

# ĐẠI SỐ B2

TS. Nguyễn Viết Đông

## Chương 2 Nhóm (Groups)

TS. Nguyễn Viết Đông

2

## Groups

- 1. Introduction(Nhập môn)
- 2. Normal subgroups, quotient groups(nhóm con chuẩn tắc, nhóm thương).
- 3. Homomorphism(đồng cấu).

3

## 1. Introduction

- 1.1. Binary Operations(phép toán hai ngôi)
- 1.2. Definition of Groups(định nghĩa nhóm)
- 1.3. Examples of Groups(ví dụ về nhóm)
- 1.4. Subgroups(nhóm con)

4

## 1.Introduction

### 1.1.Binary Operations

Cho  $S$  là tập hợp khác rỗng, phép toán hai ngôi trên  $S$  là ánh xạ  $f : S \times S \rightarrow S$ . Như vậy  $f$  đặt tương ứng mỗi cặp  $(x,y)$  các phần tử của  $S$  với phần tử  $f(x,y)$  của  $S$ . Để thuận tiện ta sẽ viết  $xy$  thay cho  $f(x,y)$ .

5

## 1.Introduction

### 1.2.Definition of Groups

*Nhóm*  $(G, \cdot)$  là tập  $G$  cùng với phép toán hai ngôi thỏa mãn các tiên đề sau đây.

- (i) Phép toán có tính chất kết hợp; nghĩa là,  
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  với mọi  $a, b, c \in G$ .
- (ii) Tồn tại *phần tử trung hòa*  $e \in G$  sao cho  
 $e \cdot a = a$      $a \cdot e = a$  đối với mọi  $a \in G$ .
- (iii) Mỗi một  $a \in G$  có *phần tử ngược*  $a^{-1} \in G$  sao cho  
 $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ .

6

## 1.Introduction

Nếu phép toán có tính chất giao hoán, nghĩa là,

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{với mọi } a, b \in G,$$

thì nhóm  $G$  được gọi là **nhóm giao hoán hay nhóm Abel**, vinh danh nhà toán học Niels Abel.

**Definition.** Nếu  $G$  là nhóm hữu hạn, thì số phần tử của  $G$ , kí hiệu bởi  $|G|$ , được gọi là *cấp của  $G$* .

7

## 1.Introduction

### 1.3.Examples of Groups

- **Example 1.3.1.** Gọi  $G = \{1, -1, i, -i\}$  và  $\cdot$  là phép nhân các số phức như thông thường. Khi đó  $(G, \cdot)$  là nhóm Abel. Tích của hai phần tử bất kỳ của  $G$  là phần tử của  $G$ ; như vậy  $G$  đóng đối với phép toán nhân. Phép nhân trên  $G$  có tính giao hoán và kết hợp vì phép nhân các số phức bất kỳ có tính giao hoán và kết hợp. Phần tử đơn vị là số 1, phần tử ngược của  $a$  là  $1/a$ . Từ đó

$$1^{-1} = 1, \quad (-1)^{-1} = -1, \quad i^{-1} = -i, \quad \text{và} \quad (-i)^{-1} = i.$$

8

## 1.Introduction

- **Example 1.3.2.** Tập hợp tất cả các số hữu tỷ,  $\mathbb{Q}$ , lập thành nhóm abel  $(\mathbb{Q}, +)$  với phép toán cộng. Phần tử không là 0, phần tử đối của  $a$  là  $-a$ . Tương tự,  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ , và  $(\mathbb{C}, +)$  cũng là nhóm Abel với phép toán cộng.
- **Example 1.3.3.** Nếu  $\mathbb{Q}^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ , và  $\mathbb{C}^*$  kí hiệu là tập tất cả các số hữu tỷ khác 0, các số thực khác 0, các số phức khác 0, tương ứng, thì  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ , và  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  là các nhóm Abel với phép toán nhân.

9

## 1.Introduction

- **Example 1.3.4.** Nếu  $S(X)$  là tập tất cả các song ánh từ tập hợp  $X$  vào chính nó, thì  $(S(X), \circ)$  là nhóm với phép toán hợp thành của các ánh xạ. Nhóm này được gọi là nhóm đối xứng hay nhóm hoán vị của  $X$ . Khi  $X$  là tập hợp hữu hạn  $n$  phần tử ta sẽ ký hiệu  $S_n$  thay cho  $S(X)$ , và gọi  $S_n$  là nhóm đối xứng bậc  $n$ .

10

## 1.Introduction

- **Proposition 1.3.1.** Nếu  $a$ ,  $b$ , và  $c$  là các phần tử của nhóm  $G$ , khi đó
  - (i)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
  - (ii)  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
  - (iii)  $ab = ac$  or  $ba = ca$  kéo theo  $b = c$ . (luật giản ước)

11

## 1.Introduction

- 1.4.Subgroups
 

Cho  $(G, \cdot)$  là nhóm và  $H$  là tập con khác rỗng của  $G$ . Khi đó  $(H, \cdot)$  được gọi là *nhóm con* của  $(G, \cdot)$  nếu các điều kiện sau đây thỏa:

  - (i)  $a \cdot b \in H$  đối với mọi  $a, b \in H$ . (đóng đối với phép nhân)
  - (ii)  $a^{-1} \in H$  đối với mọi  $a \in H$ . (đóng đối với phần tử nghịch đảo)

12

## 1.Introduction

- Các điều kiện (i) và (ii) là tương đương với một điều kiện sau:  
(iii)  $a \cdot b^{-1} \in H$  đối với mọi  $a, b \in H$ .

**Proposition 1.4.2.** Nếu  $H$  là tập con hữu hạn của nhóm  $G$  và  $ab \in H$  với mọi  $a, b \in H$ , thì  $H$  là nhóm con của  $G$ .

**Example 1.4.1** Trong nhóm  $G = (\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ , tập con  $\{1, -1\}$  là nhóm con của  $G$  vì nó đóng đối với phép nhân.

13

## 1.Introduction

- Example 1.4.2.** Nhóm  $\mathbb{Z}$  là nhóm con của  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}$  là nhóm con của  $\mathbb{R}$ , và  $\mathbb{R}$  là nhóm con của  $\mathbb{C}$ . (Phép toán trên các nhóm này là phép cộng.)
- Tuy nhiên, tập  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  các số nguyên không âm là tập con của  $\mathbb{Z}$  nhưng không phải là nhóm con, vì nghịch đảo của 1 là  $-1$ , không thuộc  $\mathbb{N}$ . Ví dụ này chứng tỏ rằng Proposition 1.4.2 là không đúng nếu  $H$  là tập vô hạn.

14

## 1.Introduction

- Definition.** Cho  $G$  là nhóm và  $a \in G$ . Nếu  $k$  là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho  $a^k = 1$  thì  $k$  được gọi là *cấp của  $a$* ; nếu không tồn tại  $k$  nguyên dương sao cho  $a^k = 1$  thì  $a$  được gọi là có cấp vô hạn.
- Proposition 1.4.3.** Cho  $G$  là nhóm và  $a \in G$  có cấp hữu hạn  $k$ . Nếu  $a^n = 1$ , thì  $k \mid n$ . Như vậy,  $\{n \in \mathbb{Z} : a^n = 1\}$  là tập tất cả các bội của  $k$ .

15

## 1.Introduction

- Definition.** Nếu  $G$  là nhóm và  $a \in G$ , đặt  $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\text{tất cả các lũy thừa của } a\}$ . Dễ dàng thấy rằng  $\langle a \rangle$  là nhóm con của  $G$ .  
 $\langle a \rangle$  được gọi là *nhóm con cyclic của  $G$  sinh bởi  $a$* . Nhóm  $G$  được gọi là nhóm cyclic nếu có  $a \in G$  sao cho  $G = \langle a \rangle$ ; trong trường hợp này  $a$  được gọi là *phần tử sinh* của  $G$ .
- Proposition 1.4.4.** Cho  $G = \langle a \rangle$  là nhóm cyclic cấp  $n$ , khi đó  $a^k$  là phần tử sinh của nhóm  $G$  nếu và chỉ nếu  $(k; n) = 1$ .
- Corollary 1.4.5.** Số các phần tử sinh của nhóm cyclic cấp  $n$  là  $\phi(n)$ .

16

## 1.Introduction

- **Proposition 1.4.6.** Cho  $G$  là nhóm và  $a \in G$  có cấp hữu hạn. Khi đó cấp của  $a$  là số phần tử của  $\langle a \rangle$ .

17

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- 2.1.Cosets(Lớp ghép)
- 2.2.Theorem of Lagrange( Định lý Lagrange)
- 2.3.Normal Subgroups( Nhóm con chuẩn tắc)
- 2.4.Quotient Groups( Nhóm thương)

18

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- 2.1.Cosets
- Cho  $(G, \cdot)$  là nhóm và  $H$  là nhóm con của  $G$ . Với  $a, b \in G$ , chúng ta nói rằng  **$a$  đồng dư với  $b$  modulo  $H$** , và viết  $a \equiv b \pmod{H}$  nếu và chỉ nếu  $ab^{-1} \in H$ .
- **Proposition 2.1. 1.** Quan hệ  $a \equiv b \pmod{H}$  là quan hệ tương đương trên  $G$ . Lớp tương đương chứa  $a$  là tập  $H_a = \{ha | h \in H\}$ , và được gọi là lớp kề phải của  $H$  trong  $G$ . Phần tử  $a$  được gọi là phần tử đại diện của lớp kề  $H_a$ .

19

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- **Example 2.1.1. Tìm lớp kề phải của  $A_3$  trong  $S_3$ .**  
**Solution.** Một lớp kề của nhóm con là chính nó  $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$ . Lấy phần tử bất kỳ không nằm trong nhóm này, chẳng hạn  $(12)$ . Khi đó ta được lớp kề  $A_3(12) = \{(12), (123)(12), (132)(12)\} = \{(12), (13), (23)\}$ . Vì các lớp kề phải lập nên phân hoạch của  $S_3$  và hai lớp kề trên chứa hết tất cả các phần tử của  $S_3$ , suy ra chỉ có hai lớp kề.  
 Chú ý rằng,  $A_3 = A_3(123) = A_3(132)$  và  $A_3(12) = A_3(13) = A_3(23)$ .

20

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- **Example 2.1.2.** Tìm các lớp ghép phải của  $H = \{e, g^4, g^8\}$  trong  $C_{12} = \{e, g, g^2, \dots, g^{11}\}$ .
- **Solution.**  $H$  là một lớp kè của  $H$ . Một lớp kè khác là  $Hg = \{g, g^5, g^9\}$ . Hai lớp kè này chưa chứa hết các phần tử của  $C_{12}$ , chẳng hạn  $g^2$ , không là phần tử của  $H$  và cũng không là phần tử của  $Hg$ . Lớp kè thứ ba là  $Hg^2 = \{g^2, g^6, g^{10}\}$  lớp kè thứ tư là  $Hg^3 = \{g^3, g^7, g^{11}\}$ .  
Vì  $C_{12} = H \cup Hg \cup Hg^2 \cup Hg^3$ , nên 4 lớp kè này là tất cả các lớp kè của  $H$ .

21

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- **2.2.Theorem of Lagrange**
- Các ví dụ trên chứng tỏ rằng các lớp kè của một nhóm con có cùng số phần tử. Chúng ta sẽ dùng kết quả này để chứng minh một định lý nổi tiếng của Joseph Lagrange (1736–1813).
- **Lemma 2.2.1.** Có song ánh giữa hai lớp kè phải tùy ý của nhóm con  $H$  trong nhóm  $G$ .

**Proof.** Giả sử  $Ha$  là lớp ghép phải của  $H$  trong  $G$ . Chúng ta lập song ánh giữa  $Ha$  và  $H$ , từ đó suy ra có song ánh giữa hai lớp kè bất kỳ của  $H$ .

Xét ánh xạ  $\psi: H \rightarrow Ha$  xác định bởi  $\psi(h) = ha$ . Khi đó hiển nhiên  $\psi$  là toàn ánh. Giả sử  $\psi(h_1) = \psi(h_2)$ , khi đó  $h_1a = h_2a$ . Nhân cả hai vế với  $a^{-1}$  về bên phải, chúng ta đạt được  $h_1 = h_2$ . Từ đó  $\psi$  là song ánh.

22

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- **Theorem 2.2.2. Lagrange's Theorem.** Nếu  $G$  là nhóm hữu hạn và  $H$  là nhóm con của  $G$ , thì  $|H|$  là ước của  $|G|$ .
- Proof.** Các lớp ghép phải của  $H$  trong  $G$  lập nên phân hoạch của  $G$ , do đó  $G$  có thể viết thành hợp rời  
 $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_k$  với hữu hạn các phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$ .  
 Theo Lemma 2.2.1, số các phần tử của mỗi lớp kè đều bằng  $|H|$ . Từ đó, bằng cách tính tất cả các phần tử của hợp rời nói trên, chúng ta thấy rằng  $|G| = k|H|$ . Do đó,  $|H|$  là ước  $|G|$ .

23

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- Nếu  $H$  là nhóm con của  $G$ , số các lớp ghép phải rời nhau của  $H$  trong  $G$  được gọi là **chỉ số** của  $H$  trong  $G$  và kí hiệu  $[G : H]$ .
- **Corollary 2.2.3.** Nếu  $G$  là nhóm hữu hạn và  $H$  là nhóm con của  $G$ , khi đó  
 $[G : H] = |G|/|H|$ .
- **Corollary 2.2.4.** Nếu  $a$  là phần tử của nhóm hữu hạn  $G$  thì cấp của  $a$  là ước của cấp của  $G$ .

24

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- 2.3.Normal Subgroups
- Cho  $H$  là nhóm con của nhóm  $G$ . Các lớp ghép phải của  $H$  trong  $G$  là các lớp tương đương theo quan hệ  $a \equiv b \pmod{H}$ , xác định bởi  $ab^{-1} \in H$ . Chúng ta cũng có thể định nghĩa quan hệ  $L$  trên  $G$  xác định bởi  $b^{-1}a \in H$ . Quan hệ  $L$  là quan hệ tương đương và lớp tương đương chứa  $a$  là lớp ghép trái  $aH = \{ah | h \in H\}$ . Ví dụ sau đây chứng tỏ lớp ghép trái và lớp ghép phải nói chung là không trùng nhau.

25

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- Example 2.3.1.** Tìm các lớp ghép trái và lớp ghép phải của  $H = A_3$  và  $K = \{(1), (12)\}$  trong  $S_3$ .
- Solution.**  
Right Cosets  
 $H = \{(1), (123), (132)\}; H(12) = \{(12), (13), (23)\}$   
Left Cosets  
 $H = \{(1), (123), (132)\}; (12)H = \{(12), (23), (13)\}$   
Ta thấy rằng các lớp ghép trái và lớp ghép phải của  $H$  là như nhau.
- Tuy nhiên các lớp ghép trái và lớp ghép phải của  $K$  là không như nhau.  
Right Cosets  
 $K = \{(1), (12)\}; K(13) = \{(13), (132)\}; K(23) = \{(23), (123)\}$   
Left Cosets  
 $K = \{(1), (12)\}; (23)K = \{(23), (132)\}; (13)K = \{(13), (123)\}$

26

## 2.Normal subgroups,quotient groups

**Definition:** Nhóm con  $H$  của nhóm  $G$  được gọi là nhóm con chuẩn tắc của  $G$  nếu  $g^{-1}hg \in H$  với mọi  $g \in G$  và  $h \in H$ .

**Proposition 2.3.1.**  $Hg = gH$ , với mọi  $g \in G$ , nếu và chỉ nếu  $H$  là nhóm con chuẩn tắc của  $G$ .

**Proof.** Giả sử  $Hg = gH$ . Khi đó với  $h \in H$ ,  $hg \in Hg = gH$ . Từ đó  $hg = gh_1$  với  $h_1 \in H$  và  $g^{-1}hg = g^{-1}gh_1 = h_1 \in H$ . Do đó,  $H$  là nhóm con chuẩn tắc của  $G$ .

Ngược lại, giả sử  $H$  chuẩn tắc, lấy  $hg \in Hg$  thì  $g^{-1}hg = h_1 \in H$ . Khi đó  $hg = gh_1 \in gH$  và  $Hg \subseteq gH$ . Tương tự,  $ghg^{-1} = (g^{-1})^{-1}hg^{-1} = h_2 \in H$ , vì  $H$  là chuẩn tắc, do đó  $gh = h_2g \in Hg$ . Suy ra,  $gH \subseteq Hg$ , vì vậy  $Hg = gH$ .

27

## 2.Normal subgroups,quotient groups

- Nếu  $N$  là nhóm con chuẩn tắc của nhóm  $G$  thì chúng ta không cần phân biệt lớp ghép trái hay lớp ghép phải và gọi chung là lớp ghép.
- Theorem 2.3.2.** Nếu  $N$  là nhóm con chuẩn tắc của  $(G, \cdot)$ , thì tập các lớp ghép  $G/N = \{Ng | g \in G\}$  lập thành nhóm  $(G/N, \cdot)$ , trong đó phép toán nhân xác định bởi  $(Ng_1) \cdot (Ng_2) = N(g_1 \cdot g_2)$ . Nhóm này được gọi là nhóm thương của  $G$  theo  $N$ .

28

## 2. Normal subgroups, quotient groups

- *Proof.* The operation of multiplying two cosets,  $Ng_1$  and  $Ng_2$ , is defined in terms of particular elements,  $g_1$  and  $g_2$ , of the cosets. For this operation to make sense, we have to verify that, if we choose different elements,  $h_1$  and  $h_2$ , in the same cosets, the product coset  $N(h_1 \cdot h_2)$  is the same as  $N(g_1 \cdot g_2)$ . In other words, we have to show that multiplication of cosets is well defined. Since  $h_1$  is in the same coset as  $g_1$ , we have  $h_1 \equiv g_1 \pmod{N}$ . Similarly,  $h_2 \equiv g_2 \pmod{N}$ . We show that  $Nh_1h_2 = Ng_1g_2$ . We have  $h_1g_1^{-1} = n_1 \in N$  and  $h_2g_2^{-1} = n_2 \in N$ , so  $h_1h_2(g_1g_2)^{-1} = h_1h_2g_2^{-1}g_1^{-1} = n_1g_1n_2g_2g_2^{-1}g_1^{-1} = n_1g_1n_2g_1^{-1}$ . Now  $N$  is a normal subgroup, so  $g_1n_2g_1^{-1} \in N$  and  $n_1g_1n_2g_1^{-1} \in N$ . Hence  $h_1h_2 \equiv g_1g_2 \pmod{N}$  and  $Nh_1h_2 = Ng_1g_2$ . Therefore, the operation is well defined.

29

## 2. Normal subgroups, quotient groups

- The operation is associative because  $(Ng_1 \cdot Ng_2) \cdot Ng_3 = N(g_1g_2) \cdot Ng_3 = N(g_1g_2)g_3$  and also  $Ng_1 \cdot (Ng_2 \cdot Ng_3) = Ng_1 \cdot N(g_2g_3) = Ng_1(g_2g_3) = N(g_1g_2)g_3$ .
- Since  $Ng \cdot Ne = Nge = Ng$  and  $Ne \cdot Ng = Ng$ , the identity is  $Ne = N$ .
- The inverse of  $Ng$  is  $Ng^{-1}$  because  $Ng \cdot Ng^{-1} = N(g \cdot g^{-1}) = Ne = N$  and also  $Ng^{-1} \cdot Ng = N$ .
- Hence  $(G/N, \cdot)$  is a group.

30

## 2. Normal subgroups, quotient groups

- **Example 2.3.1.**  $(\mathbb{Z}_n, +)$  là nhóm thương của  $(\mathbb{Z}, +)$  theo nhóm con  $n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ .
- *Solution.* Vì  $(\mathbb{Z}, +)$  là nhóm abel nên mọi nhóm con của nó đều chuẩn tắc. Dễ thấy  $n\mathbb{Z}$  là nhóm con của  $\mathbb{Z}$  và quan hệ  $a \equiv b \pmod{n\mathbb{Z}}$  là tương đương với  $a - b \in n\mathbb{Z}$  hay  $na - b$ . Như vậy  $a \equiv b \pmod{n\mathbb{Z}}$  trùng với quan hệ  $a \equiv b \pmod{n}$ . Do đó,  $\mathbb{Z}_n$  là nhóm thương  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , trong đó phép toán cộng xác định bởi  $[a] + [b] = [a + b]$ .  
 $(\mathbb{Z}_n, +)$  là nhóm cyclic sinh bởi 1. Nếu không sợ nhầm lẫn ta sẽ viết các phần tử của  $\mathbb{Z}_n$  là 0, 1, 2, 3, ...,  $n - 1$  thay cho  $[0]$ ,  $[1]$ ,  $[2]$ ,  $[3]$ , ...,  $[n - 1]$ .

31

## 3. Homomorphisms (Đồng cấu)

- 3.1. Definition of Homomorphisms
- 3.2. Examples of Homomorphisms
- 3.3. Theorem on Homomorphisms

32

### 3.Homomorphisms

#### 3.1.Definition of Homomorphisms

Cho  $(G, *)$  và  $(H, *)$  là hai nhóm, ánh xạ  $f: G \rightarrow H$  được gọi là *đồng cấu nhóm* nếu

$$f(a * b) = f(a) * f(b) \text{ với mọi } a, b \in G.$$

.Đồng cấu nhóm đồng thời là đơn ánh(tồn ánh) được gọi là *đơn cấu(tồn cấu) nhóm*,

Ánh xạ vừa là đơn cấu vừa là toàn cấu được gọi là *đẳng cấu*. Nếu có đẳng cấu giữa các nhóm  $(G, *)$  và  $(H, *)$ , chúng ta sẽ nói rằng  $(G, *)$  và  $(H, *)$  là *đẳng cấu* và ký hiệu  $(G, *) \cong (H, *)$ .

33

### 3.Homomorphisms

#### 3.2. Examples of Homomorphisms

- Ánh xạ  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , xác định bởi  $f(x) = [x]$  là đồng cấu nhóm.
- Cho  $\mathbb{R}$  là nhóm cộng các số thực,  $\mathbb{R}^+$  là nhóm nhân các số thực dương. Ánh xạ  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , xác định bởi  $f(x) = e^x$ , là đồng cấu. Hơn nữa  $f$  là song ánh, do đó  $f$  là đẳng cấu, ánh xạ ngược của nó là  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $g(x) = \ln x$ . Như vậy nhóm cộng số thực  $\mathbb{R}$  đẳng cấu với nhóm nhân các số thực dương  $\mathbb{R}^+$ . Chú ý rằng ánh xạ ngược  $g$  cũng là đẳng cấu.

34

### 3.Homomorphisms

#### 3.3.Theorem on Homomorphisms

- **Proposition 3.3.1.** Cho  $f: G \rightarrow H$  là đồng cấu, và  $e_G, e_H$  là các phần tử đơn vị của  $G$  và  $H$ , tương ứng. Khi đó

(i)  $f(e_G) = e_H$ .

(ii)  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$  for all  $a \in G$ .

35

### 3.Homomorphisms

- Nếu  $f: G \rightarrow H$  là đồng cấu nhóm, *nhân* của  $f$ , ký hiệu là *Kerf*, xác định bởi  $\text{Kerf} = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$
- **Proposition 3.3.2.** Cho  $f: G \rightarrow H$  là đồng cấu nhóm. Khi đó:
  - (i) *Kerf* là nhóm con chuẩn tắc của  $G$ .
  - (ii)  $f$  là đơn cấu nếu và chỉ nếu  $\text{Kerf} = \{e_G\}$ .
- **Proposition 3.3.3.** Cho  $f$  là đồng cấu nhóm  $f: G \rightarrow H$ , ảnh của  $f$ ,  $\text{Im}f = \{f(g) \mid g \in G\}$ , là nhóm con của  $H$  (không nhất thiết là nhóm con chuẩn tắc).

36

### 3. Homomorphisms

- **Theorem 3.3.4. Morphism Theorem for Groups.** Cho  $K$  là nhân của đồng cấu  $f: G \rightarrow H$ . Khi đó  $G/K$  là đẳng cấu với ảnh của  $f$ , bởi đẳng cấu

$$\psi: G/K \rightarrow \text{Im} f \quad \text{với } \psi(Kg) = f(g).$$

- Định lý này còn được gọi là **định lý đẳng cấu thứ nhất**.

37

### 3. Homomorphisms

- **Example 3.3.1.** Chứng minh rằng nhóm thương  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  is đẳng cấu với nhóm  $W = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ .

*Solution.* Xét ánh xạ

$f: \mathbb{R} \rightarrow W$  xác định bởi  $f(x) = e^{2\pi i x}$ . Ánh xạ này là đồng cấu từ  $(\mathbb{R}, +)$  tới  $(W, \cdot)$  vì

$$f(x + y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y} = f(x) \cdot f(y).$$

Dễ dàng thấy rằng  $f$  là toàn ánh, và nhân của  $f$  là  $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i x} = 1\} = \mathbb{Z}$ .

Suy ra  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong W$ .

38