Ma trận

Tham khảo bài giảng của **dangvvinh@hcmut.edu.vn**

NỘI DUNG

I. Định nghĩa ma trận và ví dụ

II. Các phép biến đổi sơ cấp

III. Các phép toán đối với ma trận

ĐỊNH NGHĨA MA TRẬN

Định nghĩa ma trận

> **Ma trận** cỡ m×n là một bảng số hình chữ nhật có m **hàng** và n **cột**.

Ma trận A cỡ m×n

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{Cột } j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{Hàng } i \\ \\ \\ \end{array}$$

3

VÍ DỤ MA TRẬN

Ví dụ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Đây là ma trận thực cỡ 2x3.

Ma trận A có 2 hàng và 3 cột.

Phần tử của A: $a_{11} = 3; a_{12} = 4; a_{13} = 1; a_{21} = 2; a_{22} = 0; a_{23} = 5$

Ví dụ 2

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & i \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

4

KÝ HIỆU MA TRẬN

Ma trận A có m hàng và n cột thường được ký hiệu bởi

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

Tập hợp tất cả các ma trận cỡ m×n trên **tập số thực R** được ký hiệu là $M_{m\times n}[\mathbf{R}]$

Định nghĩa ma trận không

Ma trận có tất cả các phần tử là không được gọi là **ma trận không**, ký hiệu **0**, ($a_{ij} = 0$ với mọi i và j).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5

Ma trận dạng bậc thang

Phần tử khác không đầu tiên của một hàng kể từ bên trái được gọi là phần tử cơ sở của hàng đó.

Định nghĩa: **ma trận dạng bậc thang** là ma trận thoả

1. Hàng không nếu có thì nằm dưới cùng
2. Phần tử cơ sở của hàng dưới nằm bên phải (không cùng cột) so với phần tử cơ sở của hàng trên.

6

Ma trận dạng bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Không là ma trận bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Không là ma trận bậc thang

7

Ma trận dạng bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Là ma trận dạng bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Là ma trận dạng bậc thang

8

Ma trận chuyển vị

Định nghĩa ma trận chuyển vị

Chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $A^T = (a_{ij})_{n\times m}$ cỡ n×m thu được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1 \quad 3} \\ 4 \quad 0 \quad 9 \end{pmatrix}_{2\times 3} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{matrix} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Ma trận vuông

Định nghĩa ma trận vuông

Nếu số hàng và cột của ma trận A bằng nhau và bằng n, thì A được gọi là **ma trận vuông** cấp n.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường số thực **R** được ký hiệu bởi $M_n[\mathbb{R}]$

Đường chéo chính

Các phần tử a_{11}, a_{22},…,a_{nn} tạo nên đường chéo chính của ma trận vuông A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

11

Ma trận tam giác

Định nghĩa **ma trận tam giác trên**

Ma trận vuông $A = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)_{n\times n}$ được gọi là **ma trận tam giác trên** nếu $a_{\mathrm{ij}} = 0,\ \forall i > j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa **ma trận tam giác dưới**

Ma trận vuông $A = \left(a_{\mathrm{ij}}\right)_{n\times n}$ được gọi là **ma trận tam giác dưới** nếu $a_{\mathrm{ij}} = 0,\ \forall i < j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

12

Ma trận đường chéo, ma trận đơn vị

Định nghĩa **ma trận đường chéo**

Ma trận vuông A được gọi là **ma trận đường chéo** nếu các phần tử nằm ngoài đường chéo đều bằng không, có nghĩa là ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa **ma trận đơn vị**

Ma trận chéo với các phần tử đường chéo đều bằng 1 được gọi là **ma trận đơn vị**, tức là ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$; và $a_{ii} = 1$ với mọi i).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13

Ma trận đối xứng

Định nghĩa **ma trận đối xứng**

Ma trận vuông thực A thỏa $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i = 1,….n và j =1,…,n được gọi là **ma trận đối xứng** (tức là, nếu $A = A^T$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{3} \\ -1 & 4 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

14

Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

15

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng

1. Nhân một hàng tùy ý với một số khác không $h_i \to \alpha h_i ; \alpha \neq 0$

2. Cộng vào một hàng một hàng khác đã được nhân với một số tùy ý $h_i \to h_i + \beta h_j ; \forall \beta$

3. Đổi chỗ hai hàng tùy ý $h_i \leftrightarrow h_j$

Tương tự có ba phép biến đổi sơ cấp đối với cột.

16

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Định lý 1

Mọi ma trận đều có thể đưa về ma trận dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng.

Chú ý

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng ta có thể thu được nhiều ma trận bậc thang khác nhau

17

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa ma trận sau đây về ma trận dạng bậc thang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 1. Bắt đầu từ cột khác không đầu tiên từ bên trái. Chọn phần tử khác không tùy ý làm phần tử cơ sở.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

18

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Bước 2. Dùng bđsc đối với hàng, khử tất cả các phần tử còn lại của cột.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ \cancel{2} & 3 & -1 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & 2 & -3 & 7 & 4 \\ \cancel{-1} & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3 \to h_3 - 3h_1 \\ h_4 \to h_4 + h_1}]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} \boxed{} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \end{pmatrix}$$

Bước . Che tất cả các hàng từ hàng chứa phần tử cơ sở và những hàng trên nó. Áp dụng bước 1 và 2 cho ma trận còn lại

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - 2h_2]{h_3 \to h_3 + h_2} \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4 \to h_4 + h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Định nghĩa

Nếu dùng các biến đổi sơ cấp đưa A về ma trận bậc thang U, thì U được gọi là **dạng bậc thang** của A.

Định nghĩa

Cột của ma trận bậc thang A được gọi là cột cơ sở nếu cột đó chứa phần tử cơ sở

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

20

Các phép toán trên ma trận

21

III. Các phép toán đối với ma trận

Sự bằng nhau của hai ma trận

Hai ma trận **bằng nhau** nếu: 1) cùng cỡ; 2) các phần tử ở những vị trí tương ứng bằng nhau ($a_{ij} = b_{ij}$ với mọi i và j).

Phép cộng hai ma trận

Tổng A + B: $\begin{cases} \text{Cùng cỡ} \\ \text{Các phần tử tương ứng cộng lại} \end{cases}$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

22

III. Các phép toán đối với ma trận

Phép nhân ma trận với một số.

Nhân ma trận với một số, ta lấy số đó nhân với tất cả các phần tử của ma trận.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Tính chất:

a) A + B = B + A;	b) (A + B) + C = A + (B + C);
c) A + 0 = A;	d) k(A + B) = kA + kB;
e) k (mA) = (km) A;	f) (k + m)A = kA + mA;

23

III. Các phép toán đối với ma trận

Phép nhân hai ma trận với nhau

$$A = (a_{ij})_{m\times p}; B = (b_{ij})_{p\times n}$$

$AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$ với $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

$$AB = \begin{bmatrix} & * & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ip}} \\ & * & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

24

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ Tính AB

$$A \times B = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad -1 \quad 4} \\ 4 \quad 1 \quad 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times 2 = 7$$

25

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X, thỏa $AX = B$.

Xác định cỡ của ma trận X là 2×1. Đặt $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\text{AX=B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a - b \\ 4a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3} \quad \text{Vậy } X = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

26

III. Các phép toán đối với ma trận

Tính chất của phép nhân hai ma trận

a. A(BC) = (AB)C;

b. A(B + C) = AB + AC;

c. (B + C)A = BA + CA;

d. $I_m A = A = A I_m$

e. k (AB) = (kA)B = A(kB).

Chú ý:

1. Nói chung $AB \neq BA$
2. $AB = AC \not\longrightarrow B = C$
3. $AB = 0 \not\longrightarrow A = 0 \vee B = 0$

27

III. Các phép toán đối với ma trận

Nâng ma trận lên lũy thừa.

Qui ước: $A^0 = I$

$A^2 = A \cdot A$

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A \cdot A}_{n}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I\ .$$

28

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ Tính f(A).

$$f(A) = 2A^2 - 4A + 3I$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2; A^3, từ đó suy ra A^{200}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{200}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

Suy ra: $A^n = 2^{n-1}A$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 2^{199} & 2^{199} \\ 2^{199} & 2^{199} \end{pmatrix}$$

VI. Kết luận

Ma trận là gì? Ma trận vuông ? Ma trận bậc thang

Ma trận không? Ma trận chéo? Ma trận chuyển vị?

Ma trận đơn vị? Ma trận đối xứng?

Các phép biến đổi sơ cấp

Ba phép bđsc trên hàng (cột)

Các phép toán đối với ma trận: Sự bằng nhau Phép cộng

Nhân ma trận với một số Nhân hai ma trận với nhau

Nâng lên lũy thừa

Bài tập 1

Thực hiện phép toán

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bài tập 2.

Tìm f(A), biết

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 5 \quad \text{và} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 3.

Tìm ma trận X, sao cho AX = B, với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bài tập 4

Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính $3A + 2B^T$

Bài tập 5

Tìm ma trận A, nếu

$$5A-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=3A-\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Bài tập 6

Tìm các giá trị của s và t, sao cho ma trận sau là đối xứng

$$A=\begin{pmatrix}s & 2s & st\\ t & -1 & s\\ t & s^2 & s\end{pmatrix}$$

Bài tập 7

Cho $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cho A là ma trận cỡ 3xn, B cỡ nx3.

a) Mô tả PA theo nghĩa biến đổi sơ cấp đối với hàng

b) Mô tả BP theo nghĩa biến đổi sơ cấp đối với cột

Bài tập 8

Cho A, B, C là các ma trận, đơn giản biểu thức sau

$$A(3B - C) + (A - 3B)C + 2B(C + 2A)$$

Bài tập 9

Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là ma trận vuông.

a) Tính A^2.

b) Tính A^n.

Bài tập 10

Cho hai ma trận A và B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm tất cả ma trận X, sao cho AX = B.

Bài tập 11.

Đưa ma trận sau về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$