

Định thức của ma trận

1

I. Định nghĩa định thức

Cho $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n .
Định thức của A là một số ký hiệu bởi $\det(A) = |a_{ij}|_{n \times n} = |A|$

Ký hiệu M_{ij} là định thức thu được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A ;

Định nghĩa bù đại số của phần tử a_{ij}

Bù đại số của phần tử a_{ij} là đại lượng $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

2

Định nghĩa định thức bằng qui nạp

a) $k=1$: $A = [a_{11}] \rightarrow |A| = a_{11}$

b) $k=2$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$

c) $k=3$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

.....

d) $k=n$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & * & & \end{bmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

Ví dụ

Tính $\det(A)$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải

$$|A| = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 12 - 16 + 15 = 11$$

II. Tính chất của định thức

1. Có thể tính định thức bằng cách khai triển theo bất kỳ hàng hoặc cột tùy ý nào đó

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

5

Ví dụ

Tính định thức $\det(A)$, với

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải.

Khai triển theo hàng thứ 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -32$$

6

Ví dụ

Tính định thức $\det(A)$, với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

7

Ví dụ

Giải

Khai triển theo cột thứ hai

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = -3A_{12}$$

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \dots = 171$$

8

Định thức của ma trận tam giác

Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo.

Ví dụ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = -120$$

9

II. Tính chất của định thức

Sử dụng biến đổi sơ cấp đối với hàng để tính định thức

1. Nếu $A \xrightarrow{h_i \rightarrow \alpha h_i} B$ thì $|B| = \alpha |A|$

2. Nếu $A \xrightarrow{h_i \rightarrow h_i + \beta h_j} B$ thì $|B| = |A|$

3. Nếu $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B$ thì $|B| = -|A|$

10

Ví dụ

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp, tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

11

Ví dụ

Giải

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 3h_1 \\ h_4 \rightarrow h_4 + 2h_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột đầu tiên}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -15 \end{vmatrix} = -19$$

12

II. Tính chất của định thức

Nguyên tắc tính định thức sử dụng biến đổi sơ cấp

Bước 1. Chọn 1 hàng (hoặc một cột) tùy ý;

Bước 2. Chọn một phần tử khác không tùy ý của hàng (hay cột) ở bước 1.
Dùng biến đổi sơ cấp, khử tất cả các phần tử khác.

Bước 3. Khai triển theo hàng (hay cột) đã chọn.

13

Ví dụ

Sử dụng biến đổi sơ cấp, tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

14

Ví dụ

Giải

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & \boxed{1} \end{vmatrix} \xrightarrow[h_4 \rightarrow h_4 - h_1]{h_3 \rightarrow h_3 + 2h_1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| \xrightarrow{\text{Khai triển theo cột số 4}} 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{-2} \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{4} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{-2} \\ 5 & 8 & 0 \\ 5 & 5 & \boxed{0} \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 30$$

15

II. Tính chất của định thức

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Mã trận có một hàng (cột) bằng không, thì $\det(A) = 0$

Mã trận có hai hàng (cột) tỉ lệ nhau, thì $\det(A) = 0$

Chú ý: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

16

Hạng của ma trận

17

IV. Hạng của ma trận

Định nghĩa hạng của ma trận

Giả sử $A_{m \times n}$ tương đương hàng (cột) với ma trận bậc thang E. Khi đó ta gọi hạng của ma trận A là số các hàng khác không của ma trận bậc thang

$r(A) =$ số hàng khác không của ma trận bậc thang E

18

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \rightarrow h_3 - 3h_1]{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

19

IV. Hạng của ma trận

Tính chất của hạng ma trận

1. $r(A) = 0 \iff A = 0$
2. $A = (a_{ij})_{m \times n} \longrightarrow r(A) \leq \min\{m, n\}$
3. Nếu $A \xrightarrow{\text{BĐSC}} B$, thì $r(B) = r(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A) = 1.$$

20

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Sử dụng biến đổi sơ cấp, tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

21

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho $r(A) = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & m-3 & m-5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & m-1 & m-8 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3 \text{ với mọi giá trị } m.$$

22

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của m để cho $r(A) = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

23

Bài tập

24

Bài tập 1

Tính $\det(A)$, nếu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

25

Bài tập 2

Tính $\det(A)$, với

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

26

Bài tập 3

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x & 3 \\ 3 & -2 & x^2 + 3 & 1 \\ 3 & 5 & x^3 + 2x & 1 \\ 6 & 3 & 2x + 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- a) Bậc của $f(x)$ là 5.
- b) Bậc của $f(x)$ là 4.
- c) Bậc của $f(x)$ là 3.
- d) Các câu khác đều sai.

27

Bài tập 4

Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

28

Bài tập 5

Giải phương trình, với a, b, c là các số thực.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

29

Bài tập 6

Giải phương trình trong $\mathbf{R}$

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 2 & 3 \\ x & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

30

Bài tập 7

Đưa về ma trận bậc thang, tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

31

Bài tập 8

Tìm tất cả các giá trị m sao cho $r(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

32

Bài tập 9

Biện luận theo m hạng của ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & m \end{pmatrix}$$

33