Ma trận nghịch đảo

V. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận I sao cho AB = I =BA. Khi đó B được gọi là nghịch đảo của A và ký hiệu là A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \text{Giả sử} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}\right\} A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

V. Ma trận nghịch đảo

Chú ý

Không phải bất kỳ ma trận vuông A nào cũng khả nghịch. Có rất nhiều ma trận vuông không khả nghịch.

Định nghĩa

Ma trận khả nghịch được gọi là ma trận không suy biến

Ma trận không khả nghịch được gọi là ma trận suy biến

3

Sự tồn tại của ma trận khả nghịch

Cho ma trận vuông A, các mệnh đề sau đây tương đương

1. Tồn tại A^{-1} (A không suy biến)
2. $r(A) = n$
3. $AX = 0$ suy ra $X = 0$.
4. $A \xrightarrow{\text{Tương đương hàng}} I$

Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

4

Ma trận sơ cấp

Định nghĩa ma trận sơ cấp

Ma trận thu được từ I bằng đúng 1 phép biến đổi sơ cấp được gọi là **ma trận sơ cấp**.

Ví dụ

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to 3h_3} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5

V. Ma trận nghịch đảo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_1} E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Một phép biến đổi sơ cấp đối với hàng của ma trận A đồng nghĩa với nhân bên trái A với ma trận sơ cấp tương ứng.

Một phép biến đổi sơ cấp đối với cột của ma trận A đồng nghĩa với nhân bên phải A với ma trận sơ cấp tương ứng.

6

V. Ma trận nghịch đảo

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_1}B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

7

V. Ma trận nghịch đảo

$$A\xrightarrow{\text{bđsc hàng}}I\Leftrightarrow I=E_nE_{n-1}...E_1A$$

$$\Rightarrow A^{-1}=E_nE_{n-1}...E_1I$$

$$\Leftrightarrow I\xrightarrow{\text{bđsc hàng ở trên}}A^{-1}$$

8

Cách tìm A^{-1}

$$[\,A|I\,] \xrightarrow{\text{Bđsc đối với hàng}} [\,I|A^{-1}\,]$$

Ví dụ

Tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cách tìm A^{-1}

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [I\,|\,A^{-1}]$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính chất của ma trận nghịch đảo

Đối với hai ma trận khả nghịch A và B, các khẳng định sau đây đúng.

$(A^{-1})^{-1} = A$

Tích AB là hai ma trận khả nghịch.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

II. Tính chất của định thức

Công thức tính ma trận nghịch đảo A^{-1}

Cho A là ma trận khả nghịch. Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} P_A \text{, với} \qquad P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

II. Tính chất của định thức

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Giải. $\det(A) = -2 \neq 0 \longrightarrow$ A khả nghịch

Tính 9 bù đại số của các phần tử

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = 4; A_{22} = -3; A_{23} = -1; A_{31} = -2; A_{32} = 1; A_{33} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13

II. Tính chất của định thức

Tính chất của ma trận nghịch đảo

1. $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2. Nếu A khả nghịch, thì $$\det(P_A) = (\det(A))^{n-1}$$

14

IV. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của m để cho A khả nghịch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

15

Kết luận

Ma trận khả nghịch là gì? Nghịch đảo của ma trận A là gì?

Làm thế nào để tìm nghịch đảo của một ma trận cho trước?

Làm thế nào để biết một ma trận cho trước khả nghịch?

16

Bài tập 1

Tìm ma trận nghịch đảo, nếu có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 2

Tìm ma trận nghịch đảo của A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài tập 3

Tìm tất cả số thực m, sao cho ma trận A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$$

Bài tập 4

Tìm tất cả các số thực m, sao cho ma trận A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 5

Tìm ma trận nghịch đảo bằng cách tính định thức

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài tập 6

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài tập 7

Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Bài tập 8

Tìm tất cả các giá trị thực của m để ma trận sau khả nghịch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Bài tập 9

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1) Tính det (A^{-1}).

2) Tính det $(5A)^{-1}$.

3) Tính det (P_A).