

KHÔNG GIAN $L^p(\Omega)$

Cho X là một tập hợp khác trống. Cho $\mathfrak{N}$ là một họ khác trống các tập con trong X có các tính chất sau :

$$(D1) \quad \Omega \in \mathfrak{N} .$$

$$(D2) \quad \Omega \setminus A \in \mathfrak{N} \quad \forall A \in \mathfrak{N} .$$

$$(D3) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N} \quad \forall \{A_n\} \in \mathfrak{N} .$$

Lúc đó ta nói $\mathfrak{N}$ là một σ -đại số trong X .

Cho ánh xạ $\mu : \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty]$ có các tính chất sau

(i) (COUNTABLE ADDITIVE) Nếu $\{A_n\}$ là một dãy các phần tử rời nhau trong $\mathfrak{N}$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(ii) có B trong $\mathfrak{N}$ để cho $\mu(B) < \infty$

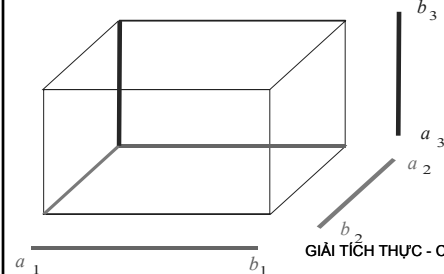
Lúc đó ta nói μ là một *độ đo dương* trên X .

Có một σ -đại số $\mathfrak{N}$ và một độ đo dương μ trên không gian $\mathbb{R}^n$ có các tính chất sau :

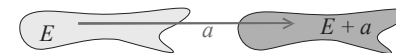
(i) Các tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$ thuộc $\mathfrak{N}$.

$$(ii) \quad \mu([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$$

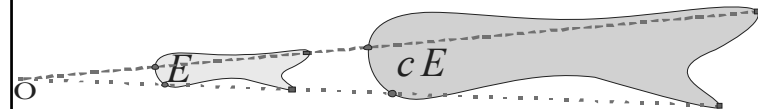
$$\mu((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n).$$



$$(ii) \quad \mu(E + a) = \mu(E) \quad \forall E \in \mathfrak{N}, a \in \mathbb{R}^n.$$



$$(iv) \quad \mu(cE) = |c|^n \mu(E) \quad \forall E \in \mathfrak{N}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



Định nghĩa. Ta gọi $\mathfrak{N}$ và μ lần lượt là σ -đại số Lebesgue và độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$.

Trong giáo trình này $\mathfrak{N}$ và μ luôn luôn là σ -đại số Lebesgue và độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$.

Định lý . Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ với $\mu(E)$ hữu hạn, cho một số dương ε . Lúc đó có một tập compact K và một tập mở V sao cho $K \subset E \subset V$ và $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$.

Định lý . Cho một tập compact K và một tập mở V trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $K \subset V$. Lúc đó có một hàm số liên tục φ từ $\mathbb{R}^n$ vào $[0,1]$ sao cho

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in K, \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus V. \end{cases}$$

Bài toán 1. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ với $\mu(E)$ hữu hạn, cho một số dương ε . Lúc đó có một hàm số liên tục φ từ $\mathbb{R}^n$ vào $[0,1]$ sao cho

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon.$$

Hướng dẫn. Viết rõ bài toán

$$E \text{ đo được trong } \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\mu(E) < \infty \quad (2)$$

$$\varepsilon > 0 \quad (3)$$

Tìm hàm số liên tục φ từ $\mathbb{R}^n$ vào $[0,1]$ sao cho

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_E(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon. \quad (4)$$

Ta viết rõ kết luận:

$$\mu(\{x \in E : \varphi(x) \neq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \setminus E : \varphi(x) \neq 0\}) < \varepsilon \quad (5)$$

Yếu tố “liên tục” trong kết luận liên quan đến các tập hợp đóng và mở, nên ta viết “tập E ” trong các giả thiết ra dạng có liên quan đến các tập đóng và mở:

Có một tập compact K và một tập mở V sao cho

$$K \subset E \subset V \quad (6)$$

$$\mu(V \setminus K) < \varepsilon \quad (7)$$

Tìm các liên hệ giữa “tập compact $K \subset$ tập mở V ” và hàm số liên tục:

Có một tập compact K và một tập mở V sao cho

$$K \subset E \subset V \quad (6)$$

$$\mu(V \setminus K) < \varepsilon \quad (7)$$

Tìm các liên hệ giữa “tập compact $K \subset$ tập mở V ” và hàm số liên tục:

Có một hàm số liên tục η sao cho

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in K, \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus V. \end{cases}$$

Đề ý $\{x \in E : \eta(x) \neq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \setminus E : \eta(x) \neq 0\}$ chứa trong $(E \setminus K) \cup (V \setminus E) \subset V \setminus K$. Chọn $\varphi = \eta$.

Định nghĩa. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, m số thực $c_1, \dots, c_m$, và m tập đo được $A_1, \dots, A_m$ chứa trong Ω . Đặt

$$s(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Ta nói f là một hàm đơn trên Ω .

Định nghĩa. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$. Cho f là một ánh xạ từ Ω vào $[-\infty, \infty]$. Ta nói f là một ánh xạ đo được trên Ω nếu $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{M}$ với mọi số thực a .

Định lý. Cho f là một hàm đo được trên một tập đo được Ω . Lúc đó có một dãy các hàm đơn $\{t_m\}$ trên Ω sao cho

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Định lý. Cho f là một hàm đo được trên một tập đo được Ω trong $\mathbb{R}^n$. Giả sử $f(x) \geq 0$ với mọi x trong Ω . Lúc đó có một dãy các hàm đơn $\{s_m\}$ trên Ω sao cho :

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \dots \leq s_m(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Định nghĩa. Cho $E \in \mathfrak{M}$. Đặt

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \mu(A_k \cap E)$$

và gọi $\int_E s \, d\mu$ là tích phân của s trên E . Tích phân này có thể bằng ∞ .

Định nghĩa. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, cho $E \in \mathfrak{M}$, và f là một hàm đo được từ Ω vào $[0, \infty]$. Đặt $\mathfrak{F}(f)$ là họ các hàm đơn s trên Ω sao cho $0 \leq s \leq f$ và đặt

$$\int_E f \, d\mu = \sup_{s \in \mathfrak{F}(f)} \int_E s \, d\mu$$

Ta gọi $\int_E f \, d\mu$ là tích phân Lebesgue của f trên E với độ đo μ . Tích phân của f có thể bằng ∞ .

Định nghĩa. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, và f là một hàm thực đo được trên Ω .

Lúc đó $|f|$ là một hàm số từ Ω vào $[0, \infty)$. Giả sử

$$\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty.$$

Đặt $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ và

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

Ta gọi $\int_E f d\mu$ là *tích phân Lebesgue* của f trên E với độ đo μ . Tích phân của f là một số thực.

Định lý (hội tụ đơn điệu Lebesgue).

Cho X là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ và $\{f_m\}$ là một dãy ánh xạ đo được từ X vào $[0, \infty]$, f là một ánh xạ từ X vào $[0, \infty]$ và giả sử

$$(i) \quad f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_m(x) \leq \dots \quad \forall x \in X$$

$$(ii) \quad f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \quad \forall x \in X$$

Lúc đó

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} f_m d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X f_m d\mu.$$

Bổ đề Fatou. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, và $\{g_m\}$ là dãy ánh xạ đo được từ Ω vào $[0, \infty]$. Ta có

$$\int_E \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m d\mu \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m d\mu$$

Định lý 6 (hội tụ bị chặn Lebesgue).

Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ và $\{f_m\}$ là một dãy hàm số khả tích trên Ω , f là một hàm số trên X và giả sử có một hàm số g khả tích trên Ω sao cho

$$(i) \quad |f_m(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Lúc đó f khả tích trên Ω và

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_m d\mu \quad \text{và}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_m - f| d\mu = 0.$$

Bài toán 2. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, cho $E \in \mathfrak{M}$, và f là một hàm đo được từ Ω vào $[0, \infty]$. Giả sử $\mu(E) = 0$. Chứng minh

$$\int_E f d\mu = 0$$

$$f \text{ là một hàm đo được từ } \Omega \text{ vào } [0, \infty] \quad (1)$$

$$\mu(E) = 0 \quad (2)$$

$$? \quad \int_E f d\mu = 0 \quad (3)$$

Xét trường hợp đơn giản f là một hàm đơn

$$s(x) = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

$$\int_E s d\mu = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \mu(A_k \cap E) = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \cdot 0 = 0 \quad (3')$$

Liên hệ với phần đã chứng minh, xét hàm f phức tạp hơn một chút $f = g \geq 0$:

Có một dãy hàm đơn $\{s_n\}$ tiến lên từng điểm về g trên Ω . (4)

Liên hệ (4) với yếu tố “tích phân”, ta có định lý hội tụ bị chặn Lebeague

$$\int_E g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E s_n d\mu = 0 \quad (5)$$

Xét hàm f tổng quát. Liên hệ với phần đã chứng minh: $f = f^+ - f^-$.

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = 0$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

18

Bài toán 3. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm đo được từ Ω vào $[0, \infty]$. Giả sử $\int_E f d\mu < \infty$ với mọi $E \in \mathfrak{M}$. Chứng minh

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0$$

Làm rõ ký hiệu “ $f(x) = \infty$ ” : $f(x) \geq \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Vậy

$$\{x \in \Omega : f(x) = \infty\} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}$$

$$\int_E f d\mu = 0 \quad \text{với mọi } E \in \mathfrak{M} \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}) \quad \text{với mọi } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, đặt $E_\alpha = \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}$, tính $\mu(E_\alpha)$ (3)

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

19

$$\int_E f d\mu = 0 \quad \text{với mọi } E \in \mathfrak{M} \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}) \quad \text{với mọi } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, đặt $E_\alpha = \{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\}$, tính $\mu(E_\alpha)$ (3)

Khi có các điều kiện về tích phân của f , để tính độ đo của một tập hợp có dính dáng đến f : xét tích phân của f trên tập đó và ước lượng tích phân đó theo các quan hệ của tập đó đối với f

$$0 = \int_{E_\alpha} f d\mu \geq \int_{E_\alpha} \alpha d\mu = \alpha \mu(E_\alpha) \quad (4)$$

Chọn $\alpha = 1$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

20

Bài toán 4. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, f và g là hai hàm số khả tích trên Ω . Đặt

$$B = \{x \in \Omega: f(x) \neq g(x)\}.$$

Giả sử $\mu(B) = 0$. Cho E là một tập đo được chứa trong Ω , chứng minh

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Đặt $h = f - g$. Ta có $B = \{x \in \Omega: h(x) \neq 0\}$. Bài toán trở thành

$$\mu(\{x \in \Omega: h(x) \neq 0\}) = \mu(B) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Cho } E \text{ đo được } \subset \Omega :? \quad \int_E h d\mu = 0 \quad (2)$$

$$\int_E h d\mu = \int_{E \cap B} h d\mu + \int_{E \setminus B} h d\mu. \quad (2')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

21

Bài toán 5. Cho Ω là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, f và g là hai hàm số khả tích trên Ω . Đặt

$$B = \{x \in \Omega: f(x) \neq g(x)\}.$$

Giả sử với mọi một tập đo được E chứa trong Ω

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Chứng minh $\mu(B) = 0$.

Đặt $h = f - g$. Ta có $B = \{x \in \Omega: h(x) \neq 0\}$. Bài toán trở thành

$$\text{Cho } E \text{ đo được } \subset \Omega \quad \int_E h d\mu = 0 \quad (1)$$

$$? \quad \mu(B) = 0 \quad (2)$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

22

$$\text{Cho } E \text{ đo được } \subset \Omega \quad \int_E h d\mu = 0 \quad (1)$$

$$? \quad \mu(B) = 0 \quad (2)$$

Ta làm rõ (1): $B = \{x \in \Omega: |h(x)| \neq 0\}$ và

$$\{x \in \Omega: |h(x)| \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega: |h(x)| > \frac{1}{n}\}$$

Đặt $C_m = \{x \in \Omega: h(x) > m^{-1}\}$ và $D_m = \{x \in \Omega: -h(x) > m^{-1}\}$ với mọi số nguyên m . Vậy

$$B = (\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m)$$

$$\mu(B) = \mu((\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m)) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(C_m) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu(D_m)$$

$$? \quad \mu(C_m) = \mu(D_m) = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (2')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

$$\text{Cho } E \text{ đo được } \subset \Omega \quad \int_E h d\mu = 0 \quad (1)$$

$$C_m = \{x \in \Omega: h(x) > m^{-1}\} \text{ và } D_m = \{x \in \Omega: -h(x) > m^{-1}\} \quad (3)$$

$$? \quad \mu(C_m) = \mu(D_m) = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (2')$$

$$0 = \int_{C_m} h d\mu \geq \int_{C_m} \frac{1}{m} d\mu = \frac{1}{m} \eta(C_m)$$

$$0 = \int_{D_m} -h d\mu \geq \int_{D_m} \frac{1}{m} d\mu = \frac{1}{m} \eta(D_m)$$

$$\text{Vậy } \mu(C_m) = \mu(D_m) = 0$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

24

Định nghĩa. Đặt $M(\Omega)$ là tập hợp các hàm số thực đo được trên Ω . Cho f và g trong $M(\Omega)$, ta nói $f \sim g$ nếu $\mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0$

Bài toán 6a. Chứng minh quan hệ $\sim$ là quan hệ tương đương trên $M(\Omega)$.

Cho f, g và h trong $M(\Omega)$, chứng minh

$$f \sim f$$

$$f \sim g \Rightarrow g \sim f$$

$$f \sim g \text{ và } g \sim h \Rightarrow f \sim h$$

Chúng ta sẽ chứng minh tính chất truyền

$$f, g \text{ và } h \text{ trong } M(\Omega) \quad (1)$$

$$f \sim g \quad (2)$$

$$g \sim h \quad (3)$$

$$? f \sim h \quad (4)$$

Làm rõ bài toán

$$f, g \text{ và } h \text{ trong } M(\Omega) \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (2')$$

$$\mu(\{x \in \Omega : h(x) - g(x) \neq 0\}) = 0 \quad (3')$$

$$? \mu(\{x \in \Omega : h(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (4')$$

$$f, g \text{ và } h \text{ trong } M(\Omega) \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (2')$$

$$\mu(\{x \in \Omega : h(x) - g(x) \neq 0\}) = 0 \quad (3')$$

$$? \mu(\{x \in \Omega : h(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (4')$$

Biến “ $\neq$ ” thành “ $=$ ”

$$A = \{x \in \Omega : g(x) - f(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (2'')$$

$$B = \{x \in \Omega : h(x) - g(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (3'')$$

$$C = \{x \in \Omega : h(x) - f(x) = 0\} : ? \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (4'')$$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : C, A và B .

Quan hệ của chúng : $A \cap B \subset C$. Chuyển qua yếu tố

còn lại : $(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \supset \Omega \setminus C$ Chuyển qua yếu tố

còn lại : $\mu(\Omega \setminus A) + \mu(\Omega \setminus B) \geq \mu(\Omega \setminus C)$

Bài toán 6b. Cho f, g, h và k trong $M(\Omega)$. Giả sử $f \sim g$ và $h \sim k$. Chứng minh $(f+h) \sim (g+k)$.

$$\mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : k(x) - h(x) \neq 0\}) = 0 \quad (2)$$

$$? \mu(\{x \in \Omega : [h(x) + f(x)] - [g(x) + k(x)] \neq 0\}) = 0 \quad (3)$$

Biến “ $\neq$ ” thành “ $=$ ”

$$A = \{x \in \Omega : g(x) - f(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1')$$

$$B = \{x \in \Omega : k(x) - h(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

$$C = \{x \in \Omega : [h(x) + f(x)] - [g(x) + k(x)] = 0\} :$$

$$? \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (3')$$

$A = \{x \in \Omega : g(x) - f(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1')$
 $B = \{x \in \Omega : k(x) - h(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$
 $C = \{x \in \Omega : [h(x) + f(x)] - [g(x) + k(x)] = 0\} :$
 $\mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (3')$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : C, A và B .
 Quan hệ của chúng : $A \cap B \subset C$. Chuyển qua yếu tố còn lại : $(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \supset \Omega \setminus C$. Chuyển qua yếu tố còn lại : $\mu(\Omega \setminus A) + \mu(\Omega \setminus B) \geq \mu(\Omega \setminus C)$

Bài toán 6c. Cho f và g trong $M(\Omega)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Giả sử $f \sim g$. Chứng minh $(\alpha f) \sim (\alpha g)$.

Bài toán 6d. Cho f, g, h và k trong $M(\Omega)$. Giả sử $f \sim g$ và $h \sim k$. Chứng minh $(f, h) \sim (g, k)$.

29

Bài toán 6e. Cho f, g, h và k trong $M(\Omega)$. Giả sử $f \sim g, h \sim k$ và $\mu(\{x \in \Omega : f(x) > h(x)\}) = 0$. Chứng minh $\mu(\{x \in \Omega : g(x) > k(x)\}) = 0$

$\mu(\{x \in \Omega : g(x) - f(x) \neq 0\}) = 0 \quad (1)$
 $\mu(\{x \in \Omega : k(x) - h(x) \neq 0\}) = 0 \quad (2)$
 $\mu(\{x \in \Omega : f(x) > h(x)\}) = 0 \quad (3)$
 $\mu(\{x \in \Omega : g(x) > k(x)\}) = 0 \quad (4)$

Biến “ $\neq$ ” thành “ $=$ ”

$A = \{x \in \Omega : g(x) - f(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1')$
 $B = \{x \in \Omega : k(x) - h(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$

30

$A = \{x \in \Omega : g(x) - f(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1')$
 $B = \{x \in \Omega : k(x) - h(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$
 $C = \{x \in \Omega : f(x) \leq h(x)\} : \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (3')$
 $D = \{x \in \Omega : g(x) \leq k(x)\} : \mu(\Omega \setminus D) = 0 \quad (4')$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : D, A, B và C . Quan hệ của chúng : $A \cap B \cap C \subset D$. Chuyển qua yếu tố còn lại : $(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \cup (\Omega \setminus C) \supset \Omega \setminus D$. Chuyển qua yếu tố còn lại :

$\mu(\Omega \setminus A) + \mu(\Omega \setminus B) + \mu(\Omega \setminus C) \geq \mu(\Omega \setminus D)$

31

Định nghĩa. Cho f trong $M(\Omega)$. Đặt

$\tilde{f} = \{g \in M(\Omega) : g \sim f\}, N(\Omega) = \{\tilde{h} : h \in M(\Omega)\}.$

Định nghĩa. Cho một số thực α, f và g trong $M(\Omega)$. Đặt $h = f + g, k = \alpha f$ và $u = f \cdot g$. Ta ký hiệu

$\tilde{f} + \tilde{g} = \tilde{h},$
 $\alpha \tilde{f} = \tilde{k},$
 $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = \tilde{u}.$

Bài toán 7. Chứng minh $N(\Omega)$ là một không gian vectơ với các phép cộng và nhân nói trên.

Hướng dẫn. Dùng các bài toán 6a, 6b và 6c.

Định nghĩa. Cho u và v trong $N(\Omega), f \in u$ và $g \in v$. Ta nói $u \leq v$ nếu $\mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0$.

32

Định nghĩa. Cho $u \in N(\Omega)$, $E \in \mathfrak{N}$ và $E \subset \Omega$. Ta ký hiệu

$$\int_E u d\mu = \begin{cases} \int_E s d\mu & \text{nếu } s \in u \text{ và } s \text{ là một hàm đơn} \\ \int_E g d\mu & \text{nếu } g \in u \text{ và } g \geq 0 \text{ trên } \Omega \\ \int_E h d\mu & \text{nếu } h \in u \text{ và } h \text{ khả tích trên } \Omega. \end{cases}$$

Trong trường hợp cuối, ta nói u khả tích trên Ω .

Định nghĩa. Giả sử với mọi x trong Ω có một tính chất $P(x)$. Ta nói P đúng hầu hết khắp nơi trên Ω nếu

$$\mu(\{x \in \Omega : P(x) \text{ không đúng}\}) = 0$$

Cho f và g trong $M(\Omega)$, lúc đó $f \sim g$ có nghĩa

$$f(x) = g(x) \quad \text{h.h.k.n. trên } \Omega.$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

33

Bài toán 8. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$. Cho f_m và g_m trong u_m . Giả sử

$$\mu(\{x \in \Omega : \{f_m(x)\} \text{ không hội tụ}\}) = 0$$

Chứng minh $\mu(\{x \in \Omega : \{g_m(x)\} \text{ không hội tụ}\}) = 0$.

$$\mu(\{x \in \Omega : g_m(x) - f_m(x) \neq 0\}) = 0 \quad (1)$$

$$\mu(\{x \in \Omega : \{f_m(x)\} \text{ không hội tụ}\}) = 0 \quad (2)$$

$$? \mu(\{x \in \Omega : \{g_m(x)\} \text{ không hội tụ}\}) = 0 \quad (3)$$

Biến “ $\neq$ ” thành “ $=$ ” và “không hội tụ” thành “hội tụ”

$$A_m = \{x \in \Omega : g_m(x) - f_m(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A_m) = 0 \quad (1')$$

$$B = \{x \in \Omega : \{f_m(x)\} \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

$$C = \{x \in \Omega : \{g_m(x)\} \text{ hội tụ}\} : ? \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (2')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

34

$$A_m = \{x \in \Omega : g_m(x) - f_m(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A_m) = 0 \quad (1')$$

$$B = \{x \in \Omega : \{f_m(x)\} \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

$$C = \{x \in \Omega : \{g_m(x)\} \text{ hội tụ}\} : ? \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (2')$$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : C , A_m và B .

Quan hệ của chúng : $(\cap A_m) \cap B \subset C$. Chuyển qua yếu tố còn lại : $(\Omega \setminus \cap A_m) \cup (\Omega \setminus B) \supset \Omega \setminus C$. Chuyển qua

$$\text{yếu tố còn lại : } \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\Omega \setminus A_m) + \mu(\Omega \setminus B) \geq \mu(\Omega \setminus C)$$

Định nghĩa. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$ và u trong $N(\Omega)$. Ta nói $\{u_m\}$ hội tụ về u trên Ω nếu có f trong u và f_m trong u_m sao cho $\{f_m\}$ hội tụ về f h.h.m.n. trên Ω .

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

35

Bài toán 9. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$. Cho f_m và g_m trong u_m . Chứng minh

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \sim \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n$$

$$\mu(\{x \in \Omega : g_m(x) - f_m(x) \neq 0\}) = 0 \quad (1)$$

$$? \mu(\{x \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n \neq 0\}) = 0 \quad (3)$$

Biến “ $\neq$ ” thành “ $=$ ”

$$A_m = \{x \in \Omega : g_m(x) - f_m(x) = 0\} : \mu(\Omega \setminus A_m) = 0 \quad (1')$$

$$B = \{x \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n = 0\} :$$

$$? \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

36

$$A_m = \{x \in \Omega: g_m(x) - f_m(x) = 0\}: \mu(\Omega \setminus A_m) = 0 \quad (1')$$

$$B = \{x \in \Omega: \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n - \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n = 0\} : \\ ? \quad \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : B và A_m .
Quan hệ của chúng : $\cap A_m \subset B$. Chuyển qua yếu tố còn lại : $(\Omega \setminus \cap A_m) \supset \Omega \setminus B$. Chuyển qua yếu tố còn lại :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(\Omega \setminus A_m) \geq \mu(\Omega \setminus B)$$

Định nghĩa. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$, f_m trong u_m và $g = \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n$. Ta ký hiệu

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \tilde{g}$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

37

Bài toán 10. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$ và u trong $N(\Omega)$. Cho $f \in u$, f_m và g_m trong u_m với mọi m . Đặt

$$A = \{x \in \Omega: f_m(x) \rightarrow f(x)\}$$

$$B = \{x \in \Omega: 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq g_m(x) \leq \dots\}$$

$$C = \{x \in \Omega: 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_m(x) \leq \dots\}$$

Giả sử $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ và $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Chứng minh $\mu(\Omega \setminus C) = 0$.

$$\mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1)$$

$$\mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2)$$

$$D_m = \{x \in \Omega: f_m(x) - g_m(x) \neq 0\}: \mu(\Omega \setminus D_m) = 0 \quad (3)$$

$$? \quad \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (4)$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

38

$$\mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1)$$

$$\mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2)$$

$$D_m = \{x \in \Omega: f_m(x) - g_m(x) \neq 0\}: \mu(\Omega \setminus D_m) = 0 \quad (3)$$

$$? \quad \mu(\Omega \setminus C) = 0 \quad (4)$$

Tìm các yếu tố “giống giống khác khác” : C , A , B và D_m . Quan hệ của chúng : $A \cap B \cap (\cap D_m) \subset C$.
Chuyển qua yếu tố còn lại :

$$(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \cup (\Omega \setminus \cap D_m) \supset \Omega \setminus C \text{ hay}$$

$$(\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \cup (\cup \Omega \setminus D_m) \supset \Omega \setminus C$$

Chuyển qua yếu tố còn lại :

$$\mu(\Omega \setminus A) + \mu(\Omega \setminus B) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\Omega \setminus D_m) \geq \mu(\Omega \setminus C) \quad 39$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

Bài toán 11. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$ và u trong $N(\Omega)$. Giả sử

(i) $\{u_m\}$ hội tụ về u trên Ω .

(ii) $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_m \leq \dots$ trên Ω .

Chứng minh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m dx = \int_{\Omega} u dx$$

Theo bài tập 10, có $f \in u$, $f_m \in u_m$ với mọi m , sao cho

$$A = \{x \in \Omega: f_m(x) \rightarrow f(x)\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (1)$$

$$B = \{x \in \Omega: 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_m(x) \leq \dots\} : \\ \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2)$$

Bài toán trở thành

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

40

$A = \{x \in \Omega : f_m(x) \rightarrow f(x)\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0$	(1)
$B = \{x \in \Omega : 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_m(x) \leq \dots\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0$	(2)
$\int_{\Omega} u_m d\mu = \int_{\Omega} f_m d\mu \quad \forall m$	(3)
$\int_{\Omega} u d\mu = \int_{\Omega} f d\mu \quad \forall m$	(4)
? $\int_{\Omega} u d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m d\mu$	(5)
Bỏ $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ và $\mu(\Omega \setminus B) = 0$: đặt	
$g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in A \cup B, \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus (A \cup B). \end{cases}$	
$g_m(x) = \begin{cases} f_m(x) & \forall x \in A \cup B, \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus (A \cup B). \end{cases}$	

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

41

$g_m(x) \rightarrow g(x) \quad \forall x \in \Omega$	(1')
$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq g_m(x) \leq \dots \quad \forall x \in \Omega$	(2')
$\int_{\Omega} u_m d\mu = \int_{\Omega} g_m d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$	(3')
$\int_{\Omega} u d\mu = \int_{\Omega} g d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$	(4')
? $\int_{\Omega} u d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m d\mu$	(5)
Dùng Định lý Hội tụ đơn điệu	
? $\int_{\Omega} g d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_m d\mu$	(6)
Từ (3'), (4') và (6) ta có (5)	

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

42

Bài toán 12. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$. Giả sử $u_m \geq 0$ với mọi số nguyên m . Chứng minh	
$\int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} u_m dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m dx$	
$\exists f_m \in u_m, A_m = \{x \in \Omega : f_m(x) \geq 0\} : \mu(\Omega \setminus A_m) = 0$	(1)
$\int_{\Omega} u_m d\mu = \int_{\Omega} f_m d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$	(2)
$\int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} u_m dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m dx$	(3)
Bỏ $\mu(\Omega \setminus A) = 0$: đặt	
$g_m(x) = \begin{cases} f_m(x) & \forall x \in A, \\ 0 & \forall x \in \Omega \setminus A. \end{cases}$	
$\exists g_m \in u_m : g_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$	(1')
$\int_{\Omega} u_m d\mu = \int_{\Omega} g_m d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$	(2')

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

(2')

$\exists g_m \in u_m : g_m(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$	(1')
$\int_{\Omega} u_m d\mu = \int_{\Omega} g_m d\mu \quad \forall m \in \mathbb{N}$	(2')
$\int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} u_m dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m dx$	(3)
Dùng Bổ đề Fatou:	
$\int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_m dx$	

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

44

Bài toán 13. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$ và u trong $N(\Omega)$. Giả sử có v trong $N(\Omega)$

- (i) $\{u_m\}$ hội tụ về u trên Ω .
- (ii) $|u_m| \leq v$ trên $\Omega, \forall m \in \mathbb{N}$
- (iii) $\int_{\Omega} v dx < \infty$.

Chứng minh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m dx = \int_{\Omega} u dx$$

và $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_m - u| dx = 0$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

45

Bài toán 14. Cho $u \in N(\Omega)$ và khả tích trên Ω . Giả sử

$$\int_{\Omega} |u| dx = 0.$$

Chứng minh $u = \tilde{0}$.

$$\exists f \in u, f \text{ khả tích trên } \Omega : \int_{\Omega} |f| dx = \int_{\Omega} |u| dx = 0. \quad (1)$$

BT 5: “ g khả tích trên Ω , $\int_E g dx = 0$ với mọi $E \in \mathfrak{N}$, $E \subset \Omega$ ” $\Rightarrow$ “ $g \sim 0$ ”

$$\int_E f dx = 0 \quad \text{với mọi } E \in \mathfrak{N} \quad (2)$$

Liên hệ các yếu tố

$$\int_{\Omega} -|f| dx \leq \int_E -|f| dx \leq \int_E f dx \leq \int_E |f| dx \leq \int_{\Omega} |f| dx \quad (3)$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

46

Định nghĩa. Cho $p \in [1, \infty)$. Ta ký hiệu $L^p(\Omega)$ là tập các lớp hàm u trong $N(\Omega)$ sao cho

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

Ta đặt

$$\|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |u|^p dx \right\}^{1/p} \quad \forall u \in L^p(\Omega)$$

Định nghĩa. Ta ký hiệu $L^\infty(\Omega)$ là tập các lớp hàm u trong $N(\Omega)$ sao cho có f trong u và một số thực M để cho $\mu(\{x : |f(x)| > M\}) = 0$

Ta đặt

$$\|u\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\} \quad \forall u \in L^\infty(\Omega), f \in u.$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

47

Bài toán 15. Cho p trong $[1, \infty]$, $u \in L^p(\Omega)$ và $f \in u$.

Chứng minh $\mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0$.

Bài toán 16. Cho $u \in L^\infty(\Omega)$ và $f \in u$. Chứng minh

$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|u\|_\infty\}) = 0$.

$$\|u\|_\infty = \inf \{M \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (1)$$

$$? \quad \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|u\|_\infty\}) = 0 \quad (2)$$

Tìm các yếu tố “giống khác khác” : M và $\|u\|_\infty$. Làm chúng giống nhau: có một dãy $\{M_k\}$ trong tập hợp $\{M \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0\}$ hội tụ về $\|u\|_\infty$. Vậy với mọi số nguyên n có k sao cho

$$\|u\|_\infty \leq M_k < \|u\|_\infty + n^{-1}.$$

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|u\|_\infty + n^{-1}\}) = 0 \quad (\Phi')$$

$$\mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > \|u\|_\infty + n^{-1}\}) = 0 \quad (1')$$

$$? \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > \|u\|_\infty\}) = 0 \quad (2)$$

Viết bài toán cùng dạng

$$\{x \in \Omega: |f(x)| > \|u\|_\infty\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in \Omega: |f(x)| > \|u\|_\infty + \frac{1}{m}\} \quad (3)$$

Từ (1') và (3), ta có (2)

Bài tập 17. Chứng minh $\|\cdot\|_\infty$ là một chuẩn trên $L^\infty(\Omega)$.

Cho $u, v, w \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\exists f \in u, \exists M: \mu(\{x: |f(x)| > M\}) = 0 \quad (1)$$

$$\|u\|_\infty = \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (2)$$

$$? \|v\|_\infty \geq 0 \quad (3)$$

$$? \|v\|_\infty = 0 \Leftrightarrow v = \tilde{0} \quad (4)$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

$$? \|\alpha v\|_\infty = |\alpha| \|v\|_\infty \quad (5)$$

$$? \|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad (6)$$

Ta chứng minh (5) và (6)

Chứng minh (5)

Cho $f \in v$

$$\|v\|_\infty = \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (1)$$

$$\|\alpha v\|_\infty = \inf\{K \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha f(x)| > K\}) = 0\} \quad (2)$$

$$\|\alpha v\| \leq |\alpha| \|v\| \quad (3)$$

$$\|\alpha v\| \geq |\alpha| \|v\| \quad (4)$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

50

Viết rõ bài toán

$$\inf\{K \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha f(x)| > K\}) = 0\} \leq |\alpha| \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (3')$$

$$\inf\{K \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha f(x)| > K\}) = 0\} \geq |\alpha| \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (4')$$

Viết bài toán cùng dạng

$$\inf\{K \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha f(x)| > K\}) = 0\} \leq \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha| |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (3')$$

$$\inf\{K \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha f(x)| > K\}) = 0\} \geq \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |\alpha| |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (4')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

51

Chứng minh (6)

Cho $f \in v$ và $g \in w$

$$\|v\|_\infty = \inf\{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (1)$$

$$\|w\|_\infty = \inf\{K \geq 0: \mu(\{s \in \Omega: |g(s)| > K\}) = 0\} \quad (2)$$

$$\|v + w\|_\infty = \inf\{L \geq 0: \mu(\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > L\}) = 0\} \quad (3)$$

$$\|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad (4)$$

Viết rõ bài toán

$$\inf\{L \geq 0: \mu(\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > L\}) = 0\} \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \quad (4')$$

$$? \mu(\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > \|v\|_\infty + \|w\|_\infty\}) = 0 \quad (4'')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1

52

$$\|v\|_\infty = \inf \{M \geq 0: \mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > M\}) = 0\} \quad (1)$$

$$\|w\|_\infty = \inf \{K \geq 0: \mu(\{s \in \Omega: |g(s)| > K\}) = 0\} \quad (2)$$

$$? \quad \mu(\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > \|v\|_\infty + \|w\|_\infty\}) = 0 \quad (4'')$$

Viết bài toán cùng dạng

$$\mu(\{x \in \Omega: |f(x)| > \|v\|_\infty\}) = 0 \quad (1')$$

$$\mu(\{s \in \Omega: |g(s)| > \|w\|_\infty\}) = 0 \quad (2')$$

$$? \quad \mu(\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > \|v\|_\infty + \|w\|_\infty\}) = 0 \quad (4'')$$

Viết quan hệ của các yếu tố “giống giống khác khác”

$$\{t \in \Omega: |f(t) + g(t)| > \|v\|_\infty + \|w\|_\infty\} \subset$$

$$\{x \in \Omega: |f(x)| > \|v\|_\infty\} \cup \{s \in \Omega: |g(s)| > \|w\|_\infty\}$$

53

Bài tập 18. Chứng minh $\|\cdot\|_1$ là một chuẩn trên $L^1(\Omega)$.
Cho $u, v, w \in L^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u| d\mu \quad (1)$$

$$? \|v\|_1 \geq 0 \quad (2)$$

$$? \|v\|_1 = 0 \Leftrightarrow v = \tilde{0} \quad (3)$$

$$? \|\alpha v\|_1 = |\alpha| \|v\|_1 \quad (4)$$

$$? \|v + w\|_1 \leq \|v\|_1 + \|w\|_1 \quad (5)$$

Ta chứng minh (5). Viết rõ bài toán

$$\int_\Omega |v + w| d\mu \leq \int_\Omega |v| d\mu + \int_\Omega |w| d\mu \quad (5')$$

$$\int_\Omega |v + w| d\mu \leq \int_\Omega [|v| + |w|] d\mu \quad (5'')$$

54

$$\int_\Omega |v + w| d\mu \leq \int_\Omega [|v| + |w|] d\mu \quad (5'')$$

Xét liên quan giữa các yếu tố “giống giống khác khác”: $|v + w| \leq |v| + |w|$.

Định lý (Hölder) Cho p và q trong $(1, \infty)$, f trong $L^p(\Omega)$ và g trong $L^q(\Omega)$ sao cho $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Lúc đó

$$|\int_\Omega fg dx| \leq \{|\int_\Omega |f|^p dx|\}^{1/p} \{|\int_\Omega |g|^q dx|\}^{1/q}$$

Định lý (Minkowski) Cho p trong $[1, \infty)$, f và g trong $L^p(E)$. Lúc đó

$$\{|\int_\Omega |f + g|^p dx|\}^{1/p} \leq \{|\int_\Omega |f|^p dx|\}^{1/p} + \{|\int_\Omega |g|^p dx|\}^{1/p}$$

Bài toán 19. Cho p trong $(1, \infty)$, chứng minh chứng minh $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ là một không gian định chuẩn.

55

Định nghĩa. Cho $\{u_m\}$ là một dãy trong $N(\Omega)$ và $f_m \in u_m$ với mọi số nguyên m . Đặt $s_n = f_1 + \dots + f_n$ với mọi số nguyên n . Nếu $\{s_n\}$ hội tụ về s trong Ω . Ta đặt

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = \tilde{s}$$

Bài toán 19. Cho p trong $[1, \infty]$ và $\{u_k\}$ trong $L^p(\Omega)$. Giả sử $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ hội tụ về u trong $L^p(\Omega)$.

Chứng minh

$$\|u\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

Đặt $v_n = u_1 + \dots + u_n$ với mọi số nguyên n .

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\|u - v_n\|_p \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad (1)$

$$\|u\|_p = \left\| \sum_{m=1}^{\infty} u_m \right\|_p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_p \quad (2)$$

56

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\|u - v_n\|_p \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$ (1)

$$\|u\|_p = \left\| \sum_{m=1}^{\infty} u_m \right\|_p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_p \quad (2)$$

Liên kết các yếu tố của bài toán

$$\begin{aligned} \|u\|_p &\leq \|u - v_n\|_p + \|v_n\|_p \leq \varepsilon + \left\| \sum_{m=1}^n u_m \right\|_p \\ &\leq \varepsilon + \sum_{m=1}^n \|u_m\|_p \leq \varepsilon + \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_p \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad (3) \end{aligned}$$

Bài tập 20. Cho p trong $[1, \infty)$ và một dãy $\{u_k\}$ và một u trong $L^p(\Omega)$. Giả sử có $g \in L^p(\Omega)$, $f \in u$ và $f_k \in u_k$ với mọi k sao cho

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) &= f(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ |f_m(x)| &\leq g(x). \end{aligned}$$

$$\text{Chứng minh} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_m - u|^p dx = 0.$$

Viết bài toán cùng dạng: đặt $h_m = f_m - f$, $v_m = u_m - u$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) &= 0 \quad \forall x \in \Omega, \\ |h_m(x)| &\leq 2g(x). \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_m|^p dx = 0$$

Bài tập 21a. Cho một dãy $\{u_k\}$ trong $L^\infty(\Omega)$ và $f_k \in u_k$ với mọi k . Giả sử $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty$.

Chứng minh $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ hội tụ h.h.m.n. trên Ω , và có v trong $L^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=1}^m u_k \right| \leq v \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$A_k = \{x \in \Omega : |f_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty\} : \mu(\Omega \setminus A_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty. \quad (2)$$

$$A = \{x \in \Omega : \{f_k(x)\} \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (3)$$

Liên hệ các yếu tố “giống giống khác khác”:

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$. Viết cùng dạng với các yếu tố khác

Bài tập 21b. Cho một dãy $\{u_k\}$ trong $L^1(\Omega)$ và $f_k \in u_k$ với mọi k . Giả sử $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_\infty < \infty$.

Chứng minh $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ hội tụ h.h.m.n. trên Ω , và có v trong $L^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=1}^m u_k \right| \leq v \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| d\mu < \infty \quad (1)$$

$$A = \{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (2)$$

Viết bài toán cùng dạng :

$$B = \{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|(x) \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0$$

$$B = \{x \in \Omega : \{\sum_{k=1}^n |f_k|(x)\} \text{ hội tụ}\} : \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| d\mu < \infty \quad (1)$$

$$B = \{x \in \Omega : \{\sum_{k=1}^n |f_k|(x)\} \text{ hội tụ}\} : ? \quad \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

Đặt $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k|(x) : 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq g_n(x) \uparrow$
 Dùng định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n |f_k| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} |f_k| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| d\mu$$

Vậy $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ khả tích và ta có (2').

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1 61

Bài tập 21c. Cho $p \in (1, \infty)$, một dãy $\{u_k\}$ trong $L^p(\Omega)$ và $f_k \in u_k$ với mọi k . Giả sử $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p < \infty$.
 Chứng minh $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ hội tụ h.h.m.n. trên Ω , và có v trong $L^p(\Omega)$ sao cho

$$\left| \sum_{k=1}^m u_k \right| \leq v \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} < \infty \quad (1)$$

$$A = \{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ hội tụ}\} : ? \quad \mu(\Omega \setminus A) = 0 \quad (2)$$

Viết bài toán cùng dạng :

$$B = \{x \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|(x) \text{ hội tụ}\} : ? \quad \mu(\Omega \setminus B) = 0$$

$$B = \{x \in \Omega : \{\sum_{k=1}^n |f_k|(x)\} \text{ hội tụ}\} : ? \quad \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1 62

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} < \infty \quad (1)$$

$$\left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n |f_k| \right)^p d\mu \right\}^{1/p} \leq \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p \quad (3)$$

$$B = \{x \in \Omega : \{\sum_{k=1}^n |f_k|(x)\} \text{ hội tụ}\} : ? \quad \mu(\Omega \setminus B) = 0 \quad (2')$$

Đặt $g_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n |f_k|(x) \right)^p : 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \leq g_n(x) \uparrow$
 Dùng định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\}^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^n |f_k| \right\}^p d\mu$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} \right\}^p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} |f_k|^p d\mu \right\}^{1/p} \right\}^p$$

Vậy $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\}^p$ khả tích và ta có (2').

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1 63

Bài tập 21d. Cho p trong $[1, \infty]$ và một dãy Cauchy $\{v_k\}$ trong $L^p(\Omega)$. Chứng minh $\{v_k\}$ hội tụ trong $L^p(\Omega)$.

Có dãy con $\{v_{k_m}\}$ của $\{v_k\}$ sao cho $\|v_{k_{m+1}} - v_{k_m}\|_p \leq 2^{-m}$ với mọi số nguyên m . Đặt $u_m = v_{k_{m+1}} - v_{k_m}$ với mọi số nguyên m . Theo các bài tập trước $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ hội tụ về u trong $L^p(\Omega)$. Vì $v_{k_{m+1}} = v_{k_1} + \sum_{k=1}^m u_k$ nên $\{v_{k_m}\}$ hội tụ về $v_{k_1} + u$ trong $L^p(\Omega)$.

GIẢI TÍCH THỰC - CH 1 64

Bài toán 22. Cho p trong $[1, \infty)$ và một dãy $\{v_m\}$ hội tụ về v trong $L^p(\Omega)$. Chứng minh có một dãy con $\{v_{m_k}\}$ của $\{v_m\}$ và w trong $L^p(\Omega)$ sao cho $|v_{m_k}| \leq w$ trên Ω .

H.D. Chọn $\{v_{m_k}\}$ như trong bài toán 21c. Đặt

$$w = |v_{k_1}| + \sum_{m=1}^{\infty} |v_{k_{m+1}} - v_{k_m}|$$

Bài toán 23. Chứng minh $L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng sau:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Định lý. Cho p trong $[1, \infty)$. Đặt

$$S = \{u \in L^p(\Omega) : \text{có hàm đơn } s \in u\}.$$

Chứng minh S trù mật trong $L^p(\Omega)$.

H.D. Cho $v \in L^p(\Omega)$, chứng minh có một dãy $\{s_m\}$ trong S hội tụ về v trong $L^p(\Omega)$. Xét trường hợp $v \geq 0$. Dùng Định lý 4 và bài tập 20.

Định lý. Cho p trong $[1, \infty)$. Đặt

$$C = \{u \in L^p(\Omega) : \text{có hàm liên tục } f \in u\}.$$

Chứng minh C trù mật trong $L^p(\Omega)$.

H.D. Cho $v \in S$. Dùng bài toán 1 chứng minh có một dãy $\{f_m\}$ trong C hội tụ về v trong $L^p(\Omega)$.

Định nghĩa. Đặt $C_c(\mathbb{R}^n)$ là tập hợp các hàm số thực liên tục f trên $\mathbb{R}^n$ sao cho có một tập compact K_f chứa tập $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

Định lý. Cho p trong $[1, \infty)$. Đặt

$$C_c = C \cap C_c(\mathbb{R}^n)$$

Chứng minh C_c trù mật trong $L^p(\Omega)$.

H.D. Dùng bài toán 1, chứng minh có một hàm số thực liên tục g_m từ $\mathbb{R}^n$ vào $[0, 1]$ sao cho

$$g_m(x) = \begin{cases} 1 & \forall x, \|x\| \leq m, \\ 0 & \forall x, \|x\| > m+1. \end{cases}$$

Cho $f \in C$. Đặt $f_m = g_m f$. Áp dụng bài toán 20.

Định lý . Cho $p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ với $p^{-1} + q^{-1} = 1$, và T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $L^p(\Omega)$ vào $\mathbb{R}$. Lúc đó có duy nhất một $u \in L^q(\Omega)$ sao cho

$$T(v) = \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in L^p(\Omega),$$

$$\|T\| = \|u\|_q$$

Định lý . Cho $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ với $p^{-1} + q^{-1} = 1$, và $\{u_m\}$ là một dãy bị chặn trong $L^p(\Omega)$. Lúc đó có u trong $L^p(\Omega)$ và một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{m_k} v dx = \int_{\Omega} uv dx \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Bài toán 24. Cho $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và α là một số thực khác không. Cho $f \in u$, đặt $g(x) = f(\alpha x)$ với mọi x trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh g khả tích và

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu = |\alpha|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Hướng dẫn. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ với $\mu(E) < \infty$. Xét trường hợp f là hàm đặc trưng của E . Chứng minh g là hàm đặc trưng của $\alpha^{-1}E$.

Bài toán 25. Cho $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và a là một vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Cho $f \in u$, đặt $g(y) = f(a - y)$ với mọi y trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh g khả tích và

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Hướng dẫn. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ với $\mu(E) < \infty$. Xét trường hợp f là hàm đặc trưng của E . Chứng minh g là hàm đặc trưng của $(a - E)$.

Bài tập 26. Cho $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và ε là một số thực dương. Chứng minh có một số thực dương δ sao cho với mọi tập đo được E với $\mu(E) < \delta$ thì

$$\int_E |u| d\mu < \varepsilon.$$

Hướng dẫn. Xét các trường hợp f là hàm đặc trưng, hàm đơn và hàm không âm.

Bài toán 27. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$ với $\mu(E) < \infty$, và r và s trong $[1, \infty)$ sao cho $r < s$. Chứng minh $L^s(E) \subset L^r(E)$.

Hướng dẫn. Đặt $p = r^{-1}s$ và $q = (1 - s^{-1}r)^{-1}$. Cho $u \in L^s(E)$, $f \in u$ và g là hàm đặc trưng của E . Áp dụng bất đẳng thức Holder cho $|f|^r$ và g .

Bài toán 28. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p(E)$ và $f \in u$. Giả sử

$$\int_E f g d\mu = 0 \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

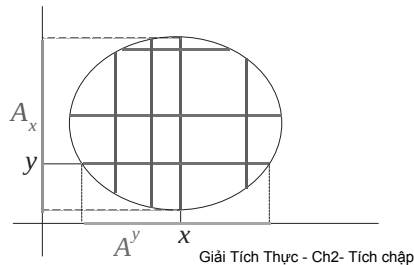
Chứng minh $f = 0$ h.h.m.n trên E .

Hướng dẫn. Dùng bất đẳng thức Hölder, chứng minh đẳng thức trên với g là một hàm đặc trưng của một tập đo được F với $\mu(F) < \infty$.

Bài toán 29. Cho E là một tập đo được trong $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $u \in L^p(E)$ và $f \in u$. Đặt $g(x) = f(x)$ nếu $x \in E$ và $g(x) = 0$ nếu $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Chứng minh $|g|^p$ khả tích.⁷²

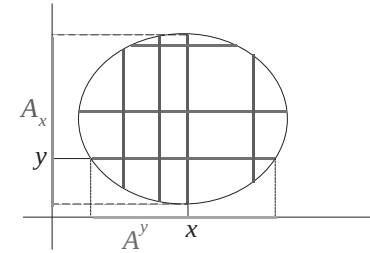
TÍCH CHẬP

Chúng ta sẽ đồng nhất $\mathbb{R}^{m+n}$ với $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Cho A là một tập con trong $\mathbb{R}^{m+n}$ và f là một hàm thực trên A . Với mỗi $x \in \mathbb{R}^m$ và $y \in \mathbb{R}^n$ ta đặt $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$, $A^y = \{x : (x, y) \in A\}$, $f_x(y) = f(x, y)$ nếu $y \in A_x$, và $f^y(x) = f(x, y) \quad \forall x \in A^y$.



Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

1

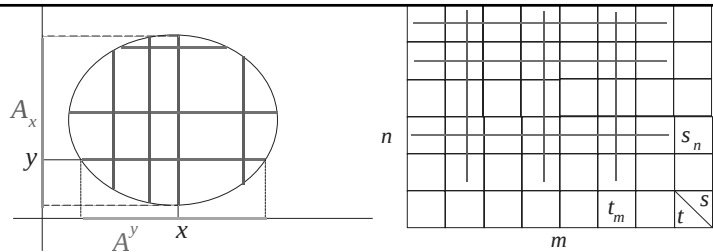


Định lý. Cho f là một hàm số thực Lebesgue đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Lúc đó có A và B đo được có độ đo bằng 0 trên $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^n$ sao cho :

- (i) f_x là một hàm số đo được trên $\mathbb{R}^n$ với mọi x trong $\mathbb{R}^m \setminus A$ và
- (ii) f^y là một hàm số đo được trên $\mathbb{R}^m$ với mọi y trong $\mathbb{R}^n \setminus B$.

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

2

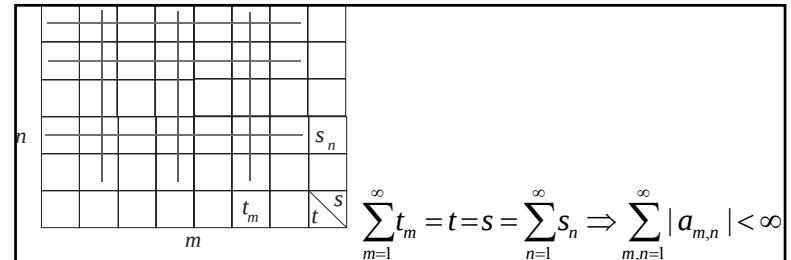


$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} t_m = t = s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

Định lý (Fubini) Cho f là một hàm số không âm đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Lúc đó

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_x d\mu_n \right] d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f^y d\mu_m \right] d\mu_n.$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập



$$\sum_{m=1}^{\infty} t_m = t = s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty$$

Định lý (Tonelli). Cho g là một hàm số thực đo được trên $\mathbb{R}^{m+n}$ sao cho

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g|_x d\mu_n \right] d\mu_m < \infty.$$

Lúc đó g khả tích trên $\mathbb{R}^{m+n}$.

Chiều ngược của định lý trên chỉ gần đúng như sau.

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

4

Định lý (Fubini) Cho g là một hàm khả tích trên $\mathbb{R}^{m+n}$. Lúc đó

- (i) g_x khả tích trên $\mathbb{R}^n$ với hầu hết x trong $\mathbb{R}^m$.
- (ii) g_y khả tích trên $\mathbb{R}^m$ với hầu hết y trong $\mathbb{R}^n$.
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^{m+n}} g d\mu_{m+n} = \int_{\mathbb{R}^m} [\int_{\mathbb{R}^n} g_x d\mu_n] d\mu_m = \int_{\mathbb{R}^n} [\int_{\mathbb{R}^m} g_y d\mu_m] d\mu_n$

Bài toán 1. Cho h là một hàm số đo được trên $\mathbb{R}^n$. Đặt $k(x,y) = h(y)$ với mọi (x,y) trong $\mathbb{R}^{n+n}$. Chứng minh k đo được trong $\mathbb{R}^{n+n}$.

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$ đo được (1)

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : k(x,y) > \alpha\}$ đo được (2)

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

5

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$ đo được (1)

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : k(x,y) > \beta\}$ đo được (2)

Viết bài toán cùng dạng

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : h(x) > \beta\}$ đo được

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \beta\} \times \mathbb{R}^n$ đo được (2')

Bài toán 2. Cho $p \in [1, \infty)$ và h trong $L^p(\mathbb{R}^n)$. Đặt $k(x,y) = h(x-y)$ với mọi (x,y) trong $\mathbb{R}^{n+n}$. Chứng minh k đo được trong $\mathbb{R}^{n+n}$.

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$ đo được (1)

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : k(x,y) > \beta\}$ đo được (2)

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

6

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$ đo được (1)

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : k(x,y) > \beta\}$ đo được (2)

Viết bài toán cùng dạng : đặt $g(x,y) = x-y$

Cho $\beta \in \mathbb{R} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : h(g(x,y)) > \beta\}$ đo được

Cho $\alpha \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) > \alpha\}$ đo được (1)

Cho $\beta \in \mathbb{R}$, đặt $B = \{z \in \mathbb{R}^n : h(z) > \beta\} = h^{-1}((0, \infty)) :$

? $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : g(x,y) \in B\} = g^{-1}(B)$ đo được (2')

Ta thấy $k = h \circ g$. Ta tập trung xét g và $g^{-1}(B)$ trước. Ta thấy g là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^{n+n}$. Tính chất đặc biệt của $g^{-1}(B) : g^{-1}(B)$ là tập mở nếu B là một tập mở. Mà một tập mở thì đo được Lebesgue.

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

7

Cho $\beta \in \mathbb{R}$, đặt $B = \{z \in \mathbb{R}^n : h(z) > \beta\} = h^{-1}((0, \infty)) :$

? $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+n} : g(x,y) \in B\} = g^{-1}(B)$ đo được (2')

Ta thấy $k = h \circ g$. Ta tập trung xét g và $g^{-1}(B)$ trước. Ta thấy g là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}^{n+n}$. Tính chất đặc biệt của $g^{-1}(B) : g^{-1}(B)$ là tập mở nếu B là một tập mở. Mà một tập mở thì đo được Lebesgue.

Mặt khác $B = h^{-1}((0, \infty))$. Vậy nếu h liên tục thì B mở, và ta có (2').

Liên hệ tính liên tục trong kết quả vừa chứng minh xong và tính chất của $L^p(\mathbb{R}^n)$. Theo một định lý trong chương 1: có một dãy hàm số $\{h_k\}$ liên tục trên $\mathbb{R}^n$ sao cho : $\{h_k(z)\}$ hội tụ về $h(z)$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

8

Bài toán 3. Cho f và g là hai hàm số khả tích trên $\mathbb{R}^n$.
Đặt $k(x,y) = f(y)g(x-y)$ với mọi (x,y) trong $\mathbb{R}^{n+n}$.
Chứng minh k khả tích trong $\mathbb{R}^{n+n}$.

f đo được trên $\mathbb{R}^n$ (1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (2)$$

g đo được trên $\mathbb{R}^n$ (3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| dt < \infty \quad (4)$$

? k đo được trên $\mathbb{R}^{n+n}$ (5)

? $\int_{\mathbb{R}^{n+n}} |k(z)| dz < \infty$ (6)

Ta chứng minh (6), và tập xét (2), (4) và (6)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| dt < \infty \quad (4)$$

? $\int_{\mathbb{R}^{n+n}} |k(z)| dz < \infty$ (6)

Viết bài toán cùng dạng : dùng định lý Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^{n+n}} |k(z)| dz = \int_{\mathbb{R}^{n+n}} |f(y)| |g(x-y)| d(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dx \right] dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx \right] dy$$

Viết bài toán cùng dạng : đặt $s = y$ và $t = x - y$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| dt \right] ds$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| dt \right] < \infty$$

Bài toán 4. Cho f và g là hai hàm số khả tích trên $\mathbb{R}^n$.
Chứng minh có một tập A với $\mu(A) = 0$ sao cho tích phân sau đây xác định với mọi x trong $\mathbb{R}^n \setminus A$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Hướng dẫn. Dùng bài toán 3 và định lý Fubini.

Định nghĩa . Cho f và g là hai hàm số khả tích trên $\mathbb{R}^n$. Tích chập của f và g là hàm số xác định như sau

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lúc đó $f * g$ khả tích và

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\mu \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\mu.$$

Định nghĩa . Cho u và v trong $L^1(\mathbb{R}^n)$, cho $f \in u$ và $g \in v$. Ta gọi lớp hàm tương đương của $f * g$ là tích chập của u và v , và ký hiệu là $u * v$. Lúc đó

$$\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Bài toán 5. Cho u và v trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Chứng minh $u * v = v * u$.

Cho $f \in u$ và $g \in v$, $x \in \mathbb{R}^n$: ?

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(s)f(x-s)ds$$

Làm cùng dạng: đặt $t = x - y$, lúc đó $y = x - t$ và

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$$

Bài toán 6. Cho $p \in (1, \infty)$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, và v trong $L^p(\mathbb{R}^n)$, cho $f \in u$ và $g \in v$. Chứng minh $f * g$ xác định hầu hết mọi nơi và $|f * g|^p$ khả tích trên $\mathbb{R}^n$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt < \infty \quad (2)$$

Đặt $k(x, y) = f(y)g(x-y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^{n+n}} |k(z)|^p dz < \infty \quad (3)$$

Viết rõ bài toán

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^{n+n}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^{n+n}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy \right]^p dx < \infty \quad (3'')$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

13

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt < \infty \quad (2)$$

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^{n+n}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^{n+n}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy \right]^p dx < \infty \quad (3')$$

Viết cùng dạng: dùng bất đẳng thức Holder

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)| dy$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \right]^p dx < \infty \quad (3'')$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

14

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt < \infty \quad (2)$$

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \right]^p dx < \infty \quad (3'')$$

Làm rõ bài toán

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)| dy \right]^p dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right) \right] dx$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \right)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right] dx$$

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right] dx < \infty \quad (4)$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

15

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds < \infty \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt < \infty \quad (2)$$

$$? \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right] dx < \infty \quad (4)$$

Viết bài toán cùng dạng : dùng định lý Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)|^p dx \right] dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right] dy$$

Viết bài toán cùng dạng : đặt $s = y$ và $t = x - y$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^p dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt \right] ds$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)| ds \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^p dt \right] < \infty$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

16

Định nghĩa . Cho $p \in (1, \infty)$, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, và v trong $L^p(\mathbb{R}^n)$, cho $f \in u$ và $g \in v$. cho $f \in u$ và $g \in v$. Ta gọi lớp hàm tương đương của $f * g$ là tích chập của u và v , và ký hiệu là $u * v$. Lúc đó

$$\|u * v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Cho $s = (s_1, \dots, s_n)$, ta đặt $|s| = |s_1| + \dots + |s_n|$ và đạo hàm riêng phần $\frac{\partial^s f}{\partial x}$ là $\frac{\partial^{|s|} f}{\partial^{s_1} x_1 \dots \partial^{s_n} x_n}$.

Định nghĩa . Cho r là một số nguyên dương và Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $C^r(\Omega)$ là tập hợp các hàm số thực f trên Ω sao cho các đạo hàm riêng phần bậc s của f có và liên tục trên Ω nếu $|s| \leq r$.

17

Định nghĩa . Cho r là một số nguyên dương và Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Đặt

$C_c^r(\Omega)$ là tập hợp các f trong $C^r(\Omega)$ sao cho có một tập compact K_f trong $\mathbb{R}^n$ để cho $f(x) = 0$ với mọi x trong $\mathbb{R}^n \setminus K_f$.

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(\Omega),$$

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_c^r(\Omega).$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

18

Bài toán 7 . Cho $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, cho $f \in u$ và $g \in C_c^r(\mathbb{R}^n)$. Chứng minh $f * g \in C^r(\mathbb{R}^n)$ và

$$\frac{\partial^s (f * g)}{\partial x} = f * \frac{\partial^s g}{\partial x} \quad \forall s, |s| \leq r.$$

Chứng minh $\frac{\partial (f * g)}{\partial x_1} = f * \frac{\partial g}{\partial x_1}$. Cho $x \in \mathbb{R}^n$ và $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f * g)}{\partial x_1}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f * g(x + te) - f * g(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} [f(y)g(x + te - y) - f(y)g(x - y)] dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)[g(x + te - y) - g(x - y)] dy \end{aligned} \quad (1)$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

19

$$\begin{aligned} f * \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(x + se - z) - g(x - z)}{s} dz \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)[g(x + te - y) - g(x - y)] dy \quad (1)$$

$$f * \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(x + se - z) - g(x - z)}{s} dz \quad (2)$$

Viết cùng dạng

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (1')$$

$$f * \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (2')$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

20

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (1')$$

$$f * \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (2')$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x - y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + se - y) - g(x - y)}{t} \quad (3)$$

$$? \quad \frac{\partial^s(f * g)}{\partial x}(x) = f * \frac{\partial^s g}{\partial x}(x) \quad (4)$$

Viết cùng dạng

$$f(y) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} \quad (3')$$

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (1')$$

$$f * \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} dy \quad (2')$$

$$f(y) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x - y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} \quad (3')$$

$$? \quad \frac{\partial^s(f * g)}{\partial x}(x) = f * \frac{\partial^s g}{\partial x}(x) \quad (4)$$

Làm rõ bài toán : đặt

$$h_t(y) = f(y) \frac{g(x + te - y) - g(x - y)}{t} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$? \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} h_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} h_t(y) dy \quad (4')$$

Bài toán 8. Chứng minh có một hàm $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ có các tính chất sau : $\rho(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)$ và

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho d\mu = 1.$$

Hướng dẫn. Đặt

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{1/(t^2-1)} & \forall t \in \mathbb{R}, |t| < 1, \\ 0 & \forall t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ và

$$\phi^{(m)}(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}} \sum_{\alpha, \beta} c_{m, \alpha, \beta} t^\alpha (t^2 - 1)^\beta & \forall t, |t| < 1, \\ 0 & \forall t, |t| \geq 1. \end{cases}$$

Đặt $\psi(x) = \phi(|x|^2)$ với mọi x trong $\mathbb{R}^n$ và

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\mu.$$

Đặt $\rho(x) = c^{-1} \psi(x)$ với mọi x trong $\mathbb{R}^n$.

Bài toán 9. Đặt ρ như trong bài toán 8. Đặt $\rho_m(x) = m^n \rho(mx)$ với mọi số nguyên dương m và với mọi x trong $\mathbb{R}^n$. Chứng minh: $\rho_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_m(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho_m(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, m-1)$ và

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_m d\mu = 1.$$

Hướng dẫn. Dùng bài toán 29 trong chương Không gian L^p .

Bài toán 10. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Đặt

$$f_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_m(x-y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cho r và ε là hai số thực dương, chứng minh có một số nguyên dương N sao cho

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N, x \in B(0, r).$$

Hướng dẫn. Chọn N sao cho

$$|f(x) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \forall x, z \in B'(0, r+1), |x - z| \leq N^{-1}.$$

Chứng minh

$$\begin{aligned} f(x) - f_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x-y)] \rho_m(y) dy \\ &= \int_{B(0, m^{-1})} [f(x) - f(x-y)] \rho_m(y) dy. \end{aligned}$$

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

25

Bài toán 11 . Cho $p \in [1, \infty)$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, cho $f \in u$. Chứng minh có một dãy $\{f_m\}$ trong $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_m|^p d\mu = 0$$

Hướng dẫn. Đặt $g_k(x) = f(x)$ nếu $|x| < k$, và $g_k(x) = f(x)$ nếu $|x| \geq k$. Dùng định lý hội tụ bị chặn Lebesgue, chứng minh

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - g_m|^p d\mu = 0.$$

Áp dụng bài toán 27 trong chương Không gian L^p , bài toán 10 của chương này và định lý hội tụ bị chặn Lebesgue.

Giải Tích Thực - Ch2- Tích chập

26

BIẾN ĐỔI FOURIER	
Định nghĩa. Cho f và g là hai hàm số thực khả tích trên $\mathbb{R}^n$. Ta đặt	$\int_{\mathbb{R}^n} (f + ig) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + i \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu.$
Định nghĩa. Cho $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $f \in u$. Ta đặt	$\hat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-iy \cdot s} ds \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$
Ta gọi $\hat{u}$ là biên đổi Fourier của u .	
Bài toán 1. Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, u và v trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Đặt $w = u + v$ và $z = \alpha u$. Chứng minh	
(i)	$\hat{w} = \hat{u} + \hat{v}$
(ii)	$\hat{z} = \alpha \hat{u}$
(iii)	$ \hat{u}(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} u d\mu \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Bài toán 2. $\hat{f}$ liên tục trên $\mathbb{R}^n$.	
	$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-ix \cdot s} ds \quad (1)$
Cho $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) : x_n - x < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$	(2)
?	$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{f}(x_m) = \hat{f}(x) \quad (3)$
Viết cùng dạng	
	$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-ix \cdot s} ds \quad (1)$
Cho $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) : x_n - x < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$	(2)
?	$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix_m \cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix \cdot t} dt \quad (3')$
Liên kết (2) và (3')	
?	$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix_m \cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t) e^{-ix_m \cdot t} dt \quad (3'')$

Cho $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) : x_n - x < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$	(2)
?	$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix_m \cdot t} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t) e^{-ix_m \cdot t} dt \quad (3'')$
Đặt $h_m(t) = f(t) e^{-ix_m \cdot t}$ và viết (3'') thành	
?	$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_m(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(t) dt \quad (3''')$
Giải tích thực - Tích chập	
3	

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực xác định trên một tập mở D của $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ and $i \in \{1, \dots, n\}$. Đặt	
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{t}$	
Nếu giới hạn này có và gọi $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ đạo hàm riêng phần của f tại x tương ứng với thành phần x_i .	
Nếu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ xác định với mọi i trong $\{1, \dots, n\}$, ta nói f khả vi tại x và có đạo hàm	
$Df(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$	
Giải tích thực - Tích chập	

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực trên một tập mở D của $\mathbb{R}^n$. Ta nói :

- f khả vi trên D nếu $\nabla f(x)$ xác định tại mọi x trong D ,
- f thuộc lớp $C^1(D)$ nếu f khả vi trên D và ∇f là một hàm số liên tục từ D vào $\mathbb{R}^n$.
- f thuộc lớp $C_c^1(D)$ nếu f thuộc lớp $C^1(D)$ và $f(x) = 0$ với mọi x trong $D \setminus K_f$, ở đây K_f là một tập compact chứa trong D .

Định nghĩa. Cho f là một hàm thực khả vi trên một tập mở D của $\mathbb{R}^n$ và $x \in D$. Đặt $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, lúc đó g_j là một hàm thực trên D với mọi j trong $\{1, \dots, n\}$.

Cho i trong $\{1, \dots, n\}$. Ta nói :

- f có đạo hàm riêng phần bậc hai $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ tại x nếu g_j có đạo hàm riêng phần $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$ tại x .
- f có đạo hàm riêng phần bậc hai tại x nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ xác định với mọi i, j trong $\{1, \dots, n\}$. Lúc đó đạo hàm bậc hai $D^2 f(x)$ của f tại x là ma trận $n \times n$
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{i,j=1,2,\dots,n}$$

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực trên một tập mở D của $\mathbb{R}^n$. Ta nói :

- f khả vi 2 lần trên D nếu $D^2 f(x)$ xác định tại mọi x trong D ,
- f thuộc lớp $C^2(D)$ nếu f khả vi 2 lần trên D và $D^2 f$ là một ánh xạ liên tục từ D vào $M^{n \times n}$.
- f thuộc lớp $C_c^2(D)$ nếu f thuộc lớp $C^2(D)$ và $f(x) = 0$ với mọi x trong $D \setminus K_f$, ở đây K_f là một tập compact chứa trong D .

Tương tự ta định nghĩa được $C^r(D)$, $C_c^r(D)$ với mọi số nguyên $r > 2$. Ta đặt

$$C^\infty(D) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(D) \quad \text{và} \quad C_c^\infty(D) = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_c^r(D),$$

Định lý. Cho D và E là hai tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $\bar{D} \subset E$ và ∂D trơn. Lúc đó

$$(i) \int_D f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = \int_{\partial D} f g ds - \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx \quad \forall f, g \in C^1(E),$$

$$(ii) \int_D f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = - \int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx \quad \forall f \in C^1(E), g \in C_c^1(E),$$

ở đây ds là độ đo trên ∂D .

Bài toán 3. Cho f là hàm số khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n$. Đặt $g = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $u = \tilde{f}$ và $v = \tilde{g}$. Giả sử u và v trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Chứng minh $\hat{v}(x) = ix_1 \hat{u}(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$	
Cho $x \in \mathbb{R}^n$, đặt $e = (1, 0, \dots, 0)$, : $g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t + se) - f(t)}{s} \quad \forall t \in \mathbb{R}^n \quad (1)$	
$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-iy \cdot s} ds \quad (2)$	
$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(s) e^{-iy \cdot s} ds \quad (3)$	
$\hat{g}(y) = iy_1 \hat{f}(y) \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$	
Giải tích thực - Tích chập 9	

$iy \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-iy \cdot s} ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(s) e^{-iy \cdot s} ds ?$	
Viết cùng dạng: đặt $k(z) = e^{-iy \cdot z}$ ta có $-iy_1 e^{-iy \cdot s} = \frac{\partial k}{\partial x_1}(s)$	
$\int_{\mathbb{R}^n} f(s) \frac{\partial k}{\partial x_1}(s) ds = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(s) k(s) ds ? \quad (4')$	
Xét trường hợp $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$: có $r > 0$ sao cho $f(x) = g(x) = 0$ nếu $ x > r$. Dùng định lý tích phân từng phần.	
Trường hợp tổng quát: tìm một dãy $\{f_m\} \subset C_c^1(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\{f_m\}$ và $\{\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\}$ hội tụ về f và $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ trong $L^1(\mathbb{R}^n)$.	
Giải tích thực - Tích chập 10	

Định nghĩa. Cho D là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và r là một số nguyên dương và $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ với α_i trong tập $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ sao cho $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r$. Cho f thuộc lớp $C^r(D)$, ta đặt $D^\alpha f = \frac{\partial^{ \alpha } f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \left(\frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \dots \right) \right)$	
Bài toán 4. Cho r là một số nguyên dương và $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ với α_i trong $\{0, 1, 2, \dots, r\}$ sao cho $ \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r$. Cho f thuộc lớp $C^r(\mathbb{R}^n)$. Đặt $g = D^\alpha f$, $u = \tilde{f}$ và $v = \tilde{g}$. Giả sử $D^\beta f$ khả tích trên $\mathbb{R}^n$ khi $ \beta \leq r$. Chứng minh $\hat{v}(x) = (ix_1)^{\alpha_1} \dots (ix_n)^{\alpha_n} \hat{u}(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$	

Bài toán 5. Cho f là một hàm số thực khả tích trên $\mathbb{R}^n$. Chứng minh $\lim_{ t \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = 0.$	
Xét f thuộc lớp $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ trước. Đặt $g_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$, $u = \tilde{f}$ và $v_k = \tilde{g}_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Ta có u và v_k trong $L^1(\mathbb{R}^n)$	
$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-ix \cdot s} ds \quad (1)$	
$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(s) e^{-ix \cdot s} ds \quad (2)$	
$\hat{g}(x) = ix_1 \hat{f}(x) \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$	
Cho $\varepsilon > 0$, tìm $T(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: $ \hat{f}(x) - 0 < \varepsilon \quad \forall x > T(\varepsilon) \quad (1)$	
$ \hat{f}(x) = \left \frac{\hat{g}_k(x)}{ix_k} \right = \frac{1}{ x_k } \hat{g}_k(x) \leq \frac{1}{ x_k } \ v_k\ _1 \leq \frac{1}{ x_k } \sum_{j=1}^n \ v_j\ _1 \quad \forall x_k \neq 0$	
$ \hat{f}(x) \leq \frac{1}{ x_k } \sum_{j=1}^n \ v_j\ _1 \leq \frac{n}{ x } \sum_{j=1}^n \ v_j\ _1, \quad 12$	

Trường hợp tổng quát: tìm một dãy $\{f_m\} \subset C_c^1(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\{f_m\}$ hội tụ về f trong $L^1(\mathbb{R}^n)$.
Cho $\varepsilon > 0, \exists T(m, \varepsilon) \in \mathbb{R}: \hat{f}_m(x) - 0 < \varepsilon \quad \forall x > T(m, \varepsilon)$ (1)
Cho $\varepsilon' > 0, \exists N(\varepsilon') : \int_{\mathbb{R}^n} f_m - f dx < \varepsilon' \quad \forall m > N(\varepsilon')$ (2)
Cho $\varepsilon'' > 0, \text{ tìm } S(\varepsilon'') \in \mathbb{R}: \hat{f}(x) - 0 < \varepsilon'' \quad \forall x > S(\varepsilon'')$ (3)
Liên hệ các yếu tố
$ \hat{f}(x) \leq \hat{f}(x) - \hat{f}_m(x) + \hat{f}_m(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(s) - f_m(s) ds + \hat{f}_m(x) $ $\leq \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall m > N(\varepsilon'), x > T(m, \varepsilon)$
Định lý. Giả sử f và $\hat{f}$ khả tích trên $\mathbb{R}^n$. Lúc đó $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{ix \cdot t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
Giải tích thực - Tích chập 13

Định nghĩa. Cho L là một số thực dương.
(i) Cho g là một hàm số phức trên $\mathbb{R}$. Ta nói g là một hàm số tuần hoàn có chu kỳ L nếu $g(x+L) = g(x)$ với mọi x trong $\mathbb{R}$.
(ii) Cho h là một hàm số phức trên $\mathbb{R}$. Ta nói h là một đa thức lượng giác nếu có một số nguyên dương N và các số phức $c_k, k \in \{-N, \dots, N\}$ sao cho $h(x) = c_0 + \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik \frac{\pi}{L} x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Định lý (Weierstrass). Cho g là một hàm số phức tuần hoàn có chu kỳ L trên $\mathbb{R}$. Lúc đó có một dãy đa thức lượng giác hội tụ đều về g trên $[-L, L]$.

Bài toán 6. Đặt $H = \{w \in L^2((-L, L)) : w = u + iv\}$ và $\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2L} \int_{(-L, L)} w_1 \bar{w}_2 dx \quad \forall w_1, w_2 \in H,$ $\ w\ = \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2L} \int_{(-L, L)} w ^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall w \in H.$ Chứng minh $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là một không gian Hilbert.
Bài toán 7. Cho w trong H . Chứng minh có một dãy đa thức lượng giác $\{w_m\}$ hội tụ về w trong H .
H.D. Đặt $A = C_c((-L, L))$ và $B = \{\text{các đa thức lượng giác}\}$. Chứng minh $A \subset \bar{B}$ và $H \subset \bar{A}$.
Bài toán 8. Đặt $u_m(x) = e^{im \frac{\pi}{L} x}$ với mọi m trong $\mathbb{Z}$ và x trong $(-L, L)$. Chứng minh $\{u_m\}$ là một họ trực giao đầy đủ trong H .
H.D. Nếu $u \in H$ và $\langle u, u_m \rangle = 0 \quad \forall m$, chứng minh $u = 0$

Định nghĩa. Cho $u \in L^1((-L, L))$ và $f \in u$. Ta đặt $c(m) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-\frac{i\pi m t}{L}} dt \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ $a(m) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{\pi m t}{L}\right) dt \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$ $b(m) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{\pi m t}{L}\right) dt \quad \forall m = 1, 2, \dots$
Bài toán 9. Chứng minh $c(m) = a(m) - ib(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$. $a(m) = c(m) + c(-m) \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$ $b(m) = i[c(m) - c(-m)] \quad \forall m = 1, 2, \dots$
Bài toán 10. Nếu f là một hàm số chẵn ($f(-x) = f(x)$) thì $b(m) = 0$ với mọi $m = 1, 2, \dots$
Bài toán 11. Nếu f là một hàm số lẻ ($f(-x) = -f(x)$) thì $a(m) = 0$ với mọi $m = 0, 1, 2, \dots$

Bài toán 12.(Đẳng thức Bessel) Giả sử f thuộc $L^2((-L,L))$. Chứng minh $\frac{1}{4} a_0 ^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a(m) ^2 + b(m) ^2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) ^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) ^2 dt$
H.D. Dùng bài toán 8.
Bài toán 13.Giả sử f thuộc $L^1((-L,L))$. Chứng minh $\frac{1}{4} a_0 ^2 + \lim_{m \rightarrow \infty} a(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} b(m) = \lim_{ m \rightarrow \infty} c(m) = 0$
H.D. Dùng bài toán 12 và sự trù mật của $L^2((-L,L))$ trong $L^2((-L,L))$.
Định lý. Giả sử $f \in L^1((-L,L))$ và $x \in (-L,L)$ sao cho f liên tục tại x. Lúc đó $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N c(m) e^{\frac{im\pi x}{L}} = f(x)$

KHÔNG GIAN SOBOLEV

Định lý. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn. Lúc đó

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} h dx \quad \forall f \in C^1(\Omega), h \in C_c^1(\Omega),$$

Bài toán S1. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn. Lúc đó

$$\int_{\Omega} \tilde{f} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} h dx \quad \forall f \in C^1(\Omega), h \in C_c^1(\Omega),$$

Định nghĩa. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm số đo được trên Ω . Ta nói f khả tích từng vùng trên Ω nếu với mọi tập compact K chứa trong Ω

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

Ta ký hiệu các lớp tương đương của các hàm số khả tích địa phương là $L^1_{loc}(\Omega)$.

Định nghĩa. Cho p và $r \in [1, \infty)$, Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, u và v trong $L^1_{loc}(\Omega)$. Ta nói v là đạo hàm suy rộng theo biến thứ i của u nếu

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v h dx \quad \forall h \in C_c^1(\Omega),$$

Theorem. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm số đo được trên Ω . Ta nói f khả tích từng vùng trên Ω . Giả sử

$$\int_D f g dx = 0 \quad \forall g \in C_c^1(D).$$

Then $f = 0$ a.e. on Ω .

Bài toán 1. Cho $f(x) = |x|$ với mọi x trong $\Omega = (-1, 1)$. Chứng minh $u = \tilde{f} \in L^1(\Omega)$ có đạo hàm suy rộng

H.D. Tìm hàm số khả tích g sao cho

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g h dx \quad \forall h \in C_c^1(\Omega),$$

Bài toán 2. Cho $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ với mọi x trong $\Omega = (-1, 1)$. Chứng minh $u = f \in L^1(\Omega)$ và không có đạo hàm suy rộng.

H.D. Chứng minh không có hàm số khả tích g sao cho

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g h dx \quad \forall h \in C_c^1(\Omega),$$

Định nghĩa. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $i \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $\partial\Omega$ trơn và $p \in [1, \infty]$. Ta ký hiệu $W^{1,p}(\Omega)$ là tập hợp các lớp hàm u trong $L^p(\Omega)$ có các đạo hàm suy rộng $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Đặt

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_{L^p} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Bài toán 3. Chứng minh $\|\cdot\|_{1,p}$ là một chuẩn trên $W^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 4. Chứng minh $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ là một không gian Banach.

H.D. Cho $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W^{1,p}(\Omega)$. Chứng minh có v và v_j trong $L^p(\Omega)$ sao cho $\{u_m\}$ hội tụ về v , và $\{\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\}$ hội tụ về v_m trong $L^p(\Omega)$ với mọi $i = 1, \dots, n$.

Định nghĩa. Đặt $W_0^{1,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_c^1(\Omega)$ trong $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$

Định lý. Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $p \in (1, \infty)$, và T là một ánh xạ tuyến từ $W^{1,p}(D)$ vào $\mathbb{R}$. Lúc đó T liên tục trên $W^{1,p}(D)$ nếu và chỉ nếu có $g, g_1, \dots, g_n$ trong $L^{p/(p-1)}(D)$ sao cho

$$T(u) = \int_D [ug + \frac{\partial u}{\partial x_1} g_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} g_n] dx \quad \forall u \in W^{1,p}(D).$$

Định lý (Poincaré). Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ và $p \in [1, \infty)$. Lúc đó có một số thực dương C_p sao cho

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq C_p \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bài toán 4. Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ và $p \in [1, \infty)$. Đặt

$$\|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right\}^{1/p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Chứng minh $\|\cdot\|_p$ là một chuẩn tương đương với $\|\cdot\|_{1,p}$ trên $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 5. Cho Ω là một tập mở **bị chặn** trong $\mathbb{R}^n$ ($W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2}$) và ($W_0^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_2$) là các không gian Hilbert.

Định lý. Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và T là một ánh xạ tuyến tính từ $W_0^{1,2}(D)$ vào $\mathbb{R}$. Lúc đó T liên tục trên $W_0^{1,2}(D)$ nếu và chỉ nếu có g trong $W_0^{1,2}(D)$ sao cho

$$T(u) = \int_D \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial x_n} \right] dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(D).$$

Định lý (Sobolev imbedding). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, và $u \in W^{1,p}(\Omega)$ với $p \in (1, \infty)$. Lúc đó $u \in L^q(\Omega)$ với mọi $q \in [1, \frac{np}{n-p}]$

Định lý (Sobolev inequality). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, và $u \in W^{1,p}(\Omega)$ với $p \in (1, \infty)$. Lúc đó có một số thực dương C sao cho

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Bài toán 5. Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Đặt $T(u) = u^2$ với mọi $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Chứng minh T là một ánh xạ liên tục từ $W^{1,2}(\Omega)$ vào $L^2(\Omega)$.

Định lý (Rellich-Kondrachov). Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty)$ và $q \in [1, \frac{np}{n-p})$. Đặt

$$T(u) = u \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lúc đó T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W^{1,p}(\Omega)$ vào $L^q(\Omega)$, và bao đóng của $T(A)$ trong $L^q(\Omega)$ là một tập compact trong $L^q(\Omega)$ với mọi tập bị chặn A trong $W^{1,p}(\Omega)$.

Bài toán 6. Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Đặt $T(u) = u^2$ với mọi $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Cho $B(0,1)$ là quả cầu đơn vị trong $W^{1,2}(\Omega)$. Chứng minh $T(B(0,1))$ là một tập compact trong $L^1(\Omega)$.

Bài toán 7. Cho Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^4$ và f trong $L^{3/2}(\Omega)$. Đặt

$$T(u) = \int_{\Omega} u f dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Chứng minh T là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $W_0^{1,2}(\Omega)$ vào $\mathbb{R}$.