BÀI GIẢNG TÓM TẮT
MÔN ĐẠI SỐ A1
(GV: Trần Ngọc Hội – 2019)

CHƯƠNG 3

KHÔNG GIAN VÉCTƠ

§1. MỞ ĐẦU

Trong phần này ta sẽ đưa một ví dụ mở đầu về không gian véctơ.

Xét V là tập hợp tất cả những véctơ trong không gian. Ta biết rằng trên V có một phép toán cộng (+) các véctơ và một phép nhân (.) vô hướng với các véctơ. Những tính chất sau đây được kiểm trực tiếp từ định nghĩa: với $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in$ V và α, β ∈ **R** ta có

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
3. $\exists\vec{0} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$;
4. $\exists(-\vec{u}) \in V,\ (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
5. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;
6. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
7. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
8. $1.\vec{u} = \vec{u}$.

Tập V với phép toán cộng các véctơ và phép nhân vô hướng với các véctơ có các tính chất trên được gọi là một không gian véctơ trên **R**.

Bây giờ nếu đồng nhất các véctơ trong không gian với các tọa độ của chúng (trong hệ trục tọa độ trực chuẩn nào đó) thì có thể xem tập V gồm các véctơ ở trên như là tập hợp $\mathbf{R}^3$. Khi đó phép toán cộng các véctơ và phép nhân vô hướng với các véctơ được diễn tả trong $\mathbf{R}^3$ như sau:

Với u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) là hai phần tử của $\mathbf{R}^3$ và α ∈ **R**, ta có

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); \qquad \alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Chú ý rằng khi đó $\vec{0}$ được đồng nhất với phần tử (0, 0, 0) và $-\vec{u}$ được đồng nhất với phần tử $(-x_1, -y_1, -z_1)$. Dễ thấy rằng khi thay các véctơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trong không gian bằng các tọa độ tương ứng của chúng thì các tính chất 1–8 vẫn còn nghiệm đúng. Do đó ta nói $\mathbf{R}^3$ là một không gian véctơ trên trường **R** với các phép cộng và phép nhân vô hướng như trên.

§2. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CĂN BẢN

Trong §1 ta đã đưa ra một số ví dụ cụ thể về không gian véctơ. Sau đây ta sẽ định nghĩa "không gian véctơ" một cách tổng quát.

2.1. Định nghĩa. Cho V là một tập hợp khác $\emptyset$. Ta nói V là một *không gian véctơ* trên K (K = **Q**, **R** hay **C**) nếu trong V :

i) Tồn tại một phép toán "cộng véctơ", tức là một ánh xạ

$$V \times V \to V$$
$$(u, v) \to u + v$$

ii) Tồn tại một phép "nhân vô hướng với véctơ", tức là một ánh xạ

$$K \times V \to V$$
$$(\alpha, u) \to \alpha u$$

thỏa các tính chất sau: với u, v, w $\in$ V và $\alpha, \beta \in K$:

1. $u + v = v + u$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. $\exists\, 0 \in V$, $u + 0 = 0 + u = u$;
4. $\exists\, (-u) \in V$, $(-u) + u = u + (-u) = 0$;
5. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. $\alpha(u + v)u = \alpha u + \alpha v$;
8. $1.u = u$.

Khi đó

- Mỗi phần tử u $\in$ V là một véctơ.
- Mỗi số $\alpha \in K$ là một vô hướng.
- Véctơ 0 là *véctơ không*.
- Véctơ (–u) là *véctơ đối* của u.

Sau đây ta sẽ đưa ra vài ví dụ cơ bản về không gian véctơ.

1) Tập $K^n = \{u = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in K, 1 \le i \le n\}$ (K = **R** hay **C**) với phép toán cộng véctơ và phép nhân vô hướng với véctơ định bởi:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots , x_n + y_n),$$
$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

với $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V$ và $\alpha \in K$, là một không gian véctơ trên K với véctơ không là 0 = (0, 0, ... 0) và véctơ đối của véctơ $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là $(-u) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

2) Tập $V = M_{mxn}(K)$ gồm các ma trận mxn với các hệ số trong K là một không gian véctơ trên K với phép cộng véctơ là phép cộng ma trận thông thường và nhân vô hướng với véctơ là phép nhân thông thường một số với ma trận, trong đó véctơ không là ma trận không và véctơ đối của $A = (a_{ij})$ là $(-A) = (-a_{ij})$.

3) Tập V = K[x]

$$= \{p(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0x + a_0 \mid n \in \mathbf{N}, a_i \in K, 1 \le i \le n\}$$

gồm các đa thức theo x với các hệ số trong K là một không gian véctơ trên K với phép cộng véctơ là phép cộng thông thường các đa thức và phép nhân vô hướng với véctơ là phép nhân thông thường một số với một đa thức.

4) Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, tập

$$V = K_n[x] = \{p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \mid a_i \in K, 1 \leq i \leq n\}$$

gồm các đa thức theo x bậc $\leq n$, với các hệ số trong K là một không gian véctơ trên K với cộng véctơ và phép nhân vô hướng với véctơ là các phép cộng đa thức và nhân một số với đa thức thông thường (như trong 3) là một không gian véctơ trên trường K.

5) Với I là một khoảng trong **R**, các tập sau:

$C(I, \mathbf{R}) = \{K: I \to \mathbf{R} \mid K \text{ liên tục trên } I\}$;

$C^k(I, \mathbf{R}) = \{K: I \to \mathbf{R} \mid K \text{ khả vi liên tục cấp } k \text{ trên } I\}$;

$C^\infty(I, \mathbf{R}) = \{K: I \to \mathbf{R} \mid K \text{ khả vi liên tục mọi cấp trên } I\}$

là các không gian véctơ trên **R**, với phép cộng véctơ là phép cộng hàm thông thường và phép nhân vô hướng với véctơ là phép nhân thông thường một số với một hàm.

2.2. Mệnh đề. Cho V là một không gian véctơ trên K. Khi đó với mọi $u \in V$ và $\alpha \in K$ ta có

i) $\alpha u = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ hay $u = 0)$.

ii) $(-1)u = -u$.

Từ đây về sau ta ký hiệu V là một không gian véctơ trên trường K (K = **Q, R** hay **C**).

§2. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa. Cho $u_1, u_2, ..., u_k \in V$. Một *tổ hợp tuyến tính* của $u_1, u_2,..., u_k$ là một véctơ có dạng:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k$$

với $\alpha_i \in K$ $(1 \leq i \leq k)$.

2.2. Tính chất. 1) u là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_k$ khi và chỉ khi phương trình $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = u$ có nghiệm $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in K^k$.

2) Tổng của hai tổ hợp tuyến tính, tích của một số với một tổ hợp tuyến tính cũng là các tổ hợp tuyến tính (của $u_1, u_2,..., u_k$):

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 u_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_1 u_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) u_i \; ; \; \alpha\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i) u_i \, .$$

3) Véctơ không 0 luôn luôn là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_k$ vì

$$0 = 0u_1 + 0u_2 + ... + 0u_k.$$

4) Mỗi véctơ u_i, $1 \leq i \leq k$ là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_k$ vì

$$u_i = 0u_1 + ... + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + ... + 0u_k$$

Tổng quát hơn, mọi tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2,...,u_j$ $(1 \le j \le k)$ đều là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ...,u_j, u_{j+1},..., u_k$ vì:

$$\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 +...+ \alpha_ju_j = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 +...+ \alpha_ju_j + 0u_{j+1} +...+ 0u_k$$

4) Mọi tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2,... ,u_{k-1}, u_k$ đều là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_{k-1}$ khi và chỉ khi u_k là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2,..., u_{k-1}$.

2.3. Hệ quả. Cho $u_1, u_2, ..., u_k$ là k véctơ trong K^n với $u_j = (u_{1j}, u_{1j}, ..., u_{nj})$, $1 \le j \le k$:

$u_1 = (u_{11}, u_{21} ..., u_{n1})$

$u_2 = (u_{12}, u_{22} ..., u_{n2})$

....

$u_k = (u_{1k}, u_{2k} ..., u_{nk})$

Khi đó véctơ $u = (b_1, b_2, ..., b_n) \in K^n$ là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ..., u_k$ khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính UX = B, trong đó

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2k} \\ ..... & ...... & ... & ...... \\ u_{n1} & u_{n2} & ... & u_{nk} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

có nghiệm X.

2.4. Thuật toán kiểm tra véctơ u là tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{u_1, u_2, ..., u_k}$ trong $\mathbf{K^n}$:

Bước 1: Lập hệ phương trình tuyến tính UX = B, trong đó $U = \begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{T}} & u_2^{\mathrm{T}} & \dots & u_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ là ma trận có được bằng cách dựng $u_1, u_2, ..., u_k$ thành các cột, ; $B = \begin{pmatrix} u^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ là ma trận có được bằng cách dựng u thành cột.

Bước 2: Khảo sát hệ AX = B.

- Nếu hệ AX = B có nghiệm thì u là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ... , u_k$. Khi đó

$$u = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + ... + \alpha_ku_k$$

với $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ là nghiệm của hệ AX = B.

- Nếu hệ AX = B vô nghiệm thì u không là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, ... , u_k$.

Ví dụ. 1) Trong không gian $\mathbf{R}^4$ cho các véctơ:

$u_1 = (1, 1, 1, 1);$

$u_2 = (2, 3, -1, 0);$

$u_3 = (-1, -1, 1, 1);$

$u_4 = (1, 2, 1, -1)$

Tìm điều kiện để véctơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ là một tổ hợp tuyến tính của:

a) u_1, u_2, u_3;

b) u_1, u_2, u_3, u_4.

Đáp số: a) $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$.

b) Mọi véctơ $u = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4$ đều là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3, u_4.

§3. ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH – PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

3.1. Định nghĩa. 1) Cho $u_1, u_2, ..., u_k \in V$. Xét phương trình:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0 \qquad (1)$$

Nếu (1) chỉ có nghiệm tầm thường $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_k$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$) *độc lập tuyến tính*.

Nếu ngoài nghiệm tầm thường, (1) còn có nghiệm khác thì ta nói $u_1, u_2, ..., u_k$ (hay $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$) *phụ thuộc tuyến tính*.

Nói cách khác,

- $u_1, u_2, ..., u_k$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi với mọi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in K$ ta có

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0.$$

- $u_1, u_2, ..., u_k$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in K$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0.$$

2) Tập con $S \subseteq V$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu mọi $\{u_1, u_2, ..., u_k\} \subseteq S$ ($k \in \mathbf{N}$ tuỳ ý) đều độc lập tuyến tính. Nếu S không độc lập tuyến tính, ta nói S *phụ thuộc tuyến tính*.

Ví dụ. Trong không gian $\mathbf{R}^3$ cho các véctơ:

$$u_1 = (1, 2, -3);\ u_2 = (2, 5, -1);\ u_3 = (1, 1, -8)$$

ta có

- u_1, u_2 độc lập tuyến tính.
- u_1, u_2, u_3 phụ thuộc lập tuyến tính.

3.2. Nhận xét. Các véctơ $u_1, u_2, ... , u_k$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại véctơ u_i "phụ thuộc" vào các véctơ khác theo nghĩa véctơ u_i được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các u_j, $1 \le j \ne i \le k$.

- Nếu $u_1, u_2, ... , u_k$ phụ thuộc tuyến tính thì có $\alpha_1, \alpha_2, ... , \alpha_k \in K$ không đồng thời bằng 0, giả sử $\alpha_i \ne 0$, sao cho $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = 0$. Suy ra: $u_i = -\frac{1}{\alpha_i} \sum_{j \ne i} \alpha_j u_j$.

- Nếu có u_i sao cho: $u_i = \sum_{j \ne i} \beta_j u_j$ thì $\sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j = 0$, trong đó $\beta_i = -1 \ne 0$.

Với $u_1, u_2, ... , u_k$ là k véctơ trong K^n:

$$u_1 = (u_{11}, u_{21} ..., u_{n1})$$

$$u_2 = (u_{12}, u_{22} ..., u_{n2})$$

....

$u_k = (u_{1k}, u_{2k} ..., u_{nk})$

ta có $u_1, u_2, ..., u_k$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính UX = 0, trong đó

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nk} \end{pmatrix}$$

chỉ có nghiệm tầm thường X = 0. Mặt khác,

Hệ UX = 0 chỉ có nghiệm tầm thường X = 0

⇔ Ma trận U có hạng là r(U) = k.

⇔ Ma trận $A = U^T$ có hạng là r(A) = k (do hai ma trận chuyển vị có cùng hạng).

Nhận xét rằng ma trận U có được bằng cách dựng $u_1, u_2, ..., u_k$ thành các cột, nên ma trận $A = U^T$ có được bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_k$ thành các dòng.

Từ đây ta suy ra hệ quả sau:

3.3. Hệ quả. Cho $u_1, u_2, ... , u_k$ là k véctơ trong K^n. Gọi A là ma trận có được bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_k$ thành các dòng. Khi đó

$u_1, u_2, ... , u_k$ độc lập tuyến tính ⇔ A có hạng là r(A) = k.

3.4. Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các véctơ $u_1, u_2, ..., u_k$ trong K^n:

Bước 1: Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_k$ thành các dòng.

Bước 2: Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R. Khi đó

- Nếu R không có dòng 0 thì $u_1, u_2, ... , u_k$ độc lập tuyến tính.
- Nếu R có ít nhất một dòng 0 thì $u_1, u_2, ... , u_k$ phụ thuộc tuyến tính.

Trường hợp k = n, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2′:

Bước 2′: Tính định thức detA:

- Nếu detA ≠ 0 thì $u_1, u_2, ... , u_k$ độc lập tuyến tính.
- Nếu detA = 0 thì $u_1, u_2, ... , u_k$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 1. Trong không gian $\mathbf{R}^5$ cho các véctơ:

$u_1 = (1, 2, –3, 5, 1)$;

$u_2 = (1, 3, –13, 22, –1)$;

$u_3 = (3, 5, 1, –2, 5)$;

$u_4 = (2, 3, 4, –7, 4)$;

Hãy xét xem u_1, u_2, u_3, u_4 độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Đáp số: Phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 2. Trong không gian $\mathbf{R}^3$ cho các véctơ:

$$u_1 = (2m + 1, –m, m + 1)$$

$$u_2 = (m – 2, m – 1, m – 2)$$

$$u_3 = (2m – 1, m – 1, 2m –1)$$

Tìm điều kiện để u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính trên **R**.

Đáp số: $m \neq 0$; $m \neq \pm 1$.

§4. KHÔNG GIAN CON – TẬP SINH – CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

4.1. Định nghĩa *(không gian véctơ con)*. Cho W là một tập con khác $\varnothing$ của V. Ta nói W là một *không gian véctơ con* của V, kí hiệu $W \leq V$, nếu W với phép cộng véctơ và phép nhân vô hướng với véctơ cảm sinh từ V, cũng là một không gian véctơ trên trường K.

4.2. Định lý. Cho W là một tập con khác $\varnothing$ của V. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

i) $W \leq V$.

ii) Với $u, v \in W$ và $\alpha \in K$, $u + v \in W$ và $\alpha u \in W$.

iii) Với $u, v \in W$ và $\alpha \in K$, $\alpha u + v \in W$.

Chứng minh.

i. $\Leftrightarrow$ ii. Chiều thuận là hiển nhiên. Chiều đảo: $0 = 0u \in W$ và $(–u) = (–1)u \in W$ nếu $u \in W$.

ii. $\Leftrightarrow$ iii. Hiển nhiên

Ví dụ.1) $W = \{0\}$ và V là các véctơ con của V. Ta gọi đây là các *không gian con tầm thường* của V.

2) Trong không gian R^3, đường thẳng (D) đi qua gốc tọa độ O là một không gian con của $\mathbf{R}^3$.

3) Trong không gian $\mathbf{R}^3$, mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O là một không gian véctơ con của $\mathbf{R}^3$.

4) Cho $a_1, ..., a_n \in K$ và $b \in K^n \backslash \{0\}$ Đặt:

$$W_1 = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0\};$$

$$W_2 = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}.$$

Ta có $W_1 \leq K^n$ nhưng $W_2 \not\leq \mathbb{R}^n$

4.3. Định lý. Giao của một họ tuỳ ý các không gian con của V cũng là một không gian con của V.

Chứng minh. Cho $\{W_i\}_{i\in I}$ là một họ những không gian con của V. Đặt:

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i = \{u \in W_i, \forall i \in I\}.$$

- $W \neq \varnothing$ vì $0 \in W$.
- $\forall u, v \in W, \forall \alpha \in K, \alpha u + v \in W$ vì $\alpha u + v \in W_i, \forall i \in I$.

Chú ý. Hợp của hai không gian con của V không nhất thiết là một không gian con của V (xem bài tập).

Bây giờ cho $S \subseteq V$. Gọi $\{W_i\}_{i \in I}$ là họ tất cả những không gian con của V có chứa S (họ này khác rỗng vì có chứa V). Đặt:

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i$$

Khi đó

- W là không gian con nhỏ nhất của V có chứa S.

Ta gọi

- W là *không gian con sinh bởi S,* kí hiệu $W = < S >$.
- S là *tập sinh* của W.
- Nếu S hữu hạn $S = \{u_1, u_2,..., u_n\}$ thì ta nói $W = < S >$ là *không gian con hữu hạn sinh bởi $u_1, u_2,..., u_n$* và kí hiệu $W = < u_1, u_2,..., u_n >$.

4.4. Định lý. Cho $\varnothing \neq S \subseteq V$. Khi đó không gian con của V sinh bởi S là tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn nhưng tùy ý các véctơ trong S, nghĩa là

$$< S > = \{u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \mid n \in \mathbf{N}, u_i \in S, \alpha_i \in K, \forall\ 1 \leq i \leq n\}$$

Chứng minh. Đặt

$$W = \{u = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \mid n \in \mathbf{N}, u_i \in S, \alpha_i \in K, \forall\ 1 \leq i \leq n\}$$

Ta có

- W là không gian con của V.
- W là không gian con nhỏ nhất chứa S.

Chú ý. 1) Nếu $S = \varnothing$ thì $<S> = \{0\}$.

2) Nếu $S = \{u_1, u_2,..., u_n\}$ thì $< S > = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n \mid \alpha_i \in K, 1 \leq i \leq n\}$.

3) Nếu $S \leq V$ thì $< S > = S$.

4) Cho $S \subseteq V$ và $W \leq V$. Khi đó $S \subseteq W \Leftrightarrow < S > \leq W$.

5. Nếu $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ thì $< S_1 > \leq < S_2 >$.

4.5. Định nghĩa. Một tập hợp con B của không gian véctơ V được gọi là một *cơ sở* của V nếu B là một tập sinh độc lập tuyến tính.

4.6. Bổ đề. Giả sử V sinh bởi m véctơ $u_1, u_2, ... , u_m$: $V = < u_1, u_2, ... , u_m >$. Khi đó mọi tập hợp con độc lập tuyến tính của V có không quá m phần tử.

Chứng minh. Cho S là một tập hợp con của V chứa n > m phần tử: $v_1, v_2, \dots, v_n$. Vì $V = < u_1, u_2, \dots, u_m >$ nên mỗi véctơ v_j $(1 \le j \le n)$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \dots, u_m$:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i;\ a_{ij} \in K.$$

Đặt $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Vì m < n nên hệ phương trình tuyến tính AX = 0 có nghiệm không tầm thường, tức là có $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ với mọi i = 1, 2,.., m. Khi đó

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) u_i = 0.$$

Suy ra S phụ thuộc tuyến tính.

4.7. Hệ quả và định nghĩa. Nếu V có một cơ sở B hữu hạn gồm m phần tử:

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

thì mọi cơ sở khác của V cũng hữu hạn và có đúng m phần tử. Khi đó ta nói V là một không gian véctơ *hữu hạn chiều* trên K và số nguyên m được gọi là *số chiều* (dimension) của V trên K, kí hiệu là $\dim_K V = m$ hay $\dim V = m$. Trong trường hợp ngược lại, ta nói V là một không gian véctơ *vô hạn chiều* trên K, kí hiệu là $\dim_K V = \infty$ hay $\dim V = \infty$.

4.8. Một số tính chất. Cho V là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên K với dim V = n. Ta có

i) Mọi tập con của V có nhiều hơn n phần tử đều phụ thuộc tuyến tính.

ii) Mọi tập con của V có ít hơn n phần tử không thể là tập sinh của V.

iii) Cho S là một tập con độc lập tuyến tính của V và $u \in V$ là một véctơ sao cho $u \notin < S >$. Khi đó tập hợp $S_1 = S \cup \{u\}$ độc lập tuyến tính.

iv) Mọi tập hợp con độc lập tuyến tính gồm n phần tử của V đều là cơ sở của V.

v) Mọi tập hợp sinh của V gồm n phần tử đều là cơ sở của V.

vi) (*Về cơ sở không toàn vẹn*) Cho S là một tập con độc lập tuyến tính của V. Khi đó tồn tại một cơ sở B của V sao cho $B \supseteq S$. Nói cách khác, nếu S không phải một cơ sở của V thì ta có thể thêm vào S một số véctơ để được một cơ sở của V.

vii) Cho S là một tập sinh của V. Khi đó tồn tại một cơ sở B của V sao cho $B \subseteq S$. Nói cách khác, nếu S không phải là một cơ sở của V thì ta có thể loại bỏ ra khỏi S một số véctơ để được một cơ sở của V.

viii) Mọi không gian con W của V đều hữu hạn chiều, hơn nữa nếu $W \le V$ và $W \ne V$ thì dim W < dim V.

Ví dụ. 1) Không gian K^n là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên K với $\dim K^n = n$ do K^n có một cơ sở là $B_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ trong đó

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

....

$e = (0, 0,..., 0, 1)$

Ta gọi B_0 là *cơ sở chính tắc* của K^n trên K.

2) Không gian $M_{mxn}(K)$ là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên K với dim $M_{m\times n}(K) = mn$ với cơ sở $B_0 = \{E_{ij} \mid , 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, trong đó E_{ij} là ma trận loại m×n chỉ có một hệ số khác 0 là 1 tại dòng i cột j. Ta gọi $B_0 = \{E_{ij} \mid , 1 \le j \le m, 1 \le i \le n\}$ là *cơ sở chính tắc* của $M_{mxn}(K)$ trên K.

3) Không gian $K_n[x]$ gồm các đa thức theo x bậc ≤ n với hệ số trong K, là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên K với dim $K_n[x] = n + 1$ với một cơ sở là $B_0 = \{1, x, ... x^n\}$. Ta gọi $B_0 = \{1, x, ... x^n\}$ là *cơ sở chính tắc* của $K_n[x]$.

4) Không gian K[x] gồm tất các đa thức theo x bậc với hệ số trong K, là một không gian véctơ vô hạn chiều với một cơ sở vô hạn $B_0 = \{1, x, x^2,...\}$.

Nhận xét. Vì dim $K^n = n$ nên mọi cơ sở của K^n phải gồm đúng n véctơ. Hơn nữa, do 4.8: Với $B = \{u_1, u_2, ... , u_n\}$ là một tập con gồm đúng n véctơ của K^n, ta có

$B = \{u_1, u_2, ... , u_n\}$ là một cơ sở của K^n

⇔ $u_1, u_2, ... , u_n$ độc lập tuyến tính

⇔ $\det A \neq 0$, trong đó A là ma trận có được bằng cách xếp $u_1, u_2, ... , u_n$ thành các dòng.

4.9. Thuật toán kiểm tra $\{u_1, u_2, ... , u_n\}$ là một cơ sở của K^n:

Bước 1: Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_n$ thành các dòng.

Bước 2: Tính định thức detA:

- Nếu $\det A \neq 0$ thì $\{u_1, u_2, ... , u_n\}$ là một cơ sở của K^n.
- Nếu $\det A = 0$ thì $\{u_1, u_2, ... , u_n\}$ không là cơ sở của K^n.

Ví dụ. 1) Trong không gian $\mathbf{R}^4$, các véctơ

$u_1 = (1, 1, 1, 1)$

$u_2 = (2, 3, -1, 0)$

$u_3 = (-1, -1, 1, 1)$

$u_4 = (1, 2, 1, -1)$

tạo thành cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

2) Trong không gian $\mathbf{R}^3$, các véctơ

$u_1 = (2m + 1, -m, m + 1)$

$u_2 = (m - 2, m - 1, m - 2)$

$u_3 = (2m - 1, m - 1, 2m - 1)$

tạo thành một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ khi và chỉ khi $m \neq 0, \pm 1$.

§5. KHÔNG GIAN DÒNG

5.1. Định nghĩa. Cho ma trận $A = (a_{ij})$ loại m×n với hệ số trong K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt:

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$
$$u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

và $W_A = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$. Ta gọi $u_1, u_2, \dots, u_m$ là các *véctơ dòng* của A, và W_A là *không gian dòng* của A.

Ghi chú. $\dim W_A$ còn được gọi là *hạng* của hệ véctơ $u_1, u_2, \dots, u_m$.

5.2. Định lý. Nếu A và B là hai ma trận tương đương dòng thì $W_A = W_B$, nghĩa là A và B có cùng không gian dòng.

Chứng minh. Cho $A = (a_{ij})_{m\times n} \sim B = (b_{ij})_{m\times n}$. Đặt

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$
$$v_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}),\ 1 \le i \le m$$

Cần chứng minh: $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

- $A \sim B \Rightarrow \exists$ ma trận $P = (p_{ij})_{m\times m}$, $A = PB$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} b_{kj},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Với mỗi $1 \le i \le m$,

$$u_i = \left(\sum_{k=1}^{m} p_{ik} b_{k1}, \dots, \sum_{k=1}^{m} p_{ik} b_{kn} \right) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} (b_{k1}, \dots, b_{kn}) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} v_k$$

Do đó $\langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

- $B = P^{-1}A$ nên bao hàm thức ngược lại cũng đúng.

5.3. Nhận xét. Vì các véctơ dòng khác 0 của một ma trận dạng bậc thang luôn luôn độc lập tuyến tính nên chúng tạo thành một cơ sở của không gian dòng. Từ đây ta suy ra cách tìm số chiều và một cơ sở của không gian dòng của ma trận A như sau:

- Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R.
- Số chiều của không gian dòng W_A bằng số dòng khác 0 của R (do đó bằng r(A)) và các véctơ dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W_A.

Ví dụ. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian dòng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Giải tóm tắt. Dùng các phép BĐSCTD ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0. Do đó dim W_A = 3 và một cơ sở của W_A là:

$$\{(1, 2, -1, 1); (0, 1, 3, 2); (0, 0, 0, 1)\}$$

5.4. Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của không gian con W = < $u_1, u_2, ..., u_m$ >:

Bước 1. Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ bằng cách xếp $u_1, u_2, ..., u_m$ thành các dòng.

Bước 2. Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R.

Bước 3. Số chiều của W bằng số dòng khác 0 của R (do đó bằng r(A)) và các véctơ dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ. 1) Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbf{R}^4$ sinh bởi các véctơ u_1, u_2, u_3, u_4 trong đó

$u_1 = (1, 2, 1, 1)$

$u_2 = (3, 6, 5, 7)$

$u_3 = (4, 8, 6, 8)$

$u_4 = (8, 16, 12, 20)$

Giải tóm tắt. Không gian W sinh bởi u_1, u_2, u_3, u_4 là không gian dòng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Do đó W có dimW = 3 với cơ sở là :

B = {(1, 2, 1, 1); (0, 0, 1, 2); (0, 0, 0, 1)}

Nhận xét. Có thể kiểm chứng u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính. Do đó $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một cơ sở của W (do dimW = 3).

2) Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbf{R}^4$ sinh bởi các véctơ u_1, u_2, u_3 trong đó

$$u_1 = (1, -2, -1, 3)$$

$$u_2 = (2, -4, -3, 0)$$

$$u_3 = (3, -6, -4, 4)$$

Không gian W sinh bởi u_1, u_2, u_3 là không gian dòng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$$

W có dimW = 3 và một cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, trong đó

$$v_1 = (1, -2, -1, 3)$$

$$v_2 = (0, 0, -1, -6)$$

$$v_3 = (0, 0, 0, 1)$$

Nhận xét. Trong Ví dụ 2, ma trận dạng bậc thang R không có dòng 0 nên u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính, và do đó $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một cơ sở của W.

§6. KHÔNG GIAN NGHIỆM

6.1. Ví dụ minh họa. Cho W là tập tất cả các nghiệm (x_1,x_2,x_3,x_4) của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ta giải hệ (1) bằng phương pháp Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, ta tính được:

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta \end{cases}$$

Vậy hệ (1) có vô số nghiệm với hai ẩn tự do:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta,\ \alpha,\ \beta)$$

với α, $\beta \in$ **R** tùy ý. Do đó

$$\begin{aligned} W &= \{(-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha,\ \beta \in R\} \\ &= \{(-17\alpha, 10\alpha, \alpha, 0) + (29\beta, -17\beta, 0, \beta) \mid \alpha,\ \beta \in R\} \\ &= \{\alpha(-17, 10, 1, 0) + \beta(29, -17, 0, 1) \mid \alpha,\ \beta \in R\} \\ &= \langle (-17, 10, 1, 0); (29, -17, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Đặt $u_1 = (-17,10,1,0)$; $u_2 = (29,-17,0,1)$. Ta có $W = \langle u_1, u_2 \rangle$, hơn nữa u_1, u_2 độc lập tuyến tính vì:

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 = 0 &\Rightarrow \alpha(-17, 10, 1, 0) + \beta(29, -17, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Rightarrow (-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của W và dimW = 2.

Ta gọi W là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1) theo định nghĩa tổng quát sau:

6.2. Định nghĩa. Cho ma trận $A = (a_{ij})$ loại m×n với hệ số trong K:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

và S_A là tập tất cả các nghiệm $(x_1,x_2,...,x_n)$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất: AX = 0, nghĩa là tập tất cả các nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Khi đó S_A là một không gian con của K^n. Ta gọi S_A là *không gian nghiệm* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất AX = 0.

6.3. Thuật toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm

Xét lại Ví dụ minh họa 6.1 ta thấy S_A có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với $u_1= (-17,10,1,0)$; $u_2 = (29,-17,0,1)$. Dễ thấy:

- u_1 được suy từ nghiệm tổng quát bằng cách chọn $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
- u_2 được suy từ nghiệm tổng quát bằng cách chọn $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Ta gọi $\{u_1, u_2\}$ là một *hệ nghiệm cơ bản* của (1).

Trường hợp tổng quát, thuật toán tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm S_A của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất AX = 0, ta tiến hành các bước sau:

Bước 1. Giải hệ AX = 0 tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2. Tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ AX = 0 như sau: Giả sử nghiệm tổng quát của hệ AX = 0 có k ẩn tự do $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_s}$.

- Chọn $x_{k_1} = 1; x_{k_2} = 0; ...; x_{k_s} = 0$ ta được nghiệm u_{k_1}.
- Chọn $x_{k_1} = 0; x_{k_2} = 1; ...; x_{k_s} = 0$ ta được nghiệm u_{k_2}.

....

- Chọn $x_{k_1} = 0; x_{k_2} = 1; ...; x_{k_s} = 1$ ta được nghiệm u_{k_s}.

Khi đó $\{u_{k_1}, u_{k_2}, ..., u_{k_s}\}$ là một hệ nghiệm cơ bản.

Bước 3. Không gian nghiệm S_A có $\dim S_A = s$ và một cơ sở là hệ nghiệm cơ bản $\{u_{k_1}, u_{k_2}, ..., u_{k_s}\}$ đã tìm.

Nhận xét. Có thể tìm hệ nghiệm cơ bản bằng cách tách các tham số như trong ví dụ minh họa 6.1.

§7. KHÔNG GIAN TỔNG

7.1. Định lý. Cho $W_1, W_2, ..., W_n$ là các không gian con của V. Đặt:

$$W = \{ u_1 + u_2 + ... + u_n \mid u_i \in W_i,\ 1 \le i \le n\}$$

Khi đó W là không gian con của V sinh bởi $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Ta gọi W là *không gian tổng* của $W_1, W_2, ..., W_n$, kí hiệu là

$$W = W_1 + W_2 + ... + W_n.$$

Chứng minh.

a) W là không gian con của V.

b) W là không gian con nhỏ nhất chứa $S = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$

Nhận xét.

1) $u \in W_1 + W_2 + ... + W_n \Leftrightarrow \exists u_i \in W_i\ (1 \le i \le n),\ u = u_1 + ... + u_n$.

2) $W_1 + W_2 + ... + W_n \le U \Leftrightarrow W_i \le U,\ \forall\ 1 \le i \le n$.

7.2. Hệ quả. Cho $W_1, W_2, ..., W_n$ là các không gian con của V với $W_i = \langle S_i \rangle$. Khi đó

$$W_1 + W_2 + ... + W_n = \langle \bigcup_{i=1}^{n} S_i \rangle$$

Ví dụ. 1) Trong $\mathbf{R}^4$ cho các véctơ:

$u_1 = (1, 2, 1, 1)$ $\quad\quad$ $v_1 = (1, 2, 2, 3)$

$u_2 = (3, 6, 5, 7)$ $\quad\quad$ $v_2 = (2, 5, 2, 2)$

$u_3 = (4, 8, 6, 8)$ $\quad$ $v_3 = (3, 7, 4, 5)$

$u_4 = (8, 16, 12, 16)$ $\quad$ $v_4 = (6, 14, 8, 10)$

Đặt $W_1 = < u_1, u_2, u_3, u_4 >$ và $W_2 = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$. Tìm một cơ sở và xác định số chiều của mỗi không gian $W_1 + W_2$ và $W_1 \cap W_2$.

Giải. W_1 là không gian dòng của ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $W_1 = < (1, 2, 1, 1); (0, 0, 2, 4) >$.

Tương tự W_2 là không gian dòng của ma trận:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 7 & 9 \\ 6 & 14 & 14 & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $W_2 = < (1, 2, 2, 3); (0, 1, 1, 0) >$.

Theo Hệ quả 7.2, không gian $W_1 + W_2$ sinh bởi các véctơ:

$$(1, 2, 1, 1); (0, 0, 2, 4) ; (1, 2, 2, 3); (0, 1, 1, 0).$$

Ta tìm một cơ sở của $W_1 + W_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra $W_1 + W_2$ có số chiều là 3 và một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 1); (0, 1, 1, 0) ; (0, 0, 1, 2)\}$.

Ta có $u \in W_1 \cap W_2$ khi và chỉ khi tồn tại $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $1 \le i \le 4$ sao cho:

$$\begin{cases} u = \alpha_1(1,2,1,1) + \alpha_2(0,0,2,4) \\ u = \alpha_3(1,2,2,3) + \alpha_4(0,1,1,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \alpha_1(1,2,1,1) + \alpha_2(0,0,2,4) \\ \alpha_1 = \alpha_3; 2\alpha_1 = 2\alpha_3 + \alpha_4; \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4; \alpha_1 + 4\alpha_2 = 3\alpha_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \alpha_1(1,2,1,1) + \alpha_2(0,0,2,4) \\ \alpha_1 = 2\alpha_2 = \alpha_3; \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \alpha(1,2,2,3) \quad \text{vôùi}\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Suy ra: $W_1 \cap W_2$ có số chiều là 1 và một cơ sở là $\{(1, 2, 2, 3)\}$.

7.3. Định lý. Cho W_1, W_2 là hai không gian véctơ con hữu hạn chiều của V. Khi đó $W_1 + W_2$ là không gian con hữu hạn chiều của V và

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Chứng minh. Vì $W_1 \cap W_2 \le W_1$ và W_1 hữu hạn chiều nên theo Hệ quả 4.13, $W_1 \cap W_2$ hữu hạn chiều. Gọi $k = \dim(W_1 \cap W_2)$ và $B_0 = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ là một cơ sở của $W_1 \cap W_2$.

Ta có $\dim W_1 \ge k$ và $\dim W_2 \ge k$. Đặt:

$$m = \dim W_1 - k,$$

$$n = \dim W_2 - k.$$

Theo Định lý 4.11 ta có thể thêm vào B_0 m véctơ

$$v_1, ..., v_m \in W_1 \setminus W_2$$

để được cơ sở $B_1 = \{u_1, ..., u_k ; v_1, ..., v_m\}$ của W_1. Tương tự, ta có thể thêm vào B_0 n véctơ

$$w_1, ..., w_n \in W_2 \setminus W_1$$

để được cơ sở $B_2 = \{u_1, ..., u_k ; w_1, ..., w_n\}$ của W_2 .

Ta chứng minh $B = B_1 \cup B_2$ là cơ sở của $W_1 + W_2$.

- B là tập sinh của $W_1 + W_2$.
- B độc lập tuyến tính:

Giả sử: $$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j + \sum_{r=1}^{n}\gamma_r w_r = 0 \quad (1)$$

Đặt: $w = \sum_{r=1}^{n}\gamma_r w_r \in W_2$. Ta có $\quad w = -\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j\right) \in W_1$

nên $w \in W_1 \cap W_2$ và do đó w có dạng:

$$w = \sum_{i=1}^{k}\delta_i u_i \ , \quad \delta_i \in F$$

Ta viết: $\sum_{r=1}^{n}\gamma_r w_r = \sum_{i=1}^{k}\delta_i u_i$ hay $\sum_{i=1}^{k}\delta_i u_i - \sum_{r-1}^{n}\gamma_r w_r = 0$

Do tính độc lập tuyến tính của B_2 ta suy ra:

$$\delta_1 = ... = \delta_k = \gamma_1 = ... = \gamma_n = 0$$

và (1) trở thành:

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_1 u_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j = 0$$

Từ đây do tính độc lập tuyến tính của B_1 ta suy ra:

$$\alpha_1 = ... = \alpha_k = \beta_1 = ... = \beta_m = 0$$

Vậy

$\dim(W_1 + W_2) = \text{card } B = k + m + n = (k + m) + (k + n) - k = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

7.4. Định nghĩa. Cho $W_1, W_2,..., W_n$ là các không gian con của V. Ta nói W là *không gian tổng trực tiếp* của $W_1, W_2,..., W_n$, kí hiệu là

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

nếu $W = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ và $W_i \cap (\sum_{j \neq i} W_j) = \varnothing$ với mọi $1 \leq i \leq n$.

7.5. Định lý. Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ là các không gian con của V. Các mệnh đề sau tương đương:

(i) $W_1 + W_2 + \ldots + W_n = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$.

(ii) Mỗi véctơ $u \in W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ được viết duy nhất dưới dạng $u \in u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ với $u_j \in W_j\ (1 \leq j \leq n)$.

(iii) Với mọi $u_j \in W_j\ (1 \leq j \leq n)$, nếu $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0$ thì $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

(iv) Với mỗi cơ sở B_j của $W_j\ (1 \leq j \leq n)$, ta có $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ là một cơ sở của $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$.

(v) $\dim(W_1 + W_2 + \ldots + W_n) = \dim W_1 + \dim W_2 + \ldots + \dim W_n$ (trường hợp V hữu hạn chiều).

§8. TỌA ĐỘ VÀ MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

8.1. Định lý. Cho $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ là một cơ sở được sắp của không gian véctơ V trên K. Khi đó, với mọi $u \in V$, phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = u \qquad (1)$$

luôn luôn có duy nhất một nghiệm. Gọi $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$ là nghiệm của (1). Ta đặt

$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \ldots. \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix}$: *Tọa độ* của véctơ u trong cơ sở B.

Như vậy,

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_2^0 \\ \ldots. \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + \ldots + \alpha_n^0 u_n$$

Chứng minh. Phương trình (1) có nghiệm do B là một tập sinh của V.

Nghiệm duy nhất. Giả sử

$$u = \alpha_1 u_1 ++ .. + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + .. + \beta_n u_n.$$

Khi đó

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0$$

nên do tính độc lập tuyến tính của B ta có

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0$$

hay

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2 , \ ..., \alpha_n = \beta_n.$$

Điều này chứng tỏ nghiệm của (1) là duy nhất.

8.2. Thuật toán tìm tọa độ của véctơ u trong cơ sở ($u_1, u_2, ..., u_n$) của K^n:

Bước 1: Lập hệ phương trình tuyến tính UX = B, trong đó $U = \begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots & u_n^T \end{pmatrix}$ là ma trận có được bằng cách dựng $u_1, u_2, ..., u_n$ thành các cột, ; $B = \begin{pmatrix} u^T \end{pmatrix}$ là ma trận có được bằng cách dựng u thành cột.

Bước 2: Giải hệ UX = B. Nghiệm (duy nhất) của hệ này là tọa độ của u trong cơ sở ($u_1, u_2, ..., u_n$).

8.3. Nhận xét. Đối với cơ sở chính tắc $B_0 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ của không gian K^n, ta có

$$\forall u = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n, [u]_{B_0} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nói cách khác, tọa độ của véctơ u theo cơ sở chính tắc B_0 của K^n chính là ma trận cột tương ứng của u.

Ví dụ. 1) Trong không gian $\mathbf{R}^3$, mọi véctơ u = (a, b, c) có tọa độ theo cơ sở chính tắc B_0 là:

$$[u]_{B_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2) Trong không gian $\mathbf{R}^3$, cho các véctơ:

$u_1 = (1, 2, 1)$

$u_2 = (1, 3, 1)$

$u_3 = (2, 5, 3)$

a) Chứng minh $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Tìm tọa độ của véctơ $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ theo cơ sở B.

Đáp số: $[u]_B = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}.$

8.4. Định lý. Cho V là một không gian véctơ có dimV = n và hai cơ sở được sắp của V như sau:

$B_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$; $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$.

Đặt $[v_j]_{B_1} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ ... \\ p_{nj} \end{pmatrix}$, $1 \le j \le n$,

và P là ma trận vuông cấp n có các cột lần lượt là $[v_1]_{B_1}, [v_2]_{B_1}, ..., [v_n]_{B_1}$, nghĩa là

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & ... & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & ... & p_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1} & p_{n2} & ... & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó P khả nghịch và là ma trận duy nhất thỏa:

$$\forall u \in V, \ [u]_{B_1} = P[u]_{B_2}$$

Ta gọi P là *ma trận chuyển cơ sở* từ B_1 *sang* B_2, kí hiệu là $(B_1 \to B_2)$. Như vậy,

$$\boxed{\forall u \in V, \ [u]_{B_1} = (B_1 \to B_2)[u]_{B_2}}$$

Chứng minh. 1) Đặt $[u]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Cần chứng minh: $[u]_{B_1} = P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ta có $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \alpha_j) u_i$

Suy ra: $[u]_{B_1} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} p_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} p_{2j}\alpha_j \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} p_{nj}\alpha_j \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

2) P khả nghịch vì hệ phương trình tuyến tính PX = 0 chỉ X = 0. Thật vậy, giả sử: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ thỏa PX = 0, khi đó với u = $x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n$ ta có $[u]_{B_2} = X$ và $[u]_{B_1} = P[u]_{B_2} = PX = 0$, suy ra u = 0. Từ đó $x_1 = ... = x_n = 0$.

3) P duy nhất. Giả sử có ma trận P′ sao cho:

$$\forall u \in V,\ [u]_{B_1} = P'[u]_{B_2}$$

Khi đó $(P - P')[u]_{B_2} = 0, \forall u \in V,$

nghĩa là $(P - P')X = 0, \forall X \in M_{nx1}(K).$

Do đó P – P′ = 0 hay P = P′.

8.5. Mệnh đề. Cho V là một không gian véctơ hữu hạn chiều và B_1, B_2, B_3 là ba cơ sở của V. Khi đó

1) $(B_2 \to B_1) = (B_1 \to B_2)^{-1}$.

2) $(B_1 \to B_3) = (B_1 \to B_2)(B_2 \to B_3)$.

Chứng minh.

1) $\forall u \in V,\ [u]_{B_1} = (B_1 \to B_2)[u]_{B_2} \Rightarrow [u]_{B_2} = (B_1 \to B_2)^{-1}[u]_{B_1}$

$$2) \forall u \in V,\ [u]_{B_1} = (B_1 \to B_2)[u]_{B_2} = (B_1 \to B_2)((B_2 \to B_3)[u]_{B_3})$$
$$= ((B_1 \to B_2)(B_2 \to B_3))[u]_{B_3}$$

8.6. Hệ quả. Cho $B_1 = (u_1, u_2, ..., u_n)$; $B_2 = (v_1, v_2, ..., v_n)$ là hai cơ sở của không gian K^n. Gọi $B_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ là cơ sở chính tắc của K^n. Khi đó

1) $(B_0 \to B_1) = \begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots & u_n^T \end{pmatrix}$ là ma trận có được bằng cách dựng các véctơ $u_1, u_2, ..., u_n$ thành các cột.

2) $(B_1 \to B_0) = (B_0 \to B_1)^{-1}$.

3) Nếu qua một số phép BĐSCTD ma trận $(B_0 \to B_1)$ biến thành ma trận đơn vị $\mathbf{I_n}$ thì cũng chính qua những phép biến đổi đó ma trận $(B_0 \to B_2)$ sẽ biến thành ma trận $(B_1 \to B_2)$, nghĩa là

$$((B_0 \to B_1) | (B_0 \to B_2)) \xrightarrow{\text{BDSCTD}} (I_n | (B_1 \to B_2))$$

Ví dụ. 1) Trong không gian $\mathbf{R^3}$, cho các véctơ:

$u_1 = (1, 2, 1)$

$u_2 = (1, 3, 1)$

$u_3 = (2, 5, 3)$

a) Chứng minh B = (u_1, u_2, u_3) là một cơ sở của $\mathbf{R^3}$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbf{R^3}$.

c) Tìm tọa độ của véctơ u = (1, 2, –3) theo cơ sở B.

Đáp số: b) $(B_0 \to B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Với u = (1, 2, –3), $[u]_{B_0} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) Trong không gian $\mathbf{R^3}$ cho các véctơ phụ thuộc tham số $m \in \mathbf{R}$:

$u_1 = (1, 1 + m, 2)$;

$u_2 = (1, -1, -m)$;

$u_3 = (1 - m, 2, 3)$.

a) Tìm điều kiện để B(m) = (u_1, u_2, u_3) là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Đặt B_1 = B(1) và B_2 = B(–1). Chứng tỏ B_1 và B_2 là hai cơ sở của $\mathbf{R^3}$. Tìm các ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_2 và từ B_2 sang B_0 trong đó $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R^3}$. Hãy tìm $[u]_{B_1}$; $[u]_{B_2}$ với u = (1, 0, 1).

Đáp số: a) $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$.

b) $(B_2 \to B_0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $(B_1 \to B_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Với u = (1, 0, 1), $[u]_{B_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $[u]_{B_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Cho W là không gian con của $\mathbf{R}^4$ sinh bởi các véctơ:

$u_1 = (1, 2, 2, 1)$; $u_2 = (0, 2, 0, 1)$; $u_3 = (-2, 0, -4, 3)$.

a) Chứng minh B = (u_1, u_2, u_3) là một cơ sở của W. Tìm điều kiện để u = (a_1, a_2, a_3, a_4) thuộc W. Khi đó, tìm $[u]_B$.

b) Cho $v_1 = (1, 0, 2, 0)$;

$v_2 = (0, 2, 0, 1)$;

$v_3 = (0, 0, 0, 3)$.

Chứng minh B′ = (v_1, v_2, v_3) cũng là một cơ sở của W. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B′.

Đáp số: a) $2a_1 = a_3$. Khi đó $[u]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{3a_1 - a_2 + 2a_4}{2} \\ \dfrac{5a_2 - 6a_1 - 4a_4}{6} \\ \dfrac{2a_4 - a_2}{6} \end{pmatrix}$

b) $(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.