BÀI GIẢNG TÓM TẮT
MÔN ĐẠI SỐ A1
(GV: Trần Ngọc Hội – 2019)

CHƯƠNG 1

MA TRẬN VÀ
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Trong chương này, ký hiệu K dùng để chỉ trường số thực **R** hay trường số phức **C**.

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ KÝ HIỆU

1.1. Định nghĩa. Một ma trận loại $m \times n$ trên K là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong K có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in K$.

Ta gọi:

a_{ij}: hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A (hệ số này còn được ký hiệu bởi $[A]_{ij}$)

$(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$: dòng thứ i của ma trận A;

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$: cột thứ j của m trận A.

Ký hiệu: $M_{m\times n}(K)$ là tập hợp tất cả những ma trận loại $m\times n$ trên K.

1.2. Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(K)$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(K)$.

1.3. Định nghĩa. Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Ta nói A *bằng* B, ký hiệu A = B, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

1.4. Định nghĩa. (i) *Ma trận không* loại $m\times n$, ký hiệu $0_{m\times n}$ hay 0, là ma trận loại $m\times n$ mà tất cả các hệ số đều bằng 0.

(ii) Một *ma trận vuông cấp n* là một ma trận loại $n \times n$ (nghĩa là số dòng = số cột = n). Trong mỗi ma trận vuông cấp có một *đường chéo chính (*gọi tắt là đường chéo) gồm các hệ số a_{ii}, $1 \le i \le n$. Tập các ma trận vuông cấp n trên K được ký hiệu là $M_n(K)$.

(iii) Một *ma trận chéo* cấp n là một ma trận vuông cấp n mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(iv) *Ma trận đơn vị cấp n*, ký hiệu $\mathbf{I}_n$ hay $\mathbf{I}$, là ma trận chéo cấp n mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

nghĩa là $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ với δ_{ij} là ký hiệu Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & neu\ \ i = j \\ 0 & neu\ \ i \ne j \end{cases}$

(v) Một *ma trận tam giác trên* (t.ư. *ma trận tam giác dưới*) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (t.ư. phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. Như vậy,

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận tam giác trên $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \le j < i \le n$.

$B = (b_{ij})_{n \times n}$ là ma trận tam giác dưới $\Leftrightarrow b_{ij} = 0, \forall 1 \le i < j \le n$.

2. CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

2.1. Định nghĩa (phép lấy chuyển vị). Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận loại $m \times n$. Ta gọi *ma trận chuyển vị* của A, ký hiệu A^T, là ma trận loại $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng. Nghĩa là:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Như vậy, $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$.

2.2. Ví dụ. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ ta có $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

2.3. Định nghĩa (phép nhân vô hướng với ma trận). Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số thực $\alpha \in K$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A cho α, nghĩa là:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}.$$

Như vậy, $[\alpha A]_{ij} = \alpha [A]_{ij}$.

2.4. Ví dụ. $2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

2.5. Ký hiệu. $-A := (-1)A = (-a_{ij})_{m\times n}$

Từ định nghĩa, ta dễ dàng kiểm tra được các tính chất sau:

2.6. Tính chất. Với $A = (a_{ij})$ và $\alpha, \beta \in K$ ta có

(i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(iii) $0.A = 0$ và $1.A = A$.

2.7. Định nghĩa (phép cộng ma trận). Cho hai ma trận cùng loại $m\times n$: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $= (b_{ij})_{m\times n}$. Ta định nghĩa *tổng* hai ma trận A và B, ký hiệu A + B, là ma trận loại $m\times n$ mà các hệ số có được bằng cách lấy tổng của các hệ số tương ứng của A và B, nghĩa là:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Như vậy, $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$.

2.8. Ký hiệu. A – B := A + (–B) và gọi là *hiệu* của A và B.

2.9. Ví dụ. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng kiểm được các tính chất sau:

2.10. Tính chất. Với $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ và $\alpha, \beta \in K$ ta có

(i) A + B = B + A (tính *giao hoán*);

(ii) (A + B) + C = A + (B + C) (tính *kết hợp*);

(iii) $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;

(iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

(v) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

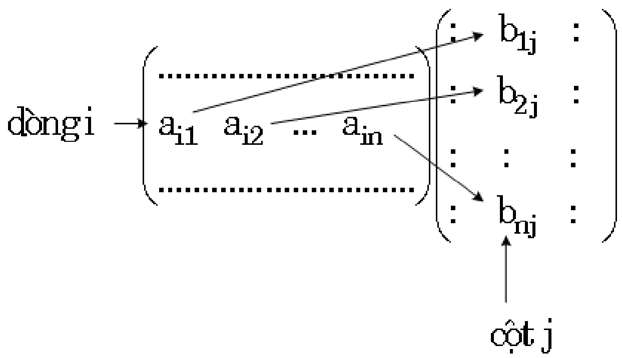
(viii) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

2.11. Định nghĩa (phép nhân ma trận). Cho hai ma trận A và B có tính chất: Số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B. Cụ thể, $A = (a_{ij})$ loại $m\times n$ và $B = (b_{ij})$ loại $n\times p$. Ta định nghĩa *tích* của hai ma trận A và B, ký hiệu AB, là ma trận C loại $m\times p$ định bởi:

- Về loại: C có loại $m\times p$.
- Về hệ số: C có hệ số dòng i, cột j được tính bởi công thức:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Nói cách khác, hệ số ở dòng i, cột j của AB có được bằng cách nhân các hệ số ở dòng i của ma trận A với các hệ số tương ứng ở cột j của ma trận B rồi lấy tổng của chúng:



2.12. Chú ý. Tích của hai ma trận chỉ tồn tại khi số cột của ma trận trước bằng số dòng của ma trận sau. Ta ghi nhớ kết quả về loại của ma trận tích thông qua ký hiệu hình thức: $(m\times n)(n\times p) = (m\times p)$.

2.13. Ví dụ. Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

nhưng AC và CB không xác định.

2.14. Tính chất. Với $A\in M_{m\times n}(K)$, $B, B_1, B_2\in M_{n\times p}(K)$, $C\in M_{p\times q}(K)$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(K)$ ta có

(i) $\mathbf{I}_m A = A$ và $A\mathbf{I}_n = A$. Đặc biệt, với $A \in M_n(K)$, ta có

$$\mathbf{I}_n A = A\mathbf{I}_n = A.$$

(ii) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ và $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. Đặc biệt, với $A \in M_n(K)$, ta có

$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$

(iii) $(AB)^T = B^T A^T$.

(iv) Phép nhân ma trận có tính kết hợp, nghĩa là

$$(AB)C = A(BC).$$

(v) Phép nhân ma trận có tính phân phối đối với phép cộng, nghĩa là

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2,$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

Chứng minh. Ta chứng minh các tính chất (i), (iii) và (iv). Việc chứng minh các tính chất còn lại dành cho độc giả.

(i) Với $A \in M_{m\times n}(\mathbf{K})$, các ma trận $\mathbf{I}_m A$ và $A\mathbf{I}_n$ đều có cùng loại với A. Hơn nữa, với mọi $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, ta có

$$[I_m A]_{ij} = \sum_{k=1}^{m}[I_m]_{ik}[A]_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}[A]_{kj} = [A]_{ij},$$

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\delta_{kj} = [A]_{ij}.$$

Suy ra $\mathbf{I}_m A = A = A\mathbf{I}_n$.

(iii) Với $A \in M_{m\times n}(\mathbf{K})$; $B \in M_{n\times p}(\mathbf{K})$, ta có:

- AB loại $m\times p$ nên $(AB)^T$ loại $p\times m$.
- B^T loại $p\times n$, A^T loại $n\times m$ nên $B^T A^T$ loại $p\times m$.

Vậy hai ma trận $(AB)^T$ và $B^T A^T$ có cùng loại. Với mọi $1 \le i \le p$, $1 \le j \le m$, ta có:

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{jk}[B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n}[A^T]_{kj}[B^T]_{ik} = \sum_{k=1}^{n}[B^T]_{ik}[A^T]_{kj} = [B^T A^T]_{ij}$$

Suy ra $(AB)^T = B^T A^T$.

(iv) Với $A \in M_{m\times n}(K)$; $B \in M_{n\times p}(K)$; $C \in M_{p\times q}(\mathbf{K})$, ta có:

- AB loại $m\times p$ nên (AB)C loại $m\times q$.
- BC loại $n\times q$ nên A(BC) loại $m\times q$.

Vậy hai ma trận (AB)C và A(BC) có cùng loại. Với mọi $1 \le i \le m$, $1 \le j \le q$, ta có:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{p}[AB]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{l=1}^{n}[A]_{il}[B]_{lk})[C]_{kj} = \sum_{l=1}^{n}[A]_{il}(\sum_{k=1}^{p}[B]_{lk}[C]_{kj})$$

$$= \sum_{l=1}^{n}[A]_{il}[BC]_{lj} = [A(BC)]_{ij}$$

Suy ra (AB)C = A(BC).

2.15. Chú ý. 1) Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường ta có $AB \neq BA$ (xem Ví dụ 2.13).

2) Nhiều tính chất quen thuộc của phép nhân giữa các số thực không còn đúng đối với phép nhân ma trận, chẳng hạn:

Với $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ta có $A^2 = 0$; AB = 0; AB = AC, nhưng A, B đều khác 0 và $B \neq C$.

2.16. Định nghĩa (luỹ thừa của ma trận vuông). Với $A \in M_{m\times n}(K)$ và k là số nguyên không âm, ta đặt

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{neu } k = 0 \\ \underbrace{A...A}_{k} & \text{neu } k > 0 \end{cases}$$

Vì phép nhân ma trận không giao hoán nên nói chung đối với ma trận ta không có các hằng đẳng thức tương tự như các hằng đẳng thức về số. Tuy nhiên ta dễ dàng chứng minh được kết quả sau:

2.17. Tính chất. Với A, B là các ma trận vuông cùng cấp thoả AB = BA thì với k nguyên dương ta có

$$A^k - B^k = (A-B)\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1}B^r,$$

$$(A+B)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r A^{k-r} B^r.$$

3. PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP – HẠNG CỦA MA TRẬN

3.1. Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng* (t.ư. *phép biến đổi sơ cấp trên cột*), viết tắt là BĐSCTD (t.ư BĐSCTC) trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

1) Loại 1: Đổi hai dòng (t.ư cột) cho nhau.

Ký hiệu : $d_i \leftrightarrow d_k$ (t.ư. $c_i \leftrightarrow c_k$) chỉ phép đổi hai dòng (t.ư. cột) i và k cho nhau.

2) Loại 2: Nhân một dòng cho một số khác 0.

Ký hiệu: $d_i := \alpha d_i$ (t.ư. $c_i := \alpha c_i$) chỉ phép nhân dòng (t.ư cột) thứ i cho số $\alpha \neq 0$.

3) *Loại 3:* Cộng vào một dòng (t.ư. cột) một bội của dòng (t.ư cột) khác.

Ký hiệu: $d_i := d_i + \beta d_k$ (t.ư. $c_i := c_i + \beta c_k$) chỉ phép cộng vào dòng (t.ư cột) thứ i bội β ($\beta \in \mathbf{C}$) lần của dòng (t.ư cột) $k \neq i$.

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ chỉ ma trận có từ A qua φ.

3.2. Định nghĩa. Cho A và B là hai ma trận cùng loại. Ta nói A *tương đương dòng* với B, ký hiệu A ~ B, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy

A ~ B $\Leftrightarrow$ Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sao cho:

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

3.3. Nhận xét. Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương, nghĩa là các tính chất sau được nghiệm đúng:

(i) A ~ A.

(ii) A ~ B $\Rightarrow$ B ~ A.

(iii) A ~ B và B ~ C $\Rightarrow$ A ~ C.

Tính chất (i) và (iii) là hiển nhiên. Tính chất (ii) được suy từ nhận xét nếu A' có từ A qua một phép BĐSCTD thì từ A' ta tìm lại được A qua phép BĐSCTD cùng loại. Thật vậy,

$$A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A' \quad \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A$$

$$A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \quad \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A$$

$$A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_k} A' \quad \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_k} A$$

3.4. Định nghĩa (Ma trận dạng bậc thang và ma trận dạng bậc thang rút gọn). Cho A = (a_{ij}) là một ma trận loại m×n trên K. Ta nói:

(i) A có *dạng bậc thang* nếu A có dạng sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1k_1} & \ldots & \ldots & a_{2k_2} & \ldots & \ldots & a_{2k_r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2k_2} & \ldots & \ldots & a_{2k_r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{rk_r} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ và $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{rk_r} \neq 0$, nghĩa là A thỏa hai tính chất sau:

1) Các dòng khác 0 luôn luôn ở trên các dòng bằng 0 của A.

2) Trên hai dòng khác 0 của A, hệ số khác 0 đầu tiên của dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa hệ số khác 0 đầu tiên của dòng trên.

(ii) A có dạng *bậc thang rút gọn* (hay có dạng *rút gọn theo dòng từng bậc*) nếu tính chất sau được thỏa:

1) A có dạng bậc thang.

2) Các hệ số khác 0 đầu tiên trên các dòng khác 0 của A đều bằng 1.

3) Trên các cột có chứa các số 1 là các hệ số khác không đầu tiên trên các dòng khác 0, tất cả các hệ số khác đều bằng 0, nghĩa là A có dạng như trong (i) và $a_{1k_1} = a_{2k_2} = ... = a_{rk_r} = 1$, hơn nữa, ngoại trừ các hệ số 1 này, trên các cột $k_1, k_2,.., k_r$ tất cả các hệ số còn lại đều bằng 0.

3.5. Ví dụ. Xét các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta thấy:

- A có dạng bậc thang nhưng B không có dạng bậc thang.
- C có dạng bậc thang rút gọn nhưng D không có dạng bậc thang rút gọn (D chỉ có dạng bậc thang).

3.6. Thuật toán tìm ma trận dạng bậc thang và ma trận bậc thang rút gọn của ma trận A = $(a_{ij})_{m\times n}$

Qua các bước sau, ma trận A sẽ được biến đổi thành ma trận dạng bậc thang tương đương dòng với ma trận A:

Bước 1: i:=1, j:=1.

Bước 2: Nếu i> m hoặc j > n thì kết thúc.

Bước 3: Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang Bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BĐSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \quad k > i.$$

Sau đó i := i+1, j := j+1 và quay về Bước 2.

Bước 4: Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi k > i thì j := j + 1 và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một k > i nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BĐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo số dòng m của ma trận A.

Với m = 1, khẳng định trên là đúng vì A đã có dạng bậc thang.

Giả sử khẳng định trên đúng với mọi ma trận loại m×n có số dòng $m \le p$. Xét A là ma trận loại m×n có số dòng $m = p + 1$.

Gọi j la cột khác 0 đầu tiên của A. Khi đó, bằng một phép BĐSCTD loại 1 (nếu cần) ở Bước 4 ta có thể giả sử $a_{1j} \neq 0$. Tiếp theo, thông qua các phép BĐSCTD trong Bước 3, ta đưa A về ma trận B có cột khác 0 đầu tiên là cột j và $b_{1j} \neq 0$ còn $b_{ij} = 0$ với mọi $i > 1$. Bây giờ gọi A′ là ma trận loại $(m - 1)\times(n - 1)$ có từ B bằng cách xoá dòng 1 cột j. Ma trận A′ có số dòng là $m - 1 = p$ nên theo giả thiết qui nạp, qua các bước trên, ma trận A′ biến thành ma trận dạng bậc thang. Kết hợp với các thao tác đã thực hiện ta thấy qua các bước trên, ma trận A cũng biến thành ma trận dạng bậc thang.

Chú ý. Để đưa ma trận A về dạng bậc thang rút gọn, ở Bước 3 ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i,\ 1 \le k \le n,\ k \neq i$$

$$d_i := \frac{1}{a_{ij}} d_i$$

3.7. Định lý. Cho A là một ma trận loại m×n trên K. Khi đó tồn tại duy nhất một ma trận bậc thang rút gọn R_A sao cho A ~ R. Ta gọi R là *ma trận dạng bậc thang rút gọn* của A và số lượng dòng khác 0 của R là *hạng* của ma trận A, ký hiệu r(A) hay rank(A).

Chứng minh. Sự tồn tại của ma trận bậc thang rút gọn R_A tương đương dòng với A được khẳng định qua Thuật toán 3.6. Tính duy nhất của R_A sẽ được chỉ ra trong §4 (Định lý 4.15).

***3.8.* Nhận xét.** 1) Nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận loại m×n thì $r(A) \le \min\{m, n\}$.

2) Hạng của ma trận A cũng bằng số lượng dòng khác 0 của bất kỳ ma trận dạng bậc thang nào tương đương dòng với A (không nhất thiết rút gọn).

3.9. Ví dụ. Tìm một ma trận dạng bậc thang R tương đương dòng với ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Từ đó xác định hạng của A.

Giải.

$$A \xrightarrow[d_4 := d_4 - 6d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{3}{2} d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Ta có A ~ R và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là r(A) = 3.

3.10. Ví dụ. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$A \xrightarrow[\substack{d_3 := d_3 - 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 6d_1}]{d_2 := d_2 - d_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2 := -\frac{1}{2}d_2}]{\substack{d_1 := d_1 + \frac{1}{2}d_2 \\ d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3}]{\substack{d_1 := d_1 - \frac{1}{2}d_3 \\ d_2 := d_2 - \frac{5}{2}d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Ta thấy R có dạng bậc thang rút gọn và A ~ R. Suy ra R chímh là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A.

4. MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

4.1. Định nghĩa. Cho A là một ma trận A vuông cấp n. Ta nói

(i) A *khả nghịch phải (*t.ư *khả nghịch trái)* nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho AB = $\mathbf{I}_n$ (t.ư. BA = $\mathbf{I}_n$).

(ii) A *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho AB = BA = $\mathbf{I}_n$.

4.2. Nhận xét. 1) Nếu A khả nghịch thì ma trận B vuông cấp n thoả AB = BA = $\mathbf{I}_n$ là duy nhất và được gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, ký hiệu A^{-1}.

Thật vậy, giả sử C cũng là ma trận vuông cấp n thoả AC = CA = $\mathbf{I}_n$. Khi đó C = C$\mathbf{I}_n$ = C(AB) = (CA)B = $\mathbf{I}_n$B = B. Điều này chứng tỏ ma trận B trong Định nghĩa 4.1 (ii) là duy nhất.

2) A khả nghịch khi và chỉ khi A vừa khả nghịch phải vừa khả nghịch trái. Thật vậy, chiều thuận là hiển nhiên. Đảo lại, giả sử A khả nghịch phải và khả nghịch trái, nghĩa là tồn tại các ma

trận B, B′ vuông cấp n thoả AB = I_n và B′A= I_n. Khi đó B′ = B′$\mathbf{I}_n$ = B′(AB) = (B′A)B = $\mathbf{I}_n$B = B nên AB = BA = I_n, nghĩa là A khả nghịch.

4.3. Nhận xét. 1) Nếu ma trận A có một dòng hay một cột bằng 0 thì A không khả nghịch. Thật vậy, nếu A có dòng thứ i bằng 0 thì ma trận AB cũng có dòng thứ i bằng 0 nên AB $\neq I_n$. Tương tự, nếu A có cột thứ j bằng 0 thì ma trận BA cũng có cột thứ j bằng 0 nên BA $\neq I_n$.

2) Ma trận đơn vị **I** khả nghịch và $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$.

3) Nếu ma trận A khả nghịch thì ma trận nghịch đảo A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.

4.4. Mệnh đề. (i) Nếu ma trận A khả nghịch và $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ thì ma trận αA cũng khả nghịch và

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \quad .$$

(ii) Nếu ma trận A khả nghịch thì ma trận A^T cũng khả nghịch và

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

(iii) Nếu A, B là hai ma trận khả nghịch có cùng cấp thì ma trận tích AB cũng khả nghịch và:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} .$$

Tổng quát hơn, nếu $A_1,\ldots, A_k$ là các ma trận khả nghịch có cùng cấp thì ma trận tích $A_1 \ldots A_k$ cũng khả nghịch và $(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

Chứng minh. (i) Ta có

$$\begin{cases} (\alpha A)(\dfrac{1}{\alpha}A^{-1}) = (\alpha\dfrac{1}{\alpha})(AA^{-1}) = 1.I_n = I_n \\ (\dfrac{1}{\alpha}A^{-1})(\alpha A) = (\dfrac{1}{\alpha}\alpha)(A^{-1}A) = 1.I_n = I_n \end{cases}$$

Suy ra $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.

(ii) Ta có

$$\begin{cases} (A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n \\ (A^{-1})^T(A^T) = (AA^{-1})^T = (I_n)^T = I_n \end{cases}$$

Suy ra $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(iii) Ta có

$$\begin{cases} (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n \end{cases}$$

Suy ra $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Trong trường hợp tổng quát, ta dễ dàng chứng minh được bằng qui nạp theo k đẳng thức $(A_1...A_k)^{-1} = A_k^{-1}...A_1^{-1}$.

4.5. Định nghĩa. Một *ma trận sơ cấp* cấp n là ma trận có được từ ma trận đơn vị $\mathbf{I}_n$ qua một phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

4.6. Ví dụ. Các ma trận S_1, S_2, S_3 sau đây là các ma trận sơ cấp:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_1$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 5d_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 := d_3 + 4d_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

4.7. Bổ đề. Cho $A \in M_{m\times n}(K)$ và φ là một phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Khi đó $\varphi(A) = \varphi(\mathbf{I}_m)A$.

Chứng minh. Gọi E_{ij} là ma trận có hệ số ở dòng i, cột j bằng 1 còn tất cả các hệ số khác đều bằng 0. Từ định nghĩa của phép nhân ma trận ta suy ra dòng i của $E_{ij}A$ bằng dòng j của A còn tất cả các dòng khác đều bằng 0.

1) Trường hợp φ thuộc loại 1: $d_i \leftrightarrow d_k$. Khi đó

$$\varphi(\mathbf{I}_m) = I_m - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki}.$$

Do đó $\varphi(\mathbf{I}_m)A = (I_m - E_{ii} - E_{kk} + E_{ik} + E_{ki})A = A - E_{ii}A - E_{kk}A + E_{ik}A + E_{ki}A$. Từ đây ta suy ra $\varphi(\mathbf{I}_m)A$ có từ A bằng cách hoán đổi hai dòng i và k cho nhau, nghĩa là $\varphi(\mathbf{I}_m)A = \varphi(A)$.

2) Trường hợp φ thuộc loại 2: $d_i := \alpha d_i$. Khi đó

$$\varphi(\mathbf{I}_m) = I_m + (\alpha - 1) E_{ii}.$$

Do đó $\varphi(\mathbf{I}_m)A = A + (\alpha - 1) E_{ii}A$. Từ đây ta suy ra $\varphi(\mathbf{I}_m)A$ có từ A bằng cách nhân dòng i cho α, nghĩa là $\varphi(\mathbf{I}_m)A = \varphi(A)$.

3) Trường hợp φ thuộc loại 3: $d_i := d_i + \beta d_k$. Khi đó

$$\varphi(\mathbf{I}_m) = I_m + \beta E_{ik}.$$

Do đó $\varphi(\mathbf{I}_m)A = A + \beta E_{ik}A$. Từ đây ta suy ra $\varphi(\mathbf{I}_m)A$ có từ A bằng cách thay dòng i bằng (dòng i) + β(dòng k), nghĩa là $\varphi(\mathbf{I}_m)A = \varphi(A)$.

Đẳng thức $\varphi(A) = \varphi(\mathbf{I}_m)A$ đã được chứng minh cho mọi phép BĐSCTD φ.

4.8. Nhận xét. 1) Với $A \in M_{m\times n}(\mathbf{C})$, $A\varphi(\mathbf{I}_n)$ là ma trận có từ A qua các phép biến đổi sơ cấp trên cột. Cụ thể như sau:

- Nếu φ = "$d_i \leftrightarrow d_k$" thì $A\varphi(\mathbf{I}_n)$ là ma trận có được từ A qua phép biến đổi "$c_i \leftrightarrow c_k$".

- Nếu φ = “d_i: = αd_i” thì $A\varphi(\mathbf{I}_n)$ là ma trận có được từ A qua phép biến đổi “c_i: = αc_i”.
- Nếu φ = “d_i : = $d_i + \beta d_k$” thì $A\varphi(\mathbf{I}_n)$ là ma trận có được từ A qua phép biến đổi “c_k : = $c_k + \beta c_i$”.

2) Từ các kết quả trên ta suy ra khi thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên dòng đối với một ma trận tức là ta nhân bên trái của ma trận đó cho một ma trận sơ cấp. Tương tự, khi thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên cột đối với một ma trận tức là ta nhân bên phải của ma trận đó cho một ma trận sơ cấp.

4.9. Hệ quả. Hai ma trận A, B $\in M_{m\times n}(K)$ tương đương dòng khi và chỉ khi tồn tại các ma trận sơ cấp $S_1,\ldots, S_k$ sao $B = S_1\ldots S_kA$.

4.10. Mệnh đề. Mọi ma trận sơ cấp đều khả nghịch và có ma trận nghịch đảo cũng là một ma trận sơ cấp.

Chứng minh. Giả sử φ là một phép BĐSCTD. Đặt $J_m = \varphi(I_m)$. Khi đó tồn tại một phép BĐSCTD ψ cùng loại với φ biến J_m thành $\mathbf{I}_m = \psi(J_m)$. Theo Bổ đề 4.7 ta có

$$\mathbf{I}_m = \psi(J_m) = \psi(I_m)J_m = \psi(I_m)\varphi(I_m).$$

Do đó $\varphi(I_m)$ khả nghịch trái và $\psi(I_m)$ khả nghịch phải. Áp dụng kết quả này cho phép BĐSCTD ψ ta suy ra $\psi(I_m)$ khả nghịch trái và $\varphi(I_m)$ khả nghịch phải. Từ đó ta có $\varphi(I_m)$ khả nghịch.

4.11. Định lý. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Các khẳng định sau tương đương:

(i) A khả nghịch phải.

(ii) A khả nghịch trái.

(iii) A khả nghịch.

(iv) A có hạng r(A) = n.

(v) A ~ $\mathbf{I}_n$.

(vi) A là tích của một số hữu hạn các ma trận sơ cấp.

(vii) Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị $\mathbf{I}_n$.

Hơn nữa, khi đó cũng qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị $\mathbf{I}_n$ sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}, nghĩa là:

Nếu $A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$

thì $I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}$.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (iv) Gọi R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A. Theo Hệ quả 4.3, tồn tại các ma trận sơ cấp $S_1,\ldots, S_k$ sao $R_A = S_1\ldots S_kA$. Vì A khả nghịch phải còn các ma trận sơ cấp đều khả nghịch theo Mệnh đề 4.6 nên R_A khả nghịch phải. Suy ra R_A không có dòng 0, nghĩa là R_A có n dòng khác 0. Suy ra R(A) = n.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Vì r(A) = n nên ma trận dạng bậc thang rút gọn R_A của A không có dòng 0. Chú ý rằng một ma trận vuông, dạng bậc thang rút gọn, không có dòng 0, phải là ma trận đơn vị. Do đó $R_A = \mathbf{I}_n$, nghĩa là A ~ $\mathbf{I}_n$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Từ giả thiết và từ Nhận xét 4.8 ta suy ra tồn tại các ma trận sơ cấp $S_1,\dots, S_k$ sao $\mathbf{I}_n = R_A = S_1\dots S_kA$. Từ đây, theo Mệnh đề 4.10 $A = S_k^{-1}\dots S_1^{-1}$ là tích các ma trận sơ cấp.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Giả sử $A = S_1\dots S_k$ là tích các ma trận sơ cấp. Khi đó $\mathbf{I}_n = S_k^{-1}\dots S_1^{-1}A$. Theo Mệnh đề 4.10 $S_1^{-1},\dots, S_k^{-1}$ cũng là các ma trận sơ cấp nên tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sao cho $S_1^{-1}= \varphi_1(\mathbf{I}_n),\dots, S_k^{-1} = \varphi_k(\mathbf{I}_n)$. Khi đó qua $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ma trận A biến thành

$$\varphi_k(\mathbf{I}_n)\dots\varphi_1(\mathbf{I}_n)A = S_k^{-1}\dots S_1^{-1}A = \mathbf{I}_n$$

và qua $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ma trận $\mathbf{I}_n$ biến thành

$$\varphi_k(\mathbf{I}_n)\dots\varphi_1(\mathbf{I}_n)\mathbf{I}_n = S_k^{-1}\dots S_1^{-1}\mathbf{I}_n = S_k^{-1}\dots S_1^{-1} = A^{-1}.$$

(vii) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị $\mathbf{I}_n$. Khi đó từ Nhận xét 4.8 ta suy ra A là tích các ma trận sơ cấp nên theo Mệnh đề 4.10 và Mệnh đề 4.4 A khả nghịch.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Hiển nhiên.

Cuối cùng ta chứng minh (ii) $\Leftrightarrow$ (iii):

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử A khả nghịch trái. Khi đó tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho $BA = \mathbf{I}_n$. Vậy B khả nghịch phải nên theo chứng minh trên B khả nghịch. Suy ra $A = B^{-1}$ cũng khả nghịch.

4.12. Chú ý. Trong thực hành, để xét tính khả nghịch của ma trận A vuông cấp n và tìm A^{-1} (nếu có), ta tiến hành như sau: Xếp $\mathbf{I}_n$ bên phải ma trận A: $(A \mid \mathbf{I}_n)$ và dùng các phép BĐSCTD để biến đổi ma trận này theo hướng đưa A về dạng bậc thang rút gọn R:

$$(A \mid I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1 \mid B_1) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p \mid B_p) \longrightarrow \dots.$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.

- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(\mathbf{I}_n \mid B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

4.13. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Giải. a) $(A\,|\,I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_3 := d_3 - d_2]{d_1 := d_1 - 2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_3]{\substack{d_1 := d_1 - 7d_3 \\ d_2 := d_2 + 2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_3 := d_3 - d_4]{\substack{d_1 := d_1 + d_4 \\ d_2 := d_2 - d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4\,|\,B)$

Vì $(A\,|\,I_4) \sim (I_4\,|\,B)$ nên A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[d_4 := d_4 - 3d_2]{d_3 := d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (R_1\,|\,B_1)$

Vậy A ~ R_1 và R_1 có một dòng bằng 0 nên A cũng không khả nghịch.

4.14. Hệ quả. Hai ma trận A, B $\in M_{m\times n}(K)$ tương đương dòng khi và chỉ khi tồn tại ma trận P vuông cấp n, khả nghịch sao B = PA.

Chứng minh. Suy từ Định lý 4.11 và Hệ quả 4.9.

4.15. Định lý. Ma trận dạng bậc thang rút gọn của một ma trận là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử R và S là hai ma trận dạng bậc thang rút gọn tương đương dòng với ma trận A. Khi đó $R \sim S$ nên tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho R = PS. Gọi $R^{(j)}$ và $S^{(j)}$ lần lượt là các cột thứ j của R và S, ta có $R^{(j)} = P.S^{(j)}$. Ta chứng minh R = S bằng qui nạp theo số cột n.

Với n = 1, hiển nhiên R = S.

Xét n > 1. Vì R, S đều có dạng bậc thang rút gọn và $R^{(1)} = P.S^{(1)}$ nên $R^{(1)} = S^{(1)}$. Gọi R′ và S′ lần lượt là các ma trận có được từ R và S bằng cách bỏ đi cột 1.

Nếu $R^{(1)} = S^{(1)} = 0$ thì R′ và S′ là các ma trận dạng bậc thang rút gọn tương đương dòng nên theo giả thiết qui nạp R′ = S′, suy ra R = S.

Xét $R^{(1)} = S^{(1)} \neq 0$. Khi đó

$$R^{(1)} = S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nên từ đẳng thức $R^{(1)} = P.S^{(1)}$ ta suy ra

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gọi P_1, R_1 và S_1 lần lượt là các ma trận có được từ P, R và S bằng cách bỏ đi dòng 1 và cột 1. Ta có P_1 khả nghịch, R_1 và S_1 có dạng bậc thang rút gọn, hơn nữa $R_1 = P_1S_1$ nên $R_1 = S_1$ (theo giả thiết qui nạp). Với j > 1 nếu cột $S^{(j)}$ có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(trong đó 1 là hệ số khác 0 đầu tiên trên một dòng nào đó) thì cột $R^{(j)}$ cũng có dạng (*) và do đó $R^{(j)} = S^{(j)}$ vì khi bỏ hệ số đầu tiên thì chúng trở thành các cột tương ứng của R_1 và S_1. Trong trường hợp tổng quát, từ định nghĩa của ma trận dạng bậc thang rút gọn S, ta có thể biểu diễn $S^{(j)}$ dưới dạng

$$S^{(j)} = \beta_1 S^{(j_1)} + \ldots + \beta_k S^{(j_k)},$$

trong đó các cột $S^{(j_r)}$ đều có dạng (*), do đó theo chứng minh trên ta có $R^{(j_1)} = S^{(j_1)}, \ldots, R^{(j_k)} = S^{(j_k)}$. Suy ra

$$R^{(j)} = PS^{(j)} = P(\beta_1 S^{(j_1)} + \ldots + \beta_k S^{(j_k)}) = P(\beta_1 R^{(j_1)} + \ldots + \beta_k R^{(j_k)})$$
$$= \beta_1 PR^{(j_1)} + \ldots + \beta_k PR^{(j_k)} = \beta_1 S^{(j_1)} + \ldots + \beta_k S^{(j_k)} = S^{(j)}$$

Vậy $R^{(j)} = S^{(j)}$ với mọi j và do đó R = S.

4.16. Định lý. (i) Với A là ma trận bất kỳ, $r(A^T) = r(A)$.

(ii) Với $A \in M_{m\times n}(K)$; $B \in M_{n\times p}(K)$, $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$.

(iii) Với $A \in M_{m\times n}(K)$ và các ma trận khả nghịch $P \in M_m(K)$, $Q \in M_n(K)$, $r(PAQ) = r(A)$.

(iv) Ma trận A có hạng bằng r khi và chỉ khi tồn tại các ma trận P, Q khả nghịch sao cho ma trận PAQ có dạng:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Chứng minh. (iii) Vì AQ và PAQ tương đương dòng nên có cùng hạng. Ta chỉ cần chứng minh A và AQ có cùng hạng. Gọi R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A. Khi đó tồn tại ma trận P_1 khả nghịch sao cho $P_1A = R_A$, do đó ma trận $P_1AQ = R_AQ$ có số lượng dòng khác 0 không vượt quá số lượng dòng khác 0 của R_A. Suy ra $r(AQ) \le r(A)$. Mặt khác $A = (AQ)Q^{-1}$ nên chứng minh trên cũng cho ta $r(A) \le r(AQ)$.

(iv) Chiều đảo được suy từ (iii) vì ma trận dạng (*) có hạng bằng r. Ta chứng minh chiều thuận. Giả sử A có hạng bằng r. Gọi R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A. Khi đó R_A có r dòng khác 0 và tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $PA = R_A$. Từ đây ta dùng một số phép BĐSCTC để biến R_A thành ma trận có dạng (*), nói cách khác tồn tại ma trận Q khả nghịch sao cho R_AQ có dạng (*), nghĩa là PAQ có dạng (*).

(i) Đặt $r = r(A)$. Theo (iv) tồn tại các ma trận khả nghịch P, Q sao cho PAQ D với D như trong (*). Khi đó ma trận $D = D^T = (PAQ)^T = (Q^T)A^T(P^T)$ nên do tính khả nghịch của các ma trận P^T và Q^T, lại theo (iv), ma trận A^T có hạng bằng r.

(ii) Lý luận trong chứng minh (iii) cho ta $r(AB) \le r(A)$. Hơn nữa, theo (i), ta có $r(AB) = r((AB)^T) = r(B^TA^T) \le r(B^T) = r(B)$.

5. PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN

5.1. Định lý. Cho các ma trận $A \in M_n(K)$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(K)$, $C \in M_{m\times n}(K)$. Xét các phương trình ma trận $AX = B$ và $YA = C$. Khi đó –

(i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

(ii) $YA = C \Leftrightarrow Y = CA^{-1}$.

Chứng minh.

(i) $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

(ii) $YA = C \Leftrightarrow (YA)A^{-1} = CA^{-1} \Leftrightarrow Y(AA^{-1}) = CA^{-1} \Leftrightarrow YI_n = CA^{-1} \Leftrightarrow Y = CA^{-1}$.

5.2. Chú ý. Trong định lý trên, nếu ma trận B có số dòng khác n thì hiển nhiên phương trình AX = B vô nghiệm. Tương tự, nếu ma trận C có số cột khác n thì phương trình YA = C vô nghiệm.

5.3. Ví dụ. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Chứng tỏ A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa AXA = AB.

c) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA^2 = ABA^2$.

Giải. a) Tương tự như trong Ví dụ 4.13 ta tìm được

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 47 & 81 & -50 & -29 \\ 3 & 5 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 29 & 50 & -31 & -18 \end{pmatrix}$$

b) $AXA = AB \Leftrightarrow XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 44 & 76 & -47 & -27 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -27 & -47 & 29 & 17 \\ 29 & 59 & -31 & -18 \end{pmatrix}$.

c) $A^2XA^2 = ABA^2 \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 47 & 34 & -131 & 21 \\ 3 & 2 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 29 & 21 & -81 & 13 \end{pmatrix}$.

5.4. Hệ quả. Cho các ma trận $A \in M_n(K)$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(K)$, $C \in M_{m\times n}(K)$. Khi đó

(i) Nếu AB = 0 thì B = 0.

(ii) Nếu CA = 0 thì C = 0.

Chứng minh. (i) Nếu AB = 0 thì B là nghiệm của phương trình ma trận AX = 0. Theo Định lý 5.1 phương trình trên chỉ có nghiệm X = 0 nên B = 0.

(ii) Nếu CA = 0 thì C là nghiệm của phương trình ma trận YA = 0. Theo Định lý 5.1 phương trình trên chỉ có nghiệm Y = 0 nên C = 0.

6. KHÁI NIỆM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

6.1. Định nghĩa. 1) Một hệ phương trình tuyến tính trên K gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

trong đó

- a_{ij}, $b_i \in$ K **:** Các ẩn số;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: Các ẩn số nhận giá trị trong K.
- Mỗi bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ thỏa tất cả các phương trình trong (1) được gọi là một *nghiệm* của (1). Khi hệ có nghiệm ta còn nói hệ đó *tương thích*.

2) Ma trận

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số ở vế trái* của hệ (1).

Ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số ở vế phải* của hệ (1).

Ma trận

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ (1).

Khi đó, hệ (1) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$AX = B \qquad (2)$$

trong đó

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$: Ma trận cột các ẩn số

6.2. Định nghĩa. Với các ký hiệu trong Định nghĩa 6.1, ta nói

1) Hệ (1) và (2) là hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất* nếu B = 0, nghĩa là $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

2) Hệ (1) và (2) là hệ phương trình tuyến tính *không thuần nhất* nếu $B \neq 0$, nghĩa là tồn tại $1 \leq j \leq m$ sao cho $b_j \neq 0$.

6.3. Nhận xét. Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bất kỳ luôn luôn có nghiệm vì nó nhận (0,0,...,0) làm một nghiệm, gọi là *nghiệm tầm thường*. Điều này không đúng đối với các hệ không thuần nhất.

7. PHƯƠNG PHÁP GAUSS GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Trong phần này ta sẽ đề cập đến phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính:

$$AX = B$$

trong đó $A = (a_{ij})_{m\times n}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

7.1. Nhận xét. Ta đã biết khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

1) Hóan đổi hai phương trình cho nhau.

2) Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.

3) Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.

Tương ứng với các phép biến đổi trên là các phép BĐSCTD đối với ma trận bổ sung. Nhận xét trên tương ứng với kết quả sau:

7.2. Định lý. (i) Nếu $A \sim R$ thì $AX = 0 \Leftrightarrow RX = 0$.

(ii) Nếu $(A \mid B) \sim (R \mid B')$ thì $AX = B \Leftrightarrow RX = B'$.

Chứng minh. (i) Nếu $A \sim R$ thì theo Hệ quả 4.14 tồn tại ma trận P vuông cấp m khả nghịch sao cho $A = PR$. Khi đó

$$AX = 0 \Leftrightarrow PRX = 0 \Leftrightarrow RX = 0.$$

(ii) Nếu $(A \mid B) \sim (R \mid B')$ thì theo Hệ quả 4.14 tồn tại ma trận P vuông cấp m khả nghịch sao cho $(A \mid B) = P(R \mid B')$, nghĩa là $A = PR$ và $B = PB'$. Khi đó

$$AX = B \Leftrightarrow PRX = PB' \Leftrightarrow RX = B'.$$

Nhận xét rằng nếu ma trận A có dạng bậc thang thì việc giải hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ rất đơn giản vì khi đó ta chỉ cần lần lượt tính các ẩn dựa vào các phương trình từ phía dưới lên. Từ nhận xét này và từ Định lý 7.2 ta tìm được phương pháp Gauss để giải các hệ phương trình tuyến tính như sau:

7.3. Phương pháp Gauss

Bước 1: Viết ma trận bổ sung $(A \mid B)$ của hệ (sau khi viết các ẩn theo một thứ tự nào đó).

Bước 2: Dùng các phép BĐSCTD biến đổi ma trận $(A \mid B)$ cho đến khi A biến thành ma trận dạng bậc thang R, nghĩa là

$$(A \mid B) \to \ldots \to (R \mid B'),$$

trong đó R có dạng bậc thang.

Bước 3: Viết lại hệ phương trình tuyến tính $RX = B'$ ứng với ma trận bổ sung $(R \mid B')$, sau đó giải hệ này bằng cách lần lượt tính các ẩn dựa vào các phương trình từ phía dưới lên. Nghiệm của hệ này chính là nghiệm của hệ đã cho.

7.4. Phương pháp Gauss–Jordan. Tương tự như phương pháp Gauss nhưng ở Bước 2 ta biến đổi ma trận $(A \mid B)$ cho đến khi A biến thành ma trận dạng bậc thang rút gọn (khi đó việc tính các ẩn ở Bước 3 sẽ đơn giản hơn rất nhiều).

7.5. Nhận xét. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$, theo Định lý 7.2, ở Bước 2 ta chỉ cần biến đổi ma trận A thay vì $(A \mid 0)$.

Định lý sau đây mô tả tập nghiệm của một hệ hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

7.6. Định lý (Kronecker – Capelli). Xét hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ gồm m phương trình, n ẩn số. Đặt $r_1 = r(A)$ và $r_2 = r(A|B)$. Khi đó

(i) Nếu $r_1 < r_2$ thì hệ $AX = B$ vô nghiệm.

(ii) Nếu $r_1 = r_2 = n$ thì hệ $AX = B$ có duy nhất một nghiệm.

(iii) Nếu $r_1 = r_2 < n$ thì $AX = B$ có vô số nghiệm với bậc tự do là $n-r_1$, nghĩa là có $n-r_1$ ẩn có thể nhận bất cứ các giá trị nào cho trước trong K, gọi là $n-r_1$ *ẩn tự do*, và r_1 ẩn còn lại được tính qua các ẩn tự do trên.

7.7. Nhận xét. 1) Vì ma trận bổ sung $(A|B)$ có từ A bằng cách ghép thêm cột B nên $r_1 \leq r_2 \leq 1+ r_1$. Do đó điều kiện $r_1 < r_2$ tương đương với $r_2 = 1+ r_1$.

2) Có nhiều cách chọn ẩn tự do, nhưng thông thường, ta chọn các ẩn tự do là các ẩn không đứng đầu trong các phương trình của hệ rút gọn $RX = B'$ sau cùng (vì khi đó ta có thể dễ dàng tìm được các ẩn còn lại bằng cách chuyển các ẩn tự do sang vế phải).

3) Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$, trường hợp (i) không xảy ra vì khi đó ma trận A và ma trận bổ sung $(A|0)$ luôn có cùng hạng.

Chứng minh. Gọi $(R \mid B')$ là ma trận dạng bậc thang của $(A \mid B)$. Khi đó $(A \mid B) \sim (R \mid B')$ nên theo Định lý 7.2 hệ đã cho tương đương với hệ $RX = B'$. Theo cách đặt ta thấy R có r_1 dòng khác 0 còn $(R \mid B')$ có r_2 dòng khác 0.

(i) Nếu $r_1 < r_2$ thì trong hệ $RX = B'$ phương trình thứ r_2 có dạng

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b'_{r_2} \quad (b'_{r_2} \neq 0)$$

nên hệ vô nghiệm.

(ii) Giả sử $r_1 = r_2 = n$. Khi đó các dòng k của ma trận $(R \mid B')$ với $k > n$ đều bằng 0, hơn nữa n dòng đầu của ma trận R tạo thành ma trận R_1 vuông cấp n khả nghịch và hệ $RX = B'$ tương đương với hệ $R_1X = B_1$, trong đó B_1 có từ B bằng cách xoá $m - n$ hệ số 0 sau cùng. Vì R_1 khả nghịch nên hệ trên có duy nhất một nghiệm $X = R_1^{-1}B_1$.

(iii) Giả sử $r_1 = r_2 < n$. Khi đó bằng cách đánh số lại các ẩn (nếu cần) ta có thể giả sử hệ $RX = B'$ có dạng

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r_1}x_{r_1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{r_1r_1}x_{r_1} + \ldots + a'_{r_1n}x_n = b'_{r_1} \end{cases} \quad (a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{r_1r_1} \neq 0)$$

Bằng cách cho các ẩn $x_{r_1+1}, \ldots, x_n$ nhận các giá trị tuỳ ý, dựa vào các phương trình từ phía dưới lên trong hệ trên ta tính được các ẩn $x_{r_1}, \ldots, x_2, x_1$ theo các ẩn tự do trên.

Sau đây là các ví dụ sử dụng phương pháp Gauss và minh hoạ cho Định lý Kronecker–Capelli.

7.8. Ví dụ. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau trong **R**:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$

Giải. a) Ta viết lại hệ phương trình theo thứ tự của các ẩn:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

Viết ma trận bổ sung $(A \mid B)$ và biến đổi bằng các phép BĐSCTD ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 := d_2 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 + 5d_2]{d_3 := d_3 + 4d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3 := \frac{1}{10}d_3]{d_3 \leftrightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{d_4 := d_4 - 8d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) = (R|B')$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ \qquad x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\quad 2x_4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Suy ra hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 5, -3).$$

b) Ta viết ma trận bổ sung của hệ đã cho và biến đổi bằng các phép BĐSCTD:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 2d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 := d_4 + d_2]{d_3 := d_3 + d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, ta tính được:

$$\begin{cases} x_2 = -2 + 10x_3 - 17x_4 = -2 + 10\alpha - 17\beta \\ x_1 = 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 5 - 17\alpha + 29\beta \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 17\alpha + 29\beta, -2 + 10\alpha - 17\beta,\ \alpha,\ \beta)$$

với $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tùy ý.

c) Ta viết ma trận bổ sung của hệ đã cho và biến đổi bằng các phép BĐSCTD:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 3d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 3d_1 \\ d_3 := d_3 + 2d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 + 2d_2]{d_3 := d_3 + 3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ \quad - 3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9 \\ \qquad\qquad 10x_3 - 20x_4 = 18 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 2 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó hệ đã cho ban đầu cũng vô nghiệm.

7.9. Ví dụ. Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số $m \in \mathbf{R}$:

a) $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2 \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4 \end{cases}$

Giải. a) Viết ma trận bổ sung $(A \mid B)$ và biến đổi bằng các phép BĐSCTD ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right) \xrightarrow{d_1 := d_1 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 := d_4 - 13d_1]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m-13 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 4d_2]{d_3 := d_3 - d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right) = (R|B')$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \qquad\qquad -x_3 - x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 2m - 4 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta biện luận như sau:

1) $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: Khi đó hệ (1) vô nghiệm nên hệ đã cho cũng vô nghiệm.

2) $m = 2$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \qquad\qquad - x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \qquad (2)$$

Chọn $x_4 = \alpha$ ta tính được:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - \alpha \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14\alpha \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21\alpha \end{cases}$$

Vậy khi m = 2, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21\alpha, -1 + 14\alpha, 1 - \alpha\ ,\ \alpha)$$

với $\alpha \in \mathbf{R}$ tùy ý.

b) Viết ma trận bổ sung (A | B) và biến đổi bằng các phép BĐSCTD ta có:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2-6m+4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 := d_4 - 4d_1]{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2-6m \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4 := d_4 + d_2]{d_3 := d_3 + 2d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2-6m+1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right) = (R|B')$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = m + 1 \\ (m-7)x_4 = m^2 - 7m \end{cases} \qquad (1)$$

Ta biện luận như sau:

1) $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$: Khi đó hệ (1) cho ta:

$$\begin{cases} x_4 = m \\ x_3 = m + 1 - x_4 = 1 \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 - 2m \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Suy ra khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3-2m, 1, m)$$

2) $m = 7$: Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 8 \end{cases} \qquad (2)$$

Chọn $x_4 = \alpha$ ta tính được:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - \alpha \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4\alpha \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + \alpha \end{cases}$$

Vậy khi $m = 7$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + \alpha, 17 - 4\alpha, 8 - \alpha, \alpha)$$

với $\alpha \in \mathbf{R}$ tùy ý.

7.10. Định lý. Hệ phương trình tuyến tính AX = B, trong đó A là một ma trận vuông cấp n, có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi A khả nghịch. Khi đó nghiệm tương ứng là $X = A^{-1}B$.

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử hệ AX = B có duy nhất một nghiệm. Khi đó theo Định lý Kronecker–Capelli $r(A) = r(A|B) = n$. Suy ra A khả nghịch theo Định ký 4.11.

($\Leftarrow$) Suy từ Định lý 5.1.

7.11. Hệ quả. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Khi đó

(i) Hệ phương trình tuyến tính AX = 0 có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi A khả nghịch.

(ii) Hệ phương trình tuyến tính AX = 0 có vô số nghiệm khi và chỉ khi A không khả nghịch.

Chứng minh. (i) Suy từ Định lý 7.10.

(ii) Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất AX = 0 không xảy ra trường hợp vô nghiệm nên (ii) được suy từ (i).

BÀI TẬP

1. Tính A^n với n nguyên dương:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Tìm tất cả các ma trận X vuông cấp 2 thỏa:

a) $X^2 = 0$. b) $X^2 = \mathbf{I}_2$. c) $X^2 = X$.

3. Ma trận nghịch đảo A^{-1} thay đổi thế nào, nếu

a) Hoán vị hai dòng của A?

b) Nhân một dòng với một hằng số khác 0?

c) Thêm vào dòng thứ i một bội của dòng $k \neq i$?

d) Tương tự như trên nhưng thực hiện cho cột?

4. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Giả sử ma trận $C = \mathbf{I}_n + AB$ khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận $D = \mathbf{I}_n + BA$ cũng khả nghịch và ta có

$$D^{-1} = I_n - BC^{-1}A.$$

5. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thoả A + B = AB. Chứng minh AB = BA.

6. Cho A là một ma trận vuông, hệ số thực, có vết tr(A) = 0.

a) Chứng minh rằng A đồng dạng với một ma trận B hệ số thực, trong đó mọi hệ số trên đường chéo chính của B đều bằng 0 (A đồng dạng với B nghĩa là tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP= B$).

b) Chứng minh rằng tồn tại các ma trận vuông C, D có cùng cấp với A sao cho A = CD – DC.

7. Kiểm tra tính khả nghịch và tìm A^{-1} (nếu có):

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

8. Tìm tất cả các ma trận X thỏa: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ .. & .. & .. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a cách 1 một khoảng bằng đúng r với $r \le n-1$)

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

10. Giải các phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

11. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo các tham số $m \in \mathbf{R}$:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = m \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 3m \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = m + 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = m - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 17x_4 = 11m + 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 8m + 5 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 27x_4 = 18m + 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + (m - 20)x_4 = 13m + 8 \end{cases}$

12. Bài 2.17 Sách lý thuyết.

13. Bài 2.19 Sách lý thuyết.

14. Bài 2.21 Sách lý thuyết.

15. Bài 2.22 Sách lý thuyết.

16. Bài 2.23 Sách lý thuyết.

17. Bài 2.39 Sách lý thuyết.

18. Bài 2.41 Sách lý thuyết.

19. Bài 2.44 Sách lý thuyết.

20. Bài 2.46 Sách lý thuyết.
