Ôn tập Giải Tích 3

Nguyễn Mạnh Tiến

Ngày 27 tháng 12 năm 2011

Phần I
Các loại tích phân

1 Tích phân đường

Xét đường $r:\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ là đường đi đơn, chính quy.

1.1 Tích phân đường loại I

Định nghĩa. Cho f là một hàm xác định trên vết của đường r. Tích phân của f trên r được ký hiệu $\int_r f\, ds$ và được định nghĩa là

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f\left(r\left(t\right)\right)\left|r'\left(t\right)\right| dt.$$

1.2 Tích phân đường loại II

Định nghĩa. Cho F là trường vector trên vết của đường r. Tích phân của F trên r được ký hiệu $\int_r f \cdot dr$ và được định nghĩa là

$$\int_r F.dr = \int_a^b F\left(r\left(t\right)\right) \cdot r'\left(t\right)\, dt$$

Tính chất. Nếu $F = (P, Q)$ thì ta có

$$\int_r F \cdot dr = \int_r P\, dx + \int_r Q\, dy$$

với

$$\int_r P\, dx = \int_a^b P\left(r\left(t\right)\right) x'\left(t\right) dt, \qquad \int_r Q\, dy = \int_a^b Q\left(r\left(t\right)\right) y'\left(t\right) dt.$$

2 Tích phân mặt

Xét $r:\ D \to \mathbb{R}^3$ là một mặt đơn, trơn và chính quy. $S = r\left(D\right)$ là vết của r.

2.1 Tích phân mặt loại I

Định nghĩa Cho hàm $f: S \to \mathbb{R}$. Tích phân loại I của f trên r là

$$\iint_r f\, dS = \iint_D f\left(r\left(u,v\right)\right)\left|r_u \times r_v\right|\, dA.$$

2.2 Tích phân mặt loại II

Định nghĩa. Cho trường $F: S \to \mathbb{R}^2$. Tích phân loại II của F trên r là

$$\iint_r F \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D F\left(r\left(u,v\right)\right) \cdot \left(r_u\left(u,v\right) \times r_v\left(u,v\right)\right) dA.$$

Tính chất. Vector pháp tuyến n tại điểm (u,v) là

$$n\left(u,v\right) = \frac{r_u\left(u,v\right) \times r_v\left(u,v\right)}{\left|r_u\left(u,v\right) \times r_v\left(u,v\right)\right|}$$

không phụ thuộc cách tham số hóa. Đặc biệt, nếu r là một mặt đồ thi, giả sử $r\left(x,y\right) = \left(x,y,f\left(x,y\right)\right)$ thì

$$r_u \times r_v = \left(f_x, f_y, -1\right).$$

Phần II
Các định lý cơ bản

1 Định lý cho tích phân đường

Định lý Newton-Leibniz. Giả sử r là một đường đi trơn, bắt đầu từ A và kết thúc ở B. Cho f là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của r. Khi đó:

$$\int_r \nabla f \cdot dr = f\left(B\right) - f\left(A\right).$$

Một trường F sẽ được gọi là *trường bảo toàn* nếu $F = \nabla f$. Khi đó f gọi là *hàm thế* của F.

Điều kiện cần của trường bảo toàn. Nếu trường $F = (P,Q)$ trơn và bảo toàn trên một tập mở D thì ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Bổ đề Poincaré. Giả sử $F = (P,Q)$ là một trường vector trơn trên miền mở hình sao $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì F bảo toàn.

Định lý Green. Cho D là một miền đơn giản với biên được định hướng dương. Giả sử (P,Q) là một trường vector trơn trên D. Khi đó:

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

2 Định lý cho tích phân mặt

Định lý Stokes Cho trường F trơn trên một tập mở chứa mặt đồ thị S trong đó D là một miền phẳng thỏa điều kiện của Định lý Green. Giả sử biên của S là ∂S được định hướng dương. Khi đó

$$\int_{\partial S} F\,dr = \iint_S (\text{curl } F).n\,dS = \iint_S \text{curl } F \cdot d\overrightarrow{S}.$$

Định lý Divergence Cho trường F trơn trên một tập mở chứa một khối đơn 3 chiều E với biên là mặt S được định hướng ra ngoài. Khi đó

$$\iint_S F.n\,dS = \iint_S F \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E \text{div } F \cdot dV.$$

3 Các công thức đổi biến

Định lý. Nếu A là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $\varphi:\ A \to \mathbb{R}^n$ là một song ánh khả vi liên tục sao cho $\det J_\varphi(x) \neq 0$ với mọi $x \in A$, và $f:\ \varphi(A) \to \mathbb{R}^n$ khả tích, thì

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|\det J_\varphi|\,.$$

Sau đây là các phép đổi biến thường gặp:

Tên	**Phép đổi biến**	**Định thức** $\lvert\det J_\varphi\rvert$
Tọa độ cực	$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} r &\in (0,R) \\ \theta &\in (0,2\pi) \end{cases}$	r
Tọa độ cầu 3 chiều	$\begin{cases} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{cases}$ với $\begin{cases} \rho &\in (0,R) \\ \phi &\in (0,\pi) \\ \theta &\in (0,2\pi) \end{cases}$	$\rho^2\sin\phi$
Tọa độ cầu n chiều	$x_i = \rho\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{i-1}\cos\varphi_i$ với $\begin{cases} \rho &\in (0,R) \\ \varphi_i &\in (0,\pi)\ \forall i = \overline{1,n-2} \\ \varphi_{n-1} &\in (0,2\pi) \end{cases}$	$\rho^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}(\sin\varphi_i)^{n-1-i}$
Tọa độ trụ	$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}$ với $\begin{cases} r &\in (0,r) \\ \theta &\in (0,2\pi) \end{cases}$	r