Note 9: Kỹ thuật đồng nhất hỗ trợ tính tích phân hàm hữu tỉ

Lê Văn Chánh
Email: vanchanh2017@gmail.com

08/11/2017

Tóm tắt nội dung

Một vài kỹ thuật sử dụng đa thức nội suy, số phức, giới hạn, đạo hàm để tìm ra các hệ số đồng nhất thức được đề cập trong bài viết nhỏ này.

Một kết quả quan trọng được rút ra từ Định lý cơ bản của Đại số:

Định lý 1. *Với bất kỳ đa thức hệ số thực và khác hằng đều có thể phân tích các lũy thừa của đơn thức và lũy thừa của các tam thức bậc hai vô nghiệm.*

Theo Định lý trên, bất kỳ đa thức hệ số thực khác đa thức hằng Q đều có thể phân tích thành dạng như sau

$$q(x) = a_0(x-a_1)^{j_1}\cdots(x-a_m)^{j_m}(x^2+b_1x+c_1)^{k_1}\cdots(x^2+b_nx+c_n)^{k_n},$$

trong đó $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}, b_i^2-4c_i<0, j_1,\ldots,k_1,\ldots \in \mathbb{N}, \forall i=\overline{0,m}, j=\overline{1,n}$.

Ta sẽ dùng ký hiệu $\deg P$ để chỉ bậc của đa thức P.

Định lý 2 (The Partial Fractions Decomposition). *Cho R và Q là các đa thức có hệ số thực thỏa $\deg R < \deg Q$ và khác đa thức hằng và Q được biểu diễn*

$$Q(x) = a_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\cdots\left(x^2+rx+s\right)^{\nu}.$$

Khi đó, phân thức hữu tỉ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = &\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\ldots\\ &+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\ &+\frac{Kx+L}{(x^2+px+q)^{\mu}}+\frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\ldots\\ &+\frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^{\nu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}.\end{aligned} \tag{1}$$

Ta sẽ công nhận định lý trên. Ta có thể chứng xem chứng minh tại `http://marasingha.org/mathspages/partialfrac/html/node2.html`.

Nhận xét: Số lượng hệ số trong đồng nhất trên bằng bậc của Q. Việc xác định các hệ số trong Định lý 2 là một khâu quan trọng trong 'thuật toán' xác định tích phân của hàm phân thức hữu tỉ. Phương pháp cơ bản để xác định các hệ số là phương pháp đồng nhất. Tuy nhiên, phương pháp tổng quát này tỏ ra không hiệu quả về mặt thời gian, chi phí, công sức khá nhiều. Chính vì thế, bài viết nhỏ này sẽ đưa ra một số 'mẹo' để tính toán các hệ số trong trường hợp đặc biệt, cũng như ý tưởng tổng quát khi bậc của R và Q không quá lớn. Các kỹ thuật được dùng đến liên quan đến: đa thức nội suy, số phức, giới hạn, đạo hàm.

A Phụ lục: thuật toán xác định $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Xét tích phân hữu tỉ $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức hệ số thực khác đa thức hằng.

Tích phân này có thể xác định thông qua các bước sau:

- Bước 1: chỉ thực hiện nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì ta chia đa thức $P(x)$ cho $Q(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

  trong đó $F(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $\deg R < \deg Q$.

  Nếu $\deg P < \deg Q$ thì $F(x) = 0$ và $R(x) = P(x)$.

- Bước 2: Theo kết quả cơ bản của đại số, ta có thể phân tích $Q(x)$ thành các lũy thừa của các nhị thức và các tam thức bậc hai vô nghiệm.

$$Q(x) = a_0 (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} \left(x^2+px+q\right)^{\mu} \cdots \left(x^2+rx+s\right)^{\nu},$$

- Bước 3:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \ldots \\ + \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ + \frac{Kx+L}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots \\ + \frac{Mx+N}{(x^2+rx+s)^{\nu}} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{x^2+rx+s}.\end{aligned} \tag{2}$$

- Bước 4: Tích phân từng phân số thành phần. Như vậy tích phân của phân thức bất tích quy về các tích phân sau:

(i) $\int F(x)dx$, trong đó $F(x)$ là đa thức;

(ii)

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{cases} A\ln|x-a|+C, & \text{nếu} \quad k=1, \\ \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}, & \text{nếu} \quad k\neq 1, \end{cases}$$

trong đó $k \in \mathbb{N}$.

(iii)

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{At+B'}{(t^2+m^2)^k}dt,$$

trong đó $k \in \mathbb{N}$, $p^2-4q<0$, $t = x+\frac{p}{2}$, $m^2 = \frac{4q-p^2}{4}$, $B' = B - \frac{Ap}{2}$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t^2+m^2)^k} &= \int \frac{d\left(t^2+m^2\right)}{2\left(t^2+m^2\right)^k} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left(t^2+m^2\right)+C & \text{nếu } k=1, \\ \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} & \text{nếu } k\neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Và

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \begin{cases} \frac{1}{m}\arctan\frac{t}{m}+C & \text{nếu } k=1, \\ \frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+\dots & \\ +\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}+C & \text{nếu } k\neq 1. \end{cases}$$

B Tích phân hàm hữu tỉ đặc biệt $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$

Xét trường hợp đặc biệt $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$, trong đó $a,b,c,m,n \in \mathbb{R} : a\neq 0, m^2+n^2\neq 0$.

(a) Nếu $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ thì ta có thể biểu diễn

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

và tìm A và B bằng cách đồng nhất.

(b) Nếu $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ thì ta có thể biểu diễn

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}$$

và tìm A và B bằng cách đồng nhất.

(c) Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì ta có thể biểu diễn

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{n-\frac{mb}{2a}}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\Delta}{4a}}$$

và tính tích phân có dạng

$$\int \frac{1}{\left(x-x_0\right)^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$$

bằng cách đặt $x - x_0 = \alpha \tan t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc dùng công thức liên quan.

C Phương pháp xác định hệ số trong một số trường hợp đặc biệt

Hai trường hợp, ta có thể chỉ ra hệ đồng nhất. Trong trường hợp tổng quát, ta có thể 'bắt chước' ý tưởng của hai phương pháp thông qua 'kỹ thuật giới hạn', số phức, giới hạn, đạo hàm, thế trực tiếp.

D Tích phân hàm hữu tỉ đặc biệt $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)\left(ax^2+bx+c\right)}\mathrm{d}x$

E Tích phân hàm hữu tỉ đặc biệt $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^2\left(ax^2+bx+c\right)}\mathrm{d}x$

F Tích phân hàm hữu tỉ đặc biệt $\int \frac{P(x)}{\left(a'x^2+b'x+c'\right)\left(ax^2+bx+c\right)}\mathrm{d}x$

G Các thí dụ

Bài toán 1 (Sử dụng phương pháp đồng nhất cổ điển)**.** Phân tích các phân thức $\frac{x^2-13}{x^3-7x+6}$ thành các phân thức 'cơ bản' (theo Định lý 2).

Lời giải 1.

Phân tích phân thức như sau

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} &= \frac{x^2-13}{(x-1)(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\} \\
\Longleftrightarrow x^2-13 &= A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\} \\
\Longleftrightarrow x^2-13 &= (A+B+C)x^2+(A+2B-3C)x+(2C-3B-6A), \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}.
\end{aligned}$$

Lần lượt đồng nhất hệ số tự do, hệ số x và hệ số x^2, ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} B+C &= 1, \\ A+2B-3C &= 0, \\ -6A-3B+2C &= -13. \end{cases}$$

Suy ra $A=3, B=-\frac{9}{5}, C=-\frac{1}{5}$. Do đó,

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\}.$$

■

Nhận xét 1. Ta có thể thay $x=-3,1,2$ vào $x^2-13 = A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\}$ hay không?

(a) Mặc dù không thể thay $x=-3,1,2$ đẳng thức trên nhưng ta có thể tính giới hạn hai vế khi $x \to -3, x \to 1, x \to 2$. Từ nhận xét này, ta có thể giải bài toán như sau.

Lời giải 2. Phân tích phân thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{x^2-13}{x^3-7x+6} &= \frac{x^2-13}{(x-1)(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\} \\ \iff x^2-13 &= A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\}. \end{aligned}$$

Cho hai vế đẳng thức trên cho qua giới hạn lần lượt với $x \to 1, x \to 2, \to x \to -3$, ta thu được

$$\begin{cases} -4A &= -12, \\ 5B &= -9, \\ 20C &= -4. \end{cases}$$

Suy ra $A=3, B=-\frac{9}{5}, C=-\frac{1}{5}$. Do đó,

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\}.$$

■

(b) Đồng nhất thức $x^2-13 = A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,1,2\}$ có thể chuyển thành đồng nhất thức

$x^2-13 = A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$ thông qua tính chất của đa thức (đa thức khác hằng không thể có vô số nghiệm). Khi đó, ta có thể thay $x=-3,1,2$ vào đồng nhất thức.

Từ đó, ta có thể giải bài toán theo hướn sau.

Lời giải 3. Phân tích phân thức như sau

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} &= \frac{x^2-13}{(x-1)(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\} \\
\iff x^2-13 &= A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\} \\
\iff x^2-13 &= A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Thay lần lượt $x = 1,\ 2,\ -3$ vào hai vế đẳng thức trên, ta thu được

$$\begin{cases} -4A &= -12, \\ 5B &= -9, \\ 20C &= -4. \end{cases}$$

Suy ra $A = 3, B = -\frac{9}{5}, C = -\frac{1}{5}$. Do đó,

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}.$$

■

(c) Ta có cần thiết thực hiện quá trình 'qui đồng' hay không?

Lời giải 4. Phân tích phân thức như sau

$$\begin{aligned}
f(x) := \frac{x^2-13}{x^3-7x+6} &= \frac{x^2-13}{(x-1)(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}.
\end{aligned}$$

Các hệ số A, B và C :

$$\begin{aligned}
A &= (x-1)f(x)|_{x=1} := \lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = 3, \\
B &= (x-2)f(x)|_{x=2} := \lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = -\frac{9}{5}, \\
C &= (x+3)f(x)|_{x=-3} := \lim_{x\to -3}(x+3)f(x) = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

(Ta có thể tính giá trị này bằng Casio thông qua tính giá trị biểu thức $\frac{x^2-13}{x^3-7x+6}.(x-1)$ tại $1+10^{-10}$.)

Do đó,

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}.$$

Nhận xét: Cơ sở của đẳng thức $A = (x-1)f(x)|_{x=1} := \lim_{x\to 1}(x-1)f(x)$ là đẳng thức sau

$$(x-1)f(x) = A + (x-1)\left[\frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}\right].$$

Sau đó, cho hai vế qua giới hạn với $x \to 1$, ta thu được điều trên.

■

(d) Trong trường hợp Q chỉ có nghiệm đơn, ta có thể xác định các hệ số trong phân tích đơn giản (như Định lý 3).

Lời giải 5.

Xét các đa thức $P(x) = x^2 - 13$ và $Q(x) = x^3 - 7x + 6$. Vì đa thức $Q(x)$ chỉ có các nghiệm $1, 2,$ và -3, và chúng đều là nghiệm đơn nên theo Định lý 3, ta có .Phân tích phân thức như sau

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}, \tag{3}$$

trong đó các hệ số xác định bởi

$$\begin{cases} A = \frac{P(1)}{Q'(1)} = 3, \\ B = \frac{P(2)}{Q'(2)} = -\frac{9}{5}, \\ C = \frac{P(-3)}{Q'(-3)} = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Do đó,

$$\frac{x^2-13}{x^3-7x+6} = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1,2\}.$$

■

(e) Trường hợp nghiệm bội (xét trong tập số phức), xem các công thức xác định [Man09], xem xét nghiệm trong tập số thực [MAN11].

Các thí dụ có thể tham khảo [Man09], [MAN11].

Nghiệm bội phức có các công thức xác định hệ số [Man09] (nên xem xét khi nghiệm bội 'đẹp').

Bài toán 2. Phân tích các phân thức $\frac{x^2+2x}{(x^2+1)^2}$ thành các phân thức 'cơ bản'.

Bài toán 3. Phân tích các phân thức $\frac{1}{x(x^2+1)}$ thành các phân thức 'cơ bản'.

Giải.

Đặt $P(x) = 1$ và $Q(x) = x(x^2+1)$. Phân tích $\frac{1}{x(x^2+1)}$:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i},$$

trong đó các hệ số A, B, C được xác định bởi

$$\begin{cases} A &= \frac{P(0)}{Q'(0)} = 1, \\ B &= \frac{P(i)}{Q'(i)} = -\frac{1}{2}, \\ C &= \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ta có đồng nhất thức

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Nhận xét: Trong nhiều tình huống, việc đồng nhất như trên sẽ gây khó khăn và phức tạp cho quá trình tính toán. Chọn điểm thông minh- cải tiến nhằm giảm tính toán và khai triển, thu gọn. Kỹ thuật chọn điểm thực, 'điểm phức'.

Các trường hợp: nghiệm bội, nghiệm phức, nghiệm 'bội' phức.

Thí dụ 1. Phân tích $\frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)}$ thành các phân thức đơn giản.

Lời giải 1.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) := \frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} &= \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases} A &= (x-3)f(x)|_{x=3} = \frac{7}{52} \\ B &= (x+1)f(x)|_{x=-1} = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{Cx+D}{x^2+4} &= \frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} - \left[\frac{7}{52(x-3)} + \frac{1}{20(x+1)}\right] \\ &= -\frac{12x+23}{65(x^2-2x-3)(x^2+4)} \\ \iff & \quad Cx+D \equiv -\frac{12}{65}x - \frac{23}{65} \\ \iff & \quad C = -\frac{12}{65}, D = -\frac{23}{65}. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$\frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} = \frac{7}{52(x-3)} + \frac{1}{20(x+1)} - \frac{12x+23}{65(x^2-2x-3)(x^2+4)}.$$

■

Lời giải 2.

Ta có

$$
\begin{aligned}
f(x) := \frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} &= \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)(x^2+4)} \\
&= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4},
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
\begin{cases}
A &= (x-3)f(x)|_{x=3} = \frac{7}{52} \\
B &= (x+1)f(x)|_{x=-1} = \frac{1}{20}.
\end{cases}
$$

Thay lần lượt $x = 0, x = 1$ vào đồng nhất thức, ta thu được $D = -\frac{23}{65}$ và $C = -\frac{12}{65}$.

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} &= \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)(x^2+4)} \\
&= \frac{7}{52(x-3)} + \frac{1}{20(x+1)} - \frac{12x+23}{65(x^2-2x-3)(x^2+4)}.
\end{aligned}
$$

Nhận xét:

(a) Khi tìm C, D, việc chọn giá trị $x = 0$ (khi 0 không là nghiệm của Q) sẽ giúp ích cho việc tìm D.

(b) Các hệ số C và D có thể tìm ra nhờ vào nhờ vào đẳng thức $Cx + D = (x^2+4)\left[f(x) - \frac{A}{x-3} - \frac{B}{x+1}\right]$. Ta có thể nhanh chóng tìm C và D nhờ việc thay $x = i$ vào đẳng thức trên và đồng nhất phần thự và phần ảo.

■

Lời giải 3.

Ta có

$$
\begin{aligned}
f(x) := \frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} &= \frac{2x+1}{(x-3)(x+1)(x^2+4)} \\
&= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C'}{x-2i} + \frac{D'}{x+2i},
\end{aligned}
$$

trong đó

$$
\begin{cases}
A &= (x-3)f(x)|_{x=3} = \frac{7}{52} \\
B &= (x+1)f(x)|_{x=-1} = \frac{1}{20}, \\
C &= (x-2i)f(x)|_{x=2i} = -\frac{6}{65} + \frac{23}{260}i, \\
D &= (x+2i)f(x)|_{x=-2i} = -\frac{6}{65} - \frac{23}{260}i.
\end{cases}
$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)} &= \frac{7}{52(x-3)} + \frac{1}{20(x+1)} + \frac{-\frac{6}{65} + \frac{23}{260}i}{x-2i} + \frac{-\frac{6}{65} - \frac{23}{260}i}{x+2i} \\
&= \frac{7}{52(x-3)} + \frac{1}{20(x+1)} + -\frac{12x+23}{655(x^2+4)}.
\end{aligned}
$$

■

Thí dụ 2. Phân tích $\frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$ thành các phân thức đơn giản.

Lời giải 1.

Ta có

$$f(x) := \frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}.$$

trong đó

$$\begin{cases} A &= & (x-1)^2 f(x)\big|_{x=1} = \frac{2}{5} \\ B &= & (x-1)\left[f(x) - \frac{A}{(x-1)^2}\right]\Big|_{x=1} = \frac{13}{50}, \\ Cx+D &= & (x^2+4x+5)\left[f(x) - \frac{A}{(x-1)^2} - \frac{B}{x-1}\right]\Big|_{x^2=-4x-5}. \end{cases}$$

Vì $(x^2+4x+5)\left[f(x) - \frac{A}{(x-1)^2} - \frac{B}{x-1}\right] = \frac{37}{50}x + \frac{3}{10}$ nên

$$Cx+D = (x^2+4x+5)\left[f(x) - \frac{A}{(x-1)^2} - \frac{B}{x-1}\right]\Bigg|_{x^2=-4x-5} = \frac{37}{50}x + \frac{3}{10}.$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$\frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{2}{5(x-1)^2} + \frac{13}{50(x-1)} + \frac{\frac{37}{50}x + \frac{3}{10}}{x^2+4x+5}.$$

■

Lời giải 2.

Ta có

$$f(x) := \frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}.$$

trong đó

$$\begin{cases} A &= & (x-1)^2 f(x)\big|_{x=1} = \frac{2}{5} \\ B &= & (x-1)\left[f(x) - \frac{A}{(x-1)^2}\right]\Big|_{x=1} = \frac{13}{50}. \end{cases}$$

Lần lượt thay $x=0, x=1$ vào đồng nhất thức, ta có

$$\begin{cases} D &= \frac{3}{10}, \\ C &= \frac{37}{50}. \end{cases}$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$\frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{2}{5(x-1)^2} + \frac{13}{50(x-1)} + \frac{\frac{37}{50}x + \frac{3}{10}}{x^2+4x+5}.$$

■

Lời giải 3- Phân tích $\frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}$ thành các phân thức đơn giản.

Ta có

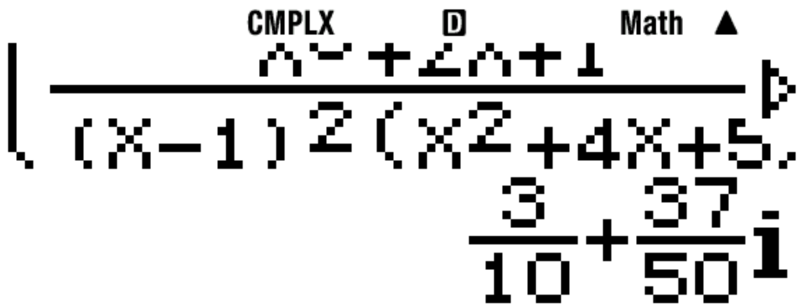
$$f(x) := \frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5}.$$

trong đó

$$\begin{cases} A &= & (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = \frac{2}{5}, \\ B &= & (x-1)\left[f(x)-\frac{A}{(x-1)^2}\right]\Big|_{x=1} = \frac{13}{50}, \\ Cx+D &= & (x^2+4x+5)\left[f(x)-\frac{A}{(x-1)^2}-\frac{B}{x-1}\right]. \end{cases}$$

Lưu ý rằng để xác định hệ số của một đơn thức $g(x)=\alpha x+\beta$, trong đó $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, có thể xác định thông qua giá trị của $g(i)$: $\beta=\mathrm{Re}(g(i))$, $\alpha=\mathrm{Im}(g(i))$- phần thực và phần ảo.

Do đó, ta không cần đơn giản biểu thức $g(x) := (x^2+4x+5)\left[f(x)-\frac{A}{(x-1)^2}-\frac{B}{x-1}\right] = (x^2+4x+5)\left[f(x)-\frac{2}{5(x-1)^2}-\frac{13}{50(x-1)}\right]$ mà ta chỉ cần 'đánh giá' (tính giá trị) của $g(x)$ tại $x=i$ (số phức đơn vị).



Hình 1: Tính $g(i)$

Khi đó, ta có

$$D+Ci=g(i)=\frac{3}{10}+\frac{37}{50}i.$$

Tiến hành đồng nhất phần thực và phần ảo, ta thu được

$$\begin{cases} D &= \frac{3}{10}, \\ C &= \frac{37}{50}. \end{cases}$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$\frac{x^3+2x+1}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} \quad = \quad \frac{2}{5(x-1)^2}+\frac{13}{50(x-1)}+\frac{\frac{37}{50}x+\frac{3}{10}}{x^2+4x+5}.$$

Thí dụ 3. Phân tích $\frac{x^3+1}{(x^2+4x+5)^2}$ thành các phân thức đơn giản.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) := \frac{x^3+1}{(x^2+4x+5)^2} \quad = \quad \frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5}.$$

trong đó

$$\begin{cases} Ax+B &= (x^2+4x+5)^2 f(x)\big|_{x^2=-4x-5}, \\ Cx+D &= (x^2+4x+5)\left[f(x) - \frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2}\right]\Big|_{x^2=-4x-5}. \end{cases}$$

Vì $(x^2+4x+5)^2 f(x) = x^3+1$ nên

$$\begin{aligned} Ax+B &= \left[x^3+1\right]\big|_{x^2=-4x-5} = [x(-4x-5)+1]\big|_{x^2=-4x-5} \\ &= \left[-4x^2-5x+1\right]\big|_{x^2=-4x-5} = -4(-4x-5)-5x+1 \\ &= 11x+21. \end{aligned} \tag{4}$$

Vì $(x^2+4x+5)\left[f(x) - \frac{Ax+B}{(x^2+4x+5)^2}\right] = \frac{x^3-11x-20}{x^2+4x+5} = x-4$ nên

$$Cx+D = (x-4)\big|_{x^2=-4x-5} = x-4.$$

Khi đó, ta có đồng nhất sau

$$\frac{x^3+1}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{11x+21}{(x^2+4x+5)^2} + \frac{x-4}{x^2+4x+5}.$$

■

Các kết quả tổng quát cho các ý tưởng ở trên là hai định lý bên dưới.

Định lý 3. *Giả sử các đa thức P và Q thỏa $\deg P < \deg Q$ và Q có các nghiệm phân biệt: $Q(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ thì $\frac{P(x)}{Q(x)}$ có thể phân tích*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x-\alpha_1} + \frac{c_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{c_n}{x-\alpha_n}.$$

Hơn nữa, sử dụng đa thức nội suy ta thu được kết quả tốt hơn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} \frac{1}{(x-\alpha_i)}.$$

Nhận xét: Đa thức P có thể biểu diễn thông qua đa thức nội suy Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne i} (x-x_j)}{\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne i} (x_i-x_j)} P(x_i),$$

và $a_0 \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne i} (x_i-x_j) = Q'(x_i), \forall i = \overline{1,n}$.

Định lý 4. *Cho các đa thức hệ số thực P và Q sao cho $0 \le \deg P < \deg Q$ và $Q(x) = a_0 \prod\limits_{i=1}^{s} (x-a)^{n_i}$. Khi đó, ta có phân tích*

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \cdots + \frac{a_{in_i}}{(x-x_i)^{n_i}} \right),$$

trong đó các hệ số $a_{i,j}$ có thể tính theo một hướng bên dưới:

(a) *Hướng tiếp cận của Heaviside đưa ra công thức xác định các hệ số:*

$$a_{i,n_i-j} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dx^j}\left((x-x_i)^{n_i}f(x)\right)\Big|_{x=x_i}, \forall j=\overline{0,n_i-1}, \forall i=\overline{1,s}.$$

Trong trường hợp x_i là nghiệm đơn, ta có $a_{i1} = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}$.

(b) *Yiu-Kwong Man [Man09] đã đưa ra một kỹ thuật tính các hệ số (kỹ thuật cover-up của Heaviside):*

$$\begin{aligned} a_{i,n_i} &= \left((x-x_i)^{n_i}f(x)\right)\big|_{x=x_i}, \\ a_{i,n_i-j} &= \left[f(x) - \sum_{k=0}^{j-1}\frac{a_{i,n_i-k}}{(x-a_i)^{n_i-k}}\right](x-x_i)^{n_i-j}\Bigg|_{x=x_i}, \end{aligned}$$

trong đó $1 \le i \le s, 1 \le j \le n_i - 1$.

Như vậy, trên tập số phức $\mathbb{C}$, bài toán có thể giải quyết trọng vẹn thông qua Định lý 4. Tuy nhiên, các nghiệm phức α_i có thể rất phức tạp, kỹ thuật tính toán trên $\mathbb{R}$ với Q được phân tích thành lũy thừa các nhị thức cùng các tam thức bậc hai vô nghiệm như Định lý 5 như bên dưới.

Định lý 5. *Cho các đa thức hệ số thực P và Q sao cho $0 \le \deg P < \deg Q$ và $Q(x) = a_0(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_s)^{n_s}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\cdots(x^2+b_rx+c_r)^{m_r}$.*

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{u=1}^{n_i}\frac{A_{iu}}{(x-a_i)^u} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{v=1}^{m_i}\frac{B_{iv}x+C_{iv}}{(x^2+b_ix+c_i)^v},$$

trong đó các hệ số A_{iu}, B_{iv}, C_{iv} được xác định, theo Yiu-Kwong Man [MAN11], bởi các công thức:

- *'Phần tuyến tính':*

$$\begin{aligned} A_{i,n_i} &= \left((x-x_i)^{n_i}f(x)\right)\big|_{x=x_i}, \\ A_{i,n_i-j} &= \left[f(x) - \sum_{k=0}^{j-1}\frac{A_{i,n_i-k}}{(x-a_i)^{n_i-k}}\right](x-x_i)^{n_i-j}\Bigg|_{x=x_i}, \end{aligned}$$

trong đó $1 \le i \le s, 1 \le j \le n_i - 1$.

- *'Phần bậc hai':*

$$\begin{aligned} B_{i,m_i}x + C_{i,m_i} &= \left((x^2+b_ix+c_i)^{m_i}f(x)\right)\big|_{x^2=-b_ix-c_i}, \\ B_{i,m_i-j}x + C_{i,m_i-j} &= \left[f(x) - \sum_{k=0}^{j-1}\frac{B_{i,m_i-k}x+C_{i,m_i-k}}{(x^2+b_ix+c_i)^{m_i-k}}\right]\left(x^2+b_ix+c_i\right)^{n_i-j}\Bigg|_{x^2=-b_ix-c_i}, \end{aligned}$$

trong đó $1 \le i \le r, 1 \le j \le m_i - 1$.

Nhiều thí dụ minh họa cho các kết quả ở Định lý 4 và 5 được minh họa trong hai bài báo [Man09] và [MAN11].

H Bài tập tích phân hàm hữu tỉ

Bài toán 4. Tìm $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, trong đó

(a) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2-2x+3}{(x-2)^2(x^2-2x+4)}$;

(b) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2-2x+3}{(x-2)(x^3+8)}$;

(c) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3+1}$;

(d) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^4+1}$;

(e) $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ trên $(0,\infty)$.

- Các bài tập [**?**, trang 481-482];

I Xét các trường hợp đặc biệt

Ta xét phân thức $\frac{R(x)}{Q(x)}$, trong đó P và Q là các đa thức hệ số thực thỏa $0 \le \deg(P) < Q(x) \le 4$ và $\deg Q > 2$.

- Trường hợp 1: $\deg Q = 3$
  - Ba nghiệm thực phân biệt,
  - Ba nghiệm thực phân biệt,
  - Nghiệm kép hoặc nghiệm bội ba,
  - Một nghiệm thực và hai nghiệm phức.
- Trường hợp 2: $\deg(Q) = 4$ (không xét trường hợp có 4 nghiệm thực phân biệt và nghiệm bội ba hoặc bội 4)
  - Hai nghiệm thực phân biệt và hai nghiệm phức,
  - Một nghiệm bội hai và hai nghiệm phức,
  - Bốn nghiệm phức.

J Một số bài tập

Bài toán 5. Tìm nguyên hàm sau

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-2x-3)(x^2+4)}dx.$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx.$$

Bài toán 6. Tính tích phân suy rộng sau (nếu hội tụ) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.

Bài toán 7. Tính các giới hạn tích phân sau:

(a) $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$,

(b) $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$,

(c) $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$,

(d) $\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

Bài toán 8 (Quảng bá tư duy của nhà toán học đi làm lính cứu hỏa)**.** Trường hợp đơn giản như $\int \frac{1}{1+x^3}dx$, ta có thể dễ dàng tìm được

$$\int \frac{1}{1+x^3}dx = -\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Trong trường hợp phức tạp hơn, thí dụ $\int \frac{1}{a+x^3}dx$, trong đó a là một số thực dương, ta sẽ đối mặt với việc tính toán phức tạp (?!, có chắc chắn thế không?) Ta sẽ làm gì để vượt qua khó khăn đó?

K Công cụ partial fraction online

Các trang web sau cho phép parfrac online:

- `http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=ec4a062bb304f88c2ba0b631d7ac`
- `http://www.wolframalpha.com/input`.

Bài toán 9. Cho biết

$$\int \frac{1}{1+x^3}dx = -\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

(a) Tìm $\int \frac{1}{8+x^3}dx$.

(b) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{1}{8+x^3}dx$.

(c) Tính tích phân suy rộng sau (nếu hội tụ) $\int_1^{\infty} \frac{1}{8+x^3}dx$.

Nếu làm được c) thì không cần làm a) và b).

Bài toán 10. Tìm $\int \frac{1}{x^4+1}dx$.

Kết quả từ phần mềm Matlab:

$$\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\left(\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4}\right)+\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\left(\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{i}}{4}\right)$$

Kết quả từ trang web wolframe:

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{-\log(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+\log(x^2+\sqrt{2}\,x+1)-2\tan^{-1}(1-\sqrt{2}\,x)+2\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x+1)}{4\sqrt{2}} + \text{constant}$$

Hình 2: Kết quả từ wolframe

A Tìm partial fraction bằng công cụ tính toán

Các phần mềm như Matlab, Maple sẽ cho phép chúng ta tìm parfraction bằng lệnh parfrac. Ngoài ra, ta có thể tìm partial fraction thông qua `http://www.wolframalpha.com/`.

B Tìm partial fraction bằng Casio

Trong bài viết "Kỹ Thuật Nhảy Tầng Lầu", tác giả (có địa chỉ email: `sherlockttmt@gmail.com`, trang web `vietnamcasioerteam.blogspot.com`) đưa ra kỹ thuật xác định nguyên hàm bằng Casio.

Tài liệu tham khảo

[Man09] Yiu-Kwong Man. An improved heaviside approach to partial fraction expansion and its applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(6):808–814, 2009.

[MAN11] Yiu Kwong MAN. On partial fraction decomposition of rational functions with irreducible quadratic factors in the denominators. 2011.