GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG V
ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

Trong chương này, m và n là các số nguyên ≥ 1. Ta viết gọn $\dim_{\mathbf{R}}V$ là $\dim V$

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho ánh xạ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, nghĩa là

$\forall \alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\exists!\ f(\alpha) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$.

a) Nếu $H \subset \mathbf{R}^n$ thì *ảnh của* H *qua ánh xạ* f là $f(H) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in H \} \subset \mathbf{R}^m$

b) Nếu $K \subset \mathbf{R}^m$ thì *ảnh ngược của* K *bởi ánh xạ* f là
$f^{-1}(K) = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) \in K \} \subset \mathbf{R}^n$.

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho ánh xạ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

a) f là *ánh xạ tuyến tính* (từ $\mathbf{R}^n$ vào $\mathbf{R}^m$) nếu f thỏa

* $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ (1)

* $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $f(c.\alpha) = c.f(\alpha)$ (2)

b) Suy ra f là *ánh xạ tuyến tính* nếu f thỏa

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $f(c.\alpha + \beta) = c.f(\alpha) + f(\beta)$ (3)

c) Ký hiệu $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m) = \{ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \mid g$ tuyến tính $\}$

Khi m = n, ta viết gọn $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n) = L(\mathbf{R}^n) = \{ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \mid g$ tuyến tính $\}$.

Nếu $g \in L(\mathbf{R}^n)$ thì g còn được gọi là *một toán tử tuyến tính* trên $\mathbf{R}^n$.

Ví dụ:

a) Ánh xạ tuyến tính $\mathbf{O} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ($\alpha \mapsto \mathbf{O}$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$) và toán tử tuyến tính
$\mathbf{O} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ($\alpha \mapsto \mathbf{O}$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$).

b) Toán tử tuyến tính đồng nhất trên $\mathbf{R}^n$ là $Id_{R^n} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ($\alpha \mapsto \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ có $f(\alpha) = (3x - 8y + z - 4t, -7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t)$
$\forall \alpha = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Ta có thể kiểm tra f thỏa (3) nên $f \in L(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall \alpha = (x, y, z, t), \beta = (u, v, w, h) \in \mathbf{R}^4$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $f(c.\alpha + \beta) =$
$= f(cx + u, cy + v, cz + w, ct + h) = [3(cx + u) - 8(cy + v) + (cz + w) - 4(ct + h),$
$- 7(cx + u) + 5(cy + v) + 6(ct + h), 4(cx + u) + (cy + v) - 9(cz + w) - (ct + h)] =$
$= c(3x - 8y + z - 4t, - 7x + 5y + 6t, 4x + y - 9z - t) + (3u - 8v + w - 4h,$
$-7u + 5v + 6h, 4u + v - 9w - h) = c.f(\alpha) + f(\beta)$.

Ngoài ra ta có thể giải thích $f \in L(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$ do các thành phần của $f(\alpha)$ đều là các biểu thức bậc nhất theo các biến x, y, z và t.

d) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ có $g(\alpha) = (- 2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z)$
$\forall \alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Ta có thể kiểm tra g thỏa (3) nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

Thật vậy, $\forall \alpha = (x, y, z), \beta = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, $\forall c \in \mathbf{R}$, $g(c.\alpha + \beta) =$
$= g(cx + u, cy + v, cz + w) = [- 2(cx + u) + 9(cy + v) + 6(cz + w)\ ,$
$8(cx + u) - 5(cy + v) + (cz + w), 3(cx + u) + 7(cy + v) - 4(cz + w)\ ] =$
$= c(- 2x + 9y + 6z, 8x - 5y + z, 3x + 7y - 4z) + (- 2u + 9v + 6w, 8u - 5v + w,$
$3u + 7v - 4w) = c.g(\alpha) + g(\beta)$.

Ngoài ra ta có thể giải thích $g \in L(\mathbf{R}^3)$ do các thành phần của $g(\alpha)$ đều là các biểu thức bậc nhất theo các biến x, y và z.

1.3/ TÍNH CHẤT :

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$. Khi đó $,\forall\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}^n$, $\forall c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, ta có

a) $f(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ và $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

b) $f(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = c_1 f(\alpha_1) + \cdots + c_k f(\alpha_k)$

(ảnh của *một tổ hợp tuyến tính* bằng tổ hợp tuyến tính của các ảnh tương ứng)

Ví dụ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^3$ thỏa $f(\alpha_1) = (-1, 3)$, $f(\alpha_2) = (2,-5)$ và $f(\alpha_3) = (4, 4)$. Khi đó $f(0,0,0) = (0,0)$, $f(-\alpha_1) = -f(\alpha_1) = (1,-3)$ và

$f(3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3) = 3f(\alpha_1) - 4f(\alpha_2) + 2f(\alpha_3) =$

$= 3(-1, 3) - 4(2, -5) + 2(4, 4) = (-3, 37)$.

1.4/ NHẬN DIỆN ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Cho ánh xạ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

Nếu có $A \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ thỏa $f(X) = X.A \ \forall X \in \mathbf{R}^n$ thì $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$. Thật vậy, $\forall X,Y \in \mathbf{R}^n$, $f(c.X + Y) = (c.X + Y).A = c.(X.A) + Y.A = c.f(X) + f(Y)$, nghĩa là f thỏa (3) của (**1.2**).

Ví dụ: Xét lại các ánh xạ $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ và $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ trong **Ví dụ** của (**1.2**).

Đặt $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -8 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -9 \\ -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R})$ và $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 \\ 9 & -5 & 7 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $f(X) = X.A \ \forall X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ nên $f \in L(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$.

Ta có $g(X) = X.B \ \forall X = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ nên $g \in L(\mathbf{R}^3)$.

1.5/ MỆNH ĐỀ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.

a) Nếu $H \leq \mathbf{R}^n$ thì $f(H) \leq \mathbf{R}^m$.

b) Nếu ($H \leq \mathbf{R}^n$ và H có *cơ sở* A) thì

[$f(H) \leq \mathbf{R}^m$ và $f(H)$ có *tập sinh* $f(A)$].

c) Nếu $K \leq \mathbf{R}^m$ thì $f^{-1}(K) \leq \mathbf{R}^n$.

1.6/ KHÔNG GIAN ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ và xét *trường hợp đặc biệt* $H = \mathbf{R}^n \leq \mathbf{R}^n$.

a) Ta có $f(H) = f(\mathbf{R}^n) = \{ f(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}^n \} \leq \mathbf{R}^m$.

Ta đặt $f(\mathbf{R}^n) = \mathrm{Im}(f)$ và gọi $\mathrm{Im}(f)$ là *không gian ảnh* của f.

b) Tìm một cơ sở cho $\mathrm{Im}(f)$: Chọn cơ sở A tùy ý của $\mathbf{R}^n$ (ta thường chọn A là *cơ sở chính tắc* B_o) thì $< f(A) > = \mathrm{Im}(f)$. Từ đó ta có thể tìm được *một cơ sở* cho $\mathrm{Im}(f)$ từ tập sinh $f(A)$ [dùng (**5.7**) của **CHƯƠNG IV**].

Ví dụ: $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ có $f(X) = (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t)$ $\forall X = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Ta kiểm tra dễ dàng $f \in L(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$.

Đặt $A = B_o = \{ \varepsilon_1 = (1,0,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,0), \varepsilon_3 = (0,0,1,0), \varepsilon_4 = (0,0,0,1) \}$

là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^4$ thì $< f(A) > \; = \mathrm{Im}(f) = f(\mathbf{R}^4)$.

$f(A) = \{ f(\varepsilon_1) = (1,-3,2), f(\varepsilon_2) = (2,-2,1), f(\varepsilon_3) = (4,0,-1), f(\varepsilon_4) = (-7, 5,-2) \}$

$$\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_3) \\ f(\varepsilon_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1^* & -3 & 2 \\ 0 & 4^* & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(f)$ có cơ sở $C = \{ \gamma_1 = (1,-3,2), \gamma_2 = (0,4,-3) \}$ và $\dim(\mathrm{Im}(f)) = |C| = 2$

1.7/ KHÔNG GIAN NHÂN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ và xét trường hợp đặc biệt $K = \{\mathbf{O}\} \leq \mathbf{R}^m$.

a) Ta có $f^{-1}(K) = f^{-1}(\mathbf{O}) = \{ \alpha \in \mathbf{R}^n \mid f(\alpha) = \mathbf{O} \} \leq \mathbf{R}^n$.

Ta đặt $f^{-1}(\mathbf{O}) = \mathrm{Ker}(f)$ và gọi $\mathrm{Ker}(f)$ là *không gian nhân* của f.

b) Tìm một cơ sở cho $\mathrm{Ker}(f)$: Ta thấy $\mathrm{Ker}(f)$ chính là *không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $f(\alpha) = \mathbf{O}$ với ẩn $\alpha \in \mathbf{R}^n$. Từ đó ta có thể tìm được *một cơ sở* cho $\mathrm{Ker}(f)$ [dùng **(5.8)** của **CHƯƠNG IV**].

Ví dụ: Xét lại ánh xạ tuyến tính f trong **Ví dụ (1.5)**.

$\mathrm{Ker}(f) = \{ \alpha = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid f(\alpha) = \mathbf{O} \}$

$= \{ \alpha = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid (x + 2y + 4z - 7t, -3x - 2y + 5t, 2x + y - z - 2t) = \mathbf{O} \}$

$= \{ \alpha = (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y + 4z - 7t = -3x - 2y + 5t = 2x + y - z - 2t = 0 \}$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính trên:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1^* & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do : $z, t \in \mathbf{R}$, $x = 2z - t$, $y = 4t - 3z$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ \alpha = (2z - t, 4t - 3z, z,t) = z(2,-3,1,0) + t(-1,4,0,1) \mid z, t \in \mathbf{R} \}$. Như vậy

$\mathrm{Ker}(f) = < D >$ với $D = \{ \delta_1 = (2,-3,1,0), \delta_2 = (-1,4,0,1) \}$ độc lập tuyến tính.

Do đó $\mathrm{Ker}(f)$ có một cơ sở là $D = \{ \delta_1, \delta_2 \}$ và $\dim\mathrm{Ker}(f) = |D| = 2$.

1.8/ MỆNH ĐỀ: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$. Khi đó

$\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathbf{R}^n = n$.

$\dim\mathrm{Ker}(f)$ gọi là *số khuyết* của f và $\dim\mathrm{Im}(f)$ gọi là *hạng* của f.

Ví dụ: Xét lại ánh xạ tuyến tính f trong **Ví dụ (1.5)** và **(1.6)**.

Ta có $\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = 2 + 2 = 4 = \dim\mathbf{R}^4$.

II. MA TRẬN BIỂU DIỄN ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$. $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ lần lượt có các cơ sở là $A = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$ và $B = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \}$.

a) Đặt $[f]_{A,B} = ([f(\alpha_1)]_B \; [f(\alpha_2)]_B \; \ldots \; [f(\alpha_n)]_B) \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Ta nói $[f]_{A,B}$ là *ma trận biểu diễn của ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở* A (của $\mathbf{R}^n$) và B (của $\mathbf{R}^m$).

Muốn tìm tọa độ của các vector $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ theo cơ sở B, ta giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có m phương trình và m ẩn số. Các hệ này cùng có vế trái là $(\beta_1^t \;\; \beta_2^t \;\ldots\; \beta_m^t)$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $f(\alpha_1)^t, f(\alpha_2)^t, \ldots, f(\alpha_n)^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời n hệ trên trong cùng một bảng là $(\beta_1^t \;\; \beta_2^t \;\ldots\; \beta_m^t \mid f(\alpha_1)^t \mid f(\alpha_2)^t \mid \ldots \mid f(\alpha_n)^t)$.

Khi giải xong n hệ trên bằng phương pháp Gauss – Jordan, ta thu được ma trận $(I_m \mid [f(\alpha_1)]_B \mid [f(\alpha_2)]_B \mid \ldots \mid [f(\alpha_n)]_B)$ và $[f]_{A,B}$ chính là ma trận ở vế phải. Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*
$[f]_{A,B} = ([f(\alpha_1)]_B \;\; [f(\alpha_2)]_B \ldots [f(\alpha_n)]_B)$ (1).

b) $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[f(\alpha)]_B = [f]_{A,B}[\alpha]_A$ (2).
Như vậy khi biết $[f]_{A,B}$ thì ta xác định được *biểu thức* của f theo (2).
(từ $[f(\alpha)]_B$ ta sẽ tính được ngay $f(\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n$)

c) Nếu A và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ thì $[f]_{A,B}$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f. Biểu thức của f và ma trận chính tắc của f có thể suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng.

Ví dụ:

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ với $f(u,v,w) = (-3u + 4v - w, 2u + v + 3w)$ $\forall (u,v,w) \in \mathbf{R}^3$.
Cho $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$.
Ta có $f(\varepsilon_1) = f(1,0,0) = (-3,2)$, $f(\varepsilon_2) = f(0,1,0) = (4,1)$ và $f(\varepsilon_3) = f(0,0,1) =$
$= (-1,3)$ nên có ngay ma trận chính tắc

$$[f]_{A,B} = ([f(\varepsilon_1)]_B \;\; [f(\varepsilon_2)]_B \;\; [f(\varepsilon_3)]_B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cho các cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$ lần lượt là
$C = \{\gamma_1 = (1,2,4), \gamma_2 = (5,1,2), \gamma_3 = (3,-1,1)\}$ và $D = \{\delta_1 = (7,-2), \delta_2 = (4,-1)\}$.
với $f(\gamma_1) = f(1,2,4) = (1,16)$, $f(\gamma_2) = f(5,1,2) = (-13,17)$ và
$f(\gamma_3) = f(3,-1,1) = (-14,8)$.
Ta tìm $[f]_{C,D} = ([f(\gamma_1)]_D \;\; [f(\gamma_2)]_D \;\; [f(\gamma_3)]_D)$ bằng cách giải đồng thời các hệ

$$(\delta_1^t \;\; \delta_2^t \mid f(\gamma_1)^t \mid f(\gamma_2)^t \mid f(\gamma_3)^t) = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 7 & 4 & 1 & -13 & -14 \\ -2 & -1 & 16 & 17 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1^* & 1 & 49 & 38 & 10 \\ 0 & 1 & 114 & 93 & 28 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1^* & 0 & -65 & -55 & -18 \\ 0 & 1^* & 114 & 93 & 28 \end{array}\right). \text{ Vậy } [f]_{C,D} = \begin{pmatrix} -65 & -55 & -18 \\ 114 & 93 & 28 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ có ma trận chính tắc $[g]_{B,A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ với B và A lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$.

$$\forall \alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2, [g(\alpha)]_A = [g]_{B,A}[\alpha]_B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 5x \\ 7x - y \\ 4x + 9y \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra ngay $\forall \alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x,y) = (-5x + 2y, 7x - y, 4x + 9y)$.

c) Xét $h \in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)$ có $[\,h\,]_{D,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với $D = \{\,\delta_1 = (7,-2), \delta_2 = (4,-1)\,\}$ và

$C = \{\,\gamma_1 = (1,2,4), \gamma_2 = (5,1,2), \gamma_3 = (3,-1,1)\,\}$ lần lượt là các cơ sở của $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$.

$\forall\alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, ta có $[\,\alpha\,]_D = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-4y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$ từ việc giải hệ $c_1\delta_1 + c_2\delta_2 = \alpha$:

$$(\delta_1^t\ \ \delta_2^t\ |\ \alpha^t) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & x \\ -2 & -1 & y \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 1 & x+3y \\ 0 & 1 & 2x+7y \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1^* & 0 & -x-4y \\ 0 & 1^* & 2x+7y \end{array}\right) \end{array}.$$

Ta có $[\,h(\alpha)]_C = [\,h\,]_{D,C}\,[\,\alpha\,]_D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x-4y \\ 2x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+9y \\ x+3y \end{pmatrix}$. Suy ra

$\forall\alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $h(\alpha) = h(x,y) = (x + 2y)\,\gamma_1 + (2x + 9y)\,\gamma_2 + (x + 3y)\,\gamma_3$
$= (x + 2y)(1,2,4) + (2x + 9y)(5,1,2) + (x + 3y)(3,-1,1)$
$= (14x + 56y, 3x + 10y, 9x + 29y)$

2.2/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$.

$\mathbf{R}^n$ có một cơ sở là $A = \{\,\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

a) Đặt $[\,f\,]_A = [\,f\,]_{A,A} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_A\ \ [\,f(\alpha_2)\,]_A\ \ldots\ [\,f(\alpha_n)\,]_A\,) \in M_n(\mathbf{R})$.
Ta nói $[\,f\,]_A$ là *ma trận biểu diễn của toán tử tuyến tính f theo cơ sở A*.
Muốn tìm tọa độ của các vector $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ theo cơ sở A, ta giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ có n phương trình và n ẩn số Các hệ này cùng có vế trái là $(\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t)$ và các vế phải của chúng lần lượt là các cột $f(\alpha_1)^t, f(\alpha_2)^t, \ldots, f(\alpha_n)^t$. Do đó ta có thể giải đồng thời n hệ trên trong cùng một bảng là $(\alpha_1^t\ \alpha_2^t\ \ldots\ \alpha_n^t\ |\ f(\alpha_1)^t\ |\ f(\alpha_2)^t\ |\ \ldots\ |\ f(\alpha_n)^t)$.
Khi giải xong n hệ trên bằng phương pháp Gauss – Jordan, ta thu được $(\,I_n\,|\,[\,f(\alpha_1)\,]_A\,|\,[\,f(\alpha_2)\,]_A\,|\,\ldots\,|\,[\,f(\alpha_n)\,]_A\,)$ và $[\,f\,]_A$ chính là ma trận ở vế phải. Như vậy khi biết f thì ta viết được *ma trận biểu diễn*
$[\,f\,]_A = (\,[\,f(\alpha_1)\,]\ \ [\,f(\alpha_2)\,]\ \ldots\ [\,f(\alpha_n)\,]\,)$ (1).

b) $\forall\alpha \in \mathbf{R}^n$, ta có $[\,f(\alpha)\,]_A = [\,f\,]_A\,[\,\alpha\,]_A$ (2).
Như vậy khi biết $[\,f\,]_A$ thì ta xác định được *biểu thức* của f theo (2).
(từ $[\,f(\alpha)\,]_A$ ta tính được ngay $f(\alpha)$ $\forall\alpha \in \mathbf{R}^n$).

c) Nếu A là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^n$ thì $[\,f\,]_A$ được gọi là *ma trận chính tắc* của f. Biểu thức của f và ma trận chính tắc của f có thể suy ra lẫn nhau một cách dễ dàng.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét $f(u,v,w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w)$ $\forall(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$ thì $f \in L(\mathbf{R}^3)$.
Cho $A = \{\,\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$. Ta có $f(\varepsilon_1) = f(1,0,0) = (2,-1,1)$
$f(\varepsilon_2) = f(0,1,0) = (-1,3,2)$ và $f(\varepsilon_3) = f(0,0,1) = (0,1,-1)$ nên có ngay ma trận

chính tắc $[\,f\,]_A = (\,[\,f(\varepsilon_1)\,]_A\ \ [\,f(\varepsilon_2)\,]_A\ \ [\,f(\varepsilon_3)\,]_A\,) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cho $C = \{ \gamma_1 = (1,-2,2), \gamma_2 = (2,0,1), \gamma_3 = (2,-3,3) \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ với $f(\gamma_1) = (4,-5,-5)$, $f(\gamma_2) = (4,-1,1)$ và $f(\gamma_3) = (7,-8,-7)$.

Ta tìm $[f]_C = ([f(\gamma_1)]_C \ [f(\gamma_2)]_C \ [f(\gamma_3)]_C)$ bằng cách giải đồng thời các hệ

$$(\gamma_1^t \ \gamma_2^t \ \gamma_3^t \,|\, f(\gamma_1)^t \,|\, f(\gamma_2)^t \,|\, f(\gamma_3)^t) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & -3 & -5 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & 3 & -5 & 1 & -7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 2 & 2 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & -1 & -13 & -7 & -21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 2 & 24 & 4 & 37 \\ 0 & 1^* & 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -43 & -7 & -66 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1^* & 0 & 0 & -62 & -10 & -95 \\ 0 & 1^* & 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1^* & 43 & 7 & 66 \end{array}\right). \text{ Vậy } [f]_C = \begin{pmatrix} -62 & -10 & -95 \\ -10 & 0 & -15 \\ 43 & 7 & 66 \end{pmatrix}.$$

b) Xét $g \in L(\mathbf{R}^2)$ có ma trận chính tắc $[g]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ với B là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^2$. $\forall \alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $[g(\alpha)]_B = [g]_B [\alpha]_B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x-4y \\ -2x+9y \end{pmatrix}$.

Từ đó suy ra ngay $\forall \alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $g(\alpha) = g(x,y) = (7x - 4y, -2x + 9y)$.

c) Xét $h \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[h]_C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 21 \\ 2 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & -14 \end{pmatrix}$ với

$C = \{ \gamma_1 = (1,-2,2), \gamma_2 = (2,0,1), \gamma_3 = (2,-3,3) \}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

$\forall \alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, ta có $[\alpha]_C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+4y+6z \\ y+z \\ 2x-3y-4z \end{pmatrix}$ bằng cách giải hệ

$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 = \alpha$:

$$(\gamma_1^t \ \gamma_2^t \ \gamma_3^t \,|\, \alpha^t) \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ -2 & 0 & -3 & y \\ 2 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & y+z \\ 0 & -3 & -1 & z-2x \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x-2y-2z \\ 0 & 1^* & 0 & y+z \\ 0 & 0 & -1 & 3y+4z-2x \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & -3x+4y+6z \\ 0 & 1^* & 0 & y+z \\ 0 & 0 & 1^* & 2x-3y-4z \end{array}\right) \end{array}$$

Ta có $[h(\alpha)]_C = [h]_C [\alpha]_C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 21 \\ 2 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3x+4y+6z \\ y+z \\ 2x-3y-4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+y+10z \\ y+2z \\ 2x-y-7z \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall \alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$,

$h(\alpha) = h(x,y,z) = (-3x + y + 10z)\gamma_1 + (y + 2z)\gamma_2 + (2x - y - 7z)\gamma_3$

$= (-3x + y + 10z)(1,-2,2) + (y + 2z)(2,0,1), + (2x - y - 7z)(2,-3,3)$

$= (x + y, y + z, z)$

2.3/ CÔNG THỨC THAY ĐỔI CƠ SỞ TRONG MA TRẬN BIỂU DIỄN:

Cho $f \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.

$\mathbf{R}^n$ có các cơ sở lần lượt là A và C với $S = (A \to C) \in M_n(\mathbf{R})$.

$\mathbf{R}^m$ có các cơ sở lần lượt là B và D với $T = (B \to D) \in M_m(\mathbf{R})$.

a) Ta có công thức $[f]_{C,D} = T^{-1}.[f]_{A,B}.S$ và do đó $[f]_{A,B} = T.[f]_{C,D}.S^{-1}$

b) Suy ra $[f]_{C,B} = [f]_{A,B}.S$ (lúc này $T = (B \to B) = I_m$ và $T^{-1} = I_m$)

$[f]_{A,D} = T^{-1}.[f]_{A,B}$ (lúc này $S = (A \to A) = I_n$)

c) Suy ra $[f]_{A,B} = [f]_{C,B}.S^{-1}$ và $[f]_{A,B} = T.[f]_{A,D}$

Ghi chú : Nếu A và B lần lượt là *các cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$ thì dễ dàng có được S và T.

Ví dụ: Xét lại $f \in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ và $h \in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)$ trong **Ví dụ** của (**2.1**).

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ với $f(u,v,w) = (-3u + 4v - w,\ 2u + v + 3w)$ $\forall(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \}$ và B lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$.

Ta đã viết ma trận chính tắc $[f]_{A,B} = ([f(\varepsilon_1)]_B \ [f(\varepsilon_2)]_B \ [f(\varepsilon_3)]_B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cho các cơ sở của $\mathbf{R}^3$ và $\mathbf{R}^2$ lần lượt là

$C = \{ \gamma_1 = (1,2,4), \gamma_2 = (5,1,2), \gamma_3 = (3,-1,1) \}$ và $D = \{ \delta_1 = (7,-2), \delta_2 = (4,-1) \}$.

Ta có $S = (A \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ và $T = (B \to D) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ có $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Từ đó $[f]_{C,D} = T^{-1}[f]_{A,B}\,S = \begin{pmatrix} -65 & -55 & -18 \\ 114 & 93 & 28 \end{pmatrix}$,

$[f]_{C,B} = [f]_{A,B}\,S = \begin{pmatrix} 1 & -13 & -14 \\ 16 & 17 & 8 \end{pmatrix}$ và $[f]_{A,D} = T^{-1}[f]_{A,B} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -11 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix}$.

b) Xét $h \in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)$ có $[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ với A, B, C, D, S và T được hiểu

như trên. Ta có ma trận chính tắc $[h]_{B,A} = S[h]_{D,C}\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 56 \\ 3 & 10 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall\alpha = (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $h(\alpha) = h(x,y) = = (14x + 56y,\ 3x + 10y,\ 9x + 29y)$.

Hơn nữa $[h]_{B,C} = [h]_{D,C}\,T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $[h]_{D,A} = S[h]_{D,C} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2.4/ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT: Cho $f \in L(\mathbf{R}^n)$.

$\mathbf{R}^n$ có các cơ sở lần lượt là A và C với $S = (A \to C) \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có công thức $[f]_C = S^{-1}.[f]_A.S$ và do đó $[f]_A = S.[f]_C.S^{-1}$.

b) Suy ra $[f]_{C,A} = [f]_A.S$ và $[f]_{A,C} = S^{-1}.[f]_A$

c) Suy ra $[f]_{A,C} = [f]_C.S^{-1}$ và $[f]_{C,A} = S.[f]_C$.

Ghi chú : Nếu A là *cơ sở chính tắc* của $\mathbf{R}^n$ thì dễ dàng có được S.

<u>Ví dụ:</u> Xét lại $f, h \in L(\mathbf{R}^3)$ trong **Ví dụ** của (**2.2**).

a) Xét $f \in L(\mathbf{R}^3)$ với

$f(u,v,w) = (2u - v, -u + 3v + w, u + 2v - w)\ \forall (u,v,w) \in \mathbf{R}^3$.

Cho $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbf{R}^3$.

Ta có ma trận chính tắc $[f]_A = ([f(\varepsilon_1)]_A\ [f(\varepsilon_2)]_A\ [f(\varepsilon_3)]_A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Cho $C = \{\gamma_1 = (1,-2,2), \gamma_2 = (2,0,1), \gamma_3 = (2,-3,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ với

$S = (A \to C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ qua các phép biến đổi

$$(S \mid \mathbf{I_3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1^* & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) = (\mathbf{I_3} \mid S^{-1}).$$ Ta có $[f]_C = S^{-1}.[f]_A.S = \begin{pmatrix} -62 & -10 & -95 \\ -10 & 0 & -15 \\ 43 & 7 & 66 \end{pmatrix}$,

$[f]_{C,A} = [f]_A.S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -5 & -1 & -8 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ và $[f]_{A,C} = S^{-1}.[f]_A = \begin{pmatrix} -4 & 27 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -19 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Xét $h \in L(\mathbf{R}^3)$ có $[h]_C = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 21 \\ 2 & 2 & 3 \\ -10 & -3 & -14 \end{pmatrix}$ với A, C, S và S^{-1} được hiểu như

trên. Ta có ma trận chính tắc $[h]_A = S.[h]_C.S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall \alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $h(\alpha) = h(x,y,z) = (x + y, y + z, z)$.

Ta có $[h]_{A,C} = [h]_C.S^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ và $[h]_{C,A} = S.[h]_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

III. <u>XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI BIẾT ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ :</u>

3.1/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> $\mathbf{R}^n$ có cơ sở là $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Cho $f, g \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.
Khi đó $f = g \iff \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, f(\alpha_j) = g(\alpha_j)$.

3.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> $\mathbf{R}^n$ có cơ sở là $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.
Chọn tùy ý $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbf{R}^m$.
Khi đó *có duy nhất* $f \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ thỏa $f(\alpha_j) = \beta_j\ \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3.3/ XÁC ĐỊNH ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH DỰA THEO ẢNH CỦA MỘT CƠ SỞ:

Ta trình bày cách xác định ánh xạ tuyến tính f trong (**3.2**).

a) Cách 1: dùng tọa độ vector theo cơ sở.

$\forall\alpha \in \mathbf{R^n}$, tìm $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ để có biểu diễn $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n$.

Suy ra $f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n) = c_1f(\alpha_1) + c_2f(\alpha_2) + \ldots + c_nf(\alpha_n) =$
$= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_n\beta_n$.

b) Cách 2: dùng ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính.

Gọi C và D lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R^n}$ và $\mathbf{R^m}$ với $S = (C \to A)$.

Viết $[\,f\,]_{A,D} = (\,[\,f(\alpha_1)\,]_D \ \ [\,f(\alpha_2)\,]_D \ \ldots \ [\,f(\alpha_n)\,]_D\,) = (\,\beta_1^t \ \ \beta_2^t \ \ldots \ \beta_m^t\,)$. Ta có ma trận chính tắc $[\,f\,]_{C,D} = [\,f\,]_{A,D} \,.\, S^{-1}$. Từ đó suy ra ngay $f(\alpha)$ $\forall\alpha \in \mathbf{R^n}$.

Ví dụ:

$\mathbf{R^3}$ có cơ sở $A = \{\,\alpha_1 = (1,-1,1), \alpha_2 = (1,0,1), \alpha_3 = (3,-1,2)\,\}$.

a) Tìm $f \in L(\mathbf{R^3},\mathbf{R^4})$ thỏa
$f(\alpha_1) = (3,0,-1,2)$, $f(\alpha_2) = (1,-2,4,0)$ và $f(\alpha_3) = (-4,1,0,-3)$.

b) Tìm $g \in L(\mathbf{R^3})$ thỏa $g(\alpha_1) = (-2,1,3)$, $g(\alpha_2) = (-3,2,1)$ và $g(\alpha_3) = (-7,5,3)$.

Cách 1: $\forall\alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R^3}$, tìm $[\,\alpha\,]_A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-x-y \\ y+2z-x \\ x-z \end{pmatrix}$ bằng cách giải hệ

$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \alpha : (\alpha_1^t \ \ \alpha_2^t \ \ \alpha_3^t \mid \alpha^t) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & y+z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 1 & -y \\ 0 & 1^* & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & z-x-y \\ 0 & 1^* & 0 & y+2z-x \\ 0 & 0 & 1^* & x-z \end{array}\right) \end{array}$$

Từ đó $f(\alpha) = f(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1f(\alpha_1) + c_2f(\alpha_2) + c_3f(\alpha_3)$
$= (z-x-y)(3,0,-1,2) + (y+2z-x)(1,-2,4,0) + (x-z)(-4,1,0,-3)$
$= (-8x-2y+9z,\ 3x-2y-5z,\ -3x+5y+7z,\ -5x-2y+5z)$

và $g(\alpha) = g(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3) = c_1g(\alpha_1) + c_2g(\alpha_2) + c_3g(\alpha_3)$
$= (z-x-y)(-2,1,3) + (y+2z-x)(-3,2,1) + (x-z)(-7,5,3)$
$= (-2x-y-z,\ 2x+y,\ -x-2y+2z)$

Cách 2 :

Gọi C và D lần lượt là các cơ sở chính tắc của $\mathbf{R^3}$ và $\mathbf{R^4}$ với

$S = (C \to A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qua các phép biến đổi

$$(S \mid \mathbf{I_3}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1^* & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = (\mathbf{I_3} \mid S^{-1}).$$

Viết $[\,f\,]_{A,D} = (\,[\,f\,(\alpha_1)\,]_D\ \ [\,f\,(\alpha_2)\,]_D\ \ [\,f\,(\alpha_3)\,]_D\,) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và ta có ma trận

chính tắc $[\,f\,]_{C,\,D} = [\,f\,]_{A,D}\,.\,S^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 9 \\ 3 & -2 & -5 \\ -3 & 5 & 7 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Suy ra $\forall\alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$,

$f\,(\alpha) = f\,(x,y,z) = (-\,8x - 2y + 9z,\ 3x - 2y - 5z,\ -\,3x + 5y + 7z,\ -\,5x - 2y + 5z)$.

Viết $[\,g\,]_{A,C} = (\,[\,g(\alpha_1)\,]_C\ \ [\,g(\alpha_2)\,]_C\ \ [\,g(\alpha_3)\,]_C\,) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ và ta có ma trận

chính tắc $[\,g\,]_C = [\,g\,]_{A,C}\,.\,S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Suy ra $\forall\alpha = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $g(\alpha) = g(x,y,z) = (-\,2x - y - z,\ 2x + y,\ -\,x - 2y + 2z)$.
