BÀI GIẢNG TÓM TẮT
MÔN ĐẠI SỐ A1
(GV: Trần Ngọc Hội – 2019)

CHƯƠNG 2

ĐỊNH THỨC

Trong phần này chúng ta sẽ định nghĩa định thức của các ma trận vuông và ứng dụng để tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận khả nghịch cũng như để giải các hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CĂN BẢN

1.1. Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong K **(**K= **R** hay **C)**. Ta định nghĩa định thức của A, ký hiệu det A hay $|A|$, là số có được bằng qui nạp theo n như sau:

a) Với n = 1 thì A có dạng A = (a). Ta đặt: det A = a.

b) Với n = 2 thì A có dạng $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta đặt $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

c) Với n = 3 thì A có dạng $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Ta đặt

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

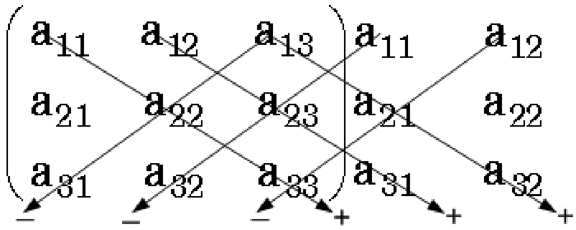
d) Tổng quát, giả sử định thức của các ma trận vuông cấp n – 1 đã được định nghĩa. Với mỗi cặp (i, j), $1 \le i, j \le n$, gọi A(i;j) là ma trận vuông cấp n – 1 có được từ A bằng cách xoá dòng i, cột j. Đặt:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i;j).$$

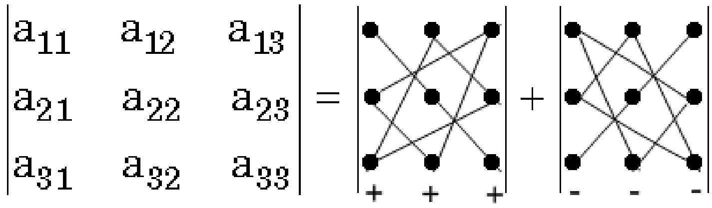
Ta gọi c_{ij} là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij} và định nghĩa:

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + \ldots + a_{n1}c_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}c_{i1}$$

Chú ý. Trường hợp n = 3, ta có thể tính định thức theo Qui tắc Sarrus như sau:



hoặc



Định thức detA bằng tổng các tích số của từng bộ 3 hệ số được nối bởi các đường (đường thẳng hoặc tam giác) được đánh dấu + trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 hệ số được nối bởi các đường được đánh dấu – . Như vậy,

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -28$

1.2. Định lý. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong K. Với mỗi i, j, gọi c_{ij} là phần bù đại số của hệ số a_{ij}. Khi đó ta có

(i) Công thức khai triển detA theo dòng i: $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$

(ii) Công thức khai triển detA theo cột j: $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$

1.3. Hệ quả. (i) Nếu ma trận vuông A có một dòng hay một cột bằng không thì detA = 0.

(ii) Nếu A là một ma trận tam giác (trên hay dưới) thì detA bằng tích các phần tử trên đường chéo của A, nghĩa là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn} \text{ và } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

1.4. Định lý. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong K.

(i) Giả sử $1 \le i \le n$ và dòng i của A là tổng của hai dòng $(b_1\ b_2...b_n)$ và $(c_1\ c_2...c_n)$. Khi đó

$$\det A = \det B + \det C,$$

trong đó B, C lần lượt là các ma trận có từ A bằng cách thay dòng i bằng $(b_1\ b_2...b_n)$ và $(c_1\ c_2...c_n)$, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{n1} \end{vmatrix}$$

(ii) Giả sử $1 \le j \le n$ và cột j của A là tổng của hai cột $(b_1\ b_2...b_n)^T$ và $(c_1\ c_2...c_n)^T$. Khi đó

$$\det A = \det B + \det C,$$

trong đó B, C lần lượt là các ma trận có từ A bằng cách thay cột j bằng $(b_1\ b_2...b_n)^T$ và $(c_1\ c_2...c_n)^T$, nghĩa là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1+c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2+c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n+c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. (i) Chỉ cần khai triển detA theo dòng i

(ii) Chỉ cần khai triển detA theo cột j.

1.5. Định lý. Với A là ma trận vuông ta có

$$\det(A^T) = \det A.$$

Chứng minh. Quy nạp theo cấp n của A.

n = 1: Hiển nhiên.

Giả sử kết quả trên đúng với mọi ma trận vuông cấp n – 1. Xét A là một ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khai triển detA theo cột 1 ta được:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} c_{i1}$$

trong đó $c_{i1} = (-1)^{i+1}\det A(i;1)$ là phần bù đại số của phần tử a_{i1} trong A.

Khai triển $\det(A^T)$ theo dòng 1 ta được:

$$\det(A^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} d_{i1}$$

trong đó $d_{i1} = (-1)^{i+1}\det A^T(i;1)$ là phần bù đại số của phần tử a_{i1} trong A^T.

Chú ý rằng $A^T(i;1)$ là ma trận chuyển vị của A(i;1) và có cấp n – 1 nên theo GTQN ta có $\det A^T(i;1) = \det A(i;1)$. Suy ra $c_{i1} = d_{i1}$ và do đó $\det(A^T) = \det A$.

1.6. Định lý. Cho A là một ma trận vuông cấp n; φ là một phép biến đổi sơ cấp trên dòng và A $A \xrightarrow{\varphi} A'$. Khi đó

(i) Nếu φ là loại 1 ($d_i \leftrightarrow d_k$, $i \neq k$) thì $\det A' = -\det A$.

(ii) Nếu φ là loại 2 ($d_i := \alpha d_i$, $\alpha \neq 0$) thì $\det A' = \alpha \det A$.

(iii) Nếu φ là loại 3 ($d_i := d_i + \beta d_k$, $i \neq k$) thì $\det A' = \det A$.

(iv) Với $S = \varphi(I_n)$ là ma trận sơ cấp, ta có $\det(SA) = (\det S)(\det A)$.

Chứng minh. (i) Quy nạp theo cấp n của A.

n = 2: Hiển nhiên.

$n \geq 3$: Giả sử kết quả trên đúng với mọi ma trận vuông cấp n – 1. Xét A là một ma trận vuông cấp n và A′ là ma trận có từ A bằng cách hoán đổi dòng i với dòng k ($i \neq k$). Vì $n \geq 3$ nên trong A ta có thể chọn một dòng $j \neq i, k$ và khai triển detA và detA′ theo dòng j ta được

$$\det A = \sum_{t=1}^{n} a_{jt} c_{jt}$$

$$\det A' = \sum_{t=1}^{n} a_{jt} d_{jt}$$

trong đó $c_{jt} = (-1)^{j+t}\det A(j;t)$ là phần bù đại số của phần tử a_{jt} trong A.

$d_{jt} = (-1)^{j+t}\det A'(j;t)$ là phần bù đại số của phần tử a_{jt} trong A′.

Chú ý rằng A′(j;t) là ma trận vuông cấp n – 1 có từ A(j;t) bằng cách hoán đổi dòng i với dòng k nên theo GTQN, $\det A'(j;t) = -\det A(j;t)$, từ đó $c_{jt} = d_{jt}$. Suy ra $\det A' = -\det A$.

(ii) Chỉ cần khai triển detA′ theo dòng i.

(iii) Dùng Định lý 1.4 và (ii).

(iv)) Với $S = \varphi(I_n)$, ta có $A' = SA$. Kết quả trên cho ta

- Nếu φ là loại 1 ($d_i \leftrightarrow d_k$, $i \neq k$) thì $\det S = -\det(I_n) = -1$.
- Nếu φ là loại 2 ($d_i := \alpha d_i$, $\alpha \neq 0$) thì $\det S = \alpha\det(I_n) = \alpha$.
- Nếu φ là loại 3 ($d_i := d_i + \beta d_k$, $i \neq k$) thì $\det S = \det(I_n) = 1$.

Từ đây, do (i) – (iii) ta suy ra $\det(SA) = (\det S)(\det A)$.

1.7. Chú ý. Do Định lý 1.5 ta có các kết quả tương tự như Định lý 1.6 khi thay dòng bằng cột.

1.8. Hệ quả. (i) Thừa số chung của các hệ số trên cùng một dòng (một cột) của một định thức có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

(ii) Nếu ma trận A có hai dòng (hai cột) bằng nhau hay tỉ lệ nhau thì $\det A = 0$.

1.9. Định lý. Cho A, B là hai ma trận vuông có cùng cấp n. Khi đó

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Chứng minh. Ta đã biết tồn tại các ma trận sơ cấp $S_1, S_2, \dots, S_k$ sao cho $A = S_1S_2\dots S_kR_A$, trong đó R_A là dạng bậc thang rút gọn của A. Khi đó:

$$AB = S_1S_2\dots S_k(R_AB).$$

Từ đây, do Định lý 1.6, bằng quy nạp ta suy ra:

$$\det(AB) = (\det S_1)(\det S_2)\dots(\det S_k)\det(R_AB).$$

$$\det(A) = (\det S_1)(\det S_2)\dots(\det S_k)\det(R_A).$$

- Nếu A khả nghịch thì $R_A = I_n$, do đó $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

- Nếu A không khả nghịch thì R_A có dòng cuối bằng 0, do đó R_AB cũng có dòng cuối bằng 0, đưa đến $\det(R_A) = \det(R_AB) = 0$. Suy ra $\det(AB) = 0 = (\det A)(\det B)$.

1.10. Hệ quả. Với $A, A_1, A_2, \dots, A_k$ là các ma trận vuông cùng cấp, ta có

(i) $\det(A_1A_2\dots A_k) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_k)$.

(ii) $\det(A^k) = (\det A)^k$ với mọi $k \geq 1$.

(iii) Nếu A khả nghịch thì $\det A \neq 0$ và

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Nhờ Định lý 1.6 ta có thể tính những định thức phức tạp bằng cách đưa chúng về những định thức đơn giản hơn qua những phép biến đổi sơ cấp trên dòng hay cột. Trong thực hành ta thường dùng các phép biến đổi sau:

a) Đem các thừa số chung của các hệ số trên cùng một dòng hay trên cùng một cột ra ngoài dấu định thức.

b) Nếu các hệ số trên một dòng hay một cột là các số hữu tỉ thì ta có thể quy đồng mẫu số và đem mẫu số chung ra ngoài dấu định thức.

c) Chọn một hệ số thuận lợi nhất trong định thức (thường là 1 hay –1) rồi dùng các phép biến đổi sơ cấp để khử các phần tử khác nhau trên dòng hay trên cột chứa phần tử đó. Sau đó khai triển định thức theo dòng hay theo cột tương ứng.

d) Thay dòng i bằng chính nó cộng với các bội số của các dòng khác, nghĩa là:

$$d_i := d_i + \beta_1 d_{k_1} + \dots + \beta_n d_{k_n}$$

(khi đó định thức không đổi) sao cho dòng i mới có chứa nhiều số 0 hoặc những hệ số của dòng i có thừa số chung khác 1 (hoặc trên dòng i mới xuất hiện một số thật thuận tiện để khử các số khác). Tương tự cho cột.

Ví dụ: Tính các định thức sau:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -2858$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2160}$

3) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$

5) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2 \\ m-2 & m-3 & 1 \\ m+2 & 3 & m-1 \end{vmatrix}$

ĐS: 1) –2858 2) 1/2160 3) $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ 4) 0

5) $(x+3a)(x-a)^3$ 6) $m(m-4)(m-2)$

§2. ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

2.1. Bổ đề. Cho A = (a_{ij}) là một ma trận vuông cấp n. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \det A, \qquad (1)$$

trong đó c_{kl} là phần bù đại số của phần tử a_{kl}.

Chứng minh. Nếu i = j thì (1) là công thức khai triển detA theo cột j.

Xét i ≠ j. Khi đó $\delta_{ij} = 0$. Mặt khác vế trái của (1) chính là khai triển định thức theo cột i của A′, trong đó A′ là ma trận có từ A bằng cách thay cột i bằng cột j. Vì A′ có 2 cột bằng nhau nên detA′ = 0 và (1) được thỏa.

2.2. Định nghĩa. Cho A = (a_{ij}) là một ma trận vuông cấp n và C = (c_{ij}) là ma trận các phần bù đại số. Ta gọi ma trận chuyển vị C^T của C là *ma trận phụ hợp* của A, ký hiệu adjA.

2.3. Định lý. Cho A là một ma trận vuông. Ta có:

$$A \text{ khả nghịch} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Hơn nữa, khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Suy từ Hệ quả 1.10.

($\Leftarrow$) Xét ma trận tích (adjA)A, ta có

$$[(\operatorname{adj}A)A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{adj}A]_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \det A \text{ (theo 2.1)}$$

Suy ra $(\operatorname{adj}A)A = (\det A)I_n$.

Do đó nếu $\det A \neq 0$ thì $\left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A\right)A = I_n$. Suy ra A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A.$$

Ví dụ: Xét xem các ma trận sau có khả nghịch không và tìm ma trận nghịch đảo tương ứng:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -8 \\ 19 & 13 & -14 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

ĐS: a) A không khả nghịch.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 6 \\ -5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. Hệ quả. Cho A là một ma trận vuông cấp 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ta có: A khả nghịch khi và chỉ khi

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Khi đó: $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.5. Chú ý. Định lý 2.3 cho ta một tiêu chuẩn để kiểm tra tính khả nghịch của một ma trận vuông mà không cần phải biến đổi nó về ma trận đơn vị. Tuy nhiên việc tìm ma trận nghịch đảo theo phương pháp này thường chỉ được dùng cho ma trận vuông cấp nhỏ. Đối với các ma trận vuông cấp cao hơn thì việc tìm ma trận phó tương ứng quá phức tạp (phải tính n^2 định thức cấp (n – 1) (!)) nên người ta thường tìm ma trận nghịch đảo của chúng bằng phương pháp rút gọn theo dòng.

§3. QUY TẮC CRAMER

Xét hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn.

$$AX = B \qquad (1)$$

trong đó $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n và $B = (b_j)$ là ma trận loại $n\times 1$. Đặt

$$\Delta = \det A$$

$$\Delta_j = \det A_j \quad 1 \le j \le n,$$

trong đó A_j là ma trận có từ A bằng cách thay cột j bằng cột B. Khi đó ta có quy tắc Cramer sau đây:

3.1. Định lý. (i) Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ (1) có nghiệm duy nhất định bởi

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ 1 \le j \le n.$$

(ii) Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j \neq 0$ với một j nào đó thì (1) vô nghiệm.

(iii) Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_j = 0$ với mọi $1 \le j \le n$ thì không có kết luận tổng quát về hệ (1) (hệ này có thể vô nghiệm, có thể có vô số nghiệm).

Chứng minh. Theo chứng minh của Định lý 2.3, ta có

$$(\mathrm{adj}A)A = \Delta I_n$$

Suy ra $$\Delta X = (\mathrm{adj}A)AX = (\mathrm{adj}A)B$$

và do đó

$$\Delta x_j = [(\mathrm{adj}A)B]_{j1} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{adj}A)_{jk} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k c_{kj} = \det A_j = \Delta_j.$$

(i) Nếu $\Delta \neq 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất (chính là $X = A^{-1}B$). Theo chứng minh trên ta có

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = 1, 2, ..., n.$$

(ii) Nếu $\Delta = 0$ và tồn tại $1 \le j \le n$ sao cho $\Delta_j \neq 0$ thì không thể có x_j thỏa $\Delta x_j = \Delta_j$ nên (1) vô nghiệm.

(iii) Hiển nhiên.

3.2. Chú ý. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn $AX = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là $X = 0$ nếu $\Delta = \det A \neq 0$), và có vô số nghiệm nếu $\Delta = 0$. Khi giải và biện luận một hệ phương trình tuyến tính dạng (1), nếu xảy ra trường hợp (iii) trong định lý thì ta phải dùng phương pháp Gauss để giải hệ này.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases}(m-7)x+12y-6z=m\\ -10x+(m+19)y-10z=2m\\ -12x+24y+(m-13)z=0\end{cases} \quad (1)$$

Giải

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2-1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m^2-18m+17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m^2-15m+14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+19 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = -36m(m-1)$$

a) $m \neq \pm 1$: $\Delta \neq 0$ nên hệ (1) có duy nhất một nghiệm định bởi:

$$x_1 = \frac{m(m-17)}{m^2-1};\, y = \frac{m(m-14)}{m^2-1};\, z = \frac{-36m}{m^2-1}.$$

b) $m = -1$: $\Delta = 0$, $\Delta_1 = -36 \neq 0$ nên hệ (1) vô nghiệm.

c) $m = 1$: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Hệ (1) trở thành

$$\begin{cases}-6x+12y-6z=1\\ -10x+20y-10z=2\\ -12x+24y-12z=0\end{cases}$$

và dễ thấy hệ này vô nghiệm.

3.3. Hệ quả. Hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn: AX = B có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

3.4. Hệ quả. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn: AX = 0 có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det A = 0$.