Bộ môn Công nghệ phần mềm
Khoa Công nghệ thông tin
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

KỸ THUẬT LẬP TRÌNH

ThS. Đặng Bình Phương
dbphuong@fit.hcmus.edu.vn

KỸ THUẬT LẬP TRÌNH
ĐỆ QUY

Nội dung

1. Tổng quan về đệ quy
2. Các vấn đề đệ quy thông dụng
3. Phân tích giải thuật & khử đệ quy
4. Các bài toán kinh điển

Bài toán

- Cho S(n) = 1 + 2 + 3 + … + n

  =>S(10)? S(11)?

S(10) = 1 + 2 + … + 10 = 55

S(11) = (1 + 2 + … + 10) + 11 = 66

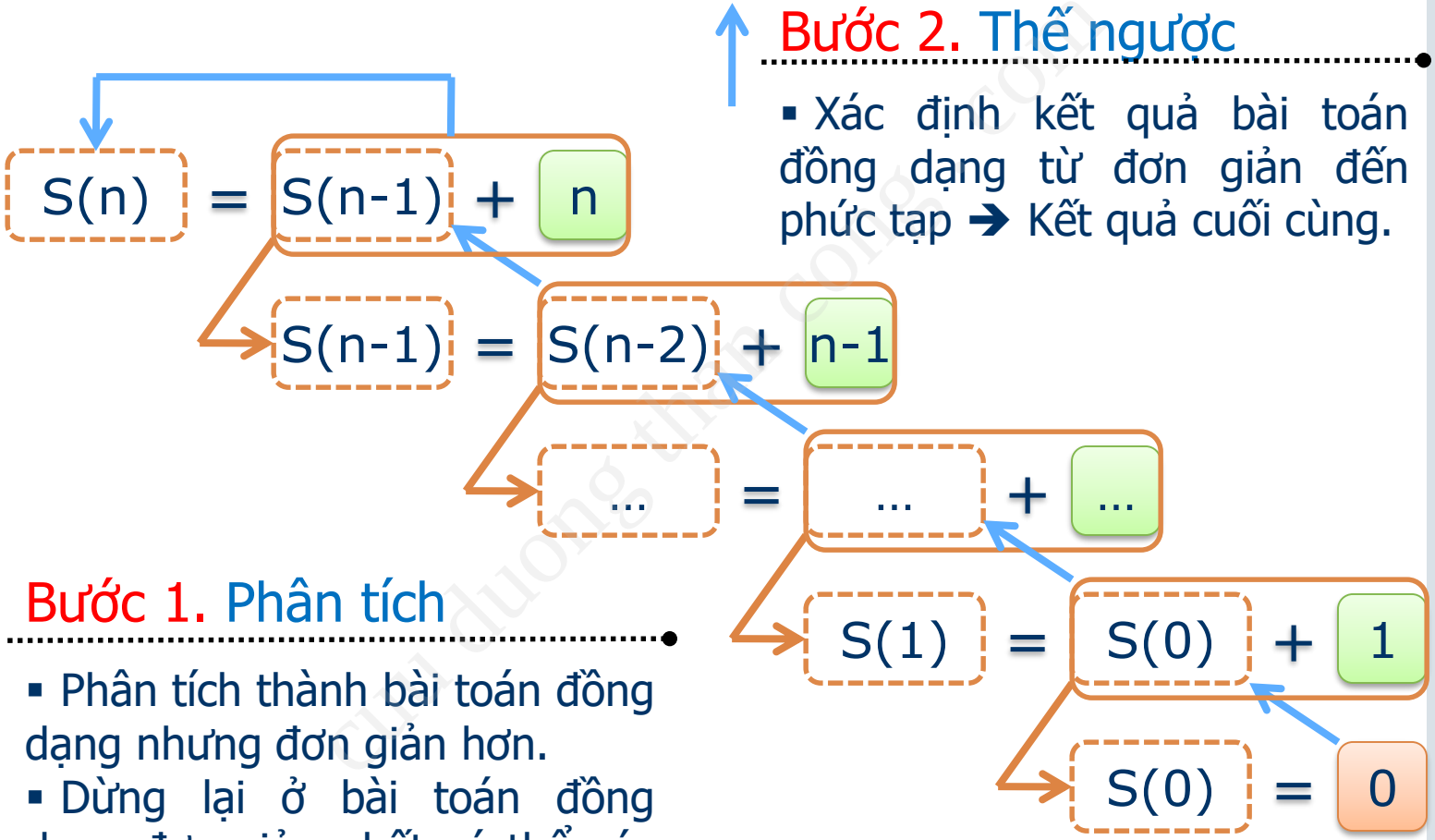
= S(10) + 11

= 55 + 11 = 66

2 bước giải bài toán

Bước 2. Thế ngược

- Xác định kết quả bài toán đồng dạng từ đơn giản đến phức tạp ➔ Kết quả cuối cùng.



Bước 1. Phân tích

- Phân tích thành bài toán đồng dạng nhưng đơn giản hơn.
- Dừng lại ở bài toán đồng dạng đơn giản nhất có thể xác định ngay kết quả.

Khái niệm đệ quy

❖Khái niệm

Vấn đề đệ quy là vấn đề được định nghĩa bằng chính nó.

❖Ví dụ

Tổng S(n) được tính thông qua tổng S(n-1).

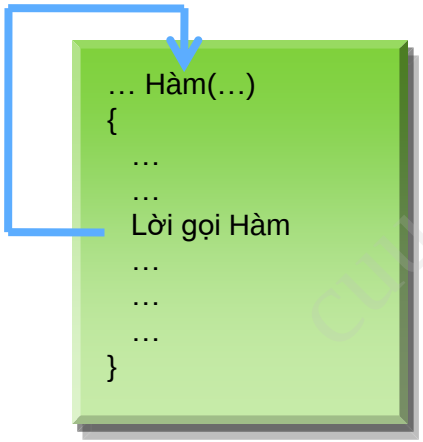
❖2 điều kiện quan trọng

- ➢ Tồn tại bước đệ quy.
- ➢ Điều kiện dừng.

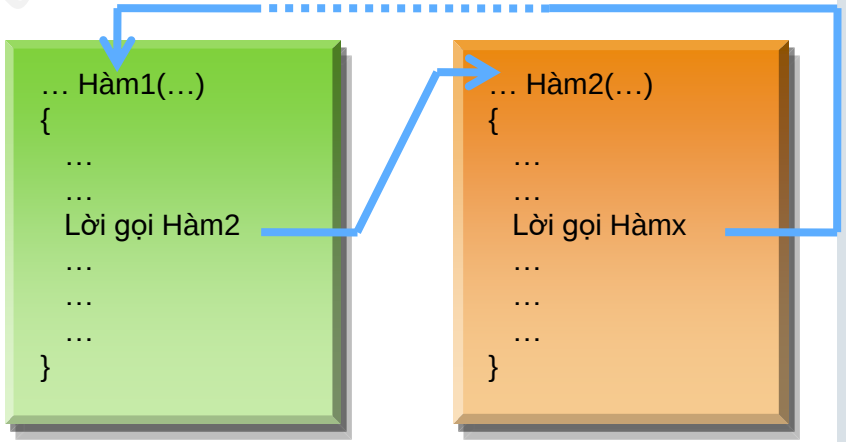
Hàm đệ quy trong NNLT C

Khái niệm

- Một hàm được gọi là đệ quy nếu bên trong thân của hàm đó có lời gọi hàm lại chính nó một cách trực tiếp hay gián tiếp.

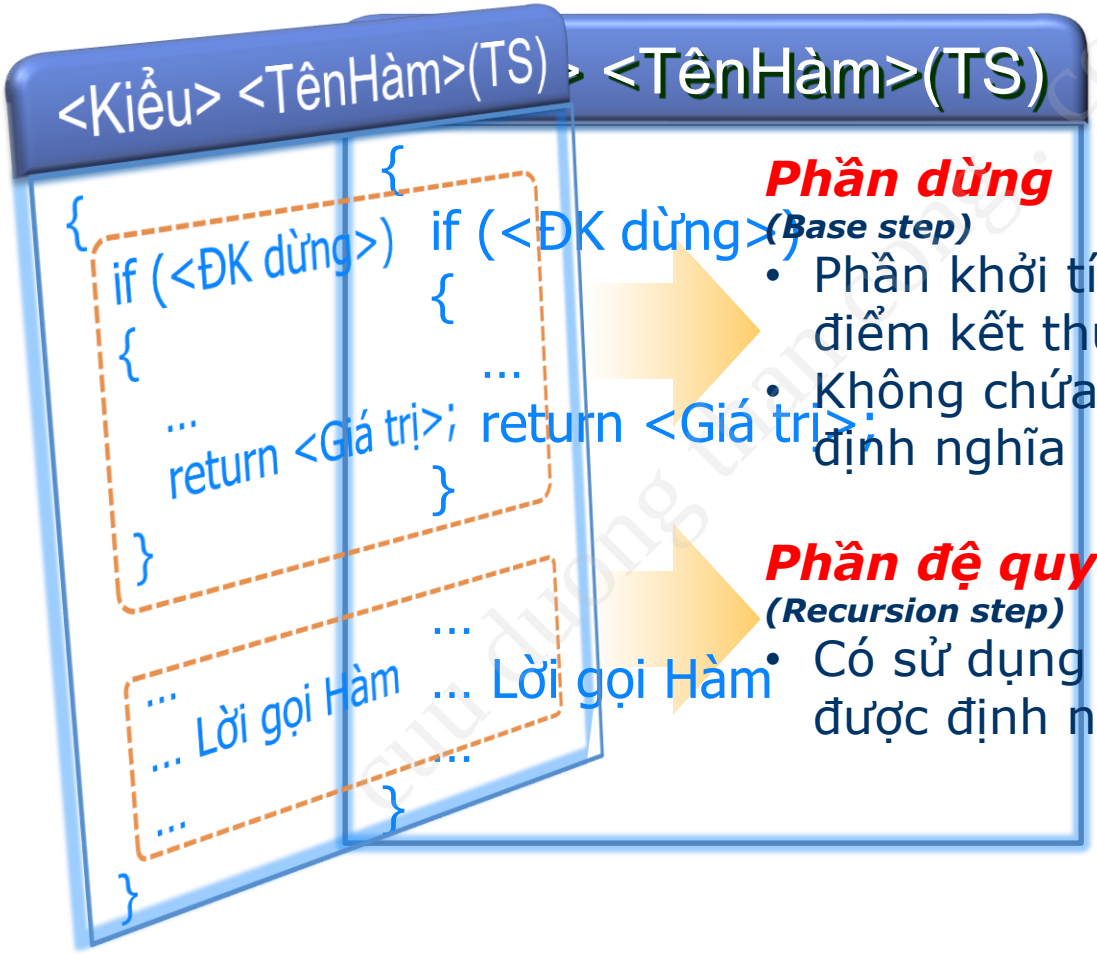


ĐQ trực tiếp



ĐQ gián tiếp

Cấu trúc hàm đệ quy



Phần dừng

(Base step)

- Phần khởi tính toán hoặc điểm kết thúc của thuật toán
- Không chứa phần đang được định nghĩa

Phần đệ quy

(Recursion step)

- Có sử dụng thuật toán đang được định nghĩa.

Phân loại

TUYẾN TÍNH 1

Trong thân hàm có duy nhất một lời gọi hàm gọi lại chính nó một cách tường minh.

NHỊ PHÂN 2

Trong thân hàm có hai lời gọi hàm gọi lại chính nó một cách tường minh.

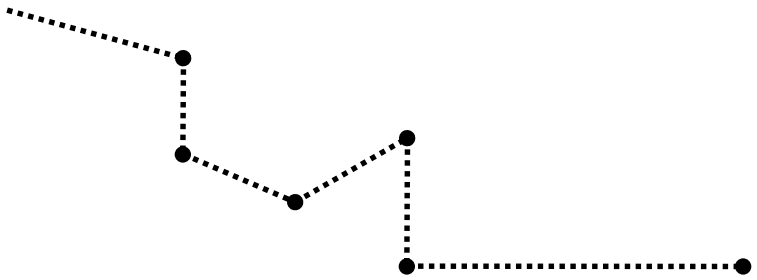
HỖ TƯƠNG 3

Trong thân hàm này có lời gọi hàm tới hàm kia và bên trong thân hàm kia có lời gọi hàm tới hàm này.

PHI TUYẾN 4

Trong thân hàm có lời gọi hàm lại chính nó được đặt bên trong thân vòng lặp.

Đệ quy tuyến tính



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm(<TS>) {
   if (<ĐK dừng>) {
      …
      return <Giá Trị>;
   }
   … TênHàm(<TS>); …
}
```

Ví dụ

Tính S(n) = 1 + 2 + … + n

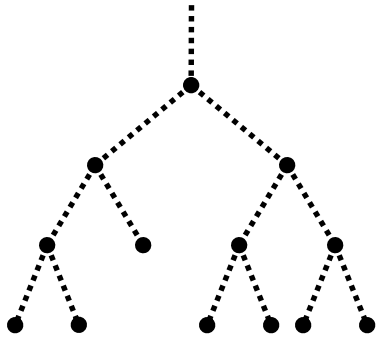
➔ S(n) = S(n – 1) + n

ĐK dừng: S(0) = 0

.: Chương trình :.

```
long Tong(int n)
{
   if (n == 0)
      return 0;
   return Tong(n–1) + n;
}
```

Đệ quy nhị phân



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm(<TS>) {
  if (<ĐK dừng>) {
     …
     return <Giá Trị>;
  }
  … TênHàm(<TS>);
  …
  … TênHàm(<TS>);
  …
}
```

Ví dụ

Tính số hạng thứ n của dãy Fibonacy:

f(0) = f(1) = 1

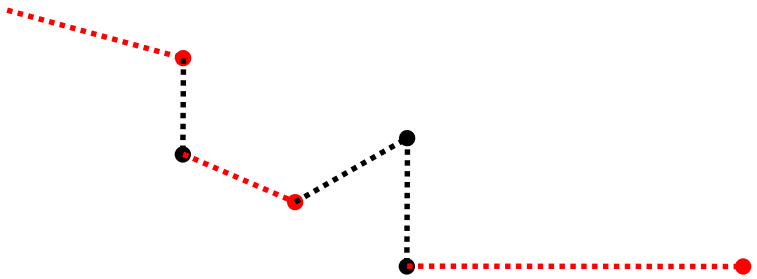
f(n) = f(n – 1) + f(n – 2) n > 1

ĐK dừng: f(0) = 1 và f(1) = 1

.: Chương trình :.

```
long Fibo(int n)
{
  if (n == 0 || n == 1)
     return 1;
  return Fibo(n–1)+Fibo(n–2);
}
```

Đệ quy hỗ tương



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm1(<TS>) {
   if (<ĐK dừng>)
      return <Giá trị>;
   … TênHàm2(<TS>); …
}
<Kiểu> TênHàm2(<TS>) {
   if (<ĐK dừng>)
      return <Giá trị>;
   … TênHàm1(<TS>); …
}
```

Ví dụ

Tính số hạng thứ n của dãy:

x(0) = 1, y(0) = 0

x(n) = x(n – 1) + y(n – 1)

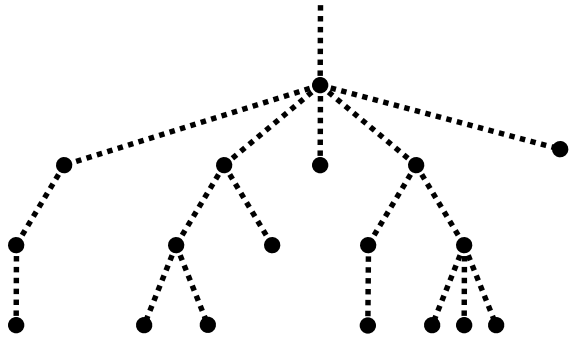
y(n) = 3*x(n – 1) + 2*y(n – 1)

ĐK dừng: x(0) = 1, y(0) = 0

.: Chương trình :.

```
long yn(int n);
long xn(int n) {
   if (n == 0) return 1;
   return xn(n-1)+yn(n-1);
}
long yn(int n) {
   if (n == 0) return 0;
   return 3*xn(n-1)+2*yn(n-1);
}
```

Đệ quy phi tuyến



Cấu trúc chương trình

```
<Kiểu> TênHàm(<TS>) {
  if (<ĐK dừng>) {
     …
     return <Giá Trị>;
  }
  … Vòng lặp {
     … TênHàm(<TS>); …
  }
  …
}
```

Ví dụ

Tính số hạng thứ n của dãy:

$x(0) = 1$

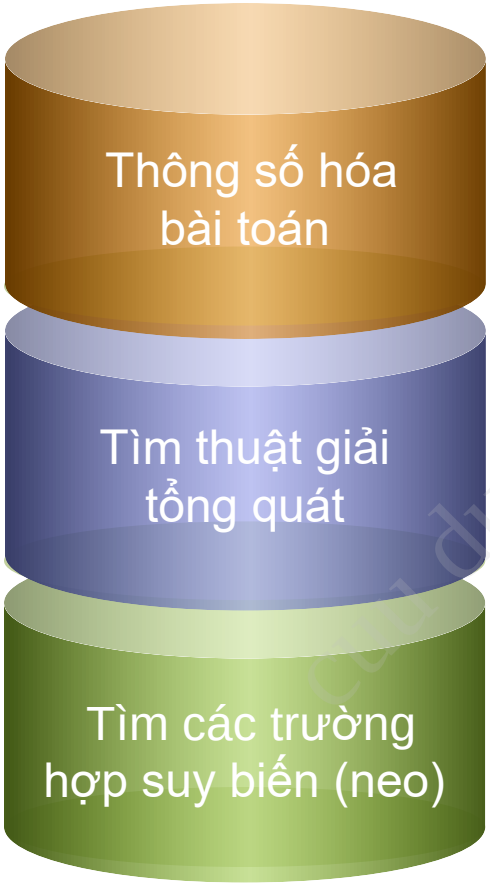
$x(n) = n^2x(0) + (n-1)^2x(1) + \ldots + 2^2x(n-2) + 1^2x(n-1)$

ĐK dừng: $x(0) = 1$

.: Chương trình :.

```
long xn(int n)
{
  if (n == 0) return 1;
  long s = 0;
  for (int i=1; i<=n; i++)
    s = s + i*i*xn(n–i);
  return s;
}
```

Các bước xây dựng hàm đệ quy



- Tổng quát hóa bài toán cụ thể thành bài toán tổng quát.
- Thông số hóa cho bài toán tổng quát
- VD: n trong hàm tính tổng S(n), …

- Chia bài toán tổng quát ra thành:
  - Phần không đệ quy.
  - Phần như bài toán trên nhưng kích thước nhỏ hơn.
- VD: S(n) = S(n – 1) + n, …

- Các trường hợp suy biến của bài toán.
- Kích thước bài toán trong trường hợp này là nhỏ nhất.
- VD: S(0) = 0

Cơ chế gọi hàm và STACK

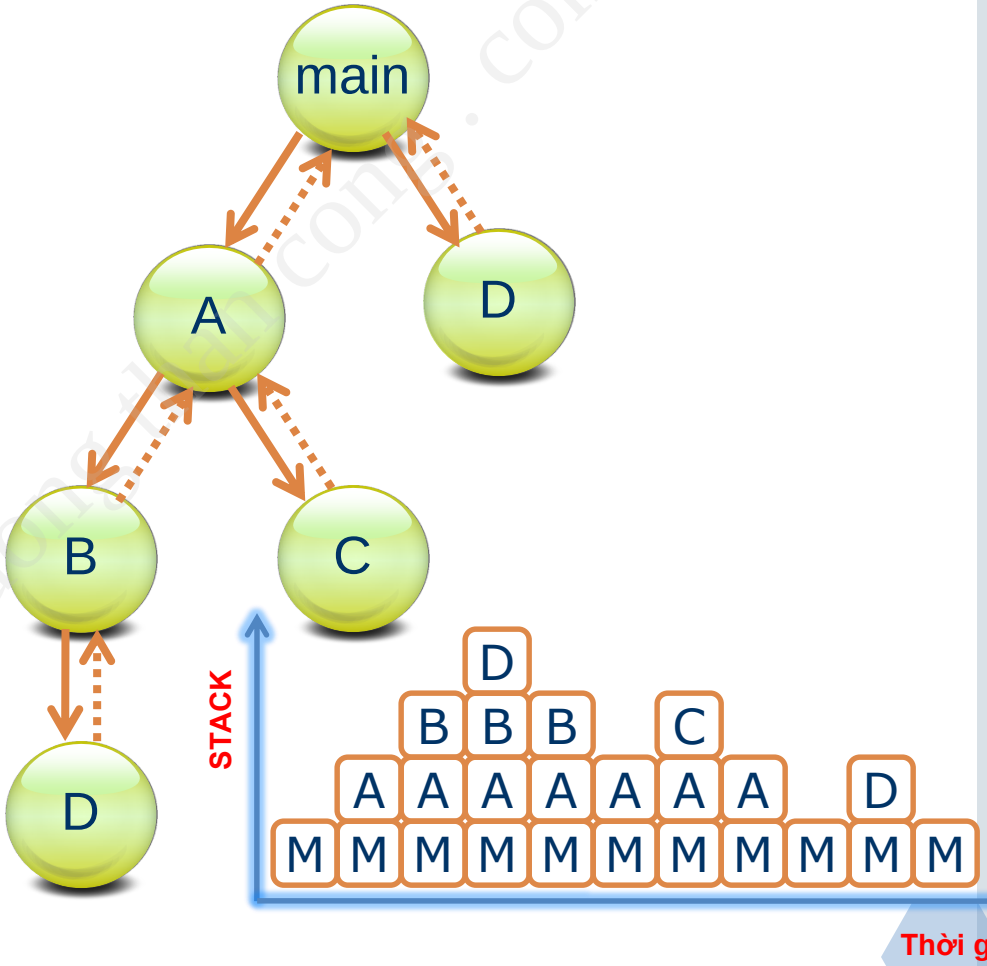
```
main()
{
    ...;
    A();
    ...;
    D();
    ...;
}
```

```
B()
{
    ...;
    D();
    ...;
}
```

```
C()
{
    ...;
}
```

```
A()
{
    ...;
    B();
    ...;
    C();
    ...;
}
```

```
D()
{
    ...;
}
```



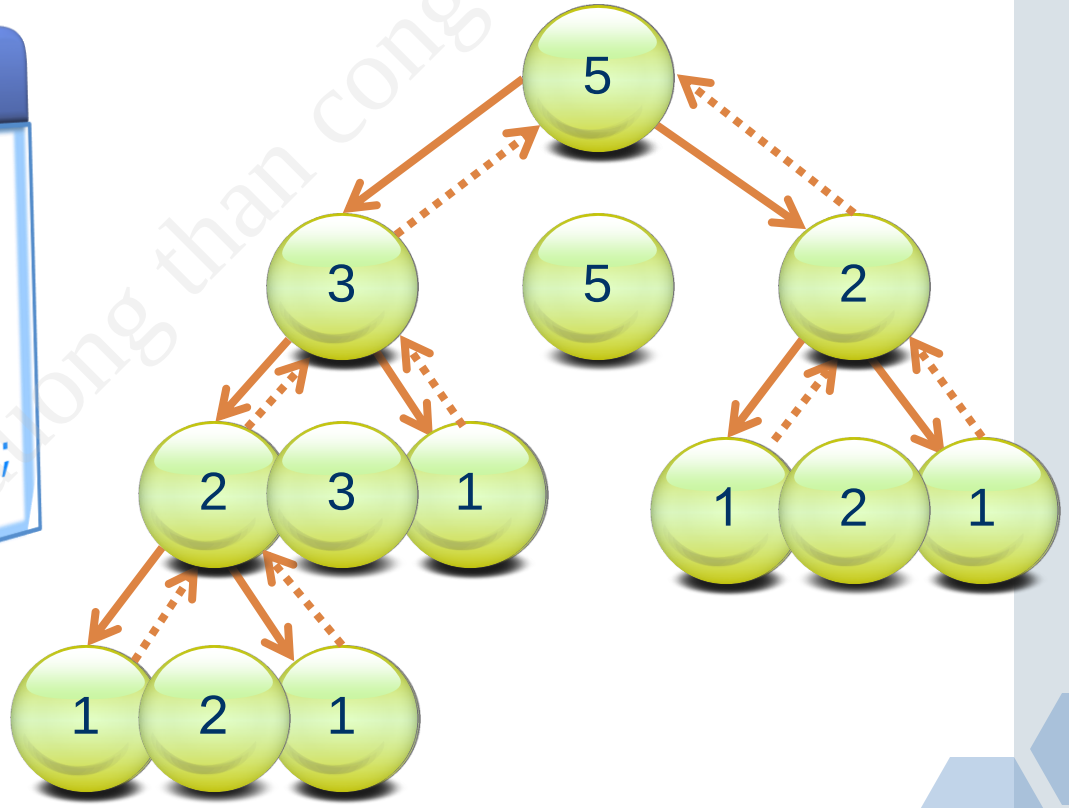
Nhận xét

- Cơ chế gọi hàm dùng STACK trong C phù hợp cho giải thuật đệ quy vì:
  - Lưu thông tin trạng thái còn dở dang mỗi khi gọi đệ quy.
  - Thực hiện xong một lần gọi cần khôi phục thông tin trạng thái trước khi gọi.
  - Lệnh gọi cuối cùng sẽ hoàn tất đầu tiên.

Ví dụ gọi hàm đệ quy

- Tính số hạng thứ 4 của dãy Fibonacy

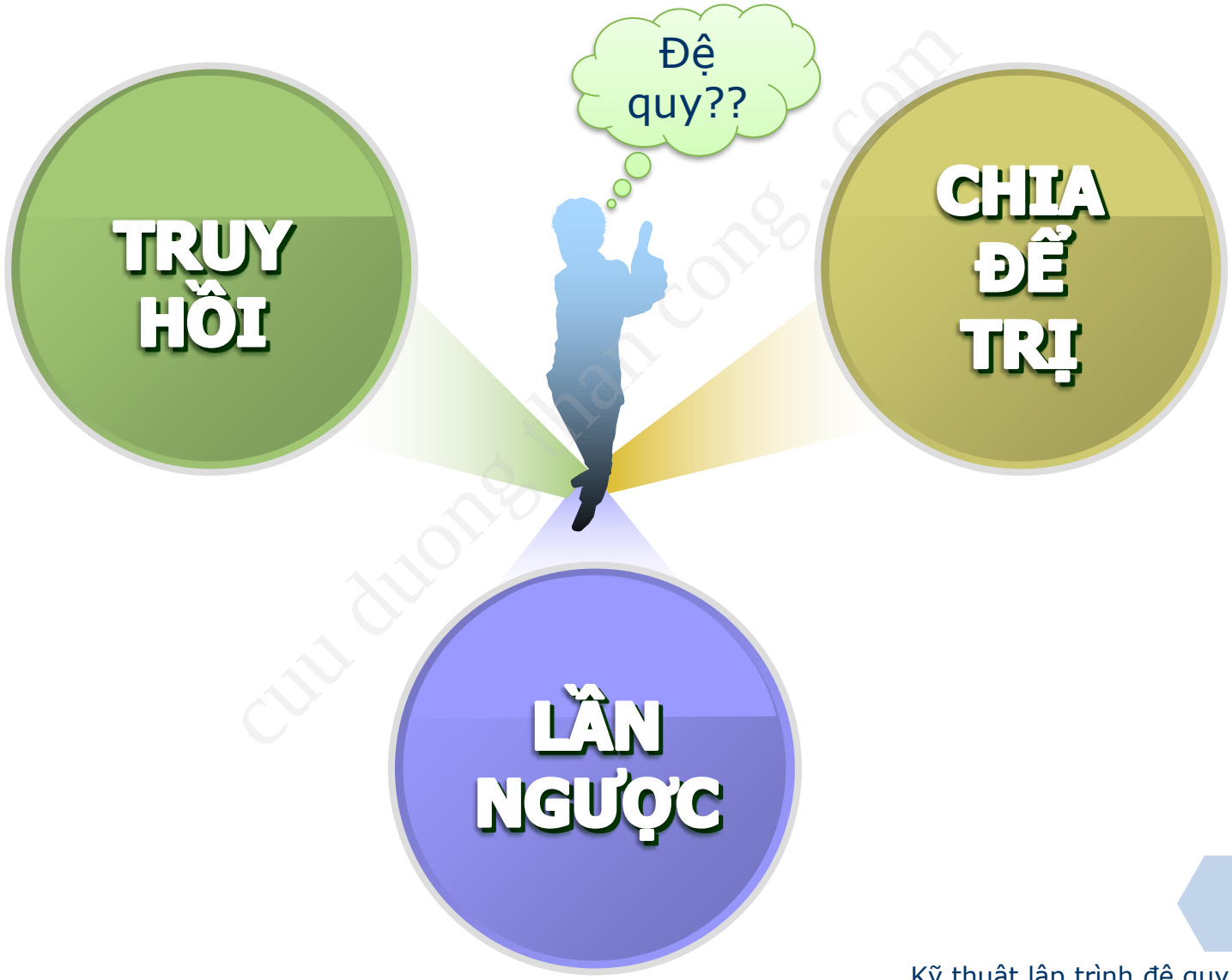
```
long F(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    if (n == 1)
        return 1;
    return F(n-1) + F(n-2);
}
```



Một số lỗi thường gặp

- Công thức đệ quy chưa đúng, không tìm được bài toán đồng dạng đơn giản hơn (không hội tụ) nên không giải quyết được vấn đề.
- Không xác định các trường hợp suy biến – neo (điều kiện dừng).
- Thông điệp thường gặp là StackOverflow do:
  - Thuật giải đệ quy đúng nhưng số lần gọi đệ quy quá lớn làm tràn STACK.
  - Thuật giải đệ quy sai do không hội tụ hoặc không có điều kiện dừng.

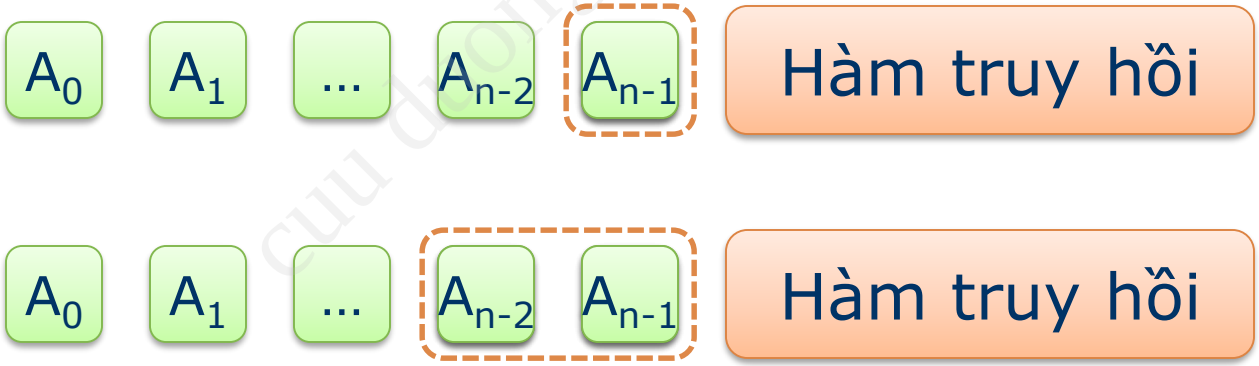
Các vấn đề đệ quy thông dụng



1.Hệ thức truy hồi

Khái niệm

- Hệ thức truy hồi của 1 dãy A_n là công thức biểu diễn phần tử A_n thông qua 1 hoặc nhiều số hạng trước của dãy.



1.Hệ thức truy hồi

- Ví dụ 1
  - Vi trùng cứ 1 giờ lại nhân đôi. Vậy sau 5 giờ sẽ có mấy con vi trùng nếu ban đầu có 2 con?
- Giải pháp
  - Gọi V_h là số vi trùng tại thời điểm h.
  - Ta có:
    - $V_h = 2V_{h-1}$
    - $V_0 = 2$

➔ Đệ quy tuyến tính với V(h)=2*V(h-1) và điều kiện dừng V(0) = 2

1.Hệ thức truy hồi

- Ví dụ 2
  - Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?
- Giải pháp
  - Gọi T_n là số tiền có được sau n năm.
  - Ta có:
    - $T_n = T_{n-1} + 0.12T_{n-1} = 1.12T_{n-1}$
    - $V(0) = 1000$

➔ Đệ quy tuyến tính với T(n)=1.12*T(n-1) và điều kiện dừng V(0) = 1000

2.Chia để trị (divide & conquer)

- Khái niệm
  - Chia bài toán thành nhiều bài toán con.
  - Giải quyết từng bài toán con.
  - Tổng hợp kết quả từng bài toán con để ra lời giải.

```
... Trị(bài toán P)
{
  if (P đủ nhỏ)
    Xử lý P
  else
  {
    Chia P → P1, P2, ..., Pn

    for (int i=1;i<=n;i++)
      Trị(Pi);

    Tổng hợp kết quả
  }
}
```

2.Chia để trị (divide & conquer)

- Ví dụ 1
  - Cho dãy A đã sắp xếp thứ tự tăng. Tìm vị trí phần tử x trong dãy (nếu có)
- Giải pháp
  - mid = (l + r) / 2;
  - Nếu A[mid] = x ➔ trả về mid.
  - Ngược lại
    - Nếu x < A[mid] ➔ tìm trong đoạn [l, mid – 1]
    - Ngược lại ➔ tìm trong đoạn [mid + 1, r]

➔ Sử dụng đệ quy nhị phân.

2.Chia để trị (divide & conquer)

- Ví dụ 2
  - Tính tích 2 chuỗi số cực lớn X và Y
- Giải pháp
  - $X = X_{2n-1}...X_nX_{n-1}...X_0$, $Y = Y_{2n-1}...Y_nY_{n-1}...Y_0$
  - Đặt $X_L=X_{2n-1}...X_n$, $X_N=X_{n-1}...X_0$ ➔ $X=10^nX_L+X_N$
  - Đặt $Y_L=Y_{2n-1}...Y_n$, $Y_N=Y_{n-1}...Y_0$ ➔ $Y=10^nY_L+Y_N$

    ➔ $X*Y = 10^{2n}X_LY_L + 10^n(X_LY_L+X_NY_N)+X_NY_N$

    và $X_LY_L+X_NY_N = (X_L-X_N)(Y_N-Y_L)+X_LY_L+X_NY_N$

➔ Nhân 3 số nhỏ hơn (độ dài ½) đến khi có thể nhân được ngay.

2.Chia để trị (divide & conquer)

- Một số bài toán khác
  - Bài toán tháp Hà Nội
  - Các giải thuật sắp xếp: QuickSort, MergeSort
  - Các giải thuật tìm kiếm trên cây nhị phân tìm kiếm, cây nhị phân nhiều nhánh tìm kiếm.
- Lưu ý
  - Khi bài toán lớn được chia thành các bài toán nhỏ hơn mà những bài toán nhỏ hơn này không đơn giản nhiều so với bài toán gốc thì không nên dùng kỹ thuật chia để trị.

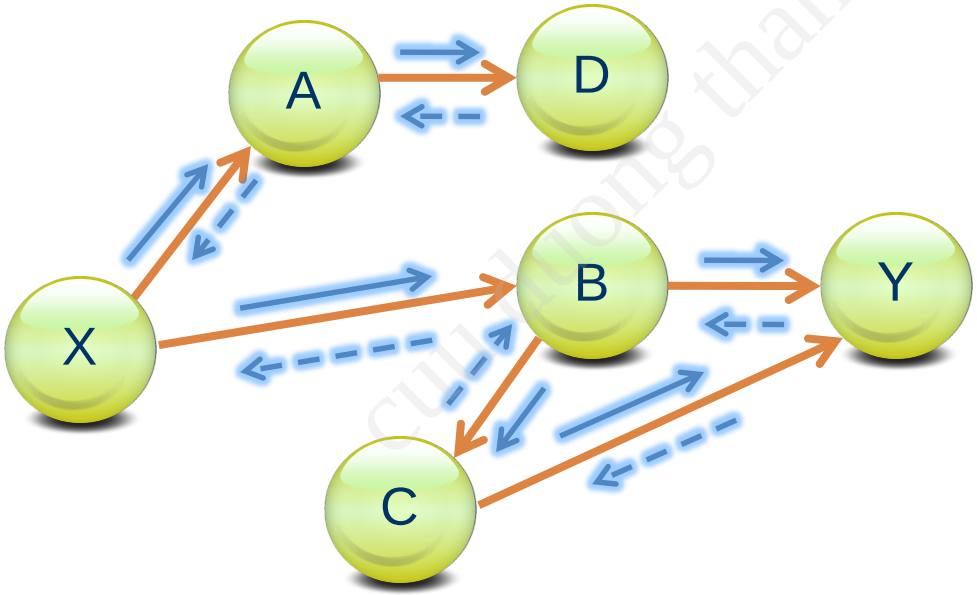
3.Lần ngược (Backtracking)

Khái niệm

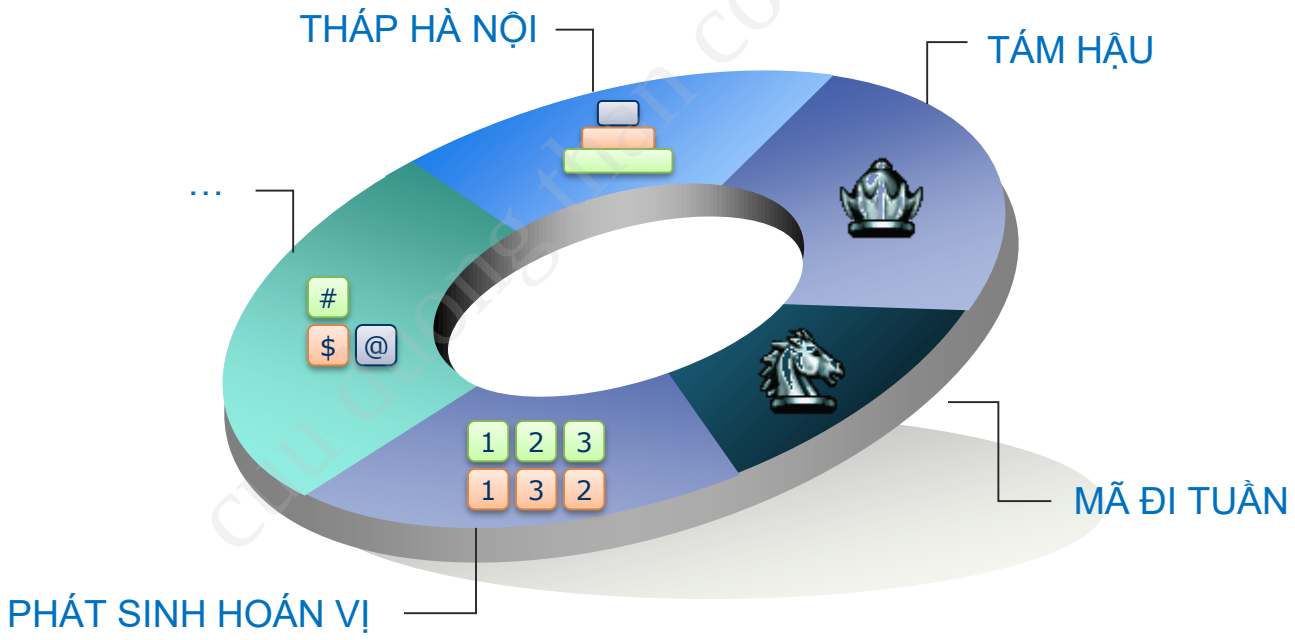
- Tại bước có nhiều lựa chọn, ta chọn thử 1 bước để đi tiếp.
- Nếu không thành công thì "lần ngược" chọn bước khác.
- Nếu đã thành công thì ghi nhận lời giải này đồng thời "lần ngược" để truy tìm lời giải mới.
- Thích hợp giải các bài toán kinh điển như bài toán 8 hậu và bài toán mã đi tuần.

3.Lần ngược (Backtracking)

- Ví dụ
  - Tìm đường đi từ X đến Y.



Một số bài toán kinh điển



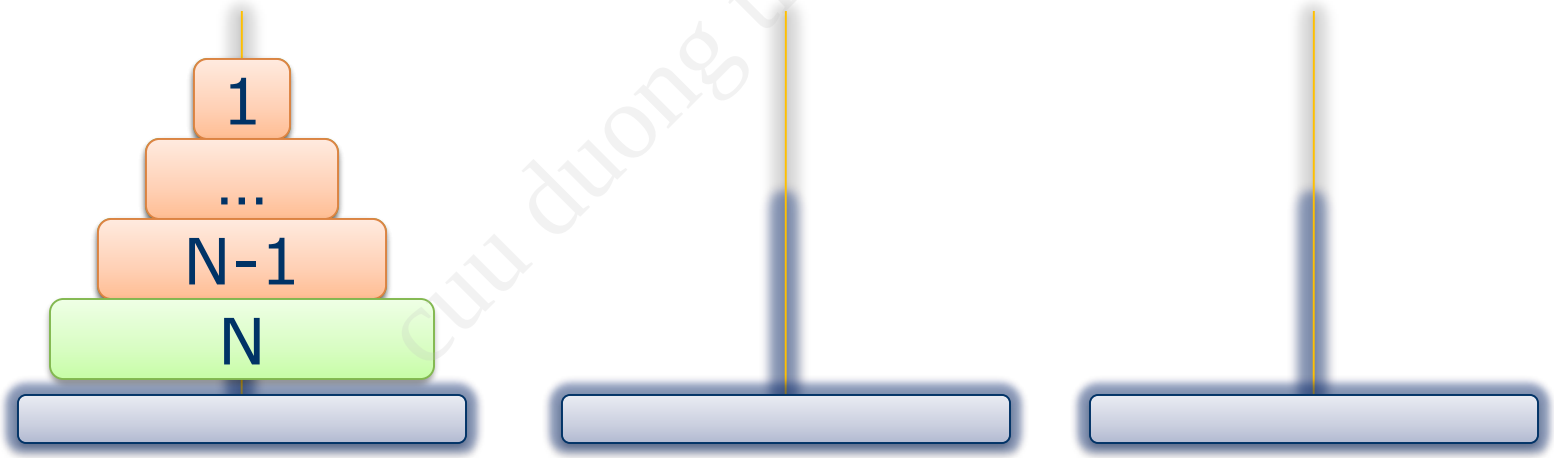
Tháp Hà Nội

Mô tả bài toán

- Có 3 cột A, B và C và cột A hiện có N đĩa.
- Tìm cách chuyển N đĩa từ cột A sang cột C sao cho:
  - Một lần chuyển 1 đĩa
  - Đĩa lớn hơn phải nằm dưới.
  - Có thể sử dụng các cột A, B, C làm cột trung gian.

Tháp Hà Nội

N đĩa A → C = ? đĩa A → B + Đĩa N A → C + N-1 đĩa B → C



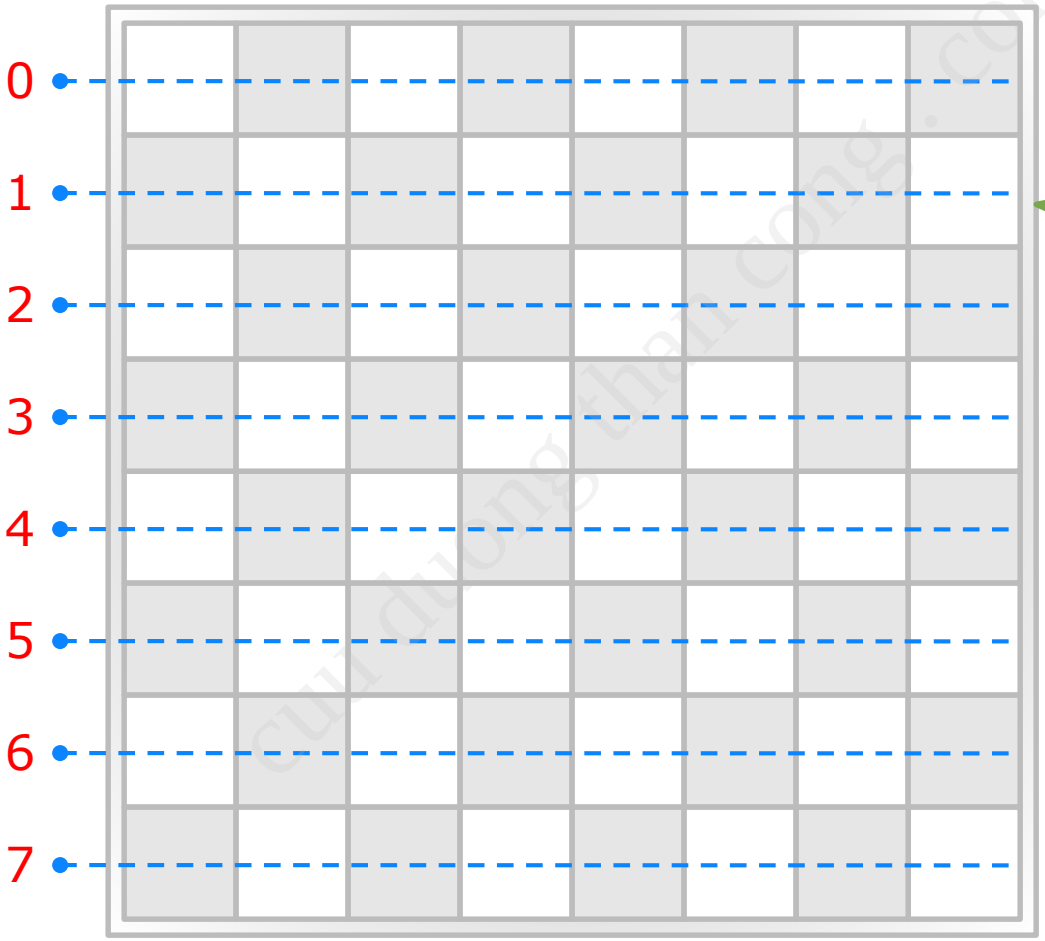
Cột nguồn A | Cột trung gian B | Cột đích C

Tám hậu

Mô tả bài toán

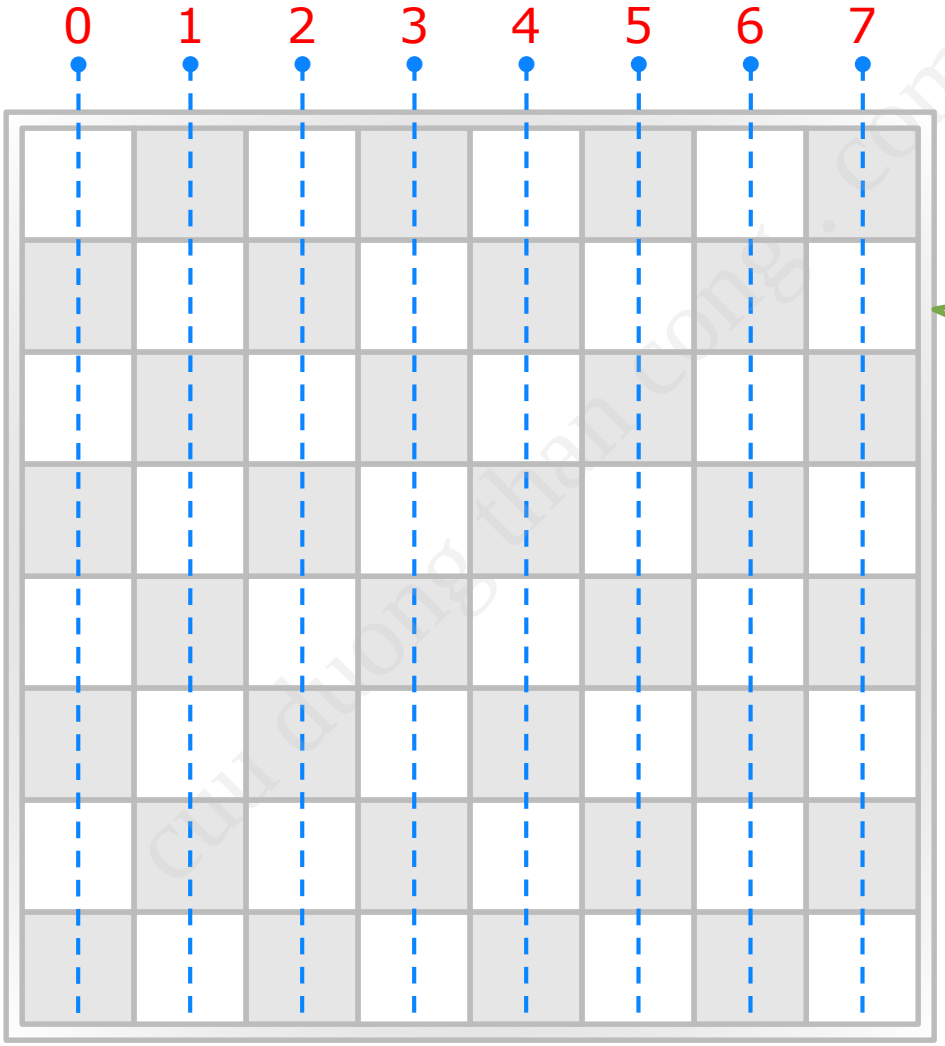
- Cho bàn cờ vua kích thước 8x8
- Hãy đặt 8 hoàng hậu lên bàn cờ này sao cho không có hoàng hậu nào "ăn" nhau:
  - Không nằm trên cùng dòng, cùng cột
  - Không nằm trên cùng đường chéo xuôi, ngược.

Tám hậu – Các dòng



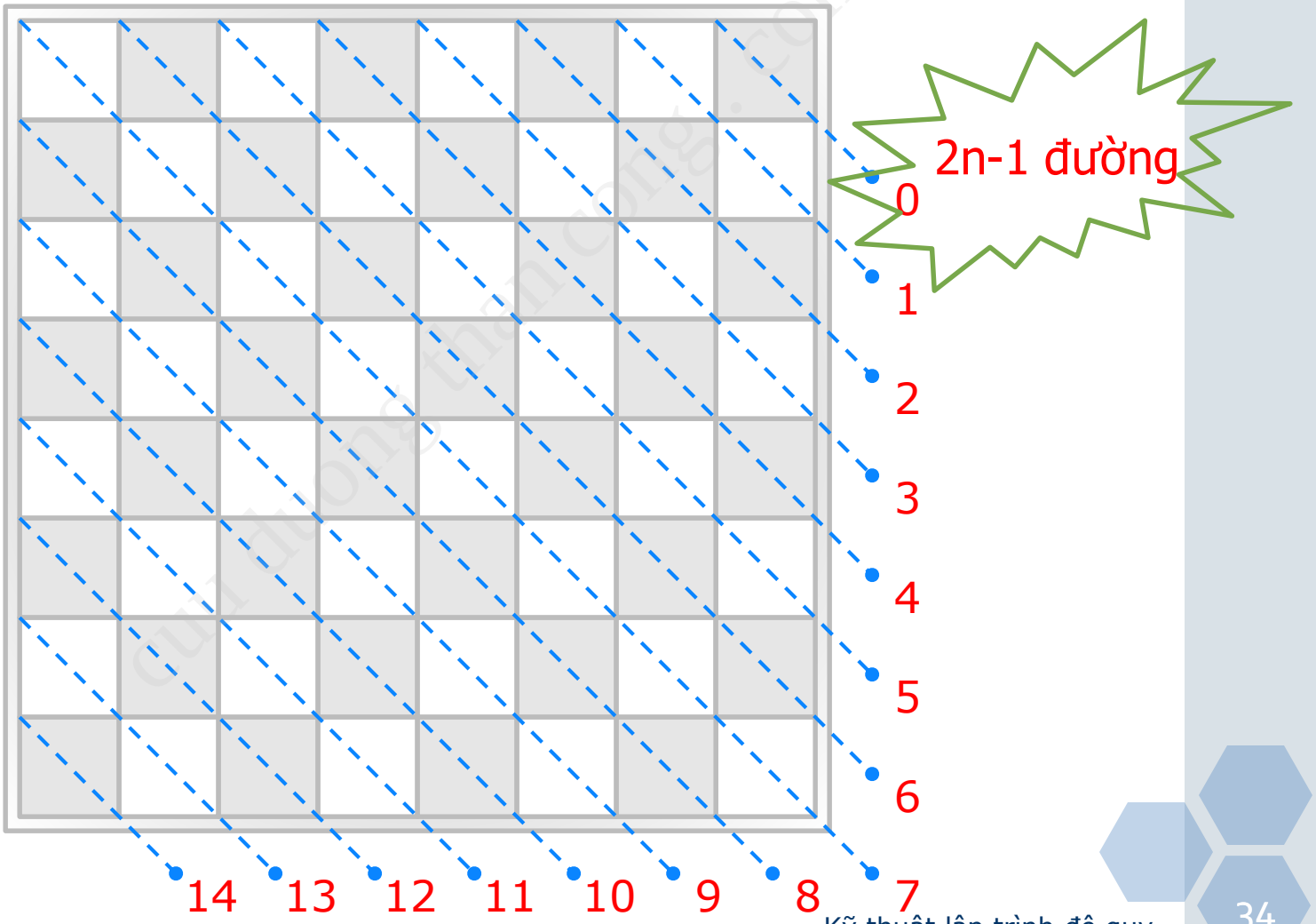
n đường

Tám hậu – Các cột

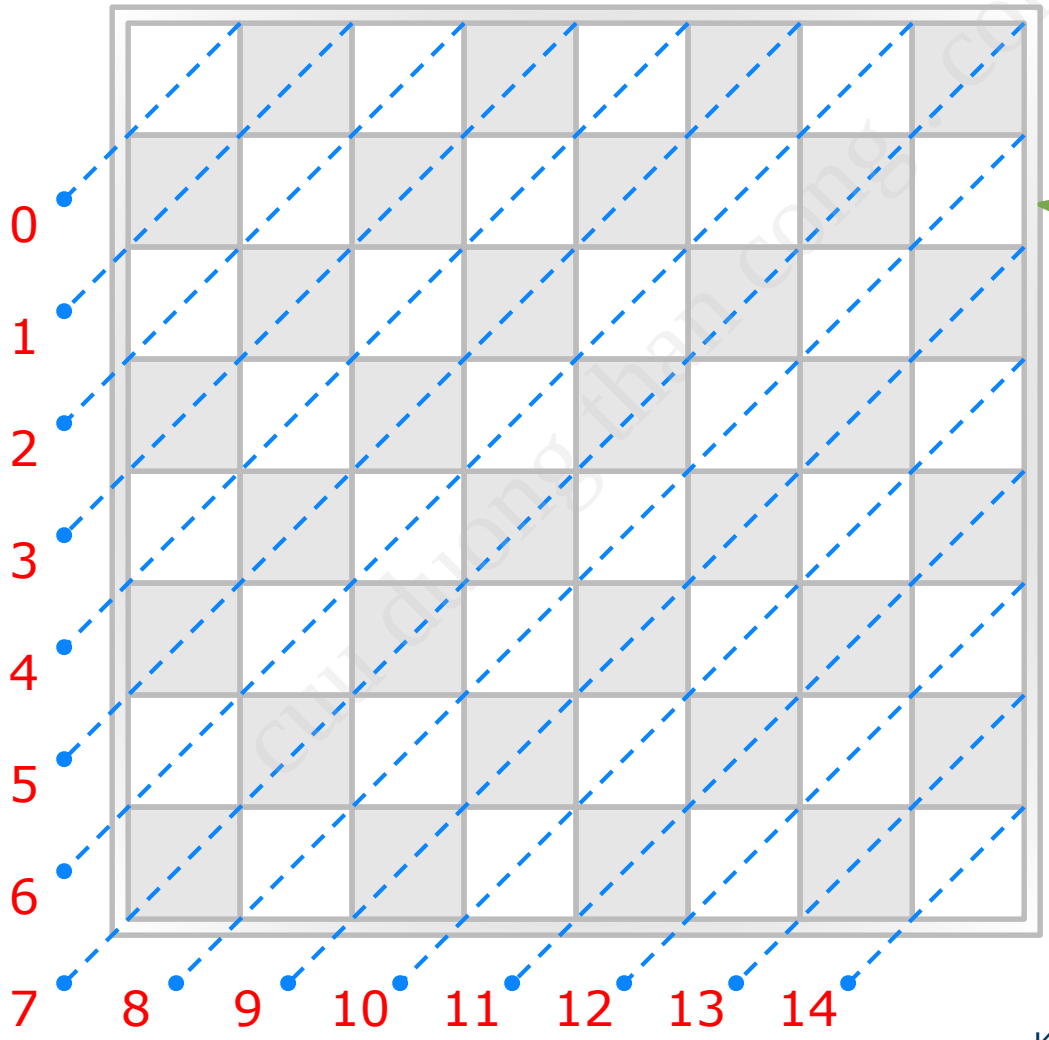


n đường

Tám hậu – Các đường chéo xuôi

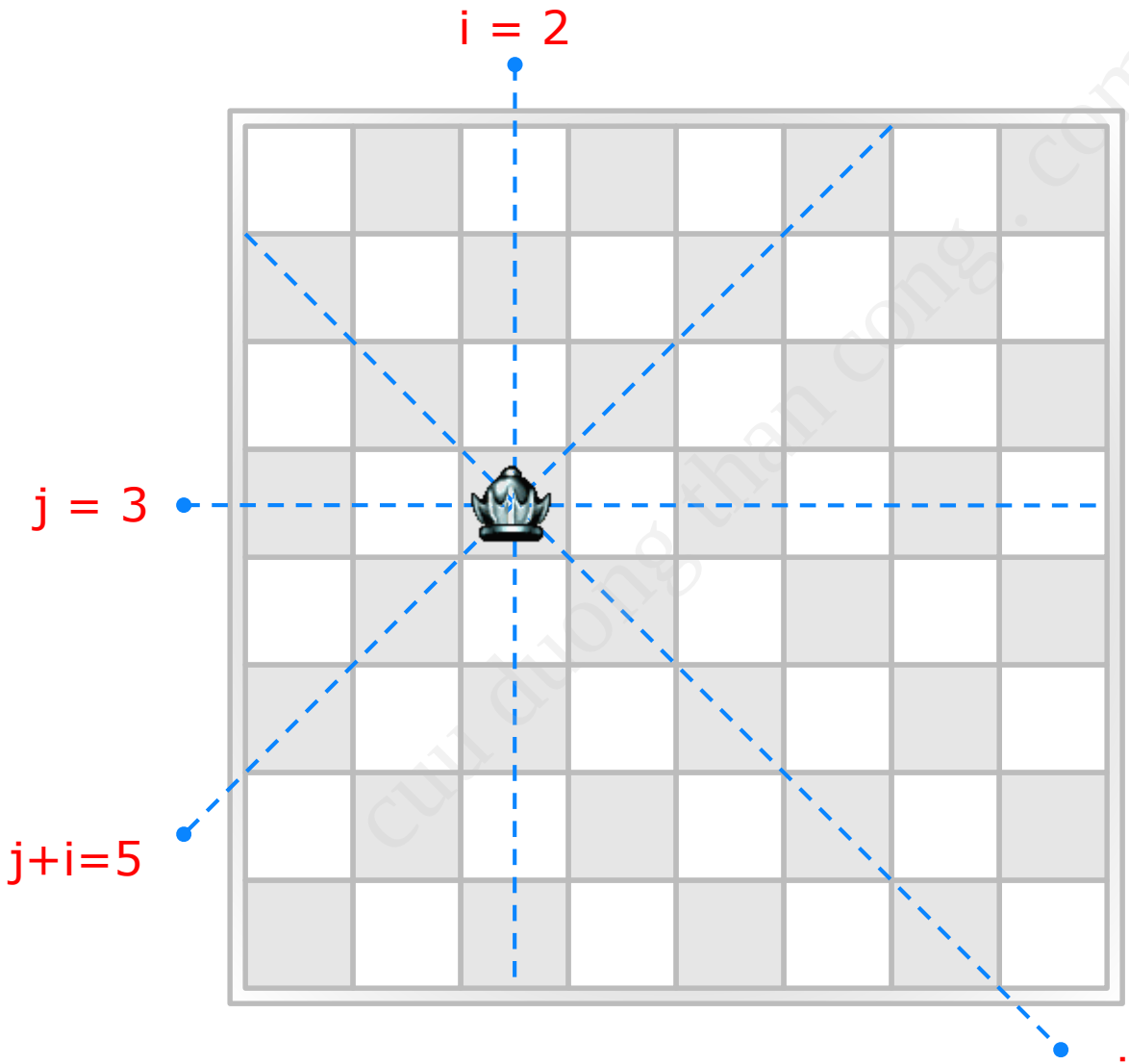


Tám hậu – Các đường chéo ngược



2n-1 đường

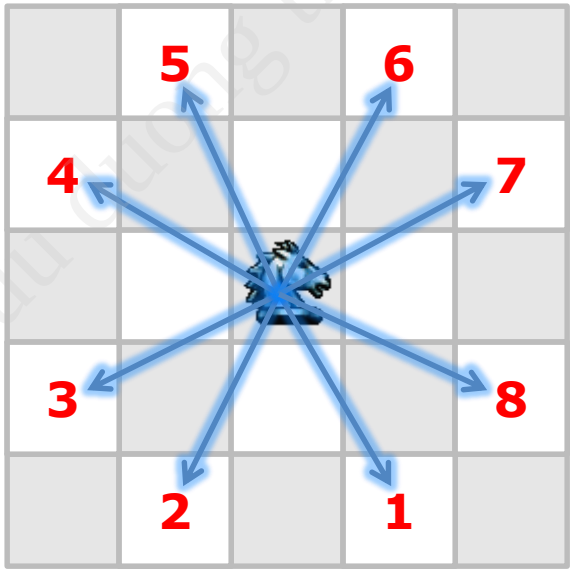
Tám hậu – Các dòng



Mã đi tuần

Mô tả bài toán

- Cho bàn cờ vua kích thước 8x8 (64 ô)
- Hãy đi con mã 64 nước sao cho mỗi ô chỉ đi qua 1 lần (xuất phát từ ô bất kỳ) theo luật:



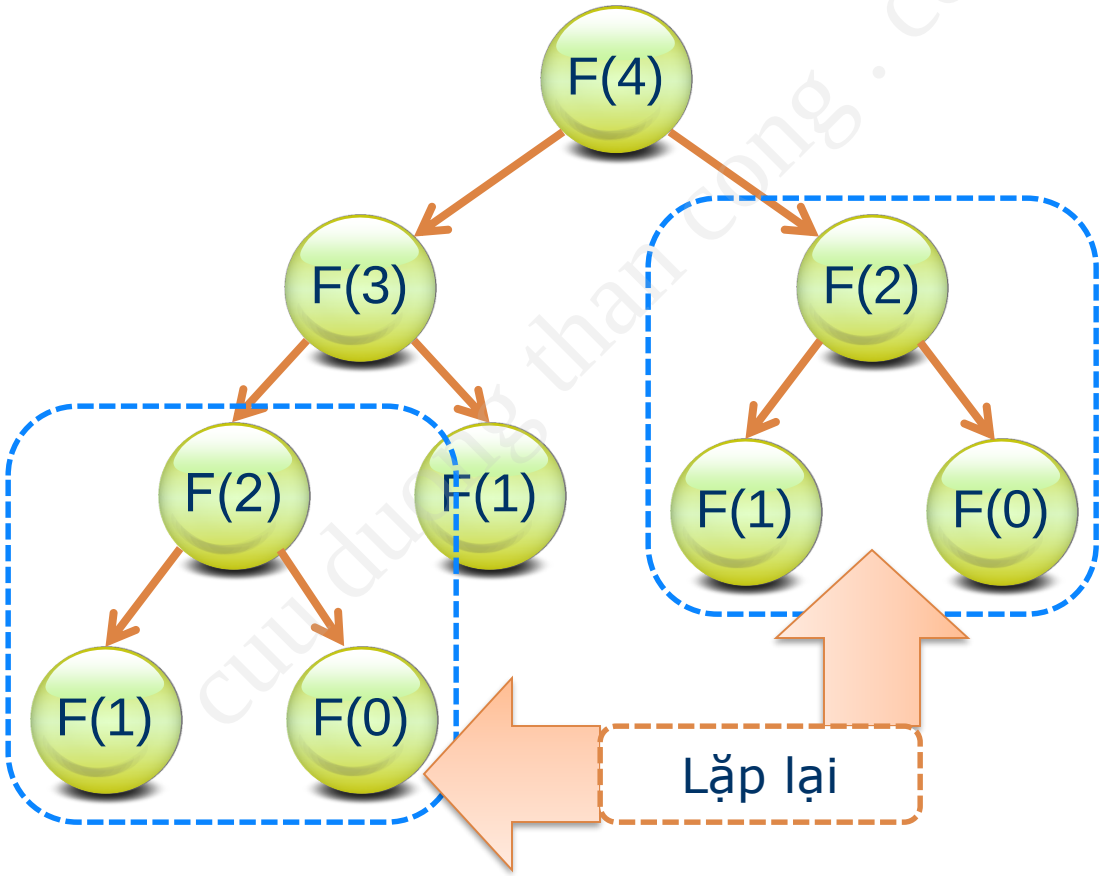
Phân tích giải thuật đệ quy

- Sử dụng cây đệ quy
  (recursive tree)
  - Giúp hình dung bước phân tích và thế ngược.
  - Bước phân tích: đi từ trên xuống dưới.
  - Bước thế ngược đi từ trái sang phải, từ dưới lên trên.
  - Ý nghĩa
    - Chiều cao của cây ⇔ Độ lớn trong STACK.
    - Số nút ⇔ Số lời gọi hàm.

Nhận xét

- Ưu điểm
  - Sáng sủa, dễ hiểu, nêu rõ bản chất vấn đề.
  - Tiết kiệm thời gian thực hiện mã nguồn.
  - Một số bài toán rất khó giải nếu không dùng đệ qui.
- Khuyết điểm
  - Tốn nhiều bộ nhớ, thời gian thực thi lâu.
  - Một số tính toán có thể bị lặp lại nhiều lần.
  - Một số bài toán không có lời giải đệ quy.

Ví dụ cây đệ quy Fibonacy



Khử đệ quy (tham khảo)

- Khái niệm
  - Đưa các bài toán đệ quy về các bài toán không sử dụng đệ quy.
  - Thường sử dụng vòng lặp hoặc STACK tự tạo.
  - …

Tổng kết

Nhận xét

- Chỉ nên dùng phương pháp đệ quy để giải các bài toán kinh điển như giải các vấn đề "chia để trị", "lần ngược".
- Vấn đề đệ quy không nhất thiết phải giải bằng phương pháp đệ quy, có thể sử dụng phương pháp khác thay thế (khử đệ quy)
- Tiện cho người lập trình nhưng không tối ưu khi chạy trên máy.
- Bước đầu nên giải bằng đệ quy nhưng từng bước khử đệ quy để nâng cao hiệu quả.

Bài tập

- Bài 1: Các bài tập trên mảng sử dụng đệ quy.
- Bài 2: Viết hàm đệ quy xác định chiều dài chuỗi.
- Bài 3: Hiển thị n dòng của tam giác Pascal.
  - a[i][0] = a[i][i] = 1
  - a[i][k] = a[i-1][k-1] + a[i-1][k]

    Dòng 0: 1
    Dòng 1: 1 1
    Dòng 2: 1 2 1
    Dòng 3: 1 3 3 1
    Dòng 4: 1 4 6 4 1
    ...

Bài tập

- Bài 4: Viết hàm đệ quy tính C(n, k) biết
  - C(n, k) = 1 nếu k = 0 hoặc k = n
  - C(n, k) = 0 nếu k > n
  - C(n ,k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1) nếu 0<k<n
- Bài 5: Đổi 1 số thập phân sang cơ số khác.
- Bài 6: Tính các tổng truy hồi.
- Bài 7: Bài toán "Tháp Hà Nội".
- Bài 8: Bài toán "8 hậu".
- Bài 9: Bài toán "Mã đi tuần".