Bổ túc kiến thức

- Logic mệnh đề
- Lý thuyết tập hợp
- Logic vị từ
- Ánh xạ
- Quan hệ

Logic mệnh đề

cuu duong than cong. com

I. Mệnh đề

1. **Định nghĩa**: ***Mệnh đề*** là một khẳng định có giá trị chân lý xác định, đúng hoặc sai.
   Câu hỏi, câu cảm thán, mệnh lệnh… không là mệnh đề.

Ví dụ:

- mặt trời quay quanh trái đất.
- 1+1 =2.
- Hôm nay trời đẹp quá ! (không là mệnh đề)
- Học bài đi ! (không là mệnh đề)
- 3 là số chẵn phải không? (không là mệnh đề)

I. Mệnh đề

Ký hiệu: người ta dùng các ký hiệu P, Q, R… để chỉ mệnh đề.

Chân trị của mệnh đề:

Một mệnh đề chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể đồng thời vừa đúng vừa sai. Khi mệnh đề P đúng ta nói P có chân trị đúng, ngược lại ta nói P có chân trị sai.

Chân trị đúng và chân trị sai sẽ được ký hiệu lần lượt là 1 (hay Đ,T) và 0 (hay S,F)

Bài tập làm ngay

Kiểm tra các khẳng định sau có phải là mệnh đề không?

- Paris là thành phố của Mỹ.
- n là số tự nhiên.
- con nhà ai mà xinh thế!
- 3 là số nguyên tố.
- Toán rời rạc là môn bắt buộc của ngành Tin học.
- Bạn có khỏe không?
- $x^2 + 1$ luôn dương.

I. Mệnh đề

3. Các phép toán: có 5 phép toán

a. Phép phủ định: phủ định của mệnh đề P được ký hiệu là $\neg$P hay $\overline{P}$(đọc là “không” P hay “phủ định của” P).

Bảng chân trị :

P	$\neg$P
1	0
0	1

Ví dụ :

\+ 2 là số nguyên tố

Phủ định: 2 **không** là số nguyên tố

\+ 1 >2

Phủ định : 1≤ 2

I. Mệnh đề

b. <u>Phép nối liền</u> (hội, giao): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi P ∧ Q (đọc là "P và Q"), là mệnh đề được định bởi : P ∧ Q đúng khi và chỉ khi P và Q đồng thời đúng.

Bảng chân trị

P	*Q*	*P∧Q*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ví dụ:

- 3>4 và Trần Hưng Đạo là một vị tướng
- 2 là số nguyên tố và 2 là số chẵn
- An đang hát và uống nước

I. Mệnh đề

c. Phép nối rời (tuyển, hợp): của hai mệnh đề P, Q được kí hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là "P hay Q"), là mệnh đề được định bởi : $P \vee Q$ sai khi và chỉ khi P và Q đồng thời sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ví dụ:

- $\pi > 4$ hay $\pi > 5$
- 2 là số nguyên tố hay 2 là số chẵn

I. Mệnh đề

d. Phép kéo theo: Mệnh đề P kéo theo Q của hai mệnh đề P và Q, kí hiệu bởi $P \to Q$ (đọc là "P kéo theo Q" hay "Nếu P thì Q" hay "P là điều kiện đủ của Q" hay "Q là điều kiện cần của P") là mệnh đề được định bởi:

$P \to Q$ sai khi và chỉ khi P đúng mà Q sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	**0**
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:

- Nếu 1 = 2 thì Lenin là người Việt Nam
- Nếu trái đất quay quanh mặt trời thì 1 +3 =5
- π >4 kéo theo 5>6
- π < 4 thì trời mưa
- Nếu 2+1=0 thì tôi là chủ tịch nước

I. Mệnh đề

e. Phép kéo theo hai chiều: Mệnh đề P kéo theo Q và ngược lại của hai mệnh đề P và Q, ký hiệu bởi $P \leftrightarrow Q$ (đọc là "P nếu và chỉ nếu Q" hay "P khi và chỉ khi Q" hay "P là điều kiện cần và đủ của Q" hay "P tương đương với Q"), là mệnh đề xác định bởi:

$P \leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi P và Q có cùng chân trị

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

I. Mệnh đề

Ví dụ:

- 2=4 khi và chỉ khi 2+1=0
- 6 chia hết cho 3 khi và chi khi 6 chia hết cho 2
- London là thành phố nước Anh nếu và chỉ nếu thành phố HCM là thủ đô của VN
- π >4 là điều kiện cần và đủ của 5 >6

II. Dạng mệnh đề

1. Định nghĩa: Dạng mệnh đề là một biểu thức được cấu tạo từ:

- Các hằng mệnh đề
- Các biến mệnh đề *p, q, r, …,* tức là các biến lấy giá trị là các mệnh đề nào đó
- Các phép toán $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ và dấu đóng mở ngoặc ().

Dạng mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn lấy giá trị **1**

Dạng mệnh đề gọi là hằng sai (hay mâu thuẫn) nếu nó luôn lấy giá trị 0.

Ví dụ:

$E(p,q) = \neg(\neg p \wedge q)$

$F(p,q,r) = (p \to q) \wedge \neg(q \wedge r)$

II. Dạng mệnh đề

Bảng chân trị của dạng mệnh đề E(p,q,r): là bảng ghi tất cả các trường hợp chân trị có thể xảy ra đối với dạng mệnh đề E theo chân trị của các biến mệnh đề p, q, r.

Nếu có n biến, bảng này sẽ có 2^n dòng, chưa kể dòng tiêu đề.

Ví dụ:

$E(p,q,r) = (p \vee q) \rightarrow r$. Ta có bảng chân trị sau

II. Dạng mệnh đề

Mệnh đề **E(p,q,r) =(p $\vee$q) $\rightarrow$r** theo 3 biến p,q,r có bảng chân trị sau

p	q	r	p$\vee$q	(p $\vee$q) $\rightarrow$r
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

II. Dạng mệnh đề

Bài tập: Lập bảng chân trị của những dạng mệnh đề sau

$E(p,q) = \neg(p \wedge q) \wedge p$

$F(p,q,r) = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow \neg q$

Độ ưu tiên các phép toán

1. Ngoặc ()
2. Phủ định
3. Và
4. Hay
5. Kéo theo →
6. Kéo theo hai chiều

- Ví dụ:
  - $\mathbf{p \lor q \to r}$ hiểu là $\mathbf{(p \lor q) \to r}$
  - $\mathbf{p \land (q \lor r) \leftrightarrow \neg q}$ hiểu là $(\mathbf{p \land (q \lor r)) \leftrightarrow (\neg q)}$

Tương đương logic đáng nhớ

2. Luật De Morgan

$$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

11. Luật về phép kéo theo:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Định nghĩa Tập hợp

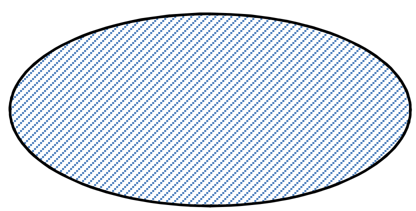
1. Khái niệm

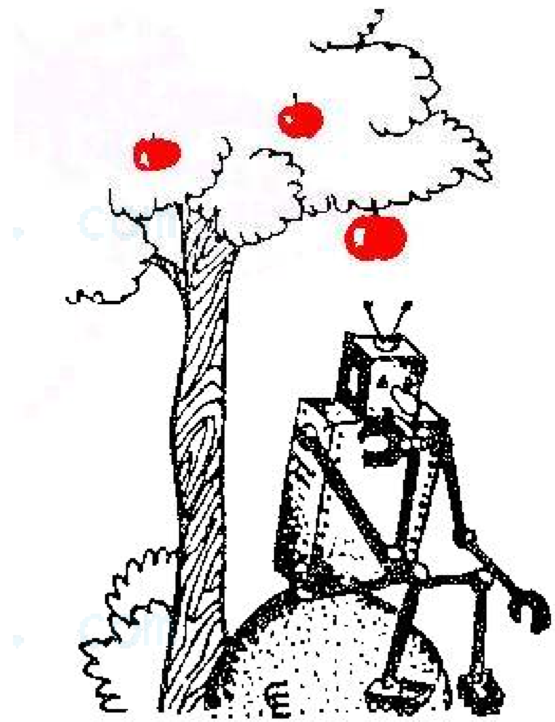
- **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của Toán học.
- Ví dụ:

  1) Tập hợp sinh viên của một trường đại học.

  2) Tập hợp các số nguyên

  3) Tập hợp các trái táo trên một cây cụ thể.
- **Sơ đồ Ven**:





cuu duong than cong. com

Lực lượng của tập hợp

Định nghĩa

Số phần tử của tập hợp A được gọi là ***lực lượng của tập hợp***, kí hiệu **|A|**.

Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A ***hữu hạn***.

Ngược lại, ta nói A ***vô hạn***.

Ví dụ.

N, **Z**, **R**, là các tập vô hạn

X = {1, 3, 4, 5} là tập hữu hạn |X|=4

Cách xác định tập hợp

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

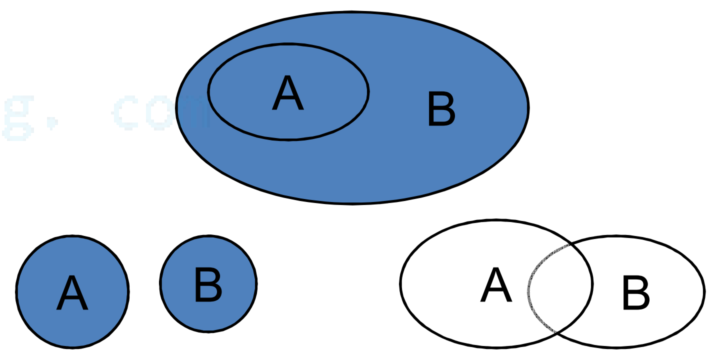
  A={1,2,3,4,a,b}

- Đưa ra tính chất đặc trưng

  B={ n $\in$N | n chia hết cho 3}

Quan hệ giữa các tập hợp

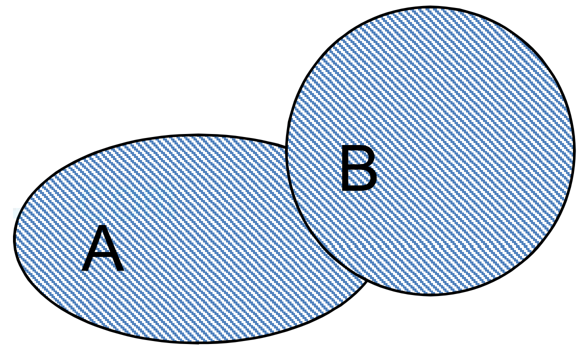
- Tập hợp con
  - A là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B. Ký hiệu: A ⊂ B.



- Hai tập hợp bằng nhau
  - A = B nếu mọi phần tử của A đều nằm trong B và ngược lại.

2. Các phép toán tập hợp

- **a. Phép hợp**
  - **Hợp** của tập A và tập B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.



$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

  - Ký hiệu: $A \cup B$
  - Ví dụ:

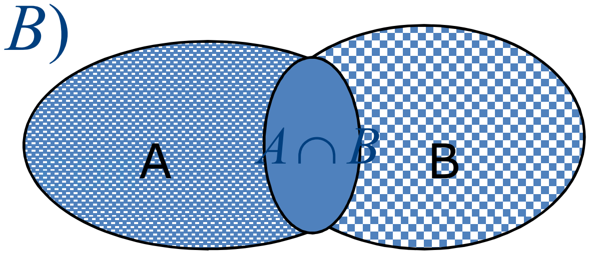
$$\left.\begin{array}{l} A = \{a,b,c,d\} \\ B = \{c,d,e,f\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$$

Phép giao

– ***Giao*** của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

– Ký hiệu: $A \cap B$



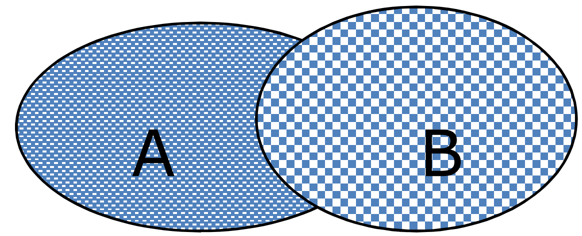
<u>*Tính phân phối của phép giao và hợp*</u>

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hiệu của hai tập hợp

- **ĐN:**
  - Hiệu của hai tập hợp là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc tập này mà không thuộc tập kia



$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

  - Ký hiệu A\B

Tập các tập con của một tập hợp

ĐN: Cho X là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của X được ký hiệu là P(X)

<u>Ví dụ</u>

$$X = \{a, b\}$$

$$P(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\},\ P(Y) = ?$$

$$|X| = n \longrightarrow |P(X)| = ?$$

Tích Đề Các

ĐN: Tích Đề các của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp bao gồm tất cả các cặp thứ tự (x,y) với $x \in A,\ y \in B$

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$$

– Ký hiệu A.B hoặc $A \times B$

– Chú ý: Tích của 2 tập hợp không có tính chất giao hoán.

$$| A \times B | = ?$$

Bài tập

- Tại lớp:
- Về nhà:

LOGIC VỊ TỪ

IV. Logic vị từ

1. Định nghĩa Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,… cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề.
- Nếu thay x,y,… thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ.

- p(n) = “n +1 là số nguyên tố”.
- q(x,y) = “$x^2 + y = 1$” .
- r(x,y,z) = “$x^2 + y^2 > z$”.

Lượng từ

Định nghĩa. Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:

- Mệnh đề *"Với mọi x thuộc A, p(x)* ", kí hiệu bởi

$$\text{“}\forall x \in A, p(x)\text{”},$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị $a \in A$.

- Mệnh đề "*Tồn tại (ít nhất)hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))"* kí hiệu bởi **:**

$$\text{“}\exists x \in A, p(x)\text{”},$$

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị $x = a_0$ nào đó sao cho mệnh đề $p(a_0)$ đúng.

Lượng từ

$\forall$: *được gọi là lượng từ* ***phổ dụng***

$\exists$: *được gọi là lượng từ* ***tồn tại***

Ví dụ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- "$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 2x$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$"

Mệnh đề lượng từ hoá

Định nghĩa. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ 1

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \in R$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in R$, tồn tại $y_a \in R$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

Ví dụ 2

- Mệnh đề "$\exists$**x** $\in$ **R,** $\forall$**y** $\in$ **R, x + 2y < 1**" đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có x = a $\in$ R để bất đẳng thức a + 2y < 1 được thỏa với mọi y $\in$ R (chẳng hạn, y = –a/2 + 2 không thể thỏa bất đẳng thức này).

- Mệnh đề "$\exists$x $\in$ **R,** $\exists$**y** $\in$ **R, x + 2y < 1" đúng hay sai?**

Mệnh đề đng vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 0 \in$ **R** chẳng hạn thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

IV. Logic vị từ

Định lý. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"

2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng các thay $\forall$ thành $\exists$, thay $\exists$ thành $\forall$ và vị từ p(x,y,..) thành $\neg$ p(x,y,..).

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x,y)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- "$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$"

- "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

Trả lời

"$\exists x \in A, 2x + 1 > 0$"

"$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R, |x - a| < \delta \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$".

ÁNH XẠ

Khái niệm

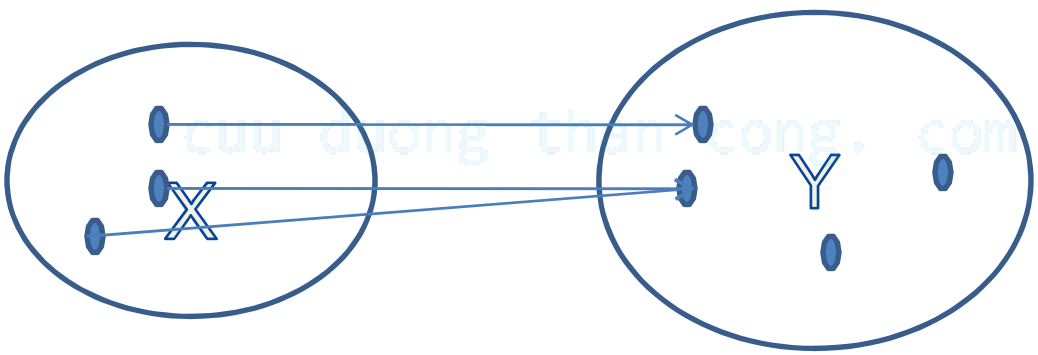
1. Định nghĩa. Cho hai tập hợp X, Y $\neq \varnothing$. Ánh xạ giữa hai tập X và *Y* là một qui tắc f sao cho mỗi x thuộc X tồn tại duy nhất một y thuộc y để *y* = *f*(*x*)

Ta viết:

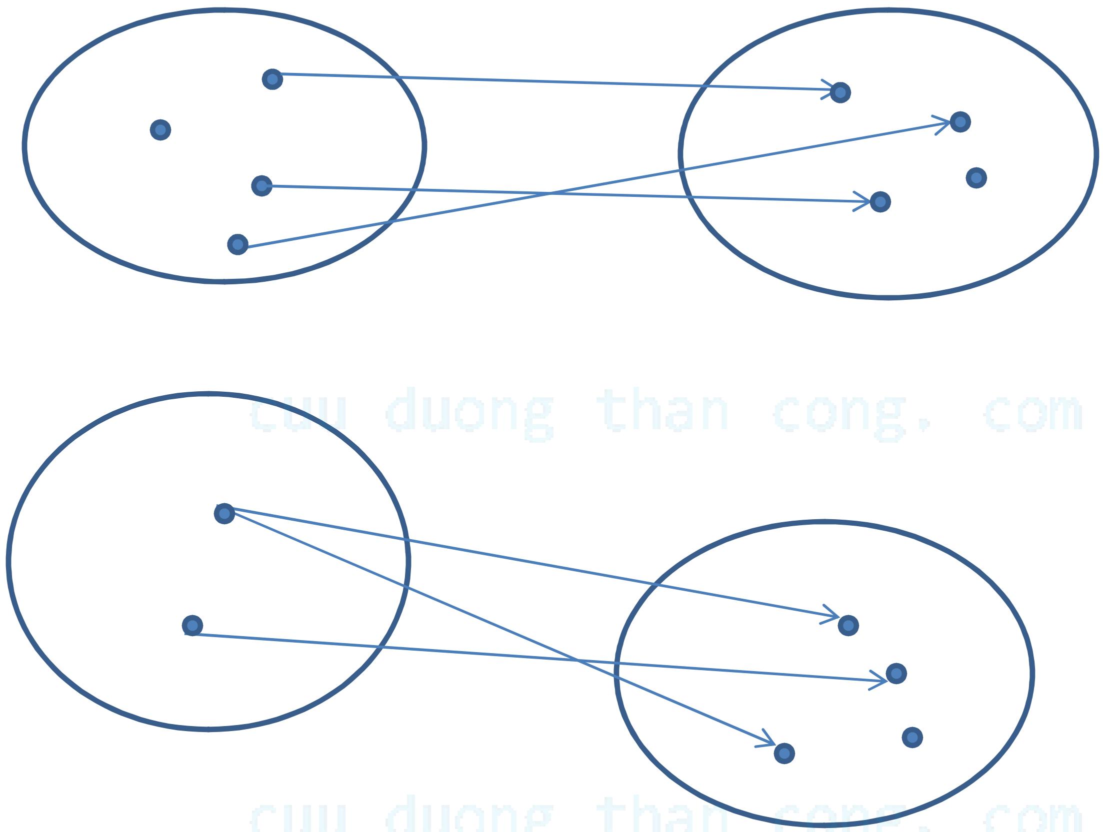
$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

Nghĩa là $\forall x \in X, \exists! y \in Y :\ y = f(x)$



Ví dụ



Cả hai đều Không là ánh xạ

Ánh xạ bằng nhau

Định nghĩa. Hai ánh xạ f và g từ X vào Y được gọi là *bằng nhau* nếu $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

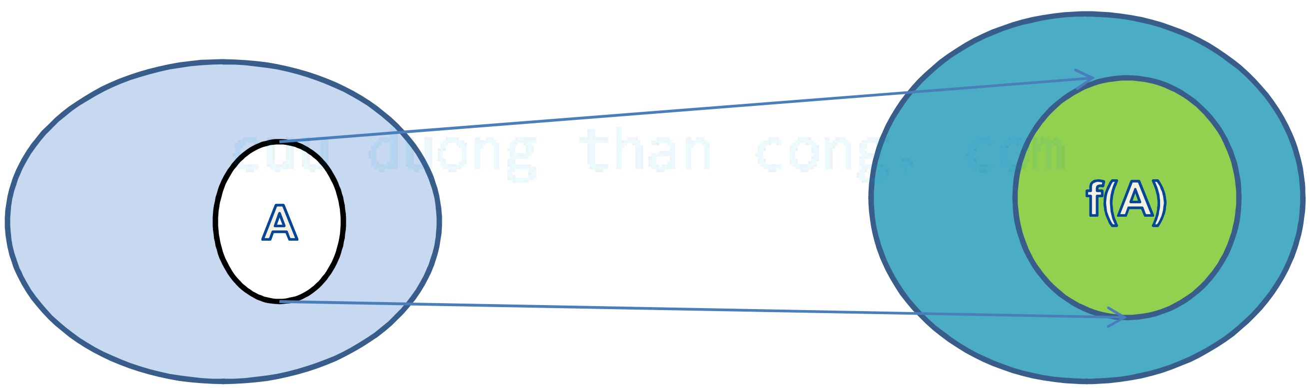
Ví dụ: Xét ánh xạ $f(x)=(x-1)(x+1)$ và $g(x) =x^2-1$ từ R->R

Ta có $(x-1)(x+1) = x^2 – 1$ nên $f(x) = g(x)$ $\forall x \in R$

Vậy hai ánh xạ này bằng nhau.

Ảnh và ảnh ngược

- Cho ánh xạ f từ X vào Y và $A \subset X$, $B \subset Y$. Ta định nghĩa:
- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ được gọi là ảnh của A



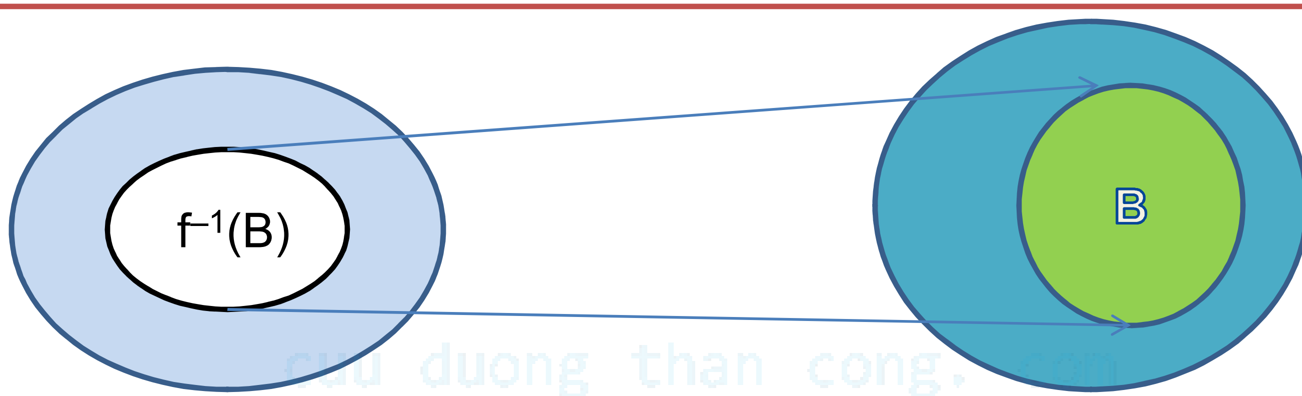
Ảnh và ảnh ngược

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$

Như vậy $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$;

$y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)$.

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là ảnh ngược của B



Như vậy $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Ví dụ ảnh và ảnh ngược

Ví dụ. Cho f: **R** $\rightarrow$**R** được xác định $f(x)=x^2 +1$

Ta có

$f([1,3])=[2,10]$

$f([-2,-1])=[2,5]$

$f([-1,3])=[1,10]$

$f((1,5)) = (2,26)$

$f^{-1}(1)=\{0\}$

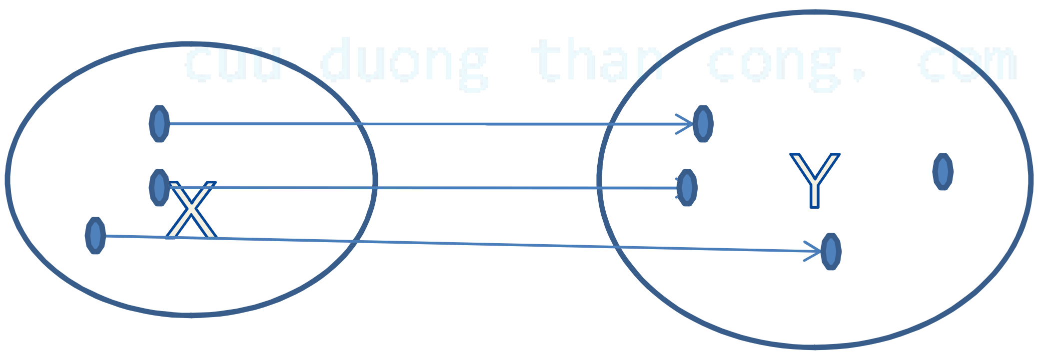
$f^{-1}(2)=\{-1,1\}$

$f^{-1}(-5)= \varnothing$

$f^{-1}([2,5])= [-2,-1] \cup [1,2]$

Phân loại ánh xạ

a. ***Đơn ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều có ảnh khác nhau, nghĩa là:



Ví dụ. Cho f: **N** →**R** được xác định $f(x)=x^2 +1$ (là đơn ánh)

g: **R** →**R** được xác định $g(x)=x^2 +1$ (không đơn ánh)

Cách CM ánh xạ f là đơn ánh

$\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Như vậy $f : X \to Y$ là một đơn ánh

$\Leftrightarrow$ $(\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ có nhiều nhất một phần tử).

$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nhiều nhất một nghiệm $x \in X$.

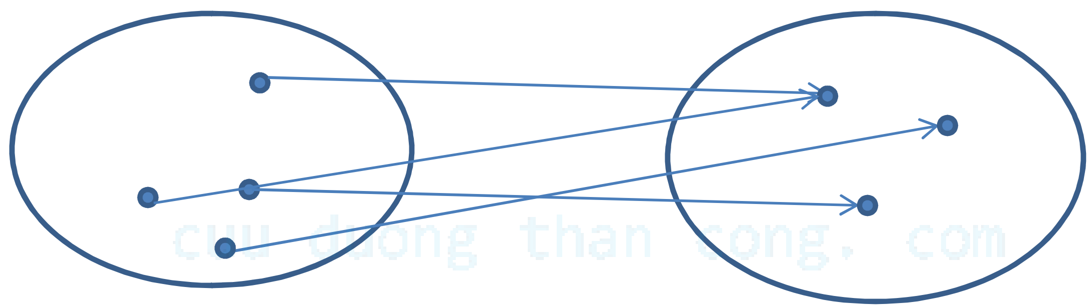
$f : X \to Y$ không là một đơn ánh

$\Leftrightarrow$ $(\exists x, x' \in X, x \neq x'$ và $f(x) = f(x'))$.

$\Leftrightarrow$ ($\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có ít nhất hai nghiệm $x \in X$

Toàn ánh

b. ***Toàn ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***toàn ánh*** f(X)=Y, nghĩa là:



Ví dụ. Cho f: R →R được xác định $f(x)=x^3 +1$ (là toàn ánh)

g: R →R được xác định $g(x)=x^{2} +1$ (không là toàn ánh)

Cách CM ánh xạ f là toàn ánh

Toàn ánh $\Leftrightarrow$ f(X)=Y. Như vậy

$f : X \to Y$ là một toàn ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y) \neq \varnothing)$;

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có nghiệm $x \in X$.

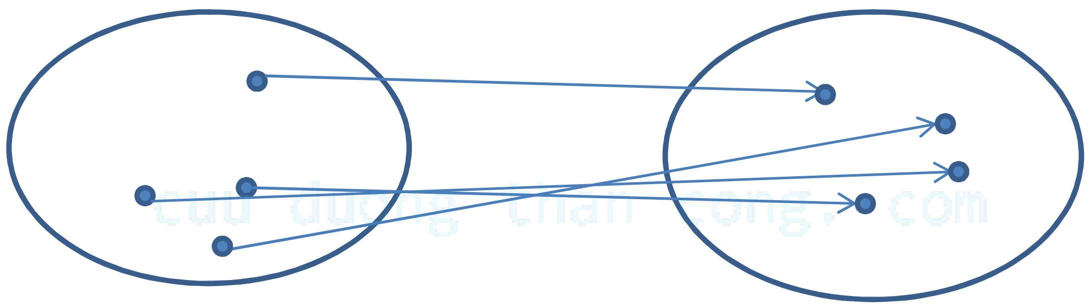
$f : X \to Y$ không là một toàn ánh

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, \forall x \in X, y \neq f(x))$;

$\Leftrightarrow (\exists y \in Y, f^{-1}(y) \neq \varnothing)$;

Song ánh

c. ***Song ánh*** Ta nói f : X → Y là một ***song ánh*** nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.



Ví dụ. Cho f: R →R được xác định $f(x)=x^3 +1$ (là song ánh)

g: R →R được xác định $g(x)=x^2 +1$ (không là song ánh)

Tính chất của song ánh

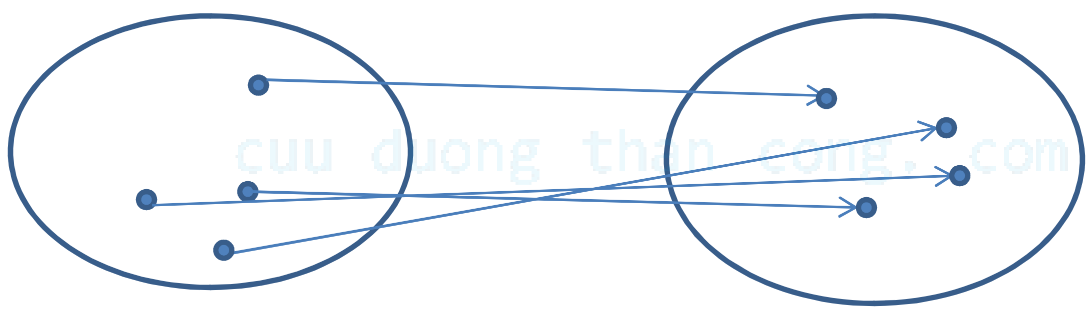
Tính chất.

$f : X \to Y$ là một song ánh

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x))$;

$\Leftrightarrow (\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ có đúng một phần tử$)$;

$\Leftrightarrow \forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (y được xem như tham số) có duy nhất một nghiệm $x \in X$.



Ánh xạ ngược

Ánh xạ ngược.

Xét $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, theo tính chất trên, với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ thỏa $f(x) = y$. Do đó tương ứng $y \mapsto x$ là một ánh xạ từ Y vào X. Ta gọi đây là ***ánh xạ ngược*** của f và ký hiệu f^{-1}. Như vậy:

$f^{-1} : Y \to X$

$$y \mapsto f^{-1}(y) = x \text{ với } f(x) = y.$$

Ví dụ. Cho f là ánh xạ từ R vào R $f(x) = 2x+1$.

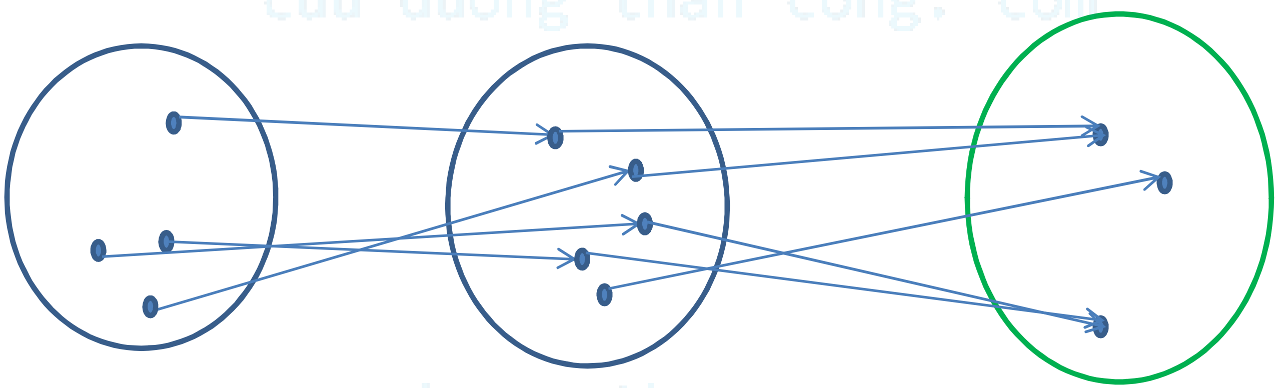
Khi đó $f^{-1}(x)=(y-1)/2$

Ánh xạ hợp

3. Ánh xạ hợp. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y' \to Z$ trong đó $Y \subset Y'$. *Ánh xạ hợp* h của f và g là ánh xạ từ X vào Z xác định bởi: $h : X \to Z$

$$x \mapsto h(x) = g(f(x))$$

Ta viết: $h = g \circ f : X \to Y \to Z$



Ví dụ ánh xạ hợp

Ví dụ. Tìm $g_o f$, $f_o g$

$$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & if \quad x > 0 \\ x+1 & if \ x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = 2x+1$$

Bài tập

- Tại lớp

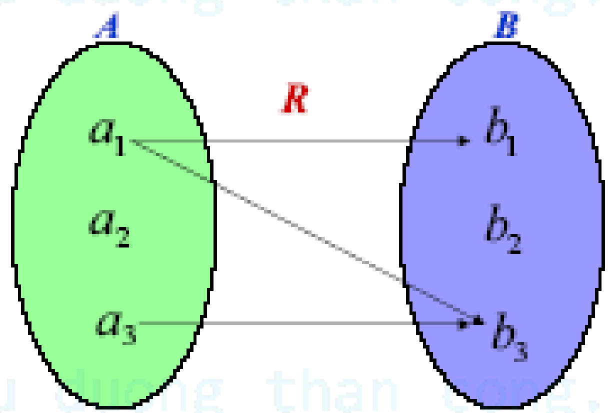
- Về nhà

QUAN HỆ

1. Định nghĩa

Một *quan hệ hai ngôi* từ tập A đến tập B là tập con của tích Đề các $R \subseteq A \times B$. Chúng ta sẽ viết $a\ R\ b$ thay cho $(a, b) \in R$.

Quan hệ từ A đến chính nó được gọi là quan hệ trên A

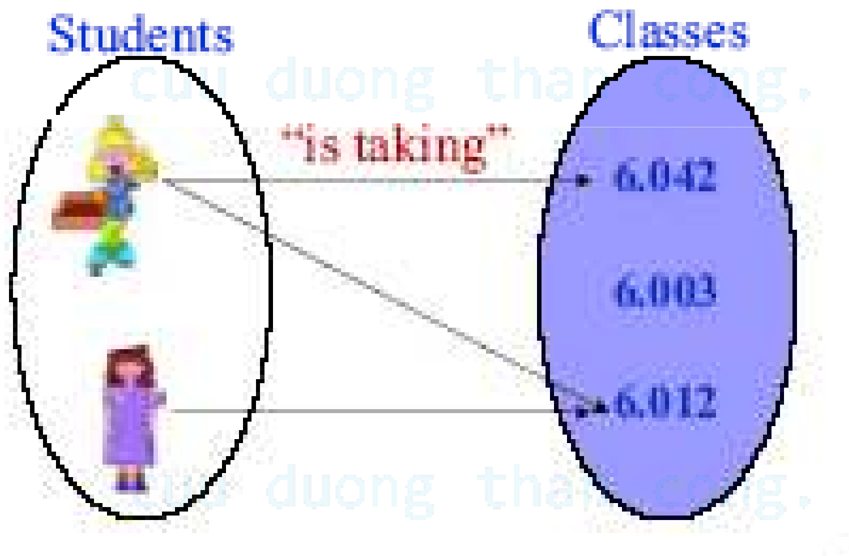


$$R = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_3) \}$$

1. Định nghĩa

Ví dụ. A = tập sinh viên; B = các lớp học.

$R = \{(a, b) \mid$ sinh viên a học lớp $b\}$



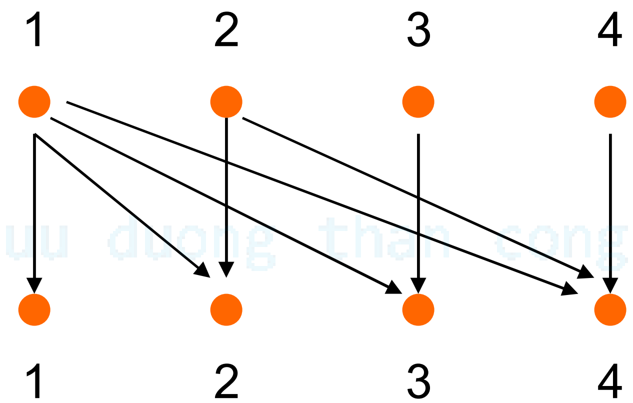
1. Định nghĩa

Ví dụ. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, và

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ là ước của } b\}$$

Khi đó

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *phản xạ* nếu:

$$\forall a \in A, a R a$$

Ví dụ. Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ:

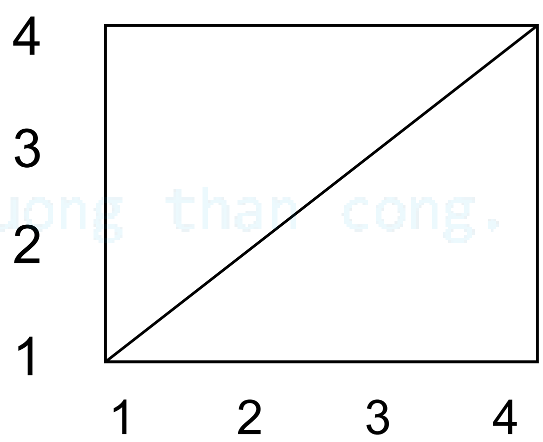
- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R_1$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R_2$

- Quan hệ $\leq$ trên *Z* phản xạ vì $a \leq a$ với mọi $a \in Z$
- Quan hệ > trên *Z* không phản xạ vì 1 > 1

- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên Z^+ là phản xạ vì mọi số nguyên *a* là ước của chính nó .

Chú ý. Quan hệ *R* trên tập *A* là phản xạ nếu nó chứa đường chéo của $A \times A$:

$$\Delta = \{(a, a);\ a \in A\}$$



2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A được gọi là *đối xứng* nếu:

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \rightarrow (b\ R\ a)$$

Quan hệ R được gọi là *phản xứng* nếu

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ (a\ R\ b) \wedge (b\ R\ a) \rightarrow (a = b)$$

Ví dụ.

- Quan hệ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng
- Quan hệ $\leq$ trên **Z** không đối xứng.

Tuy nhiên nó phản xứng vì

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)$$

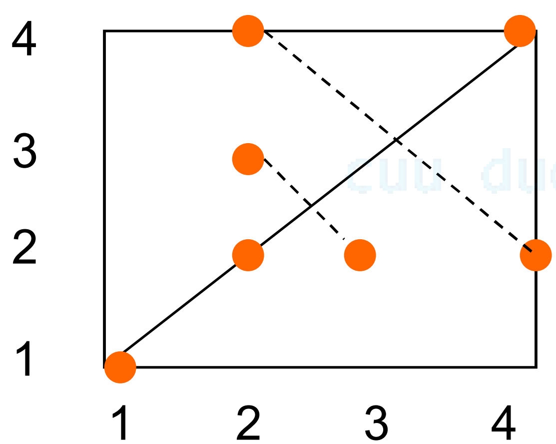
2. Các tính chất của Quan hệ

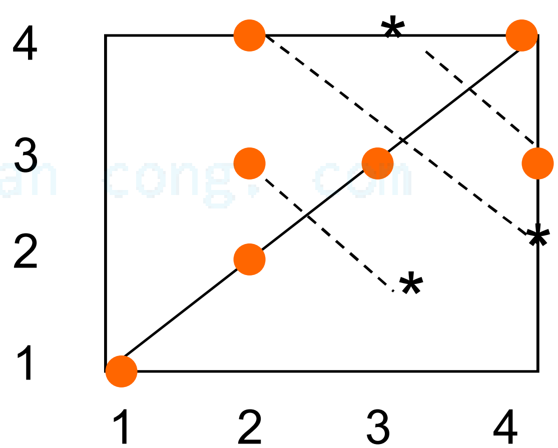
- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên Z^{+}. không đối xứng
  Tuy nhiên nó có tính phản xứng vì

$$(a \mid b) \wedge (b \mid a) \rightarrow (a = b)$$

Chú ý. Quan hệ *R* trên *A* là đối xứng nếu nó đối xứng nhau qua đường chéo Δ của *A* × *A*.

Quan hệ *R* là phản xứng nếu chỉ có các phần tử nằm trên đường chéo là đối xứng qua Δ của *A* × *A*.





2. Các tính chất của Quan hệ

Định nghĩa. Quan hệ R trên A có tính *bắc cầu* *(truyền)* nếu

$$\forall a, b, c \in A, (a\,R\,b) \wedge (b\,R\,c) \rightarrow (a\,R\,c)$$

Ví dụ.

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

Quan hệ $\leq$ và "|"trên Z có tính bắc cầu

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \rightarrow (a \leq c)$$

$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \rightarrow (a \mid c)$$

Định nghĩa

Ví dụ.

Cho S = {sinh viên của lớp}, gọi

R = {(a,b): a có cùng họ với b}

Hỏi

R phản xạ? Yes

R đối xứng? Yes

R bắc cầu? Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

3. Quan hệ tương đương

Định nghĩa. Quan hệ R trên tập A được gọi là *tương đương* nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu :

Ví dụ. Quan hệ R trên các chuỗi ký tự xác định bởi aRb nếu a và b có cùng độ dài. Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên $\mathbf{R}$ sao cho aRb nếu $a - b$ nguyên. Khi đó R là quan hệ tương đương

3. Quan hệ tương đương

Cho a và b là hai số nguyên. A được gọi là ước của b hay b chia hết cho nếu tồn tại số nguyên k sao ***a = kb***

Ví dụ. Cho m là số nguyên dương **và** *R* quan hệ trên **Z** sao cho *aRb* nếu *a – b* chia hết *m*, khi đó *R* là quan hệ tương đương.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho *a*, *b*, *c* sao cho *a – b và b – c* chia hết cho *m*, khi đó *a – c = a – b + b – c* cũng chia hết cho *m*. Suy ra *R* có tính chất bắc cầu.

- Quan hệ này được gọi là ***đồng dư modulo m*** và chúng ta viết

$$a \equiv b \pmod{m}$$

thay vì *aRb*

Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. ***Lớp tương đương chứa a*** được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập

$$[a]_R = \{b \in A \mid b\ R\ a\}$$

Lớp tương đương

Ví dụ. Tìm các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Giải. Lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên a chia hết cho 8. Do đó

$$[0]_8 = \{ \ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots \}$$

Tương tự

$$[1]_8 = \{a \mid a \text{ chia 8 dư } 1\}$$
$$= \{ \ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots \}$$

Định nghĩa

Ví dụ. Cho R là quan hệ trên tập số thực:

$$a\,R\,b \text{ nếu } a \le b$$

Hỏi:

- R phản xạ không? Có
- R đối xứng không? Không
- R phản xứng không? Có
- R bắc cầu không? Có

Định nghĩa

Định nghĩa. Quan hệ *R* trên tập *A* là *quan hệ thứ tự (thứ tự)* nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi $\prec$

Cặp $(A, \prec)$ được gọi là *tập sắp thứ tự* hay *poset*

Phản xạ: $a \prec a$

Phản xứng: $(a \prec b) \wedge (b \prec a) \to (a = b)$

Bắc cầu: $(a \prec b) \wedge (b \prec c) \to (a \prec c)$

Định nghĩa

Ví dụ. Quan hệ ước số “ | ”trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là ($\mathbf{Z}^+$, |) là poset

Phản xạ? Có, $x \mid x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu? Có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid c$ nghĩa là $c = jb$.
Khi đó $c = j(ka) = jka$: $a \mid c$

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.
Khi đó $a = jka$
Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

Ví dụ. (**Z**, |) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

3|-3, và -3|3,

nhưng 3 ≠ -3.

(P(S), $\subseteq$), ở đây P(S) là tập hợp các con của S, là một poset?

Có, là poset.

Phản xạ? Có, $A \subseteq A, \forall A \in P(S)$

Bắc cầu? Có $A \subseteq B, B \subseteq C$. Suy ra $A \subseteq C$?

Phản xứng? Có $A \subseteq B, B \subseteq A$. Suy ra $A = B$?