Giải Tích B2

Nguyễn Thị Thu Vân

Đại học Khoa Học Tự Nhiên

Tháng 2 - 2012

Tài liệu tham khảo

1. Đ.C. Khanh: *Giải tích hàm nhiều biến*, NXB ĐHQG Tp. HCM (2003)
2. N.T. Long và N.C. Tâm: *Toán Cao Cấp C1*, Khoa Kinh Tế ĐHQG TpHCM (2004)
3. Raymond N. Greenwell, Nathan P. Ritchey, and Margaret L. Lial : *Calculus With Applications For The Life Sciences*, Addison Wesley (2003)
4. Stewart J.: *Calculus - Concepts and Contexts*, Brooks-Cole (2002)

Một số phần mềm hổ trợ tính toán

Maxima – Mathematica – Maple – Matlab

Ví dụ 1: Một vật có khối lượng m rơi tự do với lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc rơi. Tính vận tốc rơi của vật?

Gọi v(t) là vận tốc rơi của vật. Khi đó có 2 lực tác động lên vật:

- trọng lực $F_1 = mg$
- lực cản của không khí: $F_2 = -\alpha v(t)$, trong đó $\alpha > 0$ là hệ số cản

Theo định luật 2 Newton ta có: $ma = F = F_1 + F_2 = mg - \alpha v(t)$ hay ta có thể viết $m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v(t)$: đây là phương trình mà ngoài hàm cần tìm $v(t)$, nó còn chứa cả đạo hàm $v^{'}(t)$. Phương trình này được gọi là phương trình vi phân cấp 1. Vậy để tính v, ta cần giải phương trình vi phân cấp 1 này.

Nếu ta coi $s(t)$ là quãng đường đi được của vật, thì ta có phương trình vi phân cấp 2 như sau: $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - \alpha\frac{ds}{dt}$

Ví dụ 2: (Mô hình tăng trưởng dân số) Cho biết tốc độ tăng trưởng dân số tỷ lệ với số dân. Hãy thiết lập mô hình tăng trưởng dân số?

Gọi t là thời gian (biến độc lập)
P là số dân (biến phụ thuộc)
k là hằng số tỷ lệ

Theo giả thiết ta có phương trình sau: $\frac{dP}{dt} = kP$ hay $P^{'}(t) = kP(t)$: đây chính là mô hình tăng trưởng dân số cần tìm.
Nghiệm của phương trình này chính là : $P(t) = Ce^{kt}$ $(C > 0)$

Nếu có thêm hạn chế rằng số dân không vượt quá K, khi đó ta có phương trình sau:

$$P^{'}(t) = k\ P(t)\ (1 - \frac{P(t)}{K})$$

Phương trình vi phân là một phương trình chứa hàm cần tìm, đạo hàm các cấp của nó và biến độc lập. Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm xuất hiện trong phương trình. Ta viết

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

đây được gọi là phương trình vi phân thường cấp n.

Ta có thể viết gọn như sau:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng

(1) $$F(x, y, y') = 0,$$

Hoặc (1) có dạng đưa được về dạng

(2) $$y' = f(x, y) \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

trong đó f là một hàm theo hai biến độc lập.

Bài toán Cauchy (hay **bài toán điều kiện đầu)** là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) thỏa điều kiện

(3) $$y(x_0) = y_0.$$

Nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trên khoảng Ω là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên Ω sao cho khi thay vào (1) hoặc (2) ta được đồng nhất thức trên Ω:

$$F(x, \varphi(x), \varphi^{/}(x)) = 0, \ \ \forall x \in \Omega,$$

hoặc

$$\varphi^{/}(x) = f(x, \varphi(x)), \ \ \forall x \in \Omega,$$

Ví dụ: Xét bài toán Cauchy

$$y^{/} = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Từ $y^{/} = \frac{y}{x}$, ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \ (C_1 > 0).$$

Suy ra $y = Cx, \ \ x \neq 0, \ \ (C = \pm C_1)$.

Vì $y(1) = 2 \Rightarrow C = 2$. Vậy suy ra nghiệm của bài toán là $y = 2x$, $x \neq 0$.

Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng:

- Nghiệm tổng quát: Hàm số $y = \varphi(x, C)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trong miền $\Omega \subset \mathrm{R}^2$, nếu với mọi điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$, tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) và thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$.

- Nghiệm riêng: Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình vi phân cấp một

  là nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ mà ta nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ bằng cách cho hằng số tùy ý C một giá trị cụ thể C_0.

Phương trình vi phân cấp 1 *tách biến* là phương trình vi phân có dạng

(6) $$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Cách giải: Lấy tích phân bất định hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Chú thích: Phương trình dạng sau đây có thể đưa về dạng (6) như sau:

(7) $$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

- Nếu $g_1(y) = 0$ tại $y = b$ (tức là $g_1(b) = 0$) thì $y = b$ là nghiệm của (7).
- Nếu $f_2(x) = 0$ tại $x = a$ (tức là $f_2(a) = 0$) thì $x = a$ là nghiệm của (7).
- Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì chia hai vế của (7) cho $g_1(y)f_2(x)$, ta được
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Trong trường hợp này, lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát
$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân
$$y^{/} = xy(y+2).$$

Chú thích : Phương trình dạng sau đây cũng có thể đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $z = ax + by + c$.

(8) $$y' = f(ax + by + c)$$

Thật vậy

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

- Nếu $a + bf(z) = 0$ khi $z = z_0$, thì $ax + by + c = z_0$ là nghiệm của (8).
- Các nghiệm khác tìm được bằng cách chia hai vế của phương trình cho $a + bf(z)$ rồi lấy tích phân, ta được

$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $y' = (x - y + 1)^2$.

Phương trình vi phân *đẳng cấp cấp* 1 là phương trình có dạng

(9) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

Cách giải: Ta đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $u = \frac{y}{x}$. Khi đó

$$y = ux, \quad y' = xu' + u.$$

Thay vào (9) ta được

$$xu' + u = f(u).$$

hay

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Xét 2 trường hợp:

- $f(u) - u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}.$$

Tích phân hai vế của phương trình này, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u)-u} + \ln|C| = \Phi(u) + \ln|C|,$$

trong đó $\Phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$. Do đó $x = Ce^{\Phi(u)}$.

Vậy tích phân tổng quát của (9) là

$$x = Ce^{\Phi(y/x)}$$

- $f(u) - u \equiv 0$, thì $f(y/x) = y/x$ và phương trình (9) có dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

hay

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân hai vế của, ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

hay

$$y = Cx, \;\; x \neq 0 \;\; (C = \pm C_1)$$

là nghiệm tổng quát của (9) trong trường hợp $f(y/x) = y/x$.

Hoặc nếu $f(u) - u \equiv 0$, tại $u = u_0$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy rằng hàm $y = u_0 x, \;\; (x \neq 0)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân đẳng cấp $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 1 là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{10}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục cho trước.

- Nếu $q(x) \equiv 0$, thì (10) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *thuần nhất*.
- Nếu $q(x) \neq 0$, thì (10) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *không thuần nhất*.

Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)
Trước hết ta xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng với (10)

(11) $$y' + p(x)y = 0, \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

- Với $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1.$$

Do đó

(12) $$y = Ce^{-\int p(x)dx} \ (C = \pm C_1)$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình (11).

- Với $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (11) và cũng là một nghiệm riêng của phương trình (11) ứng với $C = 0$.

Bây giờ ta coi C không phải là hằng số mà là một hàm khả vi theo biến x. Ta sẽ tìm hàm số $C = C(x)$ để biểu thức
$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$
là nghiệm của phương trình không thuần nhất (10).

Lấy đạo hàm (12), ta được
$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$
Thay vào phương trình (10), ta được
$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad \text{hay} \quad dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$
Lấy tích phân hai vế, ta được
$$C = C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (10) là

(13) $$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right].$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Phương pháp Bernoulli

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (10) dưới dạng

(14) $$y = u(x)v(x).$$

Thế vào (10), ta được

$$u^{/}v + uv^{/} + p(x)uv = q(x),$$

hay

(15) $$[u^{/} + p(x)u]v + uv^{/} = q(x).$$

Chọn $u(x)$ là một nghiệm của phương trình

(16) $$u^{/} + p(x)u = 0,$$

ta có

(17) $$u = e^{-\int p(x)dx}$$

Từ (15)–(17), ta được $v^{/}e^{-\int p(x)dx} = q(x)$.

Vậy

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Cuối cùng ta nhận được nghiệm tổng quát cho bởi (13).

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $y^{/}\sin x - y\cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$.

Phương pháp thừa số tích phân
Nhân hai vế của (10) với thừa số

$$e^{\int p(x)dx},$$

ta được

$$y^{/} e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

mà vế trái của đẳng thức này chính là đạo hàm của tích số $ye^{\int p(x)dx}$.
Vậy ta viết lại đẳng thức này như sau

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (10) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $y^{/} + 2xy = 4x$.

Phương trình vi phân *Bernoulli* là phương trình có dạng:

(18) $$y^{/} + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục của x cho trước và α là một hằng số thực cho trước.

- Với $\alpha = 0$, thì (18) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.
$$y^{/} + p(x)y = q(x).$$
- Với $\alpha = 1$, thì (18) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.
$$y^{/} + [p(x) - q(x)]y = 0.$$

Do vậy ở đây ta chỉ cần xét $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Cách giải: Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

- Nếu $\alpha > 0$, thì $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của (18).
- Ngược lại nếu $\alpha \leq 0$, thì $y \equiv 0$ không là nghiệm của (18).

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của (18) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ và phương trình trên được viết lại

(19) $$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z. Sau khi giải tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (19), ta trở về ẩn y bởi công thức $z = y^{1-\alpha}$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình (18).

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 4x^3y^2.$$

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng

(20) $\quad F(x, y, y', y'') = 0,$

Nếu giải được phương trình (20) đối với y'' thì phương trình vi phân cấp 2 có dạng

(21) $\quad y'' = f(x, y, y'),$

trong đó f là một hàm cho trước theo ba biến độc lập.

Nghiệm của phương trình vi phân (20) trên khoảng Ω là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên Ω sao cho khi thay vào (20) ta được đồng nhất thức trên Ω :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Phương trình vi phân cấp 2 có nghiệm phụ thuộc vào hai hằng số, nên để xác định một nghiệm cụ thể cần có hai điều kiện nào đó. Người ta thường xét bài toán Cauchy (bài toán điều kiện đầu).

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp 2 thỏa điều kiện đầu

(22) $$y(x_0) = y_0, \;\; y^/(x_0) = y_0^/.$$

với x_0, y_0, $y_0^/$ là những số cho trước.

Định lý (về sự tồn tại và duy nhất nghiệm) Nếu hàm số $f(x, y, y^{/})$ liên tục trong miền mở nào đó chứa $(x_0, y_0, y_0^{/})$, tồn tại nghiệm của bài toán (21), (22).
Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y^{/}}$ liên tục và bị chặn trong miền mở nào đó chứa $(x_0, y_0, y_0^{/})$, thì nghiệm ấy là duy nhất.

Nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thường phụ thuộc vào hai hằng số thực C_1, C_2, và có dạng

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng

- Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp hai (21) trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nếu $(x_0, y_0, y_0^/) \in \Omega$, tồn tại duy nhất một cặp hằng số (C_1^0, C_2^0) sao cho $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (21) thỏa các điều kiện đầu $y(x_0) = y_0, \ \ y^/(x_0) = y_0^/$.

- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ bằng cách cho các hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể được gọi là *nghiệm riêng.*

Phương trình

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

cho ta mối quan hệ giữa biến độc lập và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai được gọi là *tích phân tổng quát* của nó trên.

- Nếu cho $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ là những giá trị cụ thể ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$$

mà ta gọi nó là *tích phân nghiệm riêng* của phương trình vi phân nói trên.

Về phương diện hình học, tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp hai xác định một họ đường cong trong mặt phẳng tọa độ phụ thuộc vào hai tham số tùy ý. Các đường cong ấy được gọi là *đường cong tích phân* của phương trình vi phân.

Xét phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y^{//} = f(x, y, y^{/})$$

mà ta có thể đưa chúng về cấp một.

Phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(x)$

(23) $$y^{//} = f(x)$$

Cách giải. Vì $y^{//} = (y^{/})^{/}$ nên từ (23) ta có $y^{/} = \int f(x)dx + C_1$.
Lấy tích phân một lần nữa, ta được
$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân
$$y^{//} = \sin x$$
thỏa các điều kiện đầu
$$y(0) = 0, \ \ y^{/}(0) = 1.$$

Phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(x, y^{/})$

(24) $$y^{//} = f(x, y^{/})$$

Cách giải. Đặt $y^{/} = p$, khi đó $y^{//} = p^{/}$ và (24) có dạng

$$p^{/} = f(x, p).$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát là

$$p = \varphi(x, C_1).$$

Vì $y^{/} = p$, nên ta có

$$y^{/} = \varphi(x, C_1).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (24) là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y^{//} = x - \frac{y^{/}}{x}.$$

Phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(y, y^{/})$

Cách giải. Đặt $y^{/} = p = p(y)$ và xem như là hàm của y. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức này theo x, ta có

$$y^{//} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$p^{/}\frac{dy}{dx} = f(y, p).$$

Đó là phương trình vi phân cấp 1 với ẩn hàm là $p = p(y)$. Nếu phương trình này giải được, ta có

$$p = \varphi(y, C_1),$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$
$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y^{/} = \varphi(x, C_1)$.

Suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$yy^{//} - y^{/\,2} = 0.$$

Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 2 *có hệ số hằng* là phương trình có dạng

(25) $$y^{//} + py^{/} + qy = f(x), \ \ a < x < b,$$

trong đó p, q là các hằng số. Ta luôn giả thiết $f(x)$ là hàm liên tục trong khoảng (a, b).

Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

(26) $$y^{//} + py^{/} + qy = 0,$$

được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (25).

Bài toán Cauchy: Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình (25) thỏa điều kiện đầu

(27) $$y(x_0) = y_0, \quad y^{/}(x_0) = y_0^{/},$$

với $x_0 \in (a, b)$, y_0, $y_0^{/}$ cho trước.

Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm) : Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b), thì với mọi $x_0 \in (a, b)$, và với mọi y_0, $y_0^{/}$ cho trước, bài toán Cauchy (25), (26) có duy nhất một nghiệm.

Phương trình vi phân thuần nhất

Xét phương trình vi phân thuần nhất

(28) $$y^{//} + py^{/} + qy = 0.$$

Định lý: Cho $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong (a, b) của phương trình thuần nhất (28). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (28) có dạng

(29) $$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

với C_1, C_2 là hai hằng số.

Như vậy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (28), ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó, rồi lấy tổ hợp tuyến tính của chúng.

Ta tìm nghiệm riêng của (28) dưới dạng

(30) $$y = e^{kx},$$

trong đó k là một hằng số nào đó. Ta có

$$y^{/} = ke^{kx},\ y^{//} = k^2e^{kx}.$$

Thay các biểu thức y, $y^{/}$, $y^{//}$ vào (28) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta được

(31) $$k^2 + pk + q = 0.$$

Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (31) thì hàm $y = e^{kx}$ là một nghiệm riêng của phương trình (28). Phương trình (31) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (28).

Có ba trường hợp sau đây

- Phương trình (31) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2.

Khi đó ta có hai nghiệm riêng của phương trình (28) là

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{hằng số}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (28) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y^{//} - 6y^{/} + 8y = 0.$$

- Phương trình (28) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -p/2$.

Khi đó ta có $y_1 = e^{k_1 x}$ và $y_2 = xe^{k_1 x}$ là 2 nghiệm của (28).
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (28) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

- Phương trình (31) có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

Ta có hai nghiệm riêng của phương trình (28) là

$$y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_2 = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (31) là

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \\ &= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x), \end{aligned}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y^{//} + 4y^{/} + 5y = 0.$$

Phương trình vi phân không thuần nhất

Bây giờ ta xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau

(32) $$y^{//} + py^{/} + qy = f(x), \quad a < x < b,$$

trong đó p, q là các hằng số và $f(x)$ là hàm liên tục trong khoảng (a, b).

Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với (32)

(33) $$y^{//} + py^{/} + qy = 0.$$

Định lý. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (32) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (33) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (32).

Xét trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ trong đó α là số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

- Nếu α không là nghiệm của (31), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng $y_r = e^{\alpha x}Q_n(x)$, với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n với $n+1$ hệ số chưa biết.

Để tìm các hệ số chưa biết, ta thay y_r vào phương trình (32) rồi đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai vế ta sẽ được một hệ $(n+1)$ phương trình bậc nhất với $(n+1)$ ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (31), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng
$$y_r = xe^{\alpha x}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$
- Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (31), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng
$$y_r = x^2e^{\alpha x}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình
$$y^{//} - y^{/} - 2y = 4x^2.$$

Xét trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ trong đó α, β là các số thực, $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ lần lượt là đa thức bậc n và m.

Trường hợp này nghiệm riêng có dạng:

$$y_r = x^r e^{\alpha x}[R_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x]$$

trong đó r là bội số của nghiệm $\alpha \pm i\beta$ của phương trình đặc trưng và $s = max\{m, n\}$.

Lưu ý: Ta qui ước $r = 0$ nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Định lý (Nguyên lý chồng chất nghiệm): Nếu y_1 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

và y_2 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_2(x)$$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

Thí dụ : Thể tích của hình trụ được xác định bởi công thức: $V = \pi r^2 h$. Rõ ràng thể tích hình trụ phụ thuộc bán kính r và chiều cao h của hình trụ. Vậy ta có thể viết như sau $V(r,h) = \pi r^2 h$

- Trường hợp này, V được xem như 1 hàm phụ thuộc vào 2 biến số r và h

Tương tự, thể tích của 1 hình hộp chữ nhật là $V = lwh$. Vậy ta có thể viết như sau: $V(l,w,h) = lwh$.

- Trường hợp này, V được xem như 1 hàm phụ thuộc vào 3 biến số l, w và h

1. Tập hợp R^n

$$\mathrm{R}^n = \underbrace{\mathrm{R} \times \mathrm{R} \times ... \times \mathrm{R}}_{n} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{R}\}$$

Cho 2 điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$. Khoảng cách giữa 2 điểm này được cho bởi công thức:

$$d(M, M') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + ... + (x_n - x_n')^2}$$

- $n = 2 : \mathrm{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathrm{R}\};$
  $d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
- $n = 3 : \mathrm{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathrm{R}\};$
  $d((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)) = \sqrt{(x - x_0')^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

2. Hàm nhiều biến

Cho $\Omega \subset \mathrm{R}^n$.Giả sử với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ trong Ω ta định nghĩa được một phần tử $f(x)$ trong R, ta nói ta xác định được một ánh xạ

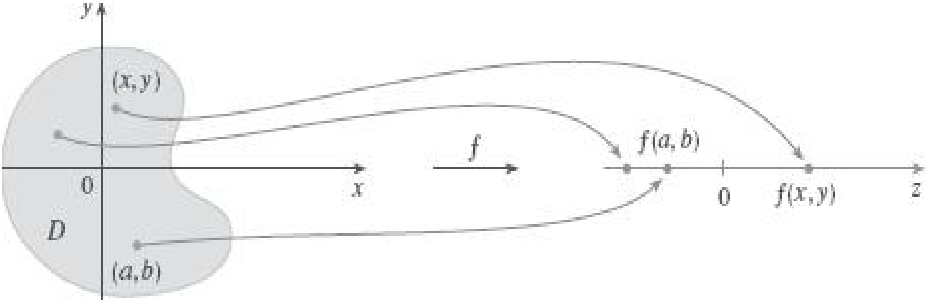
$$f : \Omega \subset \mathrm{R}^n \to R$$

và ta nói rằng hàm số f xác định trên Ω và nhận giá trị trong R. Khi đó Ω được gọi là miền xác định và $f(\Omega) = \{y = f(x) | x \in \Omega\}$ được gọi là tập ảnh của f

Ta viết $f : (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, hay gọn hơn là $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các biến độc lập, z được gọi là biến phụ thuộc.

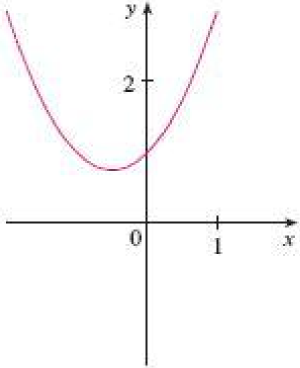
Lưu ý: nếu hàm f được cho bởi công thức nào đó mà không chỉ rõ miền xác định thì khi đó miền xác định của hàm f được hiểu là tập tất cả các giá trị của $(x_1, x_2, ..., x_n)$ để biểu thức đã cho có nghĩa.

Biểu thị hàm $z = f(x, y)$ dưới dạng biểu đồ mũi tên (arrow diagram)

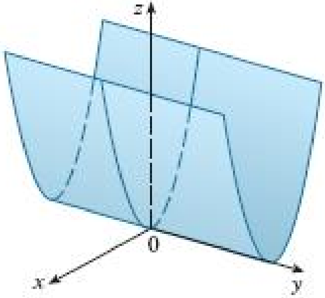


3. Đồ thị:

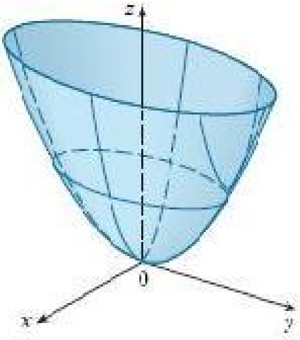
$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in \Omega\}$$

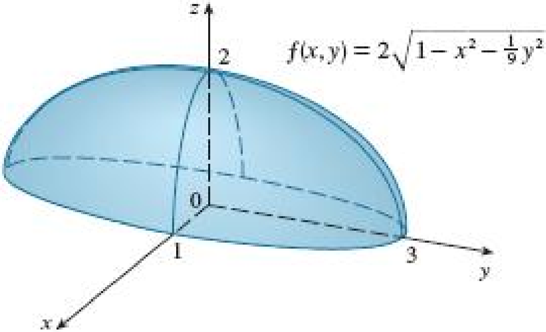


$y = x^2 + x + 1$



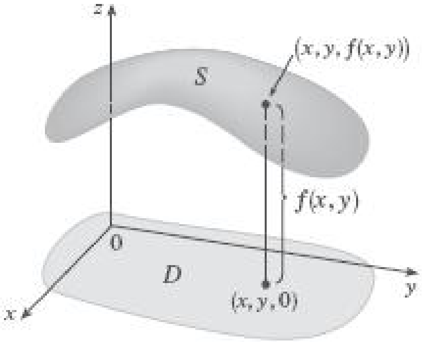
The graph of $f(x, y) = x^2$ is the parabolic cylinder $z = x^2$.





The graph of $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ is the elliptic paraboloid $z = 4x^2 + y^2$. Horizontal traces are ellipses; vertical traces are parabolas.

Biểu thị hàm $z = f(x, y)$ dưới dạng đồ thị (graph)



Thí dụ: $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

4. Đường đẳng trị - mặt đẳng trị:

Cho hàm số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ với miền xác định Ω. Tập tất cả những điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho

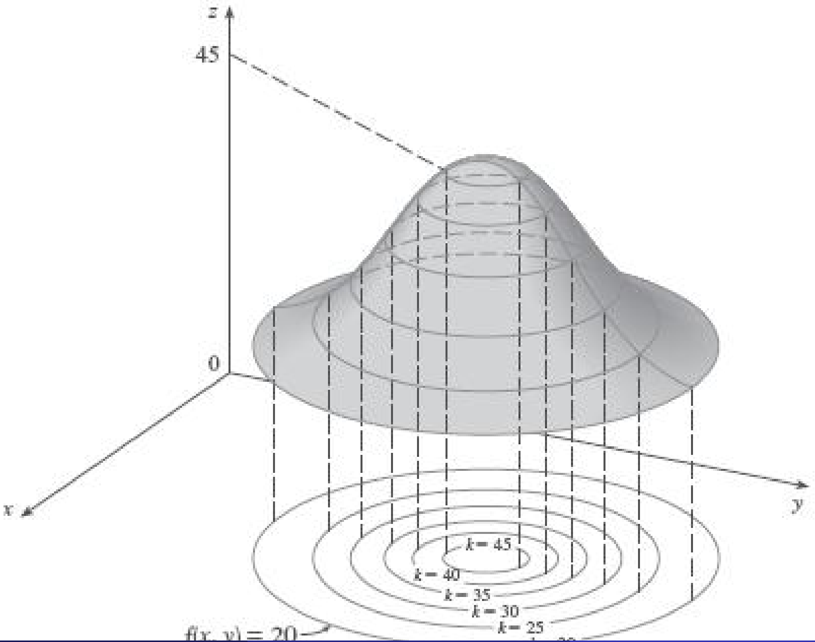
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c \ (c = \text{constant}) \qquad (*)$$

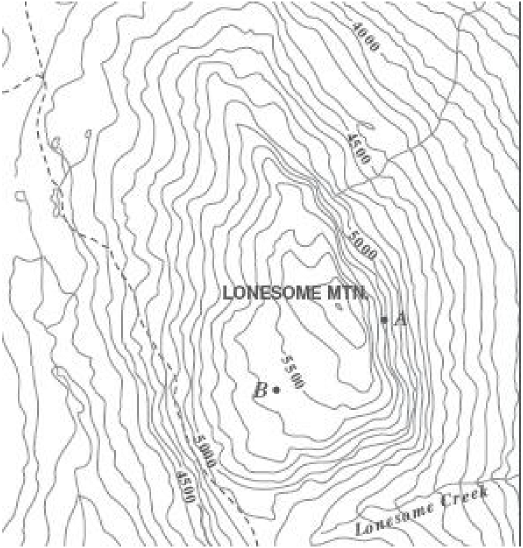
được gọi là tập đẳng trị (hay còn gọi là tập mức)

- Tập hợp các điểm (x, y) thỏa $(*)$ gọi là đường đẳng trị của hàm $f(x, y)$
- Tập hợp các điểm (x, y, z) thỏa $(*)$ gọi là mặt đẳng trị của hàm $f(x, y, z)$

Lưu ý: Các đường đẳng trị và mặt đẳng trị ứng với các giá trị c khác nhau thì không giao nhau

Biểu thị hàm $z = f(x, y)$ dưới dạng đường mức (contour curve)




4000
4500
5000
LONESOME MTN.
A
5500
B
5000
4500
Lonesome Creek

Các mặt bậc hai có phương trình:

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,xy + e\,xz + f\,yz + g\,x + h\,y + i\,z + k = 0$$

Một số mặt bậc hai chính tắc thường gặp:

Mặt Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Mặt Paraboloid Elliptic:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Mặt Paraboloid Hyperbolic:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

1. Sự hội tụ của dãy điểm

Cho 1 dãy điểm $M_k(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ và điểm $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Dãy $\{M_k\}$ được gọi là hội tụ đến M_0 nếu

$$d(M_k, M_0) \longrightarrow 0 \text{ khi } k \longrightarrow \infty$$

Như vậy rõ ràng sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ là sự hội tụ theo tọa độ, nghĩa là

$$M_k \longrightarrow M_0 \;\Leftrightarrow x_1^k \longrightarrow x_1^0, x_2^k \longrightarrow x_2^0, ..., x_n^k \longrightarrow x_n^0 \text{ khi } k \longrightarrow \infty$$

2. Giới hạn hàm số:

Số thực L được gọi là giới hạn của hàm f khi $M \to M_0$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall M \in \Omega : 0 < d(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - L| < \epsilon$$

Khi đó ta ký hiệu: $L = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$

Chú thích: Các tính chất và các phép tính số học (tổng, hiệu, tích, thương) của hàm có giới hạn đều tương tự như đối với hàm một biến.

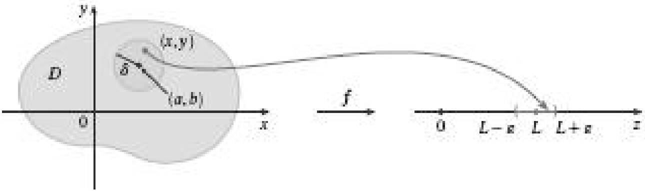
Cụ thể cho trường hợp hàm 2 biến như sau: cho hàm 2 biến $f : \Omega \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Số thực L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x, y)$ khi (x, y) tiến về (x_0, y_0) nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 :$

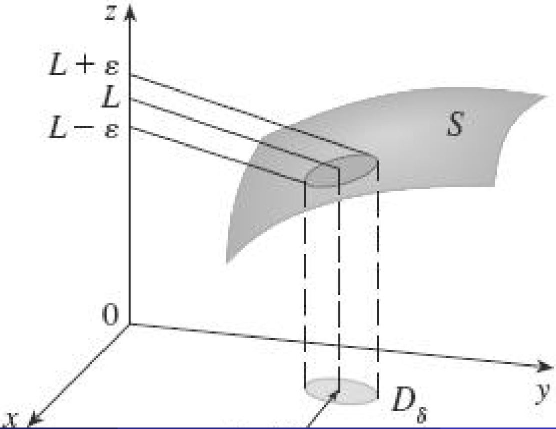
$$\forall (x, y) \in \Omega : 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ký hiệu $L = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$

Nghĩa là giá trị của $f(x, y)$ tiến dần đến số thực L khi điểm (x, y) tiến dần đến điểm (x_0, y_0) **dọc theo bất kỳ đường cong nào nằm trong miền** Ω.

Hay nói cách khác, ta có thể làm cho giá trị của $f(x, y)$ gần L bao nhiêu theo như ta muốn bằng cách lấy điểm (x, y) đủ gần đến điểm (x_0, y_0)


y
(x,y)
D
δ
(a,b)
0
x
f
0
L − ε
L
L + ε
z


z
L + ε
L
L − ε
S
0
y
x
D_δ

Hay ta có thể nói khoảng cách giữa $f(x, y)$ và L có thể làm nhỏ tùy ý bằng cách làm cho khoảng cách giữa 2 điểm (x, y) và (x_0, y_0) đủ nhỏ **nhưng không bằng không**

Định lý: Cho hàm 2 biến $f : \Omega \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó,
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \Longleftrightarrow$ Với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\}$ trong $\Omega \backslash \{(x_0, y_0)\}$

hội tụ về (x_0, y_0) ta có dãy $\{f(x_n, y_n)\}$ hội tụ về L.

Các cách để chứng minh giới hạn không tồn tại:

Cách 1. Tìm đường cong (C_k) sao cho $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dọc theo (C_k). Chứng minh rằng giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ theo đường cong (C_k) phụ thuộc vào tham số k.

Cách 2. Tìm 2 dãy điểm $M_n \neq M_0$ và $M'_n \neq M_0$ sao cho $M_n, M'_n \to M_0$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f(M_n) \quad \neq \quad \lim\limits_{n\to\infty} f(M'_n)$

Cách 3. Đặt $x - x_0 = r\ cos\varphi$ và $y - y_0 = r\sin\varphi$, trong đó $\varphi \in [0, 2\pi]$. Khi $r \to 0$ thì $x \to x_0$ và $y \to y_0$. Nếu giới hạn sau khi thay thế phụ thuộc vào tham số φ thì ta kết luận giới hạn đã cho không tồn tại

$$\lim_{r\to 0} f(x_0 + rcos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) = \Phi(\varphi)$$

3. Sự liên tục của hàm số:

Cho $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $f : \Omega \to \mathrm{R}$ và $M_0 \in \Omega$. Ta nói f liên tục tại M_0 nếu

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Định lý: Cho hàm 2 biến $f : \Omega \to \mathrm{R}$ và $(x_0, y_0) \in \Omega$. Khi đó, f liên tục tại $(x_0, y_0) \iff$ Với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\}$ trong Ω hội tụ về (x_0, y_0) ta có dãy tương ứng $\{f(x_n, y_n)\}$ luôn luôn hội tụ về $f(x_0, y_0)$.

Chú thích: ý nghĩa trực giác của tính liên tục là khi điểm (x, y) thay đổi một chút thì giá trị của hàm $f(x, y)$ cũng thay đổi một chút. Điều này có nghĩa là bề mặt của đồ thị của một hàm liên tục không có lỗ trống hoặc không bị gãy.
Ví dụ: Xem hình: plot3d((x^2-y^2)/(x^2+y^2), [x,-5,5], [y,-5,5])

1. Đạo hàm riêng cấp một:

Đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo biến x (hay y) tại điểm (x_0, y_0) được định nghĩa như là đạo hàm của hàm $f(x, y_0)$ (hay $f(x_0, y)$) tại điểm $x = x_0$ (hay $y = y_0$). Cụ thể như sau:

- Đạo hàm riêng cấp một theo biến x tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn (nếu có)

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (f'_x(x_0, y_0))$$

- Đạo hàm riêng cấp một theo biến y tại điểm (x_0, y_0) là giới hạn (nếu có)

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (f'_y(x_0, y_0))$$

Thí dụ 1: Nhiệt độ tại điểm (x, y) trên bề mặt kim loại phẳng được cho bởi công thức $T(x, y) = \frac{60}{1+x^2+y^2}$,trong đó T được đo bằng độ ${}^0C$ và x, y đo bằng mét. Tại $(2, 1)$ hãy tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ tương ứng với x và y?

Thí dụ 2: Hàm chỉ số nhiệt (wind-chill index) được mô tả bởi công thức sau:

$$W = 13.12 + 0.6215\ T - 11.37\ v^{0.16} + 0.3965 T v^{0.16}$$

trong đó T biểu thị nhiệt độ $({}^0C)$ và v biểu thị vận tốc gió (km/h). Khi nhiệt độ $T = -15^0C$ và $v = 30km/h$, hãy dự đoán chỉ số nhiệt sẽ giảm bao nhiêu nếu nhiệt độ giảm 1^0C? và nếu vận tốc gió tăng $1km/h$.

2. Đạo hàm riêng cấp 2:

Đạo hàm riêng cấp 2 là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1. Cụ thể như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Thí dụ: Cho f được định nghĩa bởi công thức:

$$f(x,y) = \begin{matrix} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{matrix}$$

Khi đó ta có: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$

Định lý (Schwartz): Nếu hàm $f(x, y)$ và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ xác định trong miền mở Ω chứa (x_0, y_0) và liên tục tại(x_0, y_0) thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

3. Đạo hàm hàm hợp:

- Trường hợp 1: Cho hàm số $f(x,y)$, trong đó $x = x(t)$ và $y = y(t)$, ta viết $f(x(t), y(t)) = f(t)$. Khi đó:

$$f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Thí dụ: $f = uv; f = \frac{u}{v}$ trong đó $u = u(t); v = v(t)$

- Trường hợp 2: Cho hàm số $f(x,y)$, trong đó $x = x(t,s)$ và $y = y(t,s)$, ta viết $f(x(t), y(t)) = f(t,s)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}
\end{aligned}$$

Cho (x_0, y_0) và một vector đơn vị $\overrightarrow{u} = (a, b)$. Cho hàm $f(x, y)$ xác định trong lân cận của (x_0, y_0). Tốc độ thay đổi của f tại (x_0, y_0) theo hướng $\overrightarrow{u}$ được gọi là đạo hàm theo hướng và định nghĩa như sau:

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nếu đặt $g(z) = f(x_0 + ah, y_0 + bh)$ thì

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x_0, y_0) = g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)b$$

Đôi khi $\overrightarrow{u}$ được định bởi một góc θ : $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$

Vector gradient của $f(x, y)$ là $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

Trong nhiều bài toán thực tế ta phải tính

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

khi biết $(\Delta x, \Delta y)$, nghĩa là khi x_0 thay đổi 1 lượng nhỏ Δx và y_0 thay đổi 1 lượng nhỏ Δy thì giá trị của hàm f tại (x_0, y_0) sẽ thay đổi một lượng bao nhiêu?

Đối với các dạng hàm phức tạp thì việc này rất khó. Tuy nhiên, ta thường gặp trường hợp f liên tục, nghĩa là $\Delta x, \Delta y$ khá bé và do vậy Δf cũng khá bé. Khi đó ta có thể tính xấp xỉ bằng công thức sau:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Thí dụ: Tính gần đúng số

$$A = \sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$$

Vi phân toàn phần

$$
\begin{aligned}
df(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy \\
d^n f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f
\end{aligned}
$$

Định lý: Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$ trong một miền mở chứa điểm (x_0,y_0). Khi đó:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+R_n \\ R_n &= o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^n \end{aligned}$$

Trường hợp công thức Taylor lấy lại $(x_0,y_0)=(0,0)$ thì gọi là công thức Maclaurin

Thí dụ: Khai triển hàm $f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y-4$ tại $(1,1)$

Trường hợp hàm 1 biến:

Cho hàm số $F(x, y)$ xác định trong miền mở Ω chứa điểm (x_0, y_0). Giả thiết rằng với mọi $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, tồn tại duy nhất một giá trị y sao cho $(x, y) \in \Omega$ và $F(x, y) = 0$

Khi ấy ta nói phương trình $F(x, y) = 0$ xác định y như là một hàm ẩn của x trong khoảng $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

Định lý: Cho hàm số $F(x,y)$ thỏa các điều kiện:

1. Xác định và liên tục trong hình tròn mở $B(M(x_0,y_0),\epsilon)$
2. $F(x_0,y_0)=0$
3. Các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ tồn tại trong $B(M(x_0,y_0),\epsilon)$
4. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

Khi đó, tồn tại duy nhất hàm $y(x)$ khả vi liên tục trong lân cận của x_0 thỏa

$$F(x,y(x))=0 \quad \text{và} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Thí dụ: Viết phương trình tiếp tuyến của $x^3+y^3=6xy$ tại điểm $(3,3)$?

Trường hợp hàm 2 biến:

Định lý: Cho hàm số $F(x, y, z)$ thỏa các điều kiện:

1. Xác định và liên tục trong quả cầu mở $B(M(x_0, y_0, z_0), \epsilon)$
2. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
3. Các đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ tồn tại trong $B(M(x_0, y_0, z_0), \epsilon)$
4. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Khi đó, tồn tại duy nhất hàm $z(x, y)$ khả vi liên tục trong lân cận của (x_0, y_0) thỏa

$$F(x, y, z(x, y)) = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Thí dụ: Cho $x + y + z = e^z$, tìm $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$?

Cực trị tự do

Cho một hàm 2 biến $f : \Omega \to R$ và $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$. Ta nói rằng hàm f đạt

- cực tiểu (địa phương) tại M_0 nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B_\epsilon(M_0) \subset \Omega$ ta có
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_\epsilon(M_0)$$

- cực đại (địa phương) tại M_0 nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho
$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_\epsilon(M_0)$$

Điều kiện cần (Định lý Fermat): Nếu hàm f đạt cực trị tại $M_0(x_0, y_0)$ và nếu f có các đạo hàm riêng tại M_0 thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Khi đó ta nói M_0 là điểm dừng (critical point).

Dùng công thức xấp xỉ Taylor cấp 2 cho hàm $f(x,y)$ tại (x_0,y_0), ta có:

$$\begin{aligned}\triangle f &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(\Delta y)^2\end{aligned}$$

Ta đặt: $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$; $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$; $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$

$$\begin{aligned}\triangle f &\simeq \frac{1}{2}A(\Delta x)^2 + B\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2 \\ &= \frac{A}{2}\left[\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}(\Delta y)^2\right]\end{aligned}$$

Điều kiện đủ: Cho hàm 2 biến $f : \Omega \to R$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục tại $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ và M_0 là điểm dừng. Ta đặt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0); \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0); \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \\ \triangle &= AC - B^2 \end{aligned}$$

Khi đó, nếu:

- $\triangle < 0$ thì f không có cực trị (saddle point)
- $\triangle > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu nếu $A > 0$ hoặc $C > 0$; là điểm cực đại nếu $A < 0$ hoặc $C < 0$
- $\triangle = 0$ thì ta chưa có kết luận, khi đó ta phải quay về dùng định nghĩa cực trị

Thí dụ: 1. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$

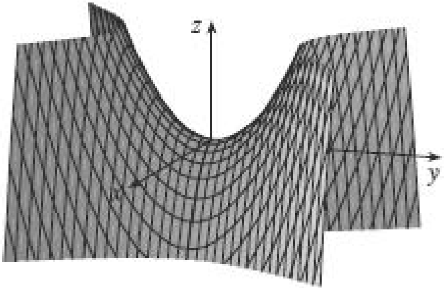


FIGURE 3
$z = y^2 - x^2$

Cực trị có điều kiện: tìm cực đại/cực tiểu của $f(x, y)$ thỏa $g(x, y) = 0$

Thí dụ: tìm điểm nằm trên hyperbol $xy = 3$ và gần với gốc tọa độ nhất?

Thuật toán nhân tử Lagrange: Xét hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Bước 1. Tìm nghiệm (x_0, y_0, λ_0) của hệ sau:

$$L_x(x, y, \lambda) = L_y(x, y, \lambda) = L_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

Bước 2. Xét vi phân cấp 2:

$$\begin{aligned} d^2L(x_0, y_0) &= L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 \\ 0 &= g'(x_0, y_0)dx + g'(x_0, y_0)dy \end{aligned}$$

Nếu $d^2L(x_0, y_0) > 0$ thì f có cực tiểu, nếu $d^2L(x_0, y_0) < 0$ thì f có cực đại
Lưu ý: $dx^2 + dy^2 > 0$

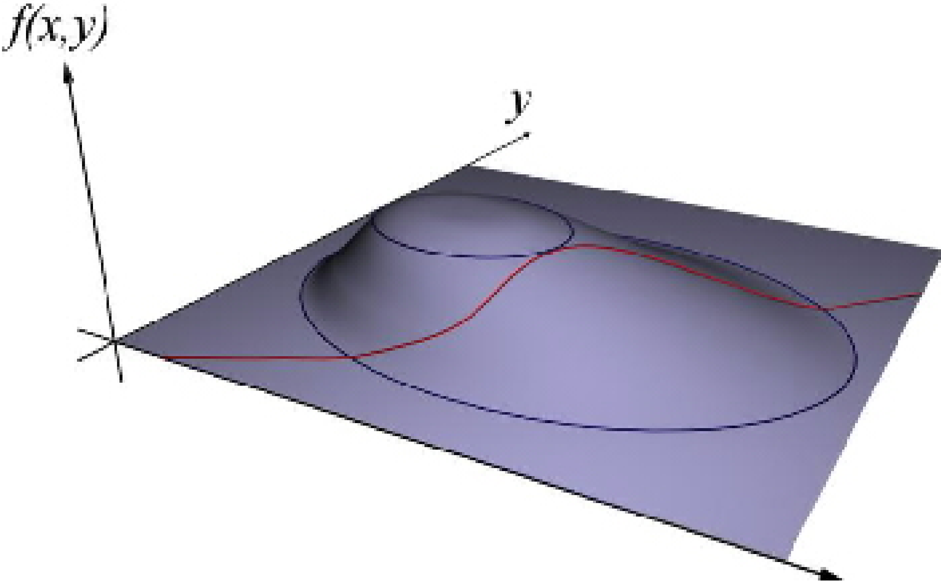
Định lý Weierstrass: Cho tập D khác trống, đóng và bị chặn trong R^2 và f là hàm liên tục trên D. Khi ấy f luôn có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D.

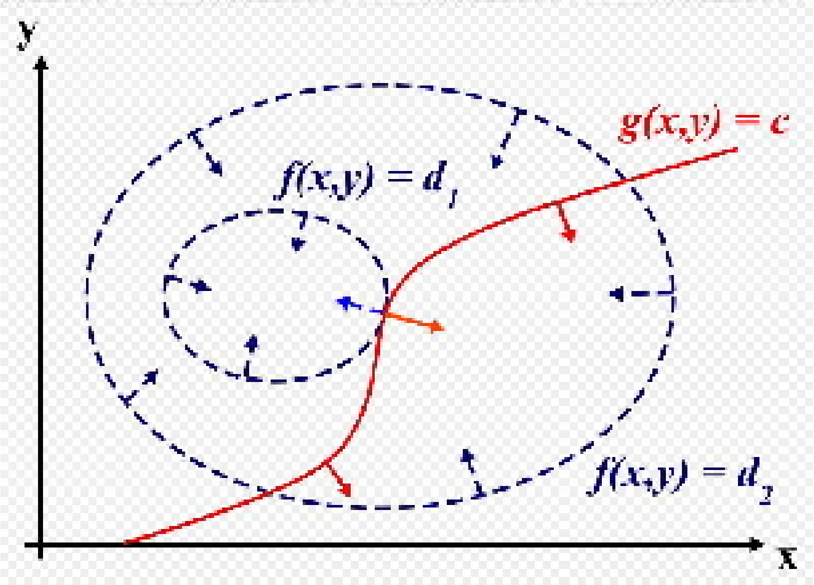
Do vậy để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm *điểm dừng* của f bên trong miền D (bài toán không có điều kiện)
- Tìm *những điểm nghi ngờ* hàm có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên biên của D (bài toán cực trị có điều kiện)
- So sánh giá trị của hàm f tại những điểm trên để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

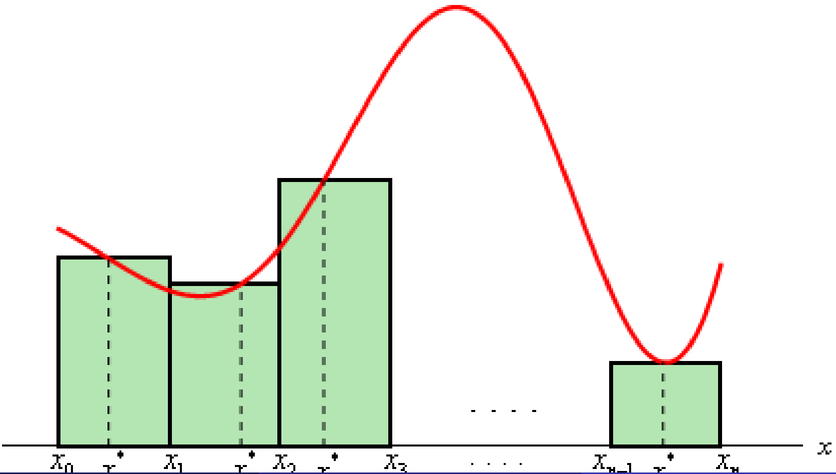
Thí dụ: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ trên miền } x^2 + y^2 \leq 1$$

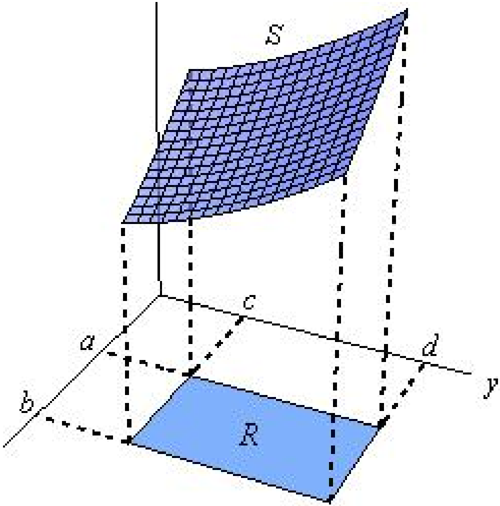

f(x,y)
y

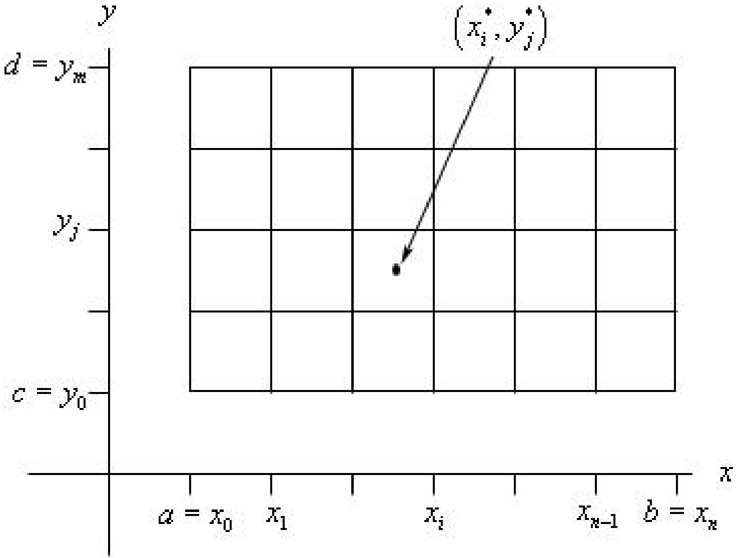

y
g(x,y) = c
f(x,y) = d1
f(x,y) = d2
x

Tích phân xác định của hàm một biến: $S = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\triangle x_i$

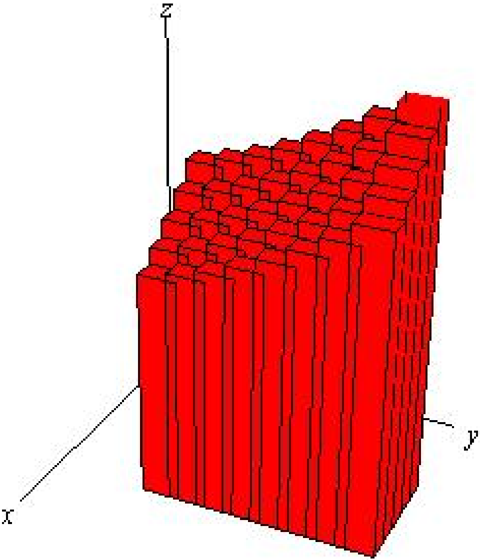


Tích phân hàm 2 biến: $V = \int\int_R f(x,y)dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\triangle A$





y
(x_i^*, y_j^*)
$d = y_m$
y_j
$c = y_0$
x
$a = x_0$
x_1
x_i
x_{n-1}
$b = x_n$


z
y
x

Cách tính:

1. Cắt hình khối thành các lát mỏng song song với mặt phẳng (yz). Với x cho trước, $S(x)$ là diện tích của lát cắt này và được tính bởi công thức sau:
$$S(x) = \int_{y-\min(x)}^{y-max(x)} f(x,y)dy$$

2. Khi đó thể tích của hình khối sẽ là:
$$V = \int_{x-\min}^{x-max} S(x)dx$$

Vậy thể tích của hình khối được tính bởi công thức sau:

$$\begin{aligned} V &= \int_{x-\min}^{x-max} \int_{y-\min(x)}^{y-max(x)} f(x,y)dydx \\ &= \int_{y-\min}^{y-max} \int_{x-\min(y)}^{x-max(y)} f(x,y)dxdy \end{aligned}$$

Tính chất:

1. $$\iint\limits_R f(x,y) + g(x,y)dydx = \iint\limits_R f(x,y)dydx + \iint\limits_R g(x,y)dydx$$
2. $$\int\int\limits_{R_1+R_2} f(x,y)dydx = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dydx + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dydx$$
3. Nếu $f(x,y) \leq g(x,y), \forall (x,y) \in R$ thì

$$\iint\limits_R f(x,y)dydx \leq \iint\limits_R g(x,y)dydx$$

Thí dụ:

1. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
   $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

2. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
   $R = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1; x, y \geq 0\right\}$

3. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dydx$: *cần lưu ý đến thứ tự lấy tích phân*!!!

Tích phân kép trong tọa độ cực:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)\,dA &= \iint\limits_R f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,rdrd\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)\,abrdr\end{aligned}$$

Lưu ý: ta chỉ áp dụng phương pháp đổi sang tọa độ cực trong trường hợp miền R là hình tròn $(a = b = 1)$ hoặc ellipse

1. Diện tích hình phẳng R

$$S(R) = \iint\limits_R dxdy$$

2. Thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$ và mặt phẳng $z = 0$

$$V = \iint\limits_R f(x, y)dxdy$$

3. Diện tích mặt cong $z = f(x, y)$ có hình chiếu lên mặt $z = 0$ là R

$$S = \iint\limits_R \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}dxdy$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{R} \left[\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

trong đó Ω là hình khối xác định bởi mặt cong $z = \varphi_1(x,y)$ và $z = \varphi_2(x,y)$; R là hình chiếu của Ω lên mặt phẳng (xy)

Đổi biến trong tọa độ trụ:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi; y = r\sin\varphi; z = z \\
R &: \alpha \le \varphi \le \beta; r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi); z_1(r,\varphi) \le z \le z_2 \\
\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}\int_{z_1}^{z_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\mathbf{r}d\varphi drdz
\end{aligned}
$$

Đổi biến trong tọa độ cầu:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\sin\theta\cos\varphi; y = \rho\sin\theta\sin\varphi; z = \rho\cos\theta \\
\Omega &: \rho_1(\theta,\varphi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\varphi); \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi); \alpha \le \\
\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} d\theta \int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\boldsymbol{\rho}^2 \sin
\end{aligned}
$$

1. Thể tích vật thể Ω

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz$$

2. Khối lượng vật thể Ω

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

trong đó $f(x, y, z)$ là khối lượng riêng của vật thể Ω tại điểm (x, y, z)

$\int\limits_C f(x,y)ds$: tích phân này không phụ thuộc vào đường đi C

1. C cho bởi phương trình tham số: $x = x(t); y = y(t); a \leq t \leq b$

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

2. C cho bởi phương trình: $y = y(x); a \leq x \leq b$

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

3. C cho bởi phương trình tọa độ cực: $r = r(\varphi); \alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$$

1. Khối lượng cung:

$$m = \int_C f(x, y)ds$$

trong đó $f(x, y)$ là khối lượng riêng của cung C tại (x, y)

2. Diện tích mặt trụ giới hạn bởi một cung có phương trình $z = f(x, y)$ với $z \geqslant 0$, đồng thời có hình chiếu lên mặt $z = 0$ là đường cong C:

$$S = \int_C f(x, y)ds$$

3. Tọa độ trọng tâm:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C xf(x, y)ds; \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C yf(x, y)ds$$

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

C cho bởi phương trình tham số: $x = x(t); y = y(t); a \leq t \leq b$

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt$$

C cho bởi phương trình: $y = y(x); a \leq x \leq b$

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right] dx$$

Công thức Green: Cho R là **miền đóng giới nội** trong mặt phẳng (xy) với biên C trơn từng khúc. Các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở chứa R. Khi đó tích phân đường có thể được tính qua tích phân kép bằng công thức Green như sau:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

chiều C là chiều dương qui ước

1. Diện tích miền phẳng R có biên C:

$$S(R) = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds$$

1. Nếu mặt S có phương trình $z = z(x,y)$ và $R(x,y)$ là hình chiếu của mặt cong z lên mặt phẳng (xy):

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \int\int\limits_{R(x,y)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy$$

2. Nếu mặt S có phương trình $x = x(y,z)$ và $R(y,z)$ là hình chiếu của mặt cong x lên mặt phẳng (yz):

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \int\int\limits_{R(y,z)} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2+(x'_z)^2}dydz$$

1. Diện tích mặt cong S

$$S = \iint\limits_S ds$$

2. Khối lượng của mặt cong S

$$m = \iint\limits_S f(x, y, z) ds$$

trong đó $f(x, y, z)$ là khối lượng riêng của mặt cong S

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

trong đó S là mặt cong có định hướng

Công thức Gauss-Ostrogratxki: Cho V là miền kín và trơn từng khúc. Các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một miền mở chứa V. Khi đó ta có:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

trong đó mặt S lấy theo phía ngoài

Công thức Stokes: Cho mặt định hướng trơn từng khúc S với biên là chu tuyến C trơn từng khúc và không tự cắt. Cho các hàm P, Q, R và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền mở chứa S. Khi đó ta có

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

trong đó hướng của C lấy theo hướng dương tương ứng của S

Cách tính tích phân mặt loại 2:

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm R(x,y,z(x,y))dxdy$$

trong đó tích phân lấy dấu $+$ nếu pháp vector của S tạo với chiều dương trục Oz một góc nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$ và lấy dấu trừ trong trường hợp góc lớn hơn $\frac{\pi}{2}$. Các tích phân khác tính tương tự.