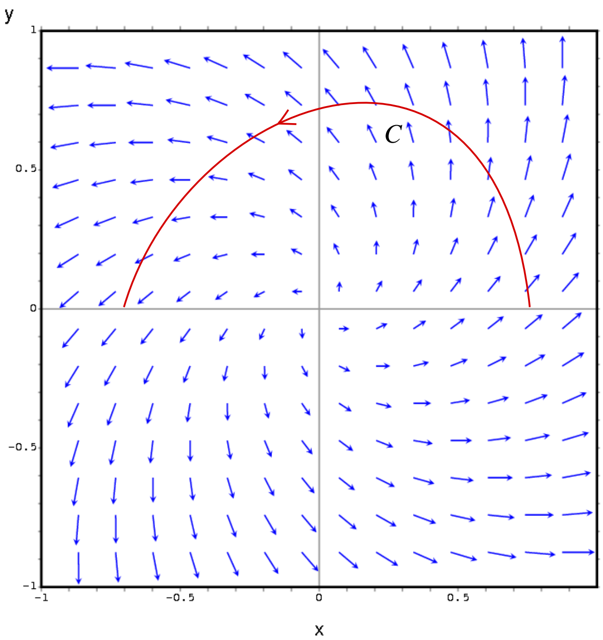
2.2.1 Ví dụ ($P_y = Q_x$ cần nhưng không đủ). Dưới đây là một ví dụ kinh điển. Xét trường

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ trên trên miền xác định là mặt phẳng bỏ đi điểm $(0, 0)$. Mặt khác, tính toán trực tiếp cho thấy nếu C là đường tròn bán kính đơn vị tâm tại $(0, 0)$ ngược chiều kim đồng hồ thì $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2\pi$ khác 0. Vậy $\vec{F}$ không phải là một trường vectơ bảo toàn trên miền xác định của nó. Xem thêm ở 2.2.11.

Bài tập

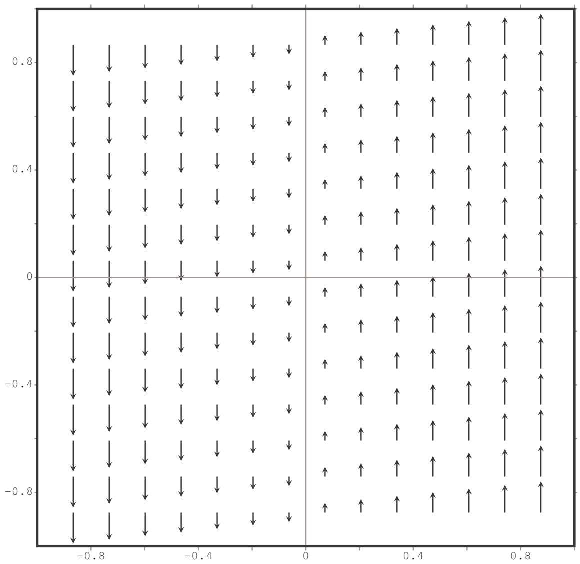
2.2.2. Dưới đây là hình vẽ của một trường vectơ.



(a) Ước đoán trường có bảo toàn không?

(b) Ước đoán tích phân của trường dọc theo đường C là âm, dương hay bằng 0?

2.2.3. Ước đoán trường sau đây có bảo toàn không?



2.2.4. Tính:

(a) Tìm một hàm $f(x,y,z)$ sao cho $f(0,0,0) = 6$ và $\nabla f(x,y,z) = (2y, 2x, e^z)$.

(b) Tính công của trường lực $F(x,y,z) = (2, 3y, 4z^2)$ khi vật đi từ điểm $(1,1,1)$ tới điểm $(1,0,0)$.

(c) Giải bài 2.1.6 bằng cách dùng hàm thế.

(d) Tìm hàm thế cho trường $(e^x \sin y - yz, e^x \cos y - yz, z - xy)$.

(e) Tính tích phân $\int_C (2y-3z)\,dx + (2x+z)dy + (y-3x)\,dz$ với C là đường gấp khúc đi từ $(0,0,0)$ tới $(0,1,2)$ tới $(3,4,3)$ rồi tới $(2,3,1)$.

(f) Tính $\int_C (x-4y^2)\,dx + (\ln y - 8xy)\,dy$ với C là một đường trên nửa mặt phẳng $y > 0$ đi từ điểm $(-3,4)$ tới điểm $(2,6)$.

(g) Tính $\int_C (\sqrt{x}+8xy)\,dx + (\sqrt{y}+4x^2)\,dy$ với C là một đường trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng đi từ điểm $(3,2)$ tới điểm $(4,1)$.

(h) Trường sau có bảo toàn không? Nếu có tìm một hàm thế:

$$\left(xy - \sin z, \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right).$$

2.2.5. Cho C là đường $y = x^3$ từ điểm $(0,0)$ tới điểm $(1,1)$.

(a) Tính $\int_C 3y\,dx + 2x\,dy$.

(b) Dùng câu trên, tính $\int_C (3y + ye^x)\,dx + (2x + e^x + e^y)\,dy$.

2.2.6. Cho C là đường e-líp $4x^2 + y^2 = 4$.

(a) Tính $\int_C (e^x \sin y + 2y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$.

(b) Tính $\int_C (e^x \sin y + 4y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$.

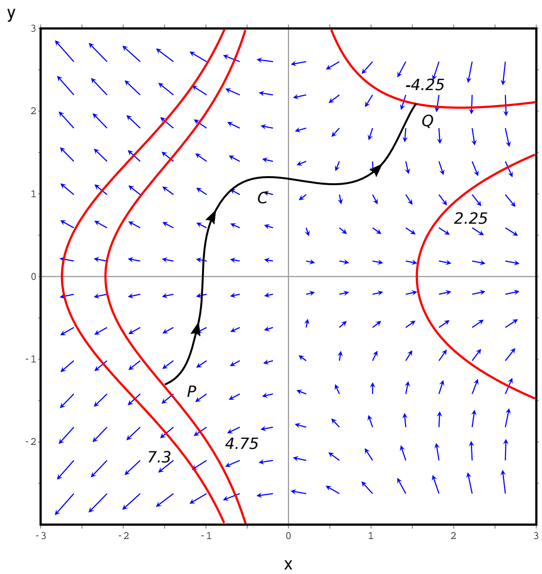
2.2.7 (điện trường là bảo toàn). ✓ Định luật Coulomb[2] là một định luật của vật lý có được từ thực nghiệm được phát biểu như sau: Nếu trong $\mathbb{R}^3$ có hai điện tích q_1 và q_2 thì điện tích q_1 sẽ tác động lên điện tích q_2 một lực bằng

$$F(\vec{r}) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r},$$

trong đó $\vec{r}$ là vectơ từ điểm mang điện tích q_1 sang điểm mang điện tích q_2, và ϵ_0 là một hằng số. Để đơn giản ta giả sử điện tích q_1 nằm ở gốc tọa độ, khi đó $\vec{r} = (x,y,z)$ là vị trí của điện tích q_2. Chứng tỏ điện trường là một trường bảo toàn.

2.2.8. Chứng tỏ công của trọng trường do vật ở vị trí O tạo ra khi một vật khác di chuyển từ vị trí P tới vị trí Q chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ O tới P và khoảng cách từ O tới Q.

2.2.9. Tính công của trường lực bảo toàn tác động lên vật di chuyển từ điểm P tới điểm Q theo đường C trong hình 2.2.10. Trong hình các đường cong khác C là các đường mức của một hàm thế với các mức tương ứng được ghi. Chú ý các đường mức này đều vuông góc với trường vectơ (xem bài tập 2.2.15).

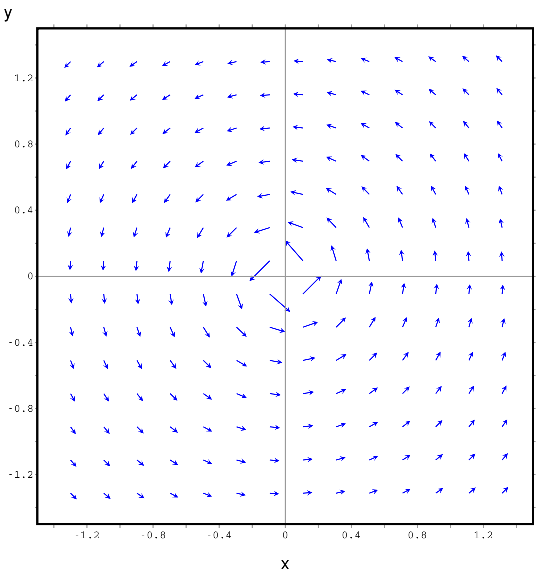


Hình 2.2.10:

2.2.11 (tiếp tục 2.2.1). ✓ Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

[2]Định luật này được phát biểu lần đầu tiên bởi Charles Coulomb năm 1785.



Hình 2.2.12: Trường $\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Kiểm tra rằng nếu $x \neq 0$ thì F có một hàm thế là $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, với θ chính là biến góc trong tọa độ cực. Người ta thường viết một cách hình thức

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

(b) Có thể mở rộng θ thành một hàm trơn trên toàn miền xác định của F không?

(c) Tích phân $\frac{1}{2\pi}\int_C d\theta$ được gọi **số vòng** (winding number), tính theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, của đường đi C quanh điểm O. Chứng tỏ số vòng của đường đi $(\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2n\pi$ đúng bằng n.

2.2.13. Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Kiểm tra rằng $P_y = Q_x$ trên miền xác định của F.

(b) Trường F có bảo toàn trên miền xác định không?

2.2.14. Chứng tỏ hai hàm thế bất kì của cùng một trường xác định trên một miền mở liên thông sai khác nhau một hằng số. Điều này có cùng đúng không nếu bỏ giả thiết miền liên thông?

2.2.15 (trường gradient luôn vuông góc với tập mức). Cho F là một trường bảo toàn trên mặt phẳng, tức là một trường gradient, $F = \nabla f$. **Tập mức** (level set) của f là tập các điểm có cùng một giá trị qua f, tức là tập $f^{-1}(c) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid f(p) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

Nếu với mọi $p \in f^{-1}(c)$ thì $F(p) = \nabla f(p) \neq 0$ thì giá trị c còn được gọi là một **giá trị chính qui** (regular value) của f.

(a) * Chứng minh rằng nếu c là một giá trị chính qui của f thì tập mức $f^{-1}(c)$ là một đường cong, chính xác hơn phương trình "ở dạng ẩn" $f(x,y) = c$ xác định vết một đường đi $C(t) = (x(t), y(t))$ trên một lân cận của điểm p.

(b) Từ điều kiện $f(C(t)) = c$ hãy suy ra $\nabla f(C(t)) \cdot C'(t) = 0$. Hãy giải thích vì sao điều đó có nghĩa là $F(p) \perp C$. Xem minh họa ở hình 2.2.10.

(c) Chứng minh rằng

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$$

Vậy tích phân của trường gradient trên đường mức luôn bằng 0.

2.2.16. Cho $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}^3$. Hãy kiểm tra các công thức sau về đạo hàm:

(a) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

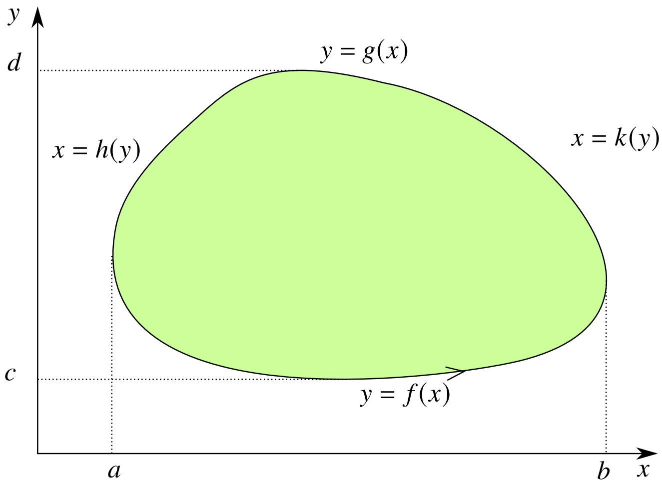
(b) $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

2.3 Công thức Green

Trong phần này ta chỉ làm việc trên trên mặt phẳng Euclid hai chiều $\mathbb{R}^2$.

Công thức Green cho miền đơn giản

Giả sử D là một miền đơn giản có biên trơn từng khúc trên $\mathbb{R}^2$. Cụ thể, như là một miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, D có dạng $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hàm trơn, trong khi đó theo chiều nằm ngang thì $D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ h(y) \le x \le k(y)\}$ trong đó $h(y)$ và $k(y)$ là hàm trơn.



Biên của D phải được định hướng tương thích với D. Miêu tả trực quan là: biên được định hướng sao cho khi đi trên biên thì miền nằm bên tay trái; hoặc: đặt bàn tay phải theo hướng của biên thì miền nằm ở phía lòng bàn tay. Chính xác như sau: ∂D được định hướng cùng chiều với định hướng của các đường đi $\gamma_1(x) = (x, f(x))$, $a \le x \le b$ và đường $-\gamma_2$ với $\gamma_2(x) = (x, g(x))$, $a \le x \le b$. Có thể kiểm tra được rằng đây cũng là định hướng của đường $-\gamma_3$ với $\gamma_3(y) = (h(y), y)$, $c \le y \le d$ và đường γ_4 với $\gamma_4(y) = (k(y), y)$, $c \le y \le d$.

Định lý (công thức Green). *Cho D là một miền đơn giản với biên trơn từng khúc được định hướng tương thích. Giả sử (P, Q) là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D. Khi đó:*

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy.}$$

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P\,dx &= \int_{\gamma_1} P\,dx + \int_{\gamma_2} P\,dx - \int_{\gamma_3} P\,dx - \int_{\gamma_4} P\,dx \\ &= \int_a^b P(x, f(x))\,dx - \int_a^b P(x, g(x))\,dx.\end{aligned}$$

Xem D là miền đơn giản theo chiều thẳng đứng, do các đạo hàm riêng của trường là liên tục trên D nên ta có

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx \\ &= \int_a^b [P(x, f(x)) - P(x, g(x))]\,dx.\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA.$$

Tương tự, xem D là miền đơn giản theo chiều nằm ngang, ta được

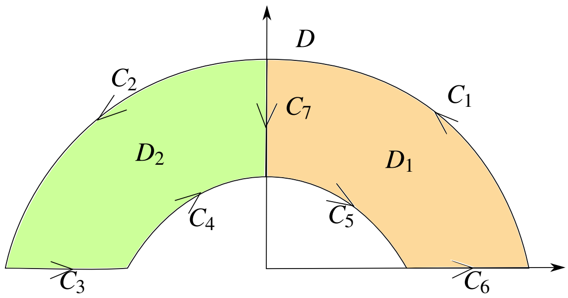
$$\int_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA.$$

Cộng lại ta được kết quả. □

Công thức Green cho miền không đơn giản

Đối với một miền không đơn giản nhưng có thể được phân chia thành một hội của hữu hạn những miền đơn giản với những phần chung chỉ nằm trên biên, ta có thể áp dụng công thức Green cho từng miền đơn giản rồi cộng lại.

Ví dụ. Công thức Green vẫn đúng cho miền $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$, mặc dù miền này không phải là một miền đơn giản.



Chia D thành hội của hai miền đơn giản D_1 và D_2 được miêu tả trong hình vẽ. Chú ý rằng khi được định hướng dương ứng với D_2 thì đường C_7 được định hướng ngược lại, trở thành $-C_7$. Áp dụng công thức Green cho D_1 và D_2 ta được:

$$\begin{aligned}
\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA &= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA + \iint_{D_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA \\
&= \int_{\partial D_1} F\cdot d\vec{s} + \int_{\partial D_2} F\cdot d\vec{s} \\
&= \left(\int_{C_1} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_7} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_5} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F\cdot d\vec{s}\right) + \\
&\quad + \left(\int_{C_2} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F\cdot d\vec{s} + \int_{-C_7} F\cdot d\vec{s}\right) \\
&= \int_{C_1} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_2} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_3} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_4} F\cdot d\vec{s} + \\
&\quad + \int_{C_5} F\cdot d\vec{s} + \int_{C_6} F\cdot d\vec{s} \\
&= \int_{\partial D} F\cdot d\vec{s}.
\end{aligned}$$

Một khó khăn khi muốn phát biểu công thức Green cho những miền tổng quát hơn là việc định nghĩa một cách chính xác những khái niệm xuất hiện trong công thức, như thế nào là định hướng dương của biên, khi nào thì biên của một miền là một đường, khi nào thì một đường bao một miền, ... Một phát biểu và chứng minh sơ cấp của công thức Green cho miền tổng quát hơn có trong quyển sách của Kellogg [Kel29, tr. 119] xuất bản năm 1929, ở đó công thức được chứng minh cho một miền không đơn giản bằng cách xấp xỉ miền đó bằng những miền là hội của hữu hạn miền đơn giản, sau đó qua giới hạn. Ngày nay công thức Green thường được xét như là một trường hợp riêng của công thức Stokes tổng quát cho không gian nhiều chiều, xem 2.8.

Điều kiện đủ để trường vectơ phẳng là bảo toàn

Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một **miền hình sao** (star-shaped region) nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D.

Ví dụ. $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao. Một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao. $\mathbb{R}^n$ trừ đi một điểm không là miền hình sao.

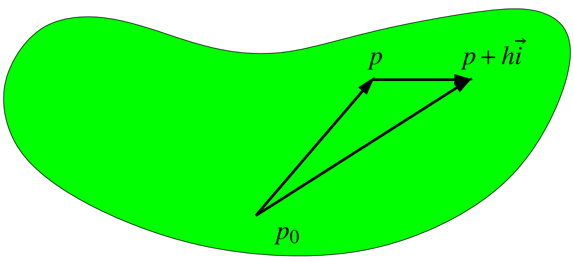
Kết quả dưới đây nói rằng nếu miền là mở hình sao thì điều kiện $P_y = Q_x$ cũng là một điều kiện đủ để trường là bảo toàn.

2.3.1 Định lý (bổ đề Poincaré). *Giả sử $F = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao D. Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì F là bảo toàn trên D.*

Chứng minh. Để gợi ý, ở đây ta dùng kí hiệu $\int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}$ để chỉ tích phân của F trên đoạn thẳng $p_0 + t(p - p_0)$, $0 \le t \le 1$, nối điểm p_0 với điểm p. Đặt

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}.$$

thì đây chính là một hàm thế của F. Ta sẽ kiểm tra rằng $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, chứng minh $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ là tương tự.



Hình 2.3.2: Bổ đề Poincaré cho miền hình sao.

Theo định nghĩa của đạo hàm, với $\vec{i} = (1, 0)$, ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s} \right].$$

Chú ý do D mở nên nếu h đủ nhỏ thì điểm $p + h\vec{i}$ sẽ nằm trong D. Nếu ba điểm p_0, p và $p + h\vec{i}$ không cùng nằm trên một đường thẳng thì chúng tạo thành một tam giác. Tam giác này là một miền đơn giản do đó ta có thể áp dụng định lý Green cho miền này, dùng giả thiết $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ta được tích phân đường trên biên của tam giác bằng 0, tức là

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s} = \int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s}.$$

Công thức này cũng đúng nếu ba điểm là thẳng hàng. Viết $p = (x, y)$, và lấy đường đi thẳng từ p tới $p + h\vec{i}$ là $r(t) = (x + t, y)$ với $0 \le t \le h$, ta được

$$\int_{p}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} = \int_{x}^{x+h} P(t, y)\, dt.$$

Do đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(t,y)\,dt = P(x,y).$$

Đẳng thức cuối cùng là một kết quả quen thuộc trong Giải tích 1, có thể được kiểm dễ dàng sử dụng việc hàm P liên tục theo x, xem 2.3.22. □

Ví dụ. Trường $\vec{F}(x,y) = (e^{x^2}, y^3)$ có bảo toàn hay không?

Ta có $\frac{\partial e^{x^2}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial y^3}{\partial x}$. Miền xác định của trường là $\mathbb{R}^2$, một miền mở hình sao. Bổ đề Poincaré áp dụng được, cho ta kết luận trường là bảo toàn trên miền xác định.

Nếu có một trường (P,Q) mà $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng lại không bảo toàn thì bổ đề Poincaré cho biết miền xác định của trường không phải là một miền hình sao. Như vậy một giả thiết giải tích đã đưa đến một kết luận hình học.

Kết luận của bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là **miền đơn liên** (simply connected), đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng. Để trình bày chính xác cần vượt ra ngoài phạm vi môn học này, xem chẳng hạn [Sja06].

Ta thấy chứng minh của bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu luôn tồn tại đường đi từ điểm p_0 tới điểm p, không nhất thiết phải là đường thẳng, và tích phân $\int_{p_0}^{p} F\cdot d\vec{s}$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu p_0 và điểm cuối p. Từ đó ta có một tiêu chuẩn nữa:

Mệnh đề. *Giả sử $F = (P,Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở liên thông đường $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu tích phân đường của F trên D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi thì F là bảo toàn trên D.*

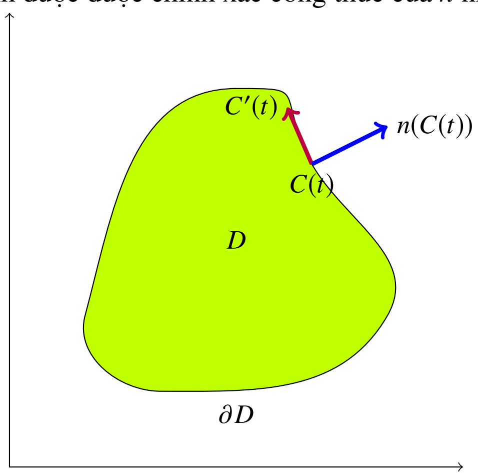
Dạng thông lượng của công thức Green

Cho D là miền phẳng và F là một trường trên D sao cho ta có thể áp dụng công thức Green. Giả sử ∂D được tham số hóa theo chiều dương bởi $C(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$.

Vectơ vận tốc của đường biên là $C'(t) = (x'(t), y'(t))$. **Vectơ pháp tuyến ngoài** n của ∂D tại điểm $(x(t), y(t))$ là

$$n = \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t)).$$

Ta giải thích điều này sau đây. Vectơ $(-y'(t), x'(t))$ vuông góc $(x'(t), y'(t))$ (do tích vô hướng bằng 0), vậy n cùng phương với $(-y'(t), x'(t))$. Chiều của n được xác định theo nguyên tắc chiều từ pháp tuyến ngoài sang tiếp tuyến phải cùng chiều với chiều dương chuẩn tắc của mặt phẳng, tức là chiều từ $(1,0)$ sang $(0,1)$. Do đó định thức của ma trận gồm hai vectơ n và $C'(t)$ phải dương và ta xác định được được chính xác công thức của n như trên.



Từ công thức Green:

$$\int_C F\cdot n\, ds = \int_a^b \langle (P(C(t)), Q(C(t))), \frac{1}{|C'(t)|}(y'(t), -x'(t))\rangle |C'(t)|\, dt$$
$$= \int_C -Q\, dx + P\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA.$$

Người ta thường đặt

$$\operatorname{div}(P,Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Toán tử div sẽ được thảo luận nhiều hơn ở mục 2.6. Vậy

$$\boxed{\int_{\partial D} F\cdot n\, ds = \iint_D \operatorname{div} F\, dA.} \qquad (2.3.3)$$

Tích phân $\int_C F\cdot n\, ds$ là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của F dọc theo biên ∂D. Nếu F là một trường vectơ vận tốc thì tích phân này thể hiện **thông lượng** (flux) qua ∂D.

Bài tập

2.3.4. Tính:

(a) Cho C là biên của hình vuông $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ định hướng theo chiều kim đồng hồ. Tính tích phân $\int_C x^3\, dx + (x+\sin(2y))\, dy$.

(b) Cho $F(x,y) = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$. Gọi T là tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giải thích tại sao $\int_T F\cdot d\vec{s} = 0$ bằng ba cách.

(c) Tính $\int_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$ trong đó C là chu tuyến (đường biên) theo chiều dương của tam giác OAB với $O=(0,0)$, $A=(2,0)$, $B=(4,2)$ bằng cách tính trực tiếp và bằng công thức Green.

(d) Cho $F(x,y) = (x^2+y, x+\sqrt{y^4+y^2+1})$. Trường này có bảo toàn không? Gọi $C(t) = (1-\cos^3 t, \sin 2t)$, $0\le t\le \pi$. Tính $\int_C F\cdot d\vec{s}$.

(e) Cho $F(x,y) = (y-2xye^{-x^2}, e^{-x^2}+y)$. Tính tích phân của trường này trên cung tròn đơn vị trong góc phần tư thứ nhất đi từ $(1,0)$ tới $(0,1)$.

(f) Hãy kiểm chứng công thức Green trong trường hợp miền được bao bởi hai đường cong $y=x$ và $y=x^2$ và trường là (xy, y^2).

(g) Tính tích phân $\int_C 4y dx - 5dy$ với C là đường e-líp $x = 2+4\cos\theta$, $y = 3+2\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ bằng 2 cách.

2.3.5. ✓ Gọi D là một miền trên đó công thức Green có thể áp dụng được. Chứng tỏ diện tích của D có thể được tính theo công thức

$$|D| = -\int_{\partial D} y\, dx = \int_{\partial D} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\, dy - y\, dx.$$

2.3.6. Cho đường cong trong mặt phẳng (x,y) viết bằng phương trình dùng tọa độ cực $r = 4+3\cos(11\theta)$, với $0\le\theta\le 2\pi$ (xem hình 1.5.10). Dùng 2.3.5, hãy tính diện tích của miền được bao bởi đường cong này.

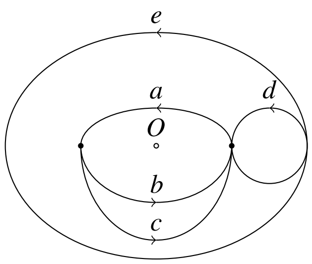
2.3.7. Cho đường cong hình sao (astroid) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

(a) Vẽ đường này.

(b) Tính diện tích của miền bao bởi đường cong trên bằng cách dùng tích phân bội.

(c) Tính diện tích miền này bằng cách dùng tích phân đường, dùng tham số hóa của đường astroid: $x = 2\cos^3\theta$, $y = 2\sin^3\theta$.

2.3.8. Cho $\vec{F} = (P, Q)$ là trường vectơ trơn xác định trên mặt phẳng trừ điểm O, có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tại mọi điểm. Giả sử $\int_a \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$ và $\int_b \vec{F} \cdot d\vec{s} = 2$ (xem hình 2.3.9). Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên c, d, và e.



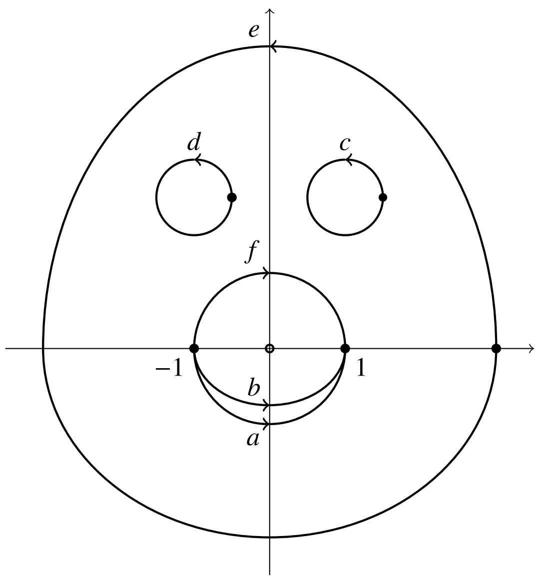
Hình 2.3.9: Bài tập 2.3.8.

2.3.10. Cho $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Cho C_1 là đường e-líp $9x^2+4y^2 = 36$ và C_2 là đường tròn $x^2+y^2 = 1$, đều được định hướng cùng chiều kim đồng hồ. Chứng tỏ tích phân của F trên C_1 và trên C_2 là bằng nhau.

2.3.11. Trên mặt phẳng Oxy, xét trường

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(2x - \frac{y}{x^2+y^2}, 1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Trong hình vẽ a là một nửa đường tròn đi từ $(-1,0)$ tới $(1,0)$). Tính tích phân của $\vec{F}$ trên a.



(b) Tính tích phân của $\vec{F}$ trên f (một nửa đường tròn đi từ $(-1,0)$ tới $(1,0)$).

(c) Dùng công thức Green, hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên c và d.

(d) Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên b (một đường đi từ $(-1,0)$ tới $(1,0)$).

(e) Hãy tính tích phân của $\vec{F}$ trên e.

2.3.12 (tích phân từng phần). ✓ Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng có biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho f và g là hàm thực khả vi liên tục trên một tập mở chứa D. Hãy chứng minh công thức tích phân từng phần sau:

$$\iint_D f_x g \, dxdy = \int_{\partial D} fg \, dy - \iint_D f g_x \, dxdy.$$

2.3.13. Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho f là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Hãy kiểm rằng:

(a)

$$\int_{\partial D} f_x \, dx + f_y \, dy = 0.$$

(b)

$$\int_{\partial D} -f_y \, dx + f_x \, dy = \iint_D \Delta f \, dxdy.$$

Ở đây với $f(x,y)$ là hàm thực trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ kí hiệu toán tử Laplace tác động vào f là $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2.3.14. Cho D là miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương. Cho (P,Q) là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D. Hãy kiểm rằng

$$\int_{\partial D} (QP_x - PQ_x) \, dx + (PQ_y - QP_y) \, dy = 2 \iint_D (PQ_{xy} - QP_{xy}) \, dxdy.$$

2.3.15. ✓ Kí hiệu đạo hàm của f theo hướng cho bởi vectơ đơn vị v là $D_v f$. Nhắc lại công thức $D_v f = \nabla f \cdot v$. Kí hiệu n là véctơ pháp tuyến đơn vị ngoài của ∂D. Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các **công thức Green**, với giả thiết dạng thông lượng của công thức Green 2.3.3 có thể áp dụng được.

(a) $\int_{\partial D} D_n f \, ds = \iint_D \Delta f \, dA$.

(b) $\int_{\partial D} (f \nabla g) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA$.

(c) $\int_{\partial D} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n \, ds = \iint_D (f \Delta g - g \Delta f) \, dA$.

2.3.16 (diện tích của đa giác). (a) Một tam giác trong mặt phẳng có 3 đỉnh có tọa độ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Chứng tỏ diện tích của tam giác này bằng

$$\frac{1}{2} \left| x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 \right|.$$

(b) Tổng quát hơn, giả sử một đa giác trong mặt phẳng bao một miền mà công thức Green áp dụng được. Giả sử các đỉnh của đa giác này có tọa độ (x_i, y_i), $1 \le i \le n$ với thứ tự theo định hướng "đa giác nằm bên trái" của công thức Green. Để cho tiện, đặt $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$. Khi đó ta có công thức cho diện tích của đa giác là

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

2.3.17. Giả sử nhiệt độ tại một điểm (x,y) trên mặt phẳng được cho bởi $f(x,y)$. Dùng công thức Green 2.3.15, hãy giải thích vì sao nếu phân bố nhiệt độ là **điều hòa** (harmonic), nghĩa là $\Delta f = 0$, thì trên mỗi miền kín lượng nhiệt đi ra luôn đúng bằng lượng nhiệt đi vào.

2.3.18 (tiêu chuẩn Bendixson cho quỹ đạo kín của dòng). Gọi F là trường vectơ vận tốc tại một thời điểm nhất định của một dòng (flow) trên mặt phẳng, ví dụ một dòng chất lỏng hay một dòng khí. Một quỹ đạo (trajectory) của một chất điểm là một đường γ trong mặt phẳng sao cho $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$ với mọi t trên miền xác định của γ, nghĩa là đường này luôn nhận vectơ của trường tại mỗi điểm đường đi qua làm vectơ vận tốc. Giả sử γ là một quỹ đạo kín bao miền liên thông D mà công thức Green áp dụng được. Xem minh họa ở hình 2.3.19.

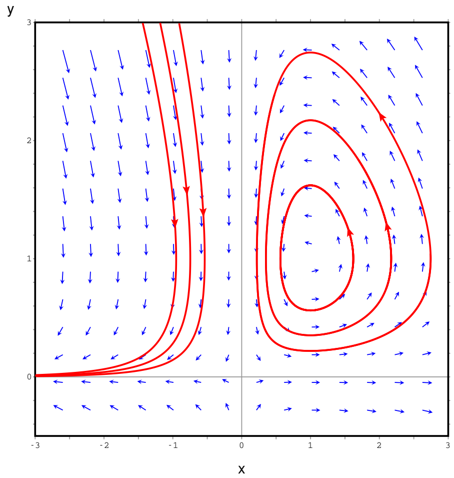
(a) Chứng tỏ $\iint_D \operatorname{div} F = 0$.

(b) Chứng tỏ phải có một điểm p trong D sao cho $\operatorname{div} F(p) = 0$. Như vậy một quỹ đạo kín của dòng phải bao ít nhất một điểm tại đó div bằng 0.

2.3.20. Nếu F là một trường bảo toàn trên một tập mở liên thông đường, chứng tỏ rằng một hàm thế của F được cho bởi công thức

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot d\vec{s}$$

trong đó p_0 là một điểm cố định và tích phân là trên một đường trơn bất kì từ p_o tới p.



Hình 2.3.19: Minh họa quỹ đạo của dòng ứng với trường $F(x,y) = (x(1-y),(x-1)y)$. Trường này là một ví dụ của **hệ con săn mồi-con mồi** (predator-prey) trong sinh thái học. Bên phải có các quỹ đạo kín, bên trái có các quỹ đạo không kín.

2.3.21. Dựa vào trường hợp 2-chiều, hãy cho một điều kiện cần để một trường n-chiều là bảo toàn. Hãy cho ví dụ một trường n-chiều không bảo toàn. Hãy cho ví dụ một trường n-chiều thỏa điều kiện cần đã đưa ra mà không bảo toàn.

2.3.22. Liên quan tới phần chứng minh của 2.3.1, hãy kiểm tra: Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục và $x \in [a,b]$ thì $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(x)$. Hãy chỉ ra rằng định lý cơ bản của Vi Tích phân hàm một biến nói rằng $\int_a^x f(t)\, dt$ là một nguyên hàm của f trên $[a,b]$ là một hệ quả của kết quả trên.

2.3.23. * Tiếp tục bài 2.3.13. Chứng tỏ hàm f trơn cấp hai thỏa phương trình Laplace $\Delta f = 0$ trên mặt phẳng khi và chỉ khi với mọi miền đơn giản trên mặt phẳng với biên trơn từng khúc được định hướng dương D ta có $\int_{\partial D} -f_y\, dx + f_x\, dy = 0$.

2.3.24. * Chứng minh vết của một đường đi trơn trên mặt phẳng có diện tích không. Định lý đường cong Jordan trong Tôpô nói rằng một đường liên tục, đơn, đóng trong mặt phẳng bao một miền liên thông bị chặn. Do đó một đường đi trơn, đơn, đóng thì bao một miền có diện tích.

2.4 Tích phân mặt

Mặt

Giống như đường, đối với chúng ta một **mặt** (surface) là một ánh xạ r từ một tập con D của $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^3$. Tập ảnh $r(D)$ được gọi là **vết** của mặt.

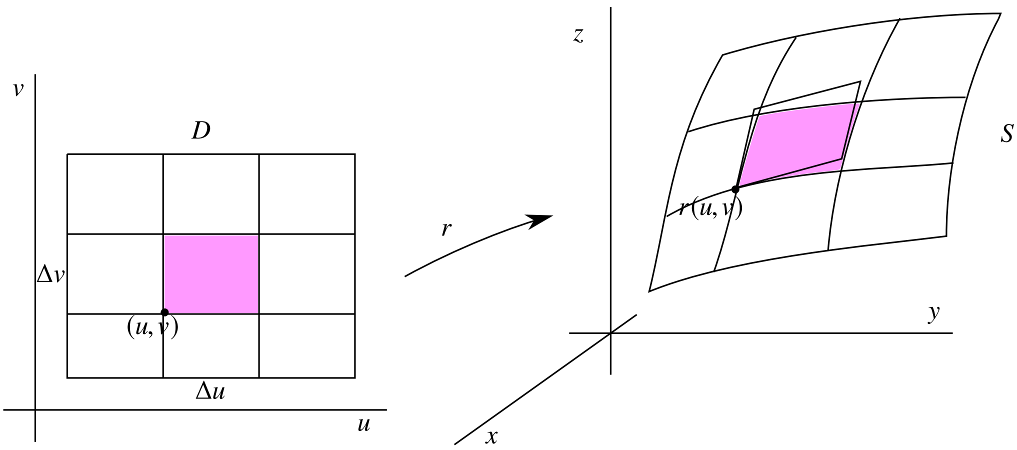
Ví dụ. Nửa trên của mặt cầu là vết của mặt $(x, y, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ với $x^2 + y^2 \le 1$ (tọa độ Euclid). Đó cũng là vết của mặt $(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ với $0 \le \theta \le 2\pi$ và $0 \le \phi \le \pi/2$ (tọa độ cầu).

Diện tích mặt

Cho mặt

$$\begin{aligned} r : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto r(u, v) = (x, y, z). \end{aligned}$$

Với một phép chia của D ta có một phép chia của mặt thành những mảnh nhỏ. Một hình chữ nhật con với kích thước $\Delta u \times \Delta v$ sẽ được mang thành một mảnh trên mặt được xấp xỉ tuyến tính bằng hình bình hành xác định bởi các vectơ $r_u(u, v)\Delta u$ và $r_v(u, v)\Delta v$. Diện tích của hình bình hành này được cho bởi độ lớn của tích có hướng của hai vectơ này, tức là $|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|\Delta u\Delta v$.



Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Diện tích của mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ là

$$\iint_D |r_u \times r_v| \, dudv.$$

Ví dụ (mặt đồ thị). Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ có vết là đồ thị của hàm f. Ta tính được $r_x = (1, 0, f_x)$, $r_y = (0, 1, f_y)$, $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$. Diện tích của mặt này là

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy.$$

Đặc biệt, nếu đây là một mặt phẳng, tức $f \equiv 0$, thì diện tích của mặt chính là diện tích của miền phẳng D.

Tích phân mặt loại một

Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ và cho f là một hàm thực xác định trên vết $S = r(D)$. Ta muốn tính **tổng giá trị của hàm trên mặt**. Làm như trong phần diện tích mặt, trên mỗi mảnh con trên mặt ta xấp xỉ tuyến tính diện tích của mảnh con bằng diện tích của một hình bình hành, bằng $|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v$, và xấp xỉ giá trị của hàm f bằng giá trị của nó tại một điểm $r(u,v)$. Từ đó ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho $f : S \to \mathbb{R}$. Tích phân mặt loại một của f trên r là

$$\boxed{\iint_r f\, dS = \iint_D f(r(u,v))|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\, dudv.}$$

Ví dụ. Nếu $f \equiv 1$ thì $\iint_r 1\, dS$ chính là diện tích của mặt r.

Ví dụ (mặt đồ thị). Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y) = (x,y,f(x,y))$ có vết là đồ thị S của hàm f. Giả sử $g : S \to \mathbb{R}$. Khi đó tích phân của g trên r là

$$\iint_r g\, dS = \iint_D g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy.$$

Trong các tài liệu khác tích phân mặt loại 1 còn được kí hiệu bằng $\int_S f\, d\sigma$, $\int_S f\, d\Sigma$.

Ghi chú. * Như đã thấy trong phần công thức đổi biến (1.5.6), ta có

$$\begin{aligned}|a\times b| &= \sqrt{|a|^2|b|^2-\langle a,b\rangle^2}\\ &= \left[\det\begin{pmatrix} a\cdot a & a\cdot b\\ b\cdot a & b\cdot b\end{pmatrix}\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Công thức này có thể được dùng để định nghĩa tích phân mặt loại 1 cho mặt trong $\mathbb{R}^n$, với mọi $n \geq 2$, không phải hạn chế $n = 3$ như ở đây. Khi $n = 2$ đây chính là công thức đổi biến của tích phân bội.

Tích phân mặt loại hai

Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$. Ta muốn tính **tổng của thành phần pháp tuyến của trường trên mặt**.

Như trong tích phân mặt loại một, diện tích của một mảnh con của mặt được xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành $|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v$.

Trên mảnh con trường F được xấp xỉ bằng giá trị của nó tại điểm $r(u,v)$. Vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt tại điểm $r(u,v)$ là

$$\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|}.$$

Thành phần pháp tuyến của vectơ $F(r(u,v))$ là số thực

$$F(r(u,v))\cdot\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|}.$$

Tổng thành phần pháp tuyến của F trên mảnh con đó được xấp xỉ bằng

$$F(r(u,v))\cdot\frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|}|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\Delta u\Delta v = [F(r(u,v))\cdot r_u(u,v)\times r_v(u,v)]\Delta u\Delta v.$$

Chú ý rằng số thực trên cũng là thể tích có hướng của khối bình hành sinh bởi ba vectơ $F(r(u,v))$, $r_u(u,v)\Delta u$, $r_v(u,v)\Delta v$. Từ đây ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa. Cho mặt $r : D \to \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$. Cho F là một trường vectơ trên S, tức $F : S \to \mathbb{R}^3$. Tích phân mặt loại hai của của F trên r là

$$\boxed{\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u(u,v) \times r_v(u,v))\, dudv.}$$

Ghi chú. Ta tính được ngay

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}.$$

Từ đó trong một số tài liệu người ta dùng thêm các tích phân mặt:

$$\iint_r P(x,y,z)\, dydz = \iint_r P\vec{i} \cdot d\vec{S} = \iint_r P(r(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, dudv,$$

$$\iint_r Q(x,y,z)\, dzdx = \iint_r Q\vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_r Q(r(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, dudv,$$

$$\iint_r R(x,y,z)\, dxdy = \iint_r R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iint_r R(r(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv.$$

Với các kí hiệu này và $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ thì

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_r (P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy).$$

Tuy nhiên trong tài liệu này ta ít dùng các kí hiệu này.

Mặt như là tập điểm. Định hướng

Tương tự như đã xảy ra với đường, trong nhiều ứng dụng ta muốn xem mặt như là một tập điểm chứ không phải là một ánh xạ. Bây giờ ta xây dựng quan điểm này.

Cho D và D' là hai tập con mở của $\mathbb{R}^2$ và giả sử có một vi đồng phôi φ từ D lên D'. Một vi đồng phôi như vậy còn được gọi là một **phép đổi biến**. Những phép đổi biến như vậy chúng ta đã nghiên cứu trong phần công thức đổi biến của tích phân bội. Nếu $\det d\varphi$ luôn dương trên D thì φ được gọi là một **vi đồng phôi bảo toàn định hướng** (orientation-preserving diffeomorphism). Nếu $\det d\varphi$ luôn âm thì φ được gọi là một **vi đồng phôi đảo ngược định hướng** (orientation-reversing diffeomorphism).

2.4.1 Định lý (bất biến của tích phân mặt qua phép đổi biến). *Giả sử D và D' là hai tập con mở bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và $\varphi : D' \to D$ là một phép đổi biến. Cho mặt trơn $r : D \to \mathbb{R}^3$. Khi đó:*

(a) Tích phân mặt loại một không đổi qua phép đổi biến:

$$\iint_r f\, dS = \iint_{r\circ\varphi} f\, dS.$$

(b) Tích phân mặt loại hai không đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng:

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_{r\circ\varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

(c) Tích phân mặt loại hai đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng:

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = -\iint_{r\circ\varphi} F \cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh. Theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp:

$$J_{r\circ\varphi}(s,t) = J_r(u,v)J_\varphi(s,t).$$

Cụ thể hơn:

$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial s},$$
$$\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Nhân hai vectơ này, và đơn giản hóa, ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial s}\times\frac{\partial(r\circ\varphi)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}\right)\\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.\end{aligned}$$

Viết cách khác:

$$(r\circ\varphi)_s\times(r\circ\varphi)_t = (r_u\times r_v)\det J_\varphi(s,t). \tag{2.4.2}$$

Bây giờ dùng công thức đổi biến của tích phân bội ta được điều phải chứng minh. □

Ta nói hai mặt r và r' có **cùng định hướng** nếu $r'^{-1}\circ r$ là một phép đổi biến và bảo toàn định hướng; và **trái định hướng** nếu $r'^{-1}\circ r$ là một phép đổi biến và đảo ngược định hướng. Mỗi lớp các tham số hóa có cùng định hướng của S được gọi là một **định hướng của mặt cong** S**.**

Ví dụ (định hướng của mặt cầu). Xét phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$, $x,y,z>0$. Tập điểm này có thể được tham số hóa như là một mặt đồ thị $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$. Một cách khác để tham số hóa tập này là dùng tọa độ cầu: $x=\sin\phi\cos\theta$, $y=\sin\phi\sin\theta$, $z=\cos\phi$, với $0<\phi<\pi/2$, $0<\theta<\pi/2$. Với thứ tự (ϕ,θ) của tọa độ cầu, phép biến đổi $(\phi,\theta)\mapsto(x,y)$ có $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)}=\sin\phi\cos\phi>0$, do đó bảo toàn định hướng. Như vậy hai tham số hóa này có cùng định hướng.

Mặt $r: D\to\mathbb{R}^3$ được gọi là:

- **đơn** (simple) nếu r là đơn ánh,
- **chính qui** (regular) nếu hai vectơ $r_u(u,v)$ và $r_v(u,v)$ xác định và luôn không cùng phương trên D; nói cách khác vectơ $r_u(u,v)\times r_v(u,v)$ luôn khác 0 trên D. Một cách trực quan, mặt là chính qui nếu pháp tuyến có thể được xác định.

2.4.3 Ví dụ (mặt đồ thị). Cho hàm thực f trơn trên một tập mở chứa D. Xét mặt $r(x,y)=(x,y,f(x,y))$ với $(x,y)\in D$. Vết của r là mặt đồ thị $z=f(x,y)$. Ta có $r_x=(1,0,f_x)$ và $r_y=(0,1,f_y)$, do đó $r_x\times r_y=(-f_x,-f_y,1)\neq 0$. Vậy r là một mặt đơn, chính qui. Vì $r_x\times r_y=(-f_x,-f_y,1)$ hướng về nửa không gian trên $(z>0)$ nên đây thường được gọi là **mặt hướng lên**.

Tương tự như 2.1.3 cho đường, ta có kết quả sau đây cho biết khi nào thì hai mặt khác nhau bởi một phép đổi biến.

2.4.4 Mệnh đề. *Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và cho $r: D\to\mathbb{R}^3$ và $r': D'\to\mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn, liên tục, và chính qui trên phần trong của miền xác định, có cùng vết. Khi đó $r(\partial D)=r'(\partial D')$, và $r'^{-1}\circ r: \overset{\circ}{D}\to\overset{\circ}{D'}$ là một vi đồng phôi.*

Ta gọi tập $r(\partial D)=r'(\partial D')$, ảnh của biên của miền xác định của mặt, là **biên của mặt cong** $S=r(D)=r'(D')$, kí hiệu là ∂S.

Dùng 2.4.4, 2.4.1, và 1.3.8 ta có thể phát biểu một kết quả như sau:

2.4.5 Định lý (tích phân trên mặt cong). *Trên những mặt đơn xác định trên tập con đóng bị chặn có diện tích của $\mathbb{R}^2$, chính qui trên tập mở chứa miền xác định, với cùng vết, thì:*

(a) tích phân mặt loại một là như nhau,

(b) tích phân mặt loại hai là như nhau nếu hai mặt cùng định hướng và đối nhau nếu hai mặt trái định hướng.

Như vậy ta có thể nói tới tích phân mặt trên một tập điểm (một mặt cong) nếu tập điểm đó là vết của một mặt như trong định lý trên và bây giờ ta có thể dùng kí hiệu $\iint_S f\, dS$ và $\iint_S F \cdot d\vec{S}$.

Đôi khi ta có thể dùng 2.4.4 khác một chút, như trong ví dụ sau.

Ví dụ (diện tích mặt cầu). Xét phần mặt cầu nằm trong góc phần tám thứ nhất, tức tập hợp $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Tham số hóa phần này như là một mặt đồ thị $r(x,y) = (x,y,z = \sqrt{R^2-x^2-y^2})$, $x^2+y^2 \leq R^2$, $x \geq 0, y \geq 0$. Đây là một tham số hóa đơn, liên tục. Ta tính được ngay $(r_x \times r_y)(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, 1\right)$, tuy nhiên đại lượng này chỉ có nghĩa trên phần trong của miền xác định, tức là tập $x^2+y^2 < R^2$, $x > 0, y > 0$. Diện tích của phần mặt cầu $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x > 0, y > 0, z > 0\}$ tính theo tham số hóa này bằng

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2<R^2, x>0, y>0} \left|(r_x \times r_y)(x,y)\right|\, dxdy &= \iint_{x^2+y^2<R^2, x>0, y>0} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dxdy \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr\, d\theta \\
&= \pi R^2/2.
\end{aligned}$$

Tham số hóa tập A bằng tọa độ cầu $s(\phi,\theta) = R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Đây là một tham số hóa đơn, chính qui, với $(s_\phi \times s_\theta)(\phi,\theta) = R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$. Tập B ứng với s hạn chế lại trên phần trong của miền xác định, tức $0 < \phi < \pi/2, 0 < \theta < \pi/2$. Áp dụng 2.4.4, 2.4.1, và 1.3.8, ta có diện tích của phần mặt cầu B tính theo s phải đúng bằng diện tích tính theo tham số hóa r ở trên. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
\iint_{0<\phi<\pi/2, 0<\theta<\pi/2} |(s_\phi \times s_\theta)(\phi,\theta)|\, d\phi d\theta &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} R^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \pi R^2/2.
\end{aligned}$$

Từ đây ta nói diện tích của mặt cầu bán kính R là $4\pi R^2$.

Từ tính toán trên ta cũng có thể ghi lại một công thức cho phần tử diện tích của mặt cầu

$$dS = R^2 \sin\phi\, d\phi d\theta.$$

Ghi chú. Người đọc kĩ tính có thể thấy việc tính diện tích mặt cầu bằng cách chia thành nhiều phần như trên dẫn tới những câu hỏi, chẳng hạn về sự phụ thuộc vào cách chia. Mặc dù đã cố gắng nhưng ở đây chúng ta không giải quyết được hết các vấn đề. Xem thêm ở 2.8.

Ví dụ. Tính tích phân của trường $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,1)$ trên mặt S là đồ thị $z = x^2+y^2$, với $x^2+y^2 \leq 1$, định hướng lên trên. Mặt S có thể được tham số hóa bởi mặt đơn, chính qui $r(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, trên miền $x^2+y^2 \leq 1$, xem 2.4.3. Tham số hóa này cho định hướng lên trên như yêu cầu. Vậy:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (\vec{F}\circ r)\cdot\left(r_x \times r_y\right)\ dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x,y,1)\cdot(-2x,-2y,1)\ dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (-2x^2-2y^2+1)\ dxdy\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2r^2+1)r\ dr\ d\theta = 2\pi.
\end{aligned}$$

Pháp tuyến của mặt. Liên hệ giữa hai loại tích phân mặt

Dưới các giả thiết của 2.4.4, giả sử r và r' có cùng định hướng. Giả sử $p = r(u,v) = r'(s,t)$ với $(u,v) \in \mathring{D}$ và $(s,t) \in \mathring{D'}$. Theo phương trình 2.4.2 tại p hai vectơ $r_u \times r_v$ và $r'_s \times r'_t$ có cùng phương cùng chiều. Vậy tại p vectơ pháp tuyến đơn vị

$$n(p) = \frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|} = \frac{r'_s(s,t)\times r'_t(s,t)}{|r'_s(s,t)\times r'_t(s,t)|}$$

được xác định không phụ thuộc vào cách chọn tham số hóa cùng định hướng. Vì vậy **việc định hướng mặt cong đồng nghĩa với việc chọn chiều pháp tuyến**.

Ta có

$$\begin{aligned}
\iint_S F\cdot n\ dS &= \iint_D F(r(u,v))\cdot \frac{r_u(u,v)\times r_v(u,v)}{|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|}|r_u(u,v)\times r_v(u,v)|\ dA\\
&= \iint_D F(r(u,v))\cdot(r_u(u,v)\times r_v(u,v))\ dA\\
&= \iint_S F\cdot d\vec{S}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\boxed{\iint_S F\cdot d\vec{S} = \iint_S F\cdot n\ dS.}$$

Điều này khẳng định lại rằng tích phân mặt loại hai là tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt.

* Chứng minh 2.4.4

Ta cần bổ đề sau, bản thân nó cũng có ý nghĩa độc lập:

Bổ đề. *Nếu $D \subset \mathbb{R}^2$ đóng và bị chặn, $r: D \to \mathbb{R}^3$ là một mặt đơn liên tục với vết $S = r(D)$ thì r là một đồng phôi lên S.*

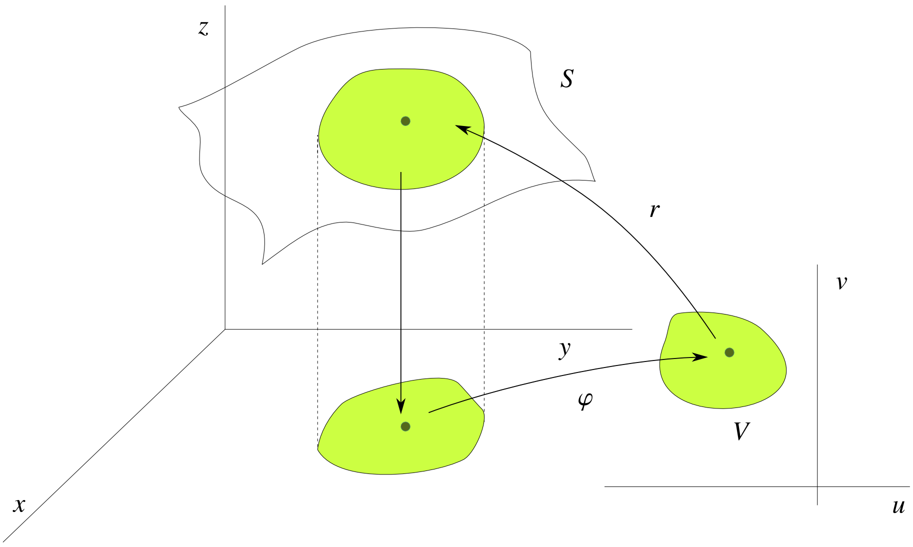
Chứng minh. Ta chứng minh ánh xạ ngược r^{-1} là liên tục. Giả sử U là một tập mở trên D, ta cần chứng tỏ $(r^{-1})^{-1}(U) = r(U)$ là mở trong S. Vì $D\setminus U$ là tập con đóng bị chặn của $\mathbb{R}^2$ nên nó compắc. Do đó ảnh của nó $r(D\setminus U)$ là tập compắc, do đó đóng trong S. Do đó $S\setminus r(D\setminus U) = r(U)$ mở trong S. □

Chứng minh 2.4.4 . Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$; $r: D \to \mathbb{R}$ và $r': D' \to \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn chính qui có cùng vết S. Do bổ đề trên, ta có $r'^{-1}\circ r: D \to D'$ là một đồng phôi. Suy ra $r'^{-1}\circ r$ hạn chế lại trên $\mathring{D}$ là một đồng phôi lên ảnh của nó. Theo một định lý trong môn Tôpô gọi là định lý bất biến miền ([Mun00, tr. 381]), thì một tập con của $\mathbb{R}^2$ mà đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^2$ thì phải mở trong $\mathbb{R}^2$. Do đó $(r'^{-1} \circ r)(\overset{\circ}{D})$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$. Như vậy $r'^{-1} \circ r$ mang điểm trong của D thành điểm trong của D'. Tương tự $r^{-1} \circ r'$ mang điểm trong của D' thành điểm trong của D, do đó $r(\overset{\circ}{D}) = r'(\overset{\circ}{D'})$. Từ đó ta cũng có $r(\partial D) = r'(\partial D') = \partial S$.

Tiếp theo ta chứng minh $r^{-1} \circ r'$ là hàm trơn trên $\overset{\circ}{D'}$ bằng cách tương tự trong chứng minh của kết quả cho tích phân đường 2.1.3. Viết $r(u,v) = (x,y,z)$. Xét điểm $r(u_0,v_0)$ với $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{D}$. Vì $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) \neq 0$ nên một trong các số

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$$

phải khác 0. Giả sử $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$. Theo định lý hàm ngược, có một lân cận mở $V \subset \overset{\circ}{D}$ của (u_0,v_0) sao cho trên V ánh xạ $(u,v) \to (x,y)$ là một vi đồng phôi với ánh xạ ngược trơn φ. Khi đó những điểm trên $r(V)$ có dạng $(x,y,z(\varphi(x,y)))$, nói cách khác $r(V)$ là đồ thị của một hàm theo hai biến x và y.



Trên $r(V)$ thì ánh xạ r^{-1} là hợp của ánh xạ chiếu $r(V) \xrightarrow{p} \varphi^{-1}(V)$ và ánh xạ φ:

$$\begin{array}{ccc} r(V) \xrightarrow{p} & \varphi^{-1}(V) & \xrightarrow{\varphi} V \\ (x,y,z) \mapsto & (x,y) & \mapsto (u,v). \end{array}$$

Vì $(r^{-1} \circ r')^{-1}(V)$ là một tập mở của $\mathbb{R}^2$ chứa trong D' và trên tập này $r^{-1} \circ r' = (\varphi \circ p) \circ r'$ là hợp của những hàm trơn nên ta kết luận $r^{-1} \circ r'$ là hàm trơn trên $\overset{\circ}{D'}$. □

Bài tập

2.4.6. Tính:

(a) Tính diện tích phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $3 \leq z \leq 5$.

(b) Cho S là mặt xác định bởi $z = x^2 + y$ với $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$. Tính $\iint_S x\, dS$.

(c) Cho S là mặt cầu tâm 0 bán kính 2. Tính $\iint_S z^4\, dS$.

(d) Cho S là tam giác trong $\mathbb{R}^3$ với các đỉnh $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Tính $\iint_S y\, dS$.

(e) Cho S là mặt trụ $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$. Tính $\iint_S z\, dS$.

(f) Cho $\vec{F}(x,y,z) = (-x,y,z)$. Cho S là mặt tứ diện bao bởi các mặt phẳng $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+z=2$, định hướng ra ngoài. Tính tích phân $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

(g) Cho khối E xác định bởi điều kiện $x^2+y^2 \le 1$, $1 \le z \le 2$. Gọi S là mặt biên của E, định hướng ra ngoài. Cho $F(x,y,z) = (2x, 3y, 4z)$. Tính thông lượng của F qua S.

(h) Tính tích phân của trường $(x,y,z-2y)$ trên mặt $(s\cos t, s\sin t, t)$, $0 \le s \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$. Hãy vẽ mặt này (bằng máy tính).

2.4.7. Cho mặt elliptic paraboloid $z = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$, $z \le 5$.

(a) Bằng cách đổi biến $\frac{x}{3} = r\cos\theta$, $\frac{y}{4} = r\sin\theta$ đưa ra một phương trình tham số của mặt.

(b) Tính xấp xỉ diện tích của mặt này.

2.4.8. Cho S là mặt $z = xy$ với $0 \le x \le 2$ và $0 \le y \le 3$. Tính tích phân mặt

$$\iint_S xyz\, dS$$

ra số thập phân.

2.4.9. Mặt helocoid có phương trình tham số $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $1 < r < 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Vẽ mặt này. Giả sử một vật có hình dạng một mặt helocoid có mật độ khối lượng tỉ lệ với khoảng cách tới trục, cụ thể $\rho(x,y,z) = r$. Hãy tính khối lượng của vật này.

2.4.10. Trên bề mặt Quả đất, tọa độ kinh tuyến và vĩ tuyến có liên hệ chặt chẽ với tọa độ cầu. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O ở tâm Quả đất, trục Oz đi qua Cực Bắc, và phần tư đường tròn từ tia Oz sang tia Ox đi qua Greenwich, nước Anh. Giả sử một điểm có tọa độ là $\varphi°$ vĩ độ Bắc và $\lambda°$ kinh độ Đông, khi đó tọa độ cầu của điểm đó là $\phi = (90-\varphi)°$ và $\theta = \lambda°$ (tuy nhiên nhớ là trong tọa độ cầu góc cần được đo bằng radian).

Thành phố Hồ Chí Minh nằm trong vùng từ $10°10'$ tới $10°38'$ vĩ độ Bắc và $106°22'$ tới $106°54'$ kinh độ Đông ($1' = 1/60°$). Tính diện tích của vùng này. Bán kính của Quả đất là 6378 km.

2.4.11. ✓ Cho $v = (y^2, x^2, z^2+2y)$ là trường vectơ vận tốc (đơn vị centimeter/giây) của một dòng chất lỏng trong $\mathbb{R}^3$. Hãy tính tốc độ chất lỏng đi qua mặt cầu đơn vị tâm tại gốc tọa độ (tức là thể tích chất lỏng đi qua mặt trong một đơn vị thời gian).

2.4.12 (định luật Gauss về điện trường). Gọi E là điện trường gây bởi điện tích q tại điểm O. Lấy quả cầu $B(O,R)$ tâm O, định hướng ra ngoài. Dùng định luật Coulomb (2.2.7), hãy tính tích phân và chứng tỏ

$$\iint_{\partial B(O,R)} E\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Vậy thông lượng của điện trường qua một mặt cầu tâm tại vị trí của điện tích tỉ lệ với điện tích (xem dạng tổng quát hơn ở mục 2.7).

2.4.13. Giá trị trung bình của hàm f trên mặt S được định nghĩa bằng

$$\frac{1}{|S|}\iint_S f\, dS.$$

Nhiệt độ trên một mái vòm hình nửa mặt cầu bán kính 20 mét tỉ lệ với cao độ, cụ thể nhiệt độ tại điểm (x,y,z) trên mặt cầu $x^2+y^2+(z-50)^2 = 20^2$ là $T(x,y,z) = \frac{1}{2}z$. Hãy tính nhiệt độ trung bình trên mái vòm này.

2.4.14 (diện tích mặt tròn xoay). Giả sử $f(x)$ dương, trơn trên $[a,b]$. Hãy tính diện tích của mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đồ thị $y = f(x)$ quanh trục x.

2.4.15. Tính diện tích mặt ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.4.16. Tính diện tích mặt nón cân với đáy là hình tròn bán kính R và chiều cao h.

2.4.17. Không cần tính, hãy cho biết giá trị của tích phân

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} x\, dS.$$

2.4.18. Cho S là mặt cầu tâm 0 bán kính R. Hãy tính $\iint_S x^2\, dS$ mà không cần tham số hóa.

Có thể làm theo ý sau đây:

(a) Chứng tỏ, mà không cần tính, rằng $\iint_S x^2\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_S z^2\, dS$.

(b) Tính $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ mà không cần tham số hóa.

2.4.19. Hãy tính $\iint_S (x, y, z) \cdot d\vec{S}$ trong đó S là mặt cầu tâm 0 bán kính R định hướng ra ngoài, mà không tham số hóa, tức là hãy tính nhẩm!

2.5 Công thức Stokes

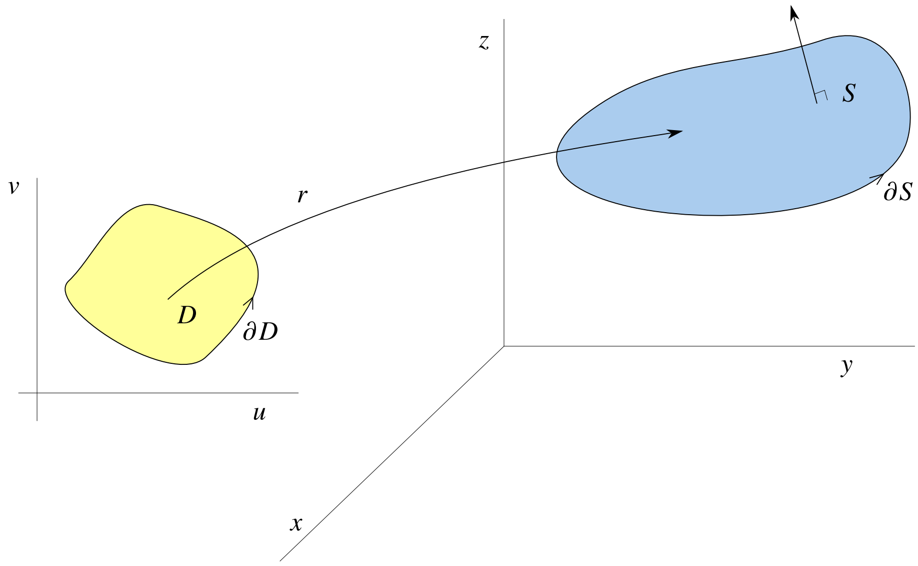
Định nghĩa. Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì

$$\boxed{\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức, với $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, thì $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$. Trường $\operatorname{curl} F$ còn được gọi là **trường xoay** của trường F. Toán tử curl[3] còn được kí hiệu là rot (rotation – xoay).

Dạng chính của công thức Stokes được dùng trong môn học này là

$$\boxed{\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.}$$



Trong công thức này **biên ∂S cần được định hướng tương thích với định hướng của S**. Một cách miêu tả trực quan cho định hướng trên biên ∂S là khi đi dọc theo biên theo chiều đã định, thân người hướng theo chiều pháp tuyến đã chọn của S thì mặt S phải nằm bên tay trái. Một cách miêu tả khác là: **đặt lòng bàn tay phải hướng theo chiều của biên thì ngón tay cái chỉ chiều của pháp tuyến của mặt**.

Công thức Stokes là một phát triển của công thức Green lên không gian ba chiều. Thực vậy, nếu S là miền phẳng và F là một trường phẳng trên S thì $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Công thức Stokes trở thành

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S} = \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot k\; dS \\ &= \iint_S (Q_x - P_y)\; dS = \iint_S (Q_x - P_y)\; dxdy,\end{aligned}$$

chính là công thức Green.

Công thức Stokes còn có thể được viết ở dạng tọa độ:

$$\int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S (R_y - Q_z)\; dydz + (P_z - R_x)\; dzdx + (Q_x - P_y)\; dxdy.$$

[3] trong tiếng Anh curl có nghĩa là xoắn, cuộn, quăn, ...

Tuy chúng ta sẽ không dùng dạng trên trong môn này nhưng nó thể hiện rõ hơn sự tương tự của công thức Stokes với công thức Green.

Dưới đây là một phát biểu chính xác mà ta có thể chứng minh được:

2.5.1 Định lý (công thức Stokes). *Cho miền phẳng D có biên ∂D là vết của đường γ có hướng tương thích với D và giả sử công thức Green có thể áp dụng được cho D. Cho mặt r trơn cấp hai trên một tập mở chứa D. Gọi $\partial r = r\circ\gamma$ là đường biên của r. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa vết của r. Khi đó:*

$$\int_{\partial r} F\cdot d\vec{s} = \iint_r \operatorname{curl} F\cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh. Chứng minh dưới đây tuy chứa những biểu thức dài dòng nhưng chỉ gồm những tính toán trực tiếp và việc áp dụng công thức Green. Viết $F=(P,Q,R)$ và $(x,y,z)=r(u,v)$. Viết $\gamma(t)=(u(t),v(t))$, $a\le t\le b$, một tham số hóa theo định hướng dương của ∂D. Ta được (trong vài biểu thức dưới đây biến được lược bỏ cho gọn hơn):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial r} F\cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(u(t),v(t)))\cdot\frac{d}{dt}r(u(t),v(t))\,dt\\
&= \int_a^b F(r(u(t),v(t)))\cdot(r_uu'+r_vv')\,dt\\
&= \int_a^b [P(x,y,z)(x_uu'+x_vv')+Q(x,y,z)(y_uu'+y_vv')+\\
&\qquad +R(x,y,z)(z_uu'+z_vv')]\,dt\\
&= \int_a^b [(P(x,y,z)x_u+Q(x,y,z)y_u+R(x,y,z)z_u)u'+(P(x,y,z)x_v+\\
&\qquad +Q(x,y,z)y_v+R(x,y,z)z_v)v']\,dt\\
&= \int_\gamma (Px_u+Qy_u+Rz_u)\,du+(Px_v+Qy_v+Rz_v)\,dv.
\end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng công thức Green cho D ta được tích phân trên bằng

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial u}(Px_v+Qy_v+Rz_v)-\frac{\partial}{\partial v}(Px_u+Qy_u+Rz_u)\right]dudv.$$

Tính các đạo hàm hàm hợp, chẳng hạn

$$(Px_v)_u=\left(P_xx_u+P_yy_u+P_zz_u\right)x_v+Px_{uv},$$

và đơn giản hóa, dùng tính trơn cấp hai của r, ta được tích phân trên bằng

$$\begin{aligned}
&\iint_D [(R_y-Q_z)(y_uz_v-z_uy_v)+(P_z-R_x)(z_ux_v-x_uz_v)+\\
&\qquad +(Q_x-P_y)(x_uy_v-x_vy_u)]\,dudv\\
&\quad = \iint_D [\operatorname{curl}(P,Q,R)\cdot(r_u\times r_v)]\,dudv=\iint_r \operatorname{curl} F\cdot d\vec{S}.
\end{aligned}$$

□

Ta có thể phát biểu một hệ quả độc lập với tham số hóa, là dạng thường gặp trong môn học này, sử dụng các khái niệm đã được đưa ra ở 2.4.4:

Định lý. *Giả sử S là vết của một mặt xác định trên tập đóng bị chặn, có biên là vết của một đường chính qui từng khúc, trên đó công thức Green áp dụng được. Giả sử mặt này là đơn, chính qui, hơn* *nữa trơn cấp hai trên tập mở chứa miền xác định. Giả sử S và ∂S có định hướng tương thích. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa S. Khi đó*

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh. Lấy r là mặt đơn, chính qui trên miền phẳng đóng bị chặn D với vết S, đại diện cho định hướng của S. Khi biên ∂D của miền xác định D của r là vết của đường γ chính qui từng khúc thì ∂D có độ đo không, xem 2.3.24. Theo 2.4.5 thì tích phân $\iint_r \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$ không phụ thuộc vào cách chọn r. Đường $r \circ \gamma$ cũng chính qui từng khúc, xem 2.5.14, do đó theo 2.1.4 tích phân $\int_{r\circ\gamma} F \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào cách chọn γ. Mặt $S = r(D)$ và biên $\partial S = r(\partial D)$ có định hướng tương thích có nghĩa là γ có hướng tương thích với D theo công thức Green, định hướng của S được cho bởi r, và định hướng của ∂S được cho bởi đường $r \circ \gamma$. Bây giờ 2.5.1 cho hai vế bằng nhau. □

Ví dụ. Cho $F(x, y, z) = (x^2, y^3, z^4)$. Cho C là đường tam giác với các đỉnh $(1, 2, 3)$, $(2, 0, -1)$, $(4, 3, 1)$, định hướng theo thứ tự đó. Ta tính $\int_C F \cdot d\vec{s}$.

Có thể tính trực tiếp hoặc dùng phương pháp trường bảo toàn, nhưng bây giờ ta có thêm một công cụ là công thức Stokes. Đường tam giác C bao hình tam giác S với định hướng sinh bởi C. Áp dụng công thức Stokes:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Ở đây $\operatorname{curl} F = 0$. Vậy tích phân trên bằng 0.

Ví dụ. Cho $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$. Gọi C là giao của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Ta tính $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$ bằng hai cách: tính trực tiếp, và dùng công thức Stokes.

(a) Tính trực tiếp: Ta lấy một tham số hóa của đường C là $C(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Tính trực tiếp I:

$$\begin{aligned} I &= \int_C F(C(t)) \cdot C'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t(1 - \cos t - \sin t) + (1 - \cos t - \sin t)\cos t) \cdot \\ &\quad \cdot(-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)\, dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

(b) Dùng công thức Stokes: Trước hết tính được $\operatorname{curl} F(x, y, z) = (-y, -z, -x)$. Tham số hóa mặt S bao bởi C bởi $r(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, $x^2 + y^2 \le 1$. Tham số hóa này có vectơ pháp tuyến tương ứng là $r_x \times r_y(x, y) = (1, 1, 1)$, hướng lên, do đó phù hợp với định hướng cần thiết trong công thức Stokes. Bây giờ:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \operatorname{curl} F(x, y) \cdot (r_x \times r_y(x, y))\, dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-y, -(1 - x - y), -x) \cdot (1, 1, 1)\, dxdy = -\pi. \end{aligned}$$

Điều kiện để trường ba chiều là bảo toàn

2.5.2 Mệnh đề (curl grad = 0)**.** *Nếu f là hàm thực có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó* $\operatorname{curl}(\nabla f) = 0$.

Dùng kí hiệu hình thức thì $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

Chứng minh. Tương tự như trường hợp hai chiều, tính trực tiếp ta được[4]

$$\operatorname{curl} \nabla f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = 0.$$

□

Hệ quả (điều kiện cần để trường ba chiều là bảo toàn). *Nếu F là trường trơn bảo toàn trên một tập mở thì $\operatorname{curl} F = 0$ trên đó. Nói cách khác điều kiện sau phải được thỏa:*

$$\begin{cases} R_y &= Q_z \\ P_z &= R_x \\ Q_x &= P_y. \end{cases}$$

Ta có thể dùng kết quả này để chứng tỏ một trường là không bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng curl của nó khác 0.

Ví dụ. Trường $F(x,y,z) = (y,x,y)$ có bảo toàn trên $\mathbb{R}^3$ hay không?

Trường F trơn cấp một trên $\mathbb{R}^3$. Nếu F là bảo toàn thì phải có $\operatorname{curl} F = 0$. Nhưng trong trường hợp này $\operatorname{curl} F = (1,0,0) \neq 0$, vậy F không bảo toàn.

Bằng cách chứng minh tương tự ở 2.3.1 nhưng thay công thức Green bởi công thức Stokes ta được:

2.5.3 Mệnh đề (bổ đề Poincaré ba chiều). *Nếu F trơn trên một miền mở hình sao trong $\mathbb{R}^3$ và $\operatorname{curl} F = 0$ thì F là bảo toàn trên đó.*

Bài tập

2.5.4. Trường sau có bảo toàn hay không?

(a) $F(x,y,z) = (y,x,y)$.

(b) $F(x,y,z) = (2xe^{x^2}, z\sin y^2, z^3)$.

2.5.5. Cho S là mặt $z = x^2 + y^2$ với $z \leq 1$, định hướng lên trên. Tính lưu lượng của trường $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$ trên S (tức là $\iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}$) bằng hai cách:

(a) Tính trực tiếp.

(b) Dùng công thức Stokes.

2.5.6. Cho S là mặt $z = 9 - x^2 - y^2$ với $z \geq 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho trường $F(x,y,z) = (2z - y, x + z, 3x - 2y)$. Tính trực tiếp lưu lượng của F trên S, tức $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

(b) Dùng công thức Stokes tính $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

2.5.7. Cho C là đường giao của mặt $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40$ và mặt $z = 2$ được định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống. Tìm $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ với $\vec{F}(x,y,z) = (y, 2yz + 1, xz^4 + \cos(2z+1))$ bằng cách tính trực tiếp và bằng cách dùng công thức Stokes.

2.5.8. Cho $F(x,y,z) = (xy, yz, zx)$. Gọi C là giao của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Đặt $I = \int_C F \cdot d\vec{s}$.

(a) Tìm một tham số hóa của đường C.

[4] Chú ý qui ước về kí hiệu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

(b) Tính trực tiếp I.

(c) Tính curl$F$.

(d) Dùng công thức Stokes, tính I.

2.5.9. Cho f và g là hai hàm thực trơn cấp hai trên $\mathbb{R}^3$.

(a) Chứng tỏ $\operatorname{curl}(f\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$.

(b) Tính tích phân $\int_C f\nabla f \cdot d\vec{s}$ trong đó $C(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

2.5.10. Trong $\mathbb{R}^3$ cho S_1 là nửa mặt cầu trên $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \ge 0$; cho S_2 là mặt paraboloid $z = 1-x^2-y^2$, $z \ge 0$, cả hai được định hướng lên trên.

(a) Vẽ hai mặt này trên cùng một hệ tọa độ.

(b) Cho F là một trường trơn trên $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ $\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}$.

(c) Hãy tổng quát hóa.

2.5.11. ✓ Nếu S là mặt cầu thì $\iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0$.

2.5.12. Cho $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ là một vectơ cố định. Cho S là một mặt mà trên đó công thức Stokes có thể áp dụng được. Hãy chứng minh:

$$\int_{\partial S} (\vec{v}\times\vec{r})\cdot d\vec{s} = 2\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\, dS,$$

trong đó $\vec{r}$ là vectơ vị trí, tức $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$.

2.5.13. (a) Chứng minh đẳng thức

$$a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c.$$

(b) Từ đó chứng minh

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \nabla(\operatorname{div} F) - \Delta F.$$

Ở đây ΔF được hiểu là toán tử Laplace $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ tác động vào từng thành phần của F.

2.5.14. Chứng tỏ nếu γ là một đường chính qui trên mặt phẳng và r là một mặt chính qui xác định trên vết của γ thì $r\circ\gamma$ là một đường chính qui trong $\mathbb{R}^3$.

2.5.15. * Chứng minh bổ đề Poincaré 3-chiều (2.5.3).

2.5.16 (cảm ứng điện từ). Định luật Faraday phát biểu rằng khi thông lượng từ trường qua một mặt giới hạn bởi một mạch kín thay đổi thì trong mạch xuất hiện dòng điện cảm ứng. Chính xác hơn, gọi $\vec{E}$ là điện trường, $\vec{B}$ là từ trường, S là một mặt với biên là đường ∂S được định hướng tương thích như trong công thức Stokes, thì

$$\int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}.$$

Giả sử một nguồn năng lượng cơ học như sức nước hay sức gió làm quay một trục với vận tốc ω vòng/đơn vị thời gian. Một vòng dây phẳng được gắn vào trục này, được đặt trong một từ trường cố định $\vec{B}$. Gọi A là diện tích của hình phẳng bao bởi vòng dây. Đại lượng $\int_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{s}$ thường được kí hiệu là emf. Chứng tỏ

$$emf = -A|\vec{B}|2\pi\omega\sin(2\pi\omega t).$$

Vậy trong vòng dây xuất hiện một dòng điện xoay chiều. Đây là một nguyên lý cơ sở của máy phát điện.

2.6 Công thức Gauss–Ostrogradsky

Định nghĩa. Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Dưới dạng kí hiệu hình thức thì $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$. Hàm $\operatorname{div} F$ còn được gọi là **hàm phân tán** (divergence) của trường F.

Công thức Gauss–Ostrogradsky[5] còn được gọi là công thức Divergence. Đây là tổng quát hoá của dạng thông lượng của công thức Green 2.3.3, cho một công thức có dạng

$$\iint_{\partial E} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_E \left(P_x + Q_y + R_z\right)\,dxdydz.$$

Dưới đây ta sẽ phát biểu và chứng minh công thức này cho khối đơn giản theo cả ba chiều. Theo mỗi chiều thì khối là miền nằm giữa hai đồ thị. Chẳng hạn theo chiều trục z thì khối là $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \le z \le g(x, y)\}$, với D đóng, bị chặn, có diện tích. Giả sử thêm rằng trên ∂D thì $f = g$ hoặc $f < g$. Giả sử các hàm f, g là trơn thì biên ∂E, như đã thảo luận ở 1.4.5, là hội của mặt dưới là $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ (chính qui, hướng xuống), mặt trên là $\{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ (chính qui, hướng lên), ngoài ra nếu trên ∂D mà $f < g$ thì biên còn gồm mặt bên hông là $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in \partial D, f(x, y) \le z \le g(x, y)\}$. Giả sử thêm ∂D là vết của một đường chính qui từng khúc. Ta nói E là một **khối đơn giản với biên trơn từng mảnh**.

Ví dụ. Quả cầu đóng, khối ellipsoid, khối hộp chữ nhật là những khối đơn giản với biên trơn từng mảnh.

Định lý (công thức Gauss–Ostrogradsky). *Cho trường F trơn trên một tập mở chứa một khối đơn giản E với biên trơn từng mảnh được định hướng ra ngoài. Khi đó:*

$$\boxed{\iint_{\partial E} F \cdot n\,dS = \iint_{\partial E} F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\,dV.}$$

Chứng minh. Viết $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Viết E như là khối đơn theo chiều Oz như là tập hợp những điểm (x, y, z) với $f(x, y) \le z \le g(x, y)$ trong đó f, g là hàm trơn xác định trên miền phẳng D. Ta sẽ chứng tỏ

$$\iint_{\partial E} R\vec{k} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \frac{\partial}{\partial z} R\,dV.$$

Tương tự ta chứng minh hai biểu thức tương ứng cho hai chiều còn lại, cộng lại và được đẳng thức phải được chứng minh.

Nếu $f < g$ trên ∂D thì ∂E có mặt hông, nhưng tích phân của $R\vec{k}$ bằng không trên đó, cơ bản là vì pháp tuyến của mặt hông nằm ngang, do đó vuông góc với trường $R\vec{k}$. Chi tiết đầy đủ phức tạp hơn, được trình bày trong đoạn ngay dưới đây.

Biên ∂D trừ ra hữu hạn điểm là chính qui. Tại mỗi điểm (x_0, y_0) trên ∂D mà tại đó biên là chính qui thì có một tập mở U của $\mathbb{R}^2$ sao cho $U \cap \partial D$ đồng phôi với một khoảng mở (a, b) (xem chứng minh của 2.1.3) và sao cho có $\epsilon > 0$ sao cho $(U \cap \partial D) \times (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$ được chứa trong mặt hông (do tính liên tục của f và g). Phần này của mặt hông như vậy có pháp tuyến. Mặt hông chứa đoạn thẳng (x_0, y_0, z) với $z \in (z_0 - \epsilon, z_0 + \epsilon)$. Đường này có vectơ tiếp xúc là $\vec{k}$, do đó $\vec{k}$ là một vectơ tiếp xúc của mặt hông, vì thế vuông góc với vectơ pháp tuyến của mặt hông.

[5] tên Ostrogradsky còn được viết là Ostrogradski

Như vậy tích phân của $R\vec{k}$ trên ∂E bằng tổng tích phân của $R\vec{k}$ trên mặt trên và mặt dưới, là các mặt đồ thị, bằng:

$$\begin{aligned}
&\iint_D R(x,y,g(x,y))\vec{k}\cdot(-g_x,-g_y,1)\, dA+\\
&\qquad + \iint_D R(x,y,f(x,y))\vec{k}\cdot(f_x,f_y,-1)\, dA\\
&\qquad\qquad = \iint_D [R(x,y,g(x,y)) - R(x,y,f(x,y))]\ dA.
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo công thức Fubini

$$\begin{aligned}
\iiint_E R_z\ dV &= \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} R_z\ dz\right) dA\\
&= \iint_D (R(x,y,g(x,y) - R(x,y,f(x,y)))\ dA.
\end{aligned}$$

Vậy ta được đẳng thức mong muốn. □

Ví dụ. Dùng công thức Gauss–Ostrogradsky, ta tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (2x + e^y z, x^2 y, yz)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ định hướng ra ngoài:

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2+z^2=1} F\cdot d\vec{S} &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} \operatorname{div} F(x,y,z)\ dxdydz\\
&= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (2 + x^2 + y)\ dxdydz\\
&= 2\frac{4\pi}{3} + \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (\rho\sin\phi\cos\theta)^2\rho^2\sin\phi\ d\theta d\phi d\rho + 0\\
&= \frac{8\pi}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{44\pi}{15}.
\end{aligned}$$

Ví dụ. Hãy tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (x,y,2-2z)$ qua mặt S cho bởi $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$, định hướng lên trên, bằng hai cách: (a) tính trực tiếp, và (b) tính thông lượng của F qua một mặt khác và dùng định lý Gauss–Ostrogradsky.

(a) Tham số hóa mặt S: $r(x,y) = (x,y,1-x^2-y^2)$ với $x^2+y^2 \le 1$. Có $r_x \times r_y(x,y) = (2x,2y,1)$ hướng lên trên.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S F\cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\le 1} F(r(x,y))\cdot(r_x\times r_y)(x,y)\ dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x,y,2-2(1-x^2-y^2))(2x,2y,1)\ dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} 4(x^2+y^2)\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4r^2\ rdrd\theta = 2\pi.
\end{aligned}$$

(b) Gọi S_1 là mặt cho bởi $x^2+y^2 \le 1$, $z = 0$, định hướng xuống dưới. Mặt S cùng S_1 tạo thành mặt kín S_2 bao khối E. Áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky:

$$\iint_S F\cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} F\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} F\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} F\ dV = \iiint_D 0\ dV = 0.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} F\cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} F\cdot n\ dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (x,y,2-0)\cdot(0,0,-1)\ dA\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} -2\ dA = -2\pi.
\end{aligned}$$

Do đó $\iint_S F \cdot d\vec{S} = 2\pi$.

Tính trực tiếp từ công thức tương tự như ở 2.5.2 ta có kết quả sau:

Mệnh đề (div curl = 0)**.** *Nếu F là trường có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một tập mở thì trên đó* $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$.

Viết bằng kí hiệu hình thức: $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$. Kết quả này cho một điều cần để một trường là trường curl của một trường khác.

Ý nghĩa vật lý của **div** và **curl**

Trước hết ta cần bổ đề sau đây:

2.6.1 Bổ đề. *Cho f là một hàm thực khả tích trên một lân cận của điểm $p \in \mathbb{R}^n$ và liên tục tại p. Gọi $B'(p,r)$ là quả cầu đóng tâm tại p với bán kính r. Khi đó:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} f = f(p).$$

Vậy giá trị trung bình của một hàm liên tục quanh một điểm tiến về giới hạn là giá trị của hàm tại điểm đó.

Chứng minh. Vì f liên tục tại p nên cho $\epsilon > 0$, với r đủ nhỏ thì với mọi $q \in B'(p,r)$ ta có $|f(q) - f(p)| \le \epsilon$. Từ đó

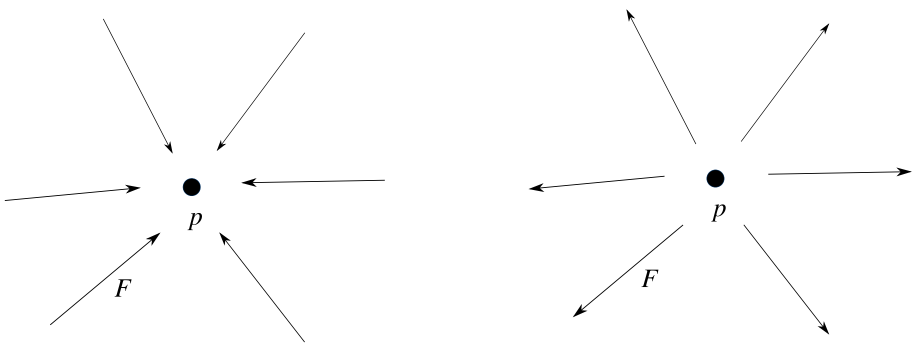
$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} f \right) - f(p) \right| &= \left| \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} [f(q) - f(p)] \right| \\
&\le \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} |f(q) - f(p)| \\
&\le \frac{1}{|B'(p,r)|} \int_{B'(p,r)} \epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Áp dụng bổ đề trên cho div ta được

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} F \, dA = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B'(p,r)|} \iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n \, dS. \tag{2.6.2}$$

Tích phân $\iint_{\partial B'(p,r)} F \cdot n \, dS$ là thông lượng của trường F ra khỏi mặt cầu $\partial B'(p,r)$. Vậy div $F(p)$ **chỉ độ phát tán của trường F trên đơn vị thể tích quanh p.**



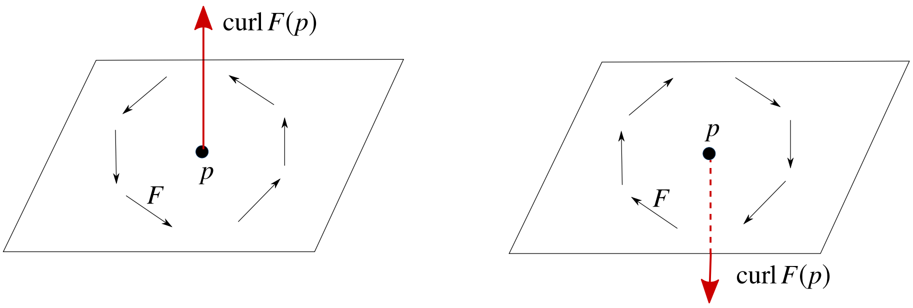
$\operatorname{div} F(p) < 0$ $\operatorname{div} F(p) > 0$

Xét một điểm p. Lấy một mặt phẳng qua p với phương định bởi pháp tuyến n. Xét hình tròn $B'(p,r)$ trên mặt phẳng này với tâm tại p và bán kính r. Ta có:

$$\operatorname{curl} F(p)\cdot n = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\iint_{B'(p,r)}\operatorname{curl} F\cdot n\, dA = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B'(p,r)|}\int_{\partial B'(p,r)} F\cdot d\vec{s}. \tag{2.6.3}$$

Vậy $\operatorname{curl} F(p)\cdot n$ thể hiện lưu lượng ngược chiều kim đồng hồ (độ xoay) của trường F trên phần tử diện tích quanh p trong mặt phẳng qua p vuông góc n.

Ta có $\operatorname{curl} F(p)\cdot n$ đạt giá trị lớn nhất khi n cùng phương cùng chiều với $\operatorname{curl} F(p)$. Vậy $\operatorname{curl} F(p)$ cho phương của mặt phẳng mà trên đó độ xoay của trường quanh p là lớn nhất, chiều của nó được xác định bởi chiều xoay của trường theo qui tắc bàn tay phải. Hơn nữa có thể chứng tỏ là độ lớn của $\operatorname{curl} F(p)$ tỉ lệ với tốc độ xoay theo góc của trường quanh p. Nói vắn tắt, **$\operatorname{curl} F(p)$ chỉ sự xoay của trường F tại điểm p**. Từ điều này tích phân $\iint_S \operatorname{curl} F\cdot d\vec{S}$ còn được gọi là **lưu lượng** (circulation) của trường F trên mặt S.



Ta có một miêu tả trực quan cho $\operatorname{curl} F(p)$: Tưởng tượng rằng ta thả một cái chong chóng vào trường, cố định nó tại điểm p nhưng để cho nó tự do đổi hướng và tự do xoay. Khi đó hướng ổn định của chong chóng chính là hướng của $\operatorname{curl} F(p)$, chiều xoay của nó chính là chiều xoay của trường, còn vận tốc xoay của chong chóng chỉ độ xoay của trường quanh p.

Ghi chú. Công thức cho div (2.6.2) và cho curl (2.6.3) cho thấy chúng là những đại lượng vật lý, không phụ thuộc hệ tọa độ.

Bài tập

2.6.4. Tiếp tục bài tập 2.2.2 và 2.2.3, xem F như là trường phẳng trong không gian ba chiều. Ước đoán $\operatorname{div} F$ tại điểm gốc tọa độ là âm, dương hay bằng không? Hãy miêu tả $\operatorname{curl} F$ tại điểm gốc tọa độ.

2.6.5. Tồn tại hay không một trường F khả vi liên tục cấp hai thỏa $\operatorname{curl} F(x,y,z) = (e^{yz}, \sin(xz^2), z^5)$?

2.6.6. Tính:

(a) Tiếp tục các bài tập 2.4.6. Nếu mặt S là kín hãy tính tích phân $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ bằng cách dùng công thức Gauss–Ostrogradsky.

(b) Tính thông lượng của trường $\vec{F}(x,y,z) = (3x, y^2, z^2)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 1$, định hướng ra ngoài.

(c) Tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (2x+e^{yz}, 2xy, y^2)$ qua mặt cầu đơn vị $x^2+y^2+z^2 = 1$ định hướng ra ngoài.

(d) Tính thông lượng của trường $F(x,y,z) = (y,z,x)$ qua mặt $x^2+y^4+z^6 = 2$, định hướng ra ngoài.

2.6.7. Cho trường

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right).$$

Chú ý đây là một trường xuyên tâm, tỉ lệ với trọng trường và điện trường.

(a) Tính $\text{div}(\vec{F})$.

(b) Gọi S_2 là mặt cầu $x^2+y^2+(z-3)^2=1$ được định hướng ra ngoài. Dùng công thức Gauss–Ostrogradsky, hãy tính $\iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

(c) Gọi S_1 là mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ được định hướng ra ngoài. Tính tích phân mặt $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S}$ bằng cách dùng tọa độ Euclid (x,y,z) hoặc dùng tọa độ cầu.

(d) Gọi S_3 là mặt $x^2+4y^2+9z^2=36$ được định hướng ra ngoài. Hãy tính $\iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

2.6.8. Cho S là mặt $z=9-x^2-y^2$ với $z\geq 0$, định hướng lên trên.

(a) Cho $G(x,y,z)=(e^y\cos z, x^2z, y^2+z)$. Cho S_1 là đĩa $x^2+y^2\leq 9$, $z=0$, định hướng xuống dưới. Tính thông lượng của G qua S_1, tức $\iint_{S_1} G\cdot\ d\vec{S}$.

(b) Dùng định lý Gauss–Ostrogradsky tính $\iint_{S\cup S_1} G\cdot\ d\vec{S}$.

(c) Tính $\iint_S G\cdot\ d\vec{S}$.

2.6.9. Cho T là nhiệt độ trên một miền $D\subset\mathbb{R}^3$, giả sử là một hàm trơn cấp hai. Vì nhiệt được chuyển từ nơi có nhiệt độ cao tới nơi có nhiệt độ thấp, và vectơ gradient chỉ hướng mà hàm có tốc độ thay đổi lớn nhất, nên sự thay đổi nhiệt trên miền này được mô hình hóa một cách đơn giản bằng trường dòng nhiệt $F=-k\nabla T$, với k là một hằng số dương.

(a) Chứng tỏ $\text{curl} F=0$.

(b) Chứng tỏ $\text{div} F=-k\Delta T$, trong đó Δ là toán tử Laplace: $\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

(c) Chứng tỏ nếu T là **hàm điều hòa**, tức là $\Delta T=0$, thì tổng dòng nhiệt qua một mặt cầu bất kì trong miền D luôn bằng không. (Xem 2.3.17.)

2.6.10 (diện tích mặt cầu). Áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky cho hàm $F(x,y,z)=(x,y,z)$, hãy tính diện tích của mặt cầu tâm tại 0 với bán kính R.

2.6.11. ✓ Hãy chứng minh các công thức sau, cũng được gọi là các **công thức Green**, với giả thiết công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được. (Xem 2.3.15.)

(a) $\iint_{\partial E} \nabla f\cdot n\ dS=\iiint_E \Delta f\ dV$.

(b) $\iint_{\partial E} (f\nabla g)\cdot n\ dS=\iiint_E (f\Delta g+\nabla f\cdot\nabla g)\ dV$.

(c) $\iint_{\partial E} (f\nabla g-g\nabla f)\cdot n\ dS=\iiint_E (f\Delta g-g\Delta f)\ dV$.

(d) $\iint_{\partial E} fn_i\ dS=\iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dV$. Ở đây n_i là tọa độ thứ i của vectơ pháp tuyến n.

(e) $\iint_{\partial E} fgn_i\ dS=\iiint_E \frac{\partial f}{\partial x_i}g\ dV+\iiint_E f\frac{\partial g}{\partial x_i}\ dV$.

2.6.12. Dùng công thức Gauss–Ostrogradsky hãy đưa ra một cách khác để tìm ra thể tích của một khối nón (xem 1.5.24). Cụ thể, đặt đỉnh khối nón ở O và đáy khối nón trên một mặt phẳng nằm ngang $z=a$, và áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky cho trường (x,y,z).

2.6.13. Giả sử có một điện tích q tại một điểm O. Theo định luật Coulomb (2.2.7), điện trường gây bởi điện tích q này tại một điểm bất kì trong không gian có vị trí cho bởi vectơ $\vec{r}$ đi từ điểm mang điện tích q tới điểm đang xét là:

$$E(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}\vec{r}.$$

Đáng chú ý là điện trường có độ lớn tỉ lệ nghịch với $|\vec{r}|^2$, do đó định luật Coulomb thường được gọi là một luật nghịch đảo bình phương (inverse-square law). Như ta đã thấy (2.2), trọng trường cũng được cho bởi một luật nghịch đảo bình phương.

(a) Tính toán trực tiếp, chứng tỏ $\text{div}\,E=0$.

(b) * Chứng tỏ rằng một trường có dạng $E=k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^m}$ (được gọi là một trường xuyên tâm, radial) thì có $\text{div}\,E=0$ khi và chỉ khi $m=3$. (Các thí nghiệm sau này kiểm chứng hằng số m trong định luật Coulomb bằng 3 sai khác không quá 3×10^{-16}.)

2.6.14. Mặt cyclide nhận được từ một mặt xuyến qua phép nghịch đảo qua một mặt cầu. Mặt xuyến được cho bởi tham số hóa

$$r(u,v) = ((5+\cos u)\cos v, (5+\cos u)\sin v, \sin u), \quad 0 \le u, v \le 2\pi.$$

Đưa mặt xuyến này ra ngoài mặt cầu đơn vị tâm O bán kính 1 bằng một phép tịnh tiến, chẳng hạn theo vectơ $(9,0,0)$, được một mặt xuyến mới với tham số hóa

$$\mathrm{rtorus}(u,v) = (9+(5+\cos u)\cos v, (5+\cos u)\sin v, \sin u), \quad 0 \le u, v \le 2\pi.$$

Thực hiện phép lấy nghịch đảo qua mặt cầu tâm O bán kính 1, tức là phép biến đổi mang mỗi điểm $p \neq 0$ thành điểm $\frac{p}{||p||^2}$. Khi đó mặt xuyến trở thành mặt cyclide S với tham số hóa

$$\mathrm{rcyclide}(u,v) = \frac{\mathrm{rtorus}(u,v)}{\|\mathrm{rtorus}(u,v)\|^2}.$$

(a) Vẽ mặt cyclide S.

(b) Tính diện tích mặt cyclide S ra số thập phân.

(c) Cho trường $F(x,y,z) = (y,x,3z)$. Tính thông lượng của F qua mặt cyclide S ra số thập phân.

(d) Tính thể tích của khối bao bởi mặt cyclide S ra số thập phân.

2.7 Vài ứng dụng của Giải tích vectơ

Định luật Gauss cho điện trường

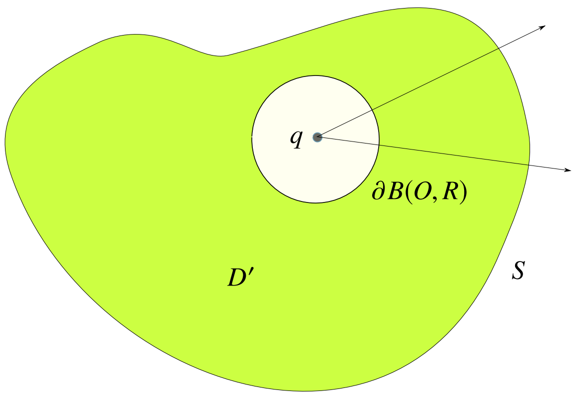
Gọi E là điện trường gây bởi điện tích q tại điểm O. Giả sử S là một mặt kín, biên của khối D. Giả sử công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được cho D. Nhắc lại từ 2.6.13 là $\operatorname{div} E = 0$. Nếu D không chứa điểm O thì

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Nếu D chứa điểm O ở phần trong, nói cách khác nếu S bao điểm O, thì lấy một quả cầu $B(O,R)$ đủ nhỏ sao cho nó không cắt S, và cho biên $\partial B(O,R)$ định hướng ra ngoài $B(O,R)$. Khi đó S cùng $\partial B(O,R)$ tạo thành biên của một khối D' không chứa O. Giả sử công thức Gauss–Ostrogradsky có thể áp dụng được cho D', ta được

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} - \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{D'} \operatorname{div} E \, dV = 0.$$

Suy ra $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S}$. Ở bài tập 2.4.12, dùng định luật Coulomb (2.2.7), ta đã tính được $\iint_{\partial B(O,R)} E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$.



Vậy

$$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

thông lượng của điện trường qua một mặt kín bao điện tích không phụ thuộc vào mặt và tỉ lệ với điện tích. Đây là nội dung của định luật được phát biểu bởi Johann Carl Friedrich Gauss. [6]

Ở trên ta vừa trình bày định luật Coulomb và định luật Gauss cho một điện tích. Trong trường hợp môi trường chứa điện tích tại mọi điểm (môi trường liên tục) thì ta có:

Định luật Coulomb	Định luật Gauss
$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, với ρ là hàm mật độ điện tích	$\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với D là khối được bao bởi mặt S và Q là tổng điện tích trên D

Định luật Gauss có thể được kiểm chứng bằng thí nghiệm dễ hơn định luật Coulomb, vì định luật Gauss có tính vĩ mô trong khi định luật Coulomb có tính vi mô. Ta chứng tỏ định luật Gauss dẫn tới định luật Coulomb bằng cách thuần túy toán học như sau. Xét một điểm p bất kì và xét quả cầu đóng $B'(p,r)$ tâm tại điểm đó với bán kính r. Theo định luật Gauss và công thức Gauss–Ostrogradsky:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{B'(p,r)} \rho \, dV = \iint_{\partial B'(p,r)} E \cdot d\vec{S} = \iiint_{B'(p,r)} \operatorname{div} E \, dV.$$

[6] Trong các tài liệu vật lý định luật Gauss thường được phát biểu mà không kèm theo điều kiện gì về tính trơn của mặt và của các hàm trong công thức.

Chia hai vế cho thể tích của quả cầu $B'(p,r)$ và lấy giới hạn khi $r \to 0$, dùng tính chất về giới hạn của giá trị trung bình của hàm liên tục 2.6.1 ta được định luật Coulomb.

$$\frac{\rho(p)}{\epsilon_0} = \operatorname{div} E(p).$$

Ngược lại dễ thấy định luật Gauss có thể nhận được từ định luật Coulomb bằng cách áp dụng công thức Gauss–Ostrogradsky.

Định luật Coulomb cho môi trường mang điện liên tục có thể nhận được một cách thuần túy toán học từ định luật Coulomb cho một điện tích bằng cách lấy tích phân và dùng hàm Dirac, một hàm suy rộng.

Các phương trình Maxwell về điện từ

Không lâu sau hai định luật Coulomb và Gauss, trong thập kỉ 1820, André Marie Ampère phát hiện ra rằng một dòng điện tạo ra quanh nó một từ trường theo định luật:

$$\int_C B \cdot d\vec{s} = \mu_0 I,$$

trong đó C là một đường cong kín bao quanh một dòng điện có cường độ không đổi I, B là từ trường, và μ_0 là một hằng số.

Năm 1831 Michael Faraday phát hiện rằng một từ trường thay đổi theo thời gian tới lượt nó lại tạo ra một điện trường. Định luật Faraday cho công thức:

$$\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S B \cdot d\vec{S}.$$

Năm 1864, James Clerk Maxwell phát triển định luật Ampère và thống nhất điện trường với từ trường:

Các phương trình Maxwell	
Dạng vi phân	Dạng tích phân
(1) (Coulomb) $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gauss) $\iint_S E \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, với S là một mặt kín
(2) $\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	(Faraday) $\int_{\partial S} E \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S B \cdot d\vec{S}$
(3) $\operatorname{div} B = 0$	$\iint_S B \cdot d\vec{S} = 0$, với S là một mặt kín
(4) (Ampère) $\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\operatorname{curl} B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$, với J là mật độ dòng điện	$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\int_{\partial S} B \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{d}{dt}\iint_S E \cdot d\vec{S}$, với I là cường độ dòng điện qua mặt S

Chẳng bao lâu sau lý thuyết của Maxwell đã được ứng dụng trong thực tế với việc phát minh ra sóng điện từ của Heinrich Hertz năm 1887. Các phương trình Maxwell cùng với các định luật của Newton tổng kết vật lý cổ điển. Có thể đọc thêm ở [Fey64, Chương 18].

Cơ học chất lỏng

Gọi $\vec{F}$ là trường vận tốc chuyển động của một dòng chất lỏng. Nếu $\operatorname{div}\vec{F} = 0$ (tại mọi điểm) thì người ta nói dòng chất lỏng là không nén được (incompressible) (vì nó không có chỗ bơm vào lẫn chỗ thoát ra). Các toán tử vi phân của Giải tích vectơ xuất hiện phổ biến trong mô hình hóa các hiện tượng cơ học. Chẳng hạn, một trong những phương trình quan trọng nhất mô tả dòng chảy chất lỏng cho tới nay vẫn đang được tập trung nghiên cứu là phương trình Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{F} - \nu\Delta\vec{F} &= -\nabla w + \vec{g}, \\ \operatorname{div}\vec{F} &= 0. \end{cases}$$

Bài tập

2.7.1. * Chứng tỏ các dạng vi phân và dạng tích phân của các phương trình Maxwell là tương đương với nhau về mặt toán học.

2.8 * Công thức Stokes tổng quát

Mục này giới thiệu sơ lược một số vấn đề liên quan tới tổng quát hóa của công thức Stokes và giải tích vectơ. Để chi tiết hơn có thể đọc chẳng hạn ở [VuSto].

Công thức Stokes cho mặt $(n-1)$-chiều trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Sau đây là một trường hợp của công thức Stokes được dùng phổ biến trong nghiên cứu các phương trình vật lý toán và phương trình đạo hàm riêng ([Eva97, tr. 627], [GT01, tr. 13]). Với $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ đặt

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} D_i F_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

2.8.1 Định lý. *Cho Ω là một tập con mở bị chặn của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Giả sử biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1. Giả sử ν là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial\Omega$. Giả sử trường vectơ F có các thành phần thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$. Khi đó:*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS.$$

Trong công thức trên, ta nói biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 có nghĩa là mỗi điểm trên $\partial\Omega$ có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^{n-1}$. Điều này cũng có nghĩa là mỗi điểm trên $\partial\Omega$ có một lân cận mà trên đó $\partial\Omega$ là đồ thị của một hàm trơn theo $(n-1)$ biến. Như ta đã thấy ở phần chứng minh của 2.1.3 và 2.4.4, khái niệm này là tổng quát hóa của khái niệm đường chính qui và mặt chính qui.

Một hàm thực f là thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$ nếu nó có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên Ω và các đạo hàm đó có mở rộng liên tục lên $\overline{\Omega}$.

Tích phân theo phần tử diện tích mặt dS có thể được định nghĩa một cách tương tự tích phân đường loại một và tích phân mặt loại một. Tuy nhiên có một khó khăn là có thể cần tới nhiều hơn một phép tham số hóa để phủ được hoàn toàn mặt. Để vượt qua khó khăn này người ta dùng một công cụ gọi là "phân hoạch đơn vị".

Sự thống nhất giữa các công thức Newton–Leibniz, Green, Stokes và Gauss–Ostrogradsky

Ta có thể nhận thấy một sự thống nhất của các công thức này: tích phân của một đối tượng hàm w trên biên ∂M của một đối tượng hình học M thì bằng với tích phân của một đối tượng hàm mới dw liên quan tới đạo hàm của đối tượng hàm w ban đầu trên đối tượng hình học M ban đầu:

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw.$$

Đây chính là dạng của một công thức tổng quát, được gọi chung là công thức Stokes.

Công thức Stokes cho mặt k-chiều trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Công thức Stokes tổng quát sẽ đúng trong trường hợp sau đây. Về mặt hình học, M là một mặt k-chiều, theo nghĩa mỗi điểm trên M có một lân cận vi đồng phôi với một tập mở của $\mathbb{R}^k$ hoặc một tập mở của một nửa của $\mathbb{R}^k$, những điểm không thuộc loại đầu tạo thành biên ∂M. Đây là khái niệm **đa tạp trơn** (smooth manifold) k-chiều.

Đối tượng hàm w thì phức tạp hơn. Đó là một **dạng vi phân** (differential form) bậc $(k-1)$. Khi đó dw là đạo hàm của dạng w và là một dạng bậc k.

Thế nào là tích phân của một dạng vi phân trên một mặt? Vì mỗi điểm trên mặt có một lân cận vi đồng phôi với với một tập con của $\mathbb{R}^k$ nên thông qua phép vi đồng phôi ta mang tích phân trên mặt về tích phân trên $\mathbb{R}^k$ bằng một công thức liên quan tới công thức đổi biến của tích phân.

Tất nhiên những miêu tả trên chưa đủ để người đọc có thể hiểu được cụ thể. Ở đây người viết không có tham vọng đó mà chỉ muốn giới thiệu vài ý niệm, hy vọng người đọc sẽ tìm hiểu thêm sau này.

Vài nét về dạng vi phân

Những kí hiệu dx, dy, dA, dV, $dxdy$, ds, dS, $d\vec{s}$, $d\vec{S}$, ... mà ta thấy xuất hiện trong môn học cho tới nay chưa được giải thích ý nghĩa rõ ràng. Chúng là phần tử của tập hợp nào? Quan hệ giữa chúng ra sao?

Dạng vi phân bậc 1

Xét không gian $\mathbb{R}^n$. Giả sử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Lạm dụng kí hiệu ta chỉ x_i là hàm cho ra tọa độ thứ i của x, tức là hàm $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$. Khi đó ta định nghĩa **dạng vi phân** dx_i chính là đạo hàm của hàm x_i. Tức là $dx_i = dx_i$!

Vậy dx_i là một hàm trên $\mathbb{R}^n$. Tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^n$, giá trị $dx_i(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ trong đó số 1 nằm ở tọa độ thứ i.

Tổng quát hơn, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm trơn thì đạo hàm df của f là một dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$. Tại mỗi điểm x thì $df(x)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, được đại diện bởi vectơ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$. Từ đó ta có đẳng thức:

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2(x) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(x)$$

hay ngắn gọn hơn:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.}$$

Trong trường hợp một chiều công thức trên là:

$$df = f'dx.$$

Khác với sự mơ hồ khi ta thấy công thức này lần đầu khi học về vi phân trong các giáo trình toán giải tích trung học hay năm đầu đại học, bây giờ mọi thứ trong công thức đều có nghĩa chính xác.

Ta định nghĩa một **dạng vi phân bậc 1** trên $\mathbb{R}^n$ là một hàm cho tương ứng mỗi điểm với một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$, cho bởi công thức

$$f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

trong đó $f_1, \ldots, f_n$ là các hàm trơn.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$, dạng bậc 1 được cho bởi công thức $Pdx + Qdy$ trong đó P, Q là hàm trơn trên $\mathbb{R}^2$.

Tích của dạng vi phân

Người ta định nghĩa được một phép nhân trên các dạng vi phân, thường được kí hiệu bởi $\wedge$ (wedge - tích chèn), nhưng ở đây ta bỏ qua kí hiệu đó cho đơn giản. Phép nhân của dạng vi phân có tính phân phối với phép cộng. Nó còn có một tính chất đặc biệt, là tính phản đối xứng:

$$dxdy = -dydx.$$

Một hệ quả là $dxdx = 0$.

Ví dụ. Khi $n = 2$: Ta sẽ có $dxdy$ là một dạng vi phân bậc 2. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^2$, giá trị $dxdy(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào cặp vectơ $u, v \in \mathbb{R}^2$ cho ra $\det(u, v)$, chính là diện tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u và v. Vì vậy có lẽ không quá ngạc nhiên khi ta biết kí hiệu dA chính là $dxdy$:

$$\boxed{dA = dxdy.}$$

Ví dụ. Khi $n = 3$: Ta sẽ có $dxdydz$ là một dạng vi phân bậc 3. Tại mỗi điểm $p \in \mathbb{R}^3$, giá trị $dxdydz(p)$ là một ánh xạ mà tác động vào bộ 3 vectơ $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ cho ra $\det(u, v, w)$, chính là diện tích có hướng của hình bình hành sinh bởi u, v và w. Kí hiệu dV chính là $dxdydz$:

$$\boxed{dV = dxdydz.}$$

Tổng quát hơn, tại mỗi $p \in \mathbb{R}^n$ thì $dx_1dx_2 \cdots dx_n(p) = \det$, và đó chính là dạng thể tích dV trên $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{dV = dx_1dx_2 \cdots dx_n.}$$

Với $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n$ thì $dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$ là một dạng bậc k. Tổng của hai dạng bậc k là một dạng bậc k. Tích của một hàm trơn với một dạng bậc k cũng là một dạng bậc k. Ta định nghĩa **một dạng vi phân bậc k bất kì trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng hữu hạn của những dạng $f dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}$.**

Ví dụ. Một dạng bậc 2 trên $\mathbb{R}^3$ có công thức $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, trong đó P, Q, R là các hàm trơn trên $\mathbb{R}^3$.

Ở đây chúng ta chưa bàn tới dạng vi phân nội tại trên các đường, mặt, hay tổng quát hơn những tập con "k-chiều" trong $\mathbb{R}^n$. Vì vậy ta chưa có cơ hội giải thích các dạng ds, dS, ...

Tích phân của dạng vi phân

Theo định nghĩa ở trên một dạng vi phân bậc n trên $\mathbb{R}^n$ là một tổng của hữu hạn những dạng $f dx_1dx_2 \cdots dx_n$. Rất đơn giản, ta định nghĩa tích phân của dạng $f dx_1dx_2 \cdots dx_n$ trên tập con D của $\mathbb{R}^n$ chính là tích phân bội của hàm f trên D.

Định nghĩa trên được dùng cho những tập con D "n-chiều" trong $\mathbb{R}^n$. Nếu tập con D này có số chiều $k < n$ (ví dụ như đường, mặt trong $\mathbb{R}^n$) thì cần có một định nghĩa khác dành riêng cho số chiều k. Như ta đã thấy qua tích phân đường và tích phân mặt, một định nghĩa như vậy sẽ dùng tới việc "kéo lui" một dạng trên D về một dạng k-chiều trên $\mathbb{R}^k$, rồi lấy tích phân. Chi tiết khá phức tạp, nên ta dừng lại ở đây.

Đạo hàm của dạng vi phân

Người ta định nghĩa được một phép đạo hàm trên các dạng. Phép tính này có tính tuyến tính, nên nó được xác định bởi công thức:

$$\begin{aligned} d(f dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}) &= (df)dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) dx_{i_1}dx_{i_2} \cdots dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Như vậy đạo hàm của một dạng bậc k là một dạng bậc $(k+1)$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^2$ xét dạng $w = Pdx + Qdy$. Ta có

$$dw = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdx + Qdy + Rdz$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \end{aligned}$$

Chú ý các thành phần của dw chính là các thành phần của $\mathrm{curl}(P,Q,R)$.

Ví dụ. Trên $\mathbb{R}^3$ xét dạng $w = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$. Ta có

$$\begin{aligned} dw &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dydz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)dzdx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dxdy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \end{aligned}$$

Thành phần của dạng dw chính là $\mathrm{div}(P,Q,R)$.

Tương ứng giữa hàm và dạng	
hàm thực f	dạng bậc không f
trường (P,Q,R)	dạng bậc một $Pdx + Qdy + Rdz$
trường bảo toàn	dạng bậc một mà là đạo hàm của một dạng bậc không
trường $\mathrm{curl}(P,Q,R)$	dạng bậc hai $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$
hàm $\mathrm{div}(P,Q,R)$	dạng bậc ba $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

Ví dụ. Tính $d(df)$ ta được:

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)dydz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)dzdx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)dxdy. \end{aligned}$$

Vậy nếu f trơn cấp hai thì $d(df) = 0$. Đây không gì khác hơn chính là hệ thức $\mathrm{curl}(\nabla(f)) = 0$.

Ví dụ. Nếu ta lấy $w = Pdx + Qdy + Rdz$ thì như ở trên đã tính $dw = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, tương ứng với trường $\mathrm{curl}(P,Q,R)$, và

$$d(dw) = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)dxdydz.$$

Nếu trường (P,Q,R) là trơn cấp hai thì $d(dw) = 0$. Đây chính là hệ thức $\mathrm{div}(\mathrm{curl}(F)) = 0$.

Tổng quát, tích của hai ánh xạ đạo hàm d nối tiếp bằng không:

$$\boxed{d^2 = 0.}$$

Bổ đề Poincaré tổng quát

Ta đã thấy nếu $w = du$ thì $dw = 0$. Điều ngược lại là nội dung của bổ đề Poincaré tổng quát: Trên một miền mở hình sao của $\mathbb{R}^n$, nếu w là một dạng bậc k và $dw = 0$ thì tồn tại một dạng u bậc $k-1$ sao cho $du = w$.

Công thức Stokes tổng quát

Công thức Stokes tổng quát trên $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\int_{\partial M} w = \int_M dw.}$$

- Công thức Newton–Leibniz ứng với trường hợp w là dạng bậc không f và M là một tập con 1-chiều của $\mathbb{R}$ (đoạn thẳng).
- Công thức Green ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx + Qdy$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^2$.
- Công thức Stokes ứng với trường hợp w là dạng bậc một $Pdx + Qdy + Rdz$ và M là một tập con 2-chiều của $\mathbb{R}^3$ (mặt).
- Công thức Gauss–Ostrogradsky ứng với trường hợp w là dạng bậc hai $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ và M là một tập con 3-chiều của $\mathbb{R}^3$ (khối).

Bài tập

2.8.2 (công thức Green). Đây là những hệ quả của công thức Stokes 2.8.1. Với cùng các giả thiết về Ω, ta viết pháp tuyến đơn vị $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$. Chứng minh các công thức sau (xem 2.3.15 và 2.6.11):

(a) $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i\, dS$. Giả sử hàm thực f thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$.

(b) $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\, dx = \int_{\partial\Omega} f g \nu_i\, dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx$. Giả sử f và g thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$.

(c) $\int_\Omega \Delta f\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}\, dS$. Giả sử f thuộc lớp $C^2(\overline{\Omega})$. Ta viết $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \nabla f \cdot \nu$, đạo hàm của f theo hướng ν. Nhắc lại toán tử Laplace Δ được cho bởi $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(d) $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \nu}\, dS - \int_\Omega f \Delta g\, dx$. Giả sử f và g thuộc lớp $C^2(\overline{\Omega})$.

(e) $\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS$.

2.8.3 (diện tích mặt cầu). * Gọi $S^n(R)$ là mặt cầu n-chiều tâm tại 0 với bán kính R, biên của quả cầu $B'^{(n+1)}(R)$ tâm 0 bán kính R. Hãy dùng 2.8.1 để tính diện tích (nói cách khác, thể tích n-chiều) của $S^n(R)$.

Hướng dẫn học thêm

Để trình bày chặt chẽ nội dung của tích phân đường và mặt và tổng quát hóa cho nhiều chiều cần nghiên cứu hai lãnh vực: đa tạp vi phân (differential manifolds) (tổng quát hóa của đường và mặt), và dạng vi phân (differential forms) (tổng quát hóa của trường vectơ). Quyển sách nhỏ của Spivak [Spi65] là giáo trình kinh điển. Quyển sách của Munkres [Mun91] xuất hiện sau, có nội dung tương tự nhưng có nhiều chi tiết hơn. Một tài liệu hay gần đây hơn là tập bài giảng [Sja06].

Một tiếp cận khác của vấn đề tích phân trên các tập con của không gian Euclid được trình bày trong lý thuyết độ đo hình học (Geometric Measure Theory), có thể đọc ở [Mor00].

Như đã gợi ý, Giải tích vectơ được ứng dụng trực tiếp vào vật lý và các ngành toán học liên quan [Arn89], như khảo sát các phương trình vật lý toán, thường là các phương trình đạo hàm riêng [Eva97].

Gợi ý cho một số bài tập

1.2.16 Giả sử $x \in [0,1]$ là một số vô tỉ và $\{p_n/q_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là một dãy các số hữu tỉ hội tụ về x. Nếu dãy $\{q_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ không tiến ra vô cùng thì sẽ có một số thực M và một dãy con $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ sao cho $q_{n_k} < M$ với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Dãy $\{p_{n_k}/q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ chỉ gồm hữu hạn giá trị.

1.2.17 Tập hợp các số hữu tỉ là đếm được.

1.4.14 Dùng công thức Fubini hai lần, chú ý điều kiện áp dụng.

1.4.15 Đặt khối vào một hình hộp và dùng công thức Fubini, tương tự chứng minh của 1.4.5.

1.4.18 Khối tròn xoay được xác định bởi bất đẳng thức $y^2+z^2 \le f(x)^2$, là một khối đơn giản theo chiều trục y và chiều trục z.

1.4.19 Giả sử phương của mặt cắt là phương của một trục tọa độ. Trường hợp tổng quát có thể dùng một phép xoay và dùng 1.5.29.

1.4.22 (b) Dùng ý ở bài 1.1.11.

1.5.14 Nửa trên của mặt e-líp là đồ thị của hàm $z = f(x,y) = \sqrt{(4-x^2-2y^2)/3}$ với (x,y) thuộc về hình e-líp $x^2+2y^2 \le 4$. Vì e-líp có diện tích và hàm f liên tục, nên hàm f khả tích, và đồ thị của f có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$. Tương tự nửa dưới của mặt cũng có thể tích không, do đó e-líp có thể tích không, nên khối e-líp có thể tích.

1.5.16 Chú ý rằng miền D đối xứng qua trục Oy. Có thể có kết quả mà không cần tính trực tiếp tích phân. Để giải thích chính xác có thể dùng phép đổi biến $x \mapsto -x$.

1.5.24 Dùng bài 1.4.15. Dùng công thức đổi biến để tính diện tích mặt cắt theo diện tích mặt đáy.

1.5.33 Đặt A vào trong tập mở U. Mở rộng f thành F trên tập $\varphi(U)$ và áp dụng công thức đổi biến cho F.

1.6.6 Đổi đơn vị giá sang triệu đồng/km^2.

2.1.9 Dùng công thức Frénét. Giả sử với mọi s thì $D_{\gamma(s)} \subset B(\gamma(s), \frac{1}{k(s)})$, với $k(s) = |T'(s)| > 0$ là độ cong của đường γ tại $\gamma(s)$. Dùng bài 1.6.5. Có thể đọc thêm ở bài báo R. Osserman, *Mathematics of the Gateway Arc*, Notices of the AMS, vol. 57, no. 2, 2010, p. 225.

2.2.14 Tính liên thông được thảo luận sâu hơn trong các tài liệu Tôpô, chẳng hạn [Vutop].

2.2.15 Xem kĩ thuật ở phần chứng minh của 2.1.3.

2.3.10 Dùng công thức Green cho miền không đơn giản.

2.3.16 Dùng bài tập 2.3.5.

2.3.18 Dùng tính liên thông của D và kĩ thuật ở bài tập 1.1.11.

2.3.20 Tham khảo bài tập 2.2.14. Trên tập con mở của $\mathbb{R}^n$ thì tính liên thông và tính liên thông đường là trùng nhau, xem chẳng hạn [Vutop].

2.3.23 Dùng kĩ thuật ở bài tập 1.1.11.

2.4.16 Mặt nón cân là một mặt tròn xoay. Diện tích bằng $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$.

2.4.17 Dùng tính đối xứng. Tương tự bài 1.5.16.

2.7.1 Tương tự bài tập 2.3.23.

Tài liệu tham khảo

[Ang97] Đặng Đình Áng, *Lý thuyết tích phân*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 1997. 42, 51

[Apo69] Tom M. Apostol, *Calculus*, vol. 2, John Wiley and Sons, 1969.

[Arn89] Vladimir I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., Springer, 1989. 105

[Buc78] Greighton Buck, *Advanced calculus*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1978.

[Eva97] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., AMS, 1997. 100, 105

[Fey64] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Mathew Sands, *The Feynman's lectures in Physics*, vol. 2, Addison-Wesley, 1964. 98

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001. 100

[Kap02] Wilfred Kaplan, *Advanced calculus*, 5th ed., Addison-Wesley, 2002.

[Kel29] Oliver Dimon Kellogg, *Foundations of potential theory*, Springer, 1929. 71

[Khu10] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải, *Giải tích toán học*, tập 2, Nhà Xuất Bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997, a revision of Analysis I, Addison-Wesley, 1968. 2, 10, 11, 15, 31, 37, 42, 43

[LDP02] Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển, Tạ Duy Phượng, *Giải tích các hàm nhiều biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[Mor00] Frank Morgan, *Geometric measure theory: A beginner's guide*, Academic Press, 2000. 105

[MT03] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, *Vector calculus*, Freeman, 2003.

[Mun91] James Munkres, *Analysis on manifolds*, Addison-Wesley, 1991. 37, 43, 105

[Mun00] James Munkres, *Topology a first course*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000. 83

[PTT02] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình giải tích - hàm nhiều biến*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2002.

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976. 2, 37, 51

[Rud86] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1986. 51

[Sja06] Reyer Sjamaar, *Manifolds and differential forms*, 2006, Cornell University. 72, 105

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, 1965. 32, 37, 105

[Spi94] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish, 1994. 43

[Ste12] James Stewart, *Calculus: Early transcendentals*, 7th ed., Brooks/Cole, 2012. 2, 37, 57

[VuSto] Huỳnh Quang Vũ, *Công thức Stokes*, Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/Stokes.pdf. 43, 100

[Vutop] Huỳnh Quang Vũ, *Lecture notes on Topology*, Ho Chi Minh City University of Science, http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/teaching/n.pdf. 107

[Zor04] Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer, 2004.

Chỉ mục