GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG II

CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN
MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

I. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN:

1.1/ PHÉP CHUYỂN VỊ MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Đặt $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ sao cho $b_{ij} = a_{ji}$ ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$), nghĩa là ma trận B được suy từ A bằng cách viết các dòng (hay cột) của A lần lượt thành các cột (hay dòng) của B.

Ta nói B là *ma trận chuyển vị* của A và ký hiệu $B = A^t$ (t = transposition).

Để ý $(A^t)^t = B^t = A$. Nếu $C \in M_n(\mathbf{R})$ thì $C^t \in M_n(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$ có $B = A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $b_{13} = a_{31} = 5$, $b_{22} = a_{22} = 0$ và $b_{41} = a_{14} = -5$. Để ý $(A^t)^t = B^t = A$.

b) $C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 5 \\ -7 & 8 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $D = C^t = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $d_{12} = c_{21} = -7$, $d_{33} = c_{33} = -3$ và $d_{23} = c_{32} = 6$. Để ý $(C^t)^t = D^t = C$.

1.2/ PHÉP NHÂN SỐ THỰC VỚI MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Đặt $c.A = (ca_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$.

Ta có $1.A = A$, $0.A = \mathbf{O}_{m\times n}$, $(-1).A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

Đặt $-A = (-1).A$ và gọi $-A$ là *ma trận đối* của A.

Ví dụ:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbf{R})$ có $\dfrac{-4}{3}A = \begin{pmatrix} 8/3 & -28/3 & -32/3 & 20/3 \\ -4/3 & 0 & 16/3 & -12 \\ -20/3 & 4 & -8/3 & 8 \end{pmatrix}$.

1.3/ PHÉP CỘNG MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ và $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Đặt $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ và $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -2 & 7 \\ -4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R}).$$

Ta có $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 17 & -5 \\ -2 & 6 & -6 & 16 \\ 1 & -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ và $A - B = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -1 & -5 \\ 4 & -6 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R})$.

1.4/ TÍNH CHẤT:

Cho $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $c, d \in \mathbf{R}$. Khi đó:

a) $c.(d.A) = (c.d).A$ $\qquad (c.A)^t = c.A^t$ $\qquad (A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

b) Phép cộng ma trận giao hoán và kết hợp:

$B + A = A + B$ $\qquad (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

c) $\mathbf{O}_{m \times n} + A = A + \mathbf{O}_{m \times n} = A$ $\qquad (-A) + A = A + (-A) = \mathbf{O}_{m \times n}$

d) $(c + d).A = c.A + d.A$ $\qquad c.(A \pm B) = c.A \pm c.B$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Ta có

$(-4A)^t = -4A^t$ $\qquad (-7)(6A) = [\,(-7)6\,]A = -42A$

$(5 + 8)A = 5A + 8A$ $\qquad (-9)(A + B) = (-9)A + (-9)B$

1.5/ TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA DÒNG VỚI CỘT:

Cho dòng $U = (u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n) \in M_{1 \times n}(\mathbf{R})$ và cột $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$.

Đặt $U.V = (u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ thì $U.V \in \mathbf{R}$.

Ví dụ:

$$U = (-3 \quad 8 \quad -6 \quad 9 \quad 2) \in M_{1 \times 5}(\mathbf{R}) \text{ và } V = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 1}(\mathbf{R}).$$

Ta có $U.V = (-3)7 + 8.0 + (-6)(-5) + 9.1 + 2(-4) = 10 \in \mathbf{R}$.

1.6/ PHÉP NHÂN MA TRẬN:

Cho $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ thỏa điều kiện (*số cột* của A) = n = (*số dòng* của B).

Ta quan tâm m dòng $A_1, A_2, \ldots, A_m$ của A (mỗi dòng có n số hạng) và quan tâm p cột $B_1, B_2, \ldots, B_p$ của B (mỗi cột có n số hạng).

Ta thực hiện *phép nhân ma trận* $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ với $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$ bằng cách *nhân vô hướng mỗi dòng của* A *với mỗi cột của* B để được *ma trận tích* $C = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$ như sau:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_p \\ A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_p \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_p \end{pmatrix} = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le p}} \in M_{m \times p}(\mathbf{R})$$

với $c_{ik} = (\text{dòng } A_i)(\text{cột } B_k) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk})$.

Như vậy $C = A.B = AB = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le p}}$ với $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le k \le p)$.

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbf{R})$ và $B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $C = AB = \begin{pmatrix} -28 & 0 & -13 \\ 67 & 7 & -15 \\ -11 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ và $D = BA = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -7 & -23 \\ 0 & 31 & 45 & -38 \\ -5 & 1 & 11 & 5 \\ -12 & 34 & 70 & -32 \end{pmatrix}$ với

$C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$. Như vậy $AB \neq BA$.

1.7/ <u>MA TRẬN ĐƠN VỊ:</u>

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận vuông cấp n có dạng như sau:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tất cả các hệ số trên đường chéo chính đều bằng 1, bên ngoài đều bằng 0)

<u>Ví dụ:</u>

$I_1 = (1)$ $\qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.8/ TÍNH CHẤT:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B, C \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$, $D \in M_{p \times q}(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó:

a) $(AB)D = A(BD) = ABD$ (phép nhân ma trận có *tính kết hợp*).

b) $(AB)^t = B^tA^t$ và $(cA)B = A(cB) = c(AB)$

c) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ và $(B \pm C)D = BD \pm CD$

(phép nhân ma trận *phân phối trái và phải* với các phép cộng trừ ma trận).

d) $\mathbf{O}_{k \times m} A = \mathbf{O}_{k \times n}$ và $A\mathbf{O}_{n \times k} = \mathbf{O}_{m \times k}$.

e) $\mathbf{I}_m A = A$ và $A\mathbf{I}_n = A$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$.

Ta có $\mathbf{O}_{5 \times 2} A = \mathbf{O}_{5 \times 3}$, $A\mathbf{O}_{3 \times 8} = \mathbf{O}_{2 \times 8}$, $\mathbf{I}_2 A = A$ và $A\mathbf{I}_3 = A$.

1.9/ GHI CHÚ:

a) Phép nhân ma trận *không giao hoán*. Nếu AB và BA cùng xác định thì không nhất thiết $BA = AB$.

Nếu $AB = BA$ thì A và B là *hai ma trận vuông có cùng kích thước*.

b) Có thể *nhân liên tiếp nhiều ma trận* nếu *số cột của ma trận đi trước* bằng *số dòng của ma trận đi sau*.

c) Có thể xảy ra khả năng

$A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbf{R})$, $A \neq \mathbf{O} \neq B$ nhưng $AB = \mathbf{O}_{m \times p}$.

Ví dụ:

a) Trong Ví dụ của (1.7), $C = AB \neq D = BA$ vì $C \in M_3(\mathbf{R})$ và $D \in M_4(\mathbf{R})$.

b) Cho $A \in M_{3 \times 7}(\mathbf{R})$, $B \in M_{7 \times 4}(\mathbf{R})$, $C \in M_{4 \times 1}(\mathbf{R})$ và $D \in M_{1 \times 8}(\mathbf{R})$.

Đặt $E = ABCD$ thì $E \in M_{3 \times 8}(\mathbf{R})$.

c) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{3 \times 2}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_{2 \times 3}$ nhưng $AB = \mathbf{O}_3$.

II. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN VUÔNG:

2.1/ PHÉP NHÂN VÀ LŨY THỪA: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta có $AB \in M_n(\mathbf{R})$, $BA \in M_n(\mathbf{R})$ và *không nhất thiết* $AB = BA$.

b) Đặt $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, … , $A^{k+1} = AA^k$ $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ta có Ta có $A^k \in M_n(\mathbf{R})$ $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ví dụ:

a) Cho $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Ta có $HK = \begin{pmatrix} -17 & 25 \\ -30 & 44 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $KH = \begin{pmatrix} 18 & -8 \\ -20 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và $HK \neq KH$.

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. Tính A^k $\forall k \in \mathbf{N}$.

Ta có $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dự đoán $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbf{N}$ và kiểm chứng dễ dàng bằng phép qui nạp.

2.2/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) $O_n^k = O_n$ và $I_n^k = I_n$ $\forall k$ nguyên ≥ 1.

b) $A^r A^s = A^{r+s}$ và $(A^r)^s = A^{rs}$ $\forall r, s \in \mathbf{N}$.

c) $\mathbf{O_n} A = A\mathbf{O_n} = \mathbf{O_n}$ và $\mathbf{I_n} A = A\mathbf{I_n} = A$.

d) Có thể xảy ra khả năng ($A \neq \mathbf{O_n}$ và $\exists r$ nguyên ≥ 2 thỏa $A^r = \mathbf{O_n}$).

<u>Ví dụ:</u>

a) $O_n^{2000} = O_n$ và $I_n^{3000} = I_n$.

b) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, $A^9 A^{16} = A^{9+16} = A^{25}$ và $(A^9)^{16} = A^{9 \times 16} = A^{144}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ và $A \neq \mathbf{O_3}$. Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O_3} = A^3$.

2.3/ <u>CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT:</u>

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$.

Đường chéo (chính) của A bao gồm các hệ số a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$.

a) A là ma trận *(đường) chéo* nếu các hệ số *ở ngoài đường chéo* đều bằng 0 và các hệ số của đường chéo thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$).

b) A là ma trận *tam giác trên* nếu các hệ số *ở phía dưới đường chéo* đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq j < i \leq n$).

c) A là ma trận *tam giác dưới* nếu các hệ số *ở phía trên đường chéo* đều bằng 0 và các hệ số khác thì tùy ý (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i < j \leq n$).

d) A là ma trận *tam giác trên ngặt* nếu A là ma trận *tam giác trên* có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq j \leq i \leq n$).

e) A là ma trận *tam giác dưới ngặt* nếu A là ma trận *tam giác dưới* có đường chéo gồm toàn các hệ số bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0$ khi $1 \leq i \leq j \leq n$).

<u>Ví dụ:</u> Các ma trận dạng đặc biệt (ma trận đường chéo, tam giác trên, tam giác dưới, tam giác trên ngặt và tam giác dưới ngặt) :

$$A = \begin{pmatrix} 3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7^* \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4^* & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 9^* & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6^* \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0^* & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -8^* & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 9 & -5 \\ 0 & 0^* & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0^* & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0^* & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0^* & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0^* \end{pmatrix}$$

2.4/ MỆNH ĐỀ:

a) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *đường chéo* cũng là ma trận *đường chéo*. Các phép toán thực hiện tự nhiên trên đường chéo.

b) Tổng, hiệu, tích và lũy thừa nguyên dương các ma trận *tam giác cùng loại* cũng là ma trận *tam giác cùng loại*.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có
$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix}, \quad C + D = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C - D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} -2 & -30 & -11 \\ 0 & 72 & 32 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & -219 & -84 \\ 0 & 512 & 208 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

2.5/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$. Khi đó các hằng đẳng thức trong $\mathbf{R}$ vẫn có hiệu lực đối với A và B.

$\forall k \geq 2$, $(AB)^k = A^kB^k$, $\quad (A + B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^i B^{k-i}$ và

$$A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1})$$

Ví dụ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB = BA$. Khi đó

$(AB)^4 = ABABABAB = AAAABBBB = A^4B^4$

$A^5 + B^5 = A^5 - (-B)^5 = (A + B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4)$

$(4A - 5I_n)^3 = (4A)^3 - 3(4A)^2(5I_n) + 3(4A)(5I_n)^2 - (5I_n)^3$

$\qquad = 64A^3 - 240A^2 + 300A - 125I_n$

2.6/ GHI CHÚ: Nếu $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức trong $\mathbf{R}$ *không thể áp dụng cho* A và B. Các phép tính phải dùng định nghĩa.

Ví dụ: Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $AB \neq BA$. Ta có

$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$ vì $(- AB + BA) \neq \mathbf{O_n}$.

$(A \pm B)^2 = (A \pm B)(A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ vì

$(\pm AB \pm BA) \neq \pm 2AB$

III. SỰ KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG:

3.1/ VẤN ĐỀ:

a) $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, ta có $I_nA = AI_n = A$.

b) Cho trước $A \in M_n(\mathbf{R})$. Có hay không $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'A = AA' = I_n$?

Nếu có thì A' được xác định ra sao ?

Khi $n = 1$, ta trả lời dễ dàng câu hỏi trên: nếu $a = 0 \in \mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$ thì không có $a' \in \mathbf{R}$ thỏa $a'a = aa' = 1$ và ta nói $a = 0$ là *số không khả nghịch*.

Nếu $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ thì có $a' = a^{-1} \in \mathbf{R} = M_1(\mathbf{R})$ thỏa $a'a = aa' = 1$ và ta nói a là *số khả nghịch* cũng như ký hiệu $a^{-1} = a'$ là *số nghịch đảo* của số a.

Ta sẽ đưa ra câu trả lời cho câu hỏi trên khi $n \geq 2$.

3.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Ta nói A là ma trận *khả nghịch* nếu có $A' \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $A'A = AA' = I_n$.

b) A'(nếu có) thì *duy nhất* và lúc đó ta ký hiệu $A' = A^{-1}$ là *ma trân nghịch đảo* của ma trận A.

c) Nếu A *khả nghịch* (có A^{-1}) thì ta định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm cho A như sau: $A^{-2} = (A^{-1})^2$, $A^{-3} = (A^{-1})^3$, … , $A^{-k} = (A^{-1})^k$ $\forall k$ nguyên ≥ 2.

Ta có $A^m \in M_n(\mathbf{R})$ $\forall m \in \mathbf{Z}$. Hơn nữa $A^rA^s = A^{r+s}$, $(A^r)^s = A^{rs}$ $\forall r, s \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $AB = BA = I_3$. Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = B$. Tương tự B khả nghịch và $B^{-1} = A$. Hơn nữa $A^{-k} = (A^{-1})^k = B^k$ $\forall k$ nguyên ≥ 2 và $A^m \in M_3(\mathbf{R})$ $\forall m \in \mathbf{Z}$.

Ta có $A^7A^{-12} = A^{7+(-12)} = A^{-5}$ và $(A^7)^{-12} = A^{7(-12)} = A^{-84}$.

3.3/ ĐỊNH LÝ: (nhận diện ma trận *khả nghịch*)

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta xác định được S_A, R_A và $r(A) \leq n$.

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

a) A *khả nghịch*.

b) S_A có các hệ số trên đường chéo đều $\neq 0$.

c) $R_A = I_n$.

d) $r(A) = n$.

3.4/ HỆ QUẢ: (nhận diện ma trận *không khả nghịch*)

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta xác định được S_A, R_A và $r(A) \leq n$.

Các phát biểu sau đây là *tương đương với nhau*:

a) A *không khả nghịch*.

b) S_A có ít nhất một hệ số 0 trên đường chéo.

c) $R_A \neq I_n$.

d) $r(A) < n$.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -5 & 2 & 16 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

$$A \to \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to S_A = \begin{pmatrix} 1^* & 1 & 3 \\ 0 & -1^* & 2 \\ 0 & 0 & -13^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 5 \\ 0 & 1^* & -2 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \to R_A = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 \\ 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1^* \end{pmatrix} = I_3$$

Bảng 1: $(2) \to (2) + (1)$, $(1) \to (1) - (3)$, $(3) \to (3) - 2(1)$.
Bảng 2: $(3) \to (3) - 4(2)$. Bảng 3: $(1) \to (1) + (2)$, $(2) \to -(2)$.
Bảng 4: $(3) \to -13^{-1}(3)$, $(1) \to (1) - 5(3)$, $(2) \to (2) + 2(3)$.

$$B \to \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17 & 51 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \to S_B = \begin{pmatrix} 1^* & 3 & 7 \\ 0 & 17^* & 51 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to R_B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & -2 \\ 0 & 1^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$$

Bảng 1: $(1) \to (1) - (3)$, $(2) \to (2) + 5(1)$, $(3) \to (3) - 2(1)$.
Bảng 2: $(3) \to (3) + (5/17)(2)$. Bảng 3: $(2) \to 17^{-1}(2)$, $(1) \to (1) - 3(2)$.
Ta thấy A khả nghịch (để ý các hệ số trên đường chéo của S_A đều $\neq 0$, $R_A = I_3$ và $r(A) = 3$) và B không khả nghịch (để ý có hệ số $= 0$ trên đường chéo của S_B, $R_B \neq I_3$ và $r(B) = 2 < 3$).

3.5/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> (tìm *ma trận nghịch đảo* cho ma trận khả nghịch)

Cho A khả nghịch $\in M_n(\mathbf{R})$ (nghĩa là $R_A = I_n$).
Nếu các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành $R_A = I_n$ thì chính các phép biến đổi đó, theo đúng thứ tự, sẽ biến I_n thành A^{-1}.
Cụ thể như sau:
Nếu $A \to A_1 \to A_2 \to \dots \to A_k = R_A = I_n$ (dùng các phép biến đổi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$)
thì $I_n \to B_1 \to B_2 \to \dots \to B_k = A^{-1}$ (cũng dùng các phép biến đổi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$)

3.6/ <u>PHƯƠNG PHÁP GAUSS – JORDAN TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO:</u>

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Ta thường kiểm tra A khả nghịch và tìm A^{-1} *cùng một lúc* theo sơ đồ sau (*phương pháp Gauss – Jordan*):
$(A \mid I_n) \to (A_1 \mid B_1) \to (A_2 \mid B_2) \to \dots \to (A_k \mid B_k)$ trong đó $A_k = R_A$.
(dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ biến A thành R_A)
Nếu $R_A \neq I_n$ thì A *không khả nghịch*.
Nếu $R_A = I_n$ thì A *khả nghịch* và $A^{-1} = B_k$.

Ví dụ:

Xét tính khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -11 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ và $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

$$(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 10 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1^* & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Bảng 1: $(2) \rightarrow (2) + 2(1)$, $(3) \rightarrow (3) - 3(1)$.
Bảng 2: $(1) \rightarrow (1) - 2(2)$, $(3) \rightarrow (3) + (2)$.
Ta thấy $R_B \neq I_3$ nên B không khả nghịch.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 22 & 53 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 3 & 7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & -2 & 16 & -55 & -9 \\ 0 & 1^* & 3 & -5 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -31 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1^* & 0 & 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1^* & 0 & 22 & -75 & -12 \\ 0 & 0 & 1^* & -9 & 31 & 5 \end{array}\right).$$

Bảng 1: $(1) \rightarrow (1) - (2)$, $(2) \rightarrow (2) - 2(1)$, $(3) \rightarrow (3) + 7(1)$.
Bảng 2: $(3) \rightarrow (3) + 4(2)$, $(2) \rightarrow (2) + 3(3)$.
Bảng 3: $(1) \rightarrow (1) - 3(2)$, $(3) \rightarrow (3) - 2(2)$.
Bảng 4: $(1) \rightarrow (1) - 2(3)$, $(2) \rightarrow (2) + 3(3)$, $(3) \rightarrow -(3)$.

Do $R_A = I_3$ nên A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Thử lại, ta thấy $A^{-1}A = I_3$ hay $AA^{-1} = I_3$.

3.7/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó

a) Nếu A *khả nghịch* thì
- * A^{-1} cũng *khả nghịch* và $(A^{-1})^{-1} = A$.
- * A^t cũng *khả nghịch* và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- * cA ($c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) cũng *khả nghịch* và $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$.
- * A^r ($r \in \mathbf{Z}$) cũng *khả nghịch* và $(A^r)^{-1} = A^{-r}$.

b) AB *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A và B đều *khả nghịch*). Lúc đó $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
AB *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ (A hay B *không khả nghịch*).

c) $(A_1A_2 \ldots A_k)$ *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ ($A_1, A_2, \ldots, A_k$ đều *khả nghịch*).
Lúc đó $(A_1A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.
$(A_1A_2 \ldots A_k)$ *không khả nghịch* $\Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, A_j *không khả nghịch*.

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Suy ra

* A^{-1} cũng *khả nghịch* và $(A^{-1})^{-1} = A$.

* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ cũng *khả nghịch* và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

* $\frac{-5}{2}A$ cũng *khả nghịch* và $(\frac{-5}{2}A)^{-1} = \frac{-2}{5}A^{-1}$.

* A^{-4} cũng *khả nghịch* và $(A^{-4})^{-1} = A^4$.

b) $H = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ và $K = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ khả nghịch có $H^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ và $K^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ không khả nghịch (để ý $R_H = R_K = I_2$ và $R_L = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$).

Ta có $HK = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -19 & -15 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -19 & -14 \end{pmatrix}$.

Ta có $KH = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ khả nghịch và $(KH)^{-1} = H^{-1}K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Các ma trận HKL, KHL, HLK, KLH, LHK và LKH đều không khả nghịch.

3.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (nhận diện 2 ma trận đều khả nghịch và là nghịch đảo của nhau)

Cho $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Các phát biểu sau là *tương đương với nhau*:

a) A khả nghịch và $A^{-1} = B$. b) B khả nghịch và $B^{-1} = A$.

c) $AB = I_n$. d) $BA = I_n$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $P \in M_n(\mathbf{R})$ thỏa $P^5 = \mathbf{O_n}$.

Đặt $A = (I_n - P)$ và $B = (I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$.

Chứng minh A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $AB = I_n$ là xong. Ta có

$AB = (I_n - P)(I_n + P + P^2 + P^3 + P^4)$

$= I_n + P + P^2 + P^3 + P^4 - (P + P^2 + P^3 + P^4 + P^5) = I_n - P^5 = I_n - \mathbf{O_n} = I_n$.

b) Cho $H, K \in M_n(\mathbf{R})$ sao cho $C = (I_n + HK)$ khả nghịch. Chứng minh

$D = (I_n + KH)$ cũng khả nghịch và $D^{-1} = E$ trong đó $E = (I_n - KC^{-1}H)$.

Theo **3.8**, ta chỉ cần chứng minh $DE = I_n$ là xong. Ta có

$DE = (I_n + KH)(I_n - KC^{-1}H) = I_n + KH - KC^{-1}H - KHKC^{-1}H$

$= I_n + KH - K(I_n + HK)C^{-1}H = I_n + KH - KCC^{-1}H = I_n + KH - KH = I_n$.

3.9/ <u>LIÊN HỆ GIỮA TÍNH KHẢ NGHỊCH CỦA MA TRẬN VUÔNG VÀ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH:</u>

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ với $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $B \in M_{nx1}(\mathbf{R})$.

a) Nếu A *khả nghịch* thì hệ trên *có nghiệm duy nhất*.

Nếu A *không khả nghịch* thì hệ trên *vô nghiệm* hoặc *có vô số nghiệm*.

b) Suy ra: Nếu A *khả nghịch* thì hệ $AX = \mathbf{O}$ *có nghiệm duy nhất* là $X = \mathbf{O}$.

Nếu A *không khả nghịch* thì hệ $AX = \mathbf{O}$ *có vô số nghiệm*.

<u>Ví dụ:</u> Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in M_{3x1}(\mathbf{R}).$$

$$\mathrm{AX=B} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & u \\ -2 & 0 & -3 & v \\ 2 & 1 & 3 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & u \\ 0 & 1 & 0 & v+w \\ 0 & -3 & -1 & w-2u \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & u-2v-2w \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & -1 & 3v+4w-2u \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 0 & 4v+6w-3u \\ 0 & 1^* & 0 & v+w \\ 0 & 0 & 1^* & 2u-3v-4w \end{array}\right).$$

Bảng 1: $(2) \to (2) + (3),\ (3) \to (3) - 2(1)$.
Bảng 2: $(1) \to (1) - 2(2),\ (3) \to (3) + 3(2)$.
Bảng 3: $(1) \to (1) + 2(3),\ (3) \to -(3)$.
Do $R_A = I_3$ nên A khả nghịch và hệ AX = B có nghiệm duy nhất
$(x_1 = 4v + 6w - 3u,\ x_2 = v + w,\ x_3 = 2u - 3v - 4w)\ \forall u,v,w \in \mathbf{R}$.
Suy ra hệ AX = **O** (u = v = w = 0) có nghiệm duy nhất $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$.

$$\mathrm{CX=B} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & u \\ 2 & 2 & 2 & v \\ -1 & -3 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & -1 & 3 & u \\ 0 & 4 & -4 & v-2u \\ 0 & -4 & 4 & u+w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0 & 2 & (v+2u)/4 \\ 0 & 1^* & -1 & (v-2u)/4 \\ 0 & 0 & 0 & -u+v+w \end{array}\right)$$

Bảng 1: $(2) \to (2) - 2(1),\ (3) \to (3) + (1)$.
Bảng 2: $(3) \to (3) + (2),\ (2) \to 4^{-1}(2),\ (1) \to (1) + (2)$.
Do $R_C \neq I_3$ nên C không khả nghịch.
Nếu $v + w - u \neq 0$ thì hệ CX = B vô nghiệm.
Nếu $v + w - u = 0$ thì hệ CX = B có vô số nghiệm với một ẩn tự do
$[\ x_3 = a\ (a \in \mathbf{R}),\ x_1 = -2a + (v + 2u)/4,\ x_2 = a + (v - 2u)/4\ ]\quad \forall u,v,w \in \mathbf{R}$.
Suy ra hệ CX = **O** (u = v = w = 0) có vô số nghiệm với một ẩn tự do
$[\ x_3 = a\ (a \in \mathbf{R}),\ x_1 = -2a,\ x_2 = a\ ]$.

IV. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN:

4.1/ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ỨNG DỤNG MA TRẬN KHẢ NGHỊCH:

Cho các ma trận *khả nghịch* $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $C \in M_m(\mathbf{R})$.

a) Phương trình AX = B ($B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$)
Ta có $AX = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (*nghiệm duy nhất*)
Đặc biệt $AX = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

b) Phương trình XA = B ($B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$)
Ta có $XA = B \Leftrightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*)
Đặc biệt $XA = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = \mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*).

c) Phương trình AXC = B ($B \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$ và *ma trận ẩn* $X \in M_{n \times m}(\mathbf{R})$)
Ta có $AXC = B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$(*duy nhất*)
Đặc biệt $AXC = \mathbf{O} \Leftrightarrow X = A^{-1}\mathbf{O}\,C^{-1} = \mathbf{O}$ (*nghiệm duy nhất tầm thường*)

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ khả nghịch và ta có } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ khả nghịch và ta có $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Phương trình $AX = B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 14 \\ -11 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Phương trình $AX = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Phương trình $XC = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất $X = DC^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 23 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Phương trình $XC = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất $X = \mathbf{O}C^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Phương trình $CXA = E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất

$X = C^{-1}EA^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & 8 & 7 \\ -35 & 17 & 16 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -16 & -21 & -31 \\ -37 & -54 & -73 \end{pmatrix}$.

Phương trình $CXA = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có nghiệm duy nhất

$X = C^{-1}\mathbf{O}A^{-1} = \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2/ PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT:

Xét phương trình ma trận tổng quát $f(X) = \mathbf{O}$ với X là ma trận ẩn và f là một hàm theo X.

Ta xác định kích thước (m x n) của X và đặt

$X = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ bao gồm mn ẩn số thực x_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$.

Viết $f(X) = \mathbf{O}$ thành một hệ phương trình thực theo mn ẩn số thực x_{ij} $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Nếu hệ này giải được (chẳng hạn nó là một hệ phương trình tuyến tính) thì ta tìm được các ma trận X thỏa phương trình ma trận đã cho.

<u>Ví dụ:</u> Giải các phương trình ma trận sau:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (X^t là ma trận chuyển vị của X) và $Y^2 = \mathbf{O_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $X^t \in M_{3 \times 2}(\mathbf{R})$ nên $X \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$. Đặt $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ và $X^t = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix}$, ta có

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+5z=6 \\ 3x+y-4z=-1 \\ 2u-3v+5w=-5 \\ 3u+v-4w=2 \end{cases}$$

Ta có hai hệ phương trình tuyến tính [hệ (I) theo x, y, z và hệ (II) theo u, v, w] và có thể giải chung trong cùng một bảng ma trận như sau (vì ma trận hệ số ở vế trái của hai hệ trùng nhau) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 3 & 1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 6 & -5 \\ u & v & w & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 4 & -9 & -7 & 7 \\ 0 & -11 & 23 & 20 & -19 \\ u & v & w & & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & (I) & (II) \\ 1^* & 0 & -7/11 & 3/11 & 1/11 \\ 0 & 1^* & -23/11 & -20/11 & 19/11 \\ u & v & w & & \end{array}\right)$$

Bảng 1 : $(1) \to (1)-(2),\ (2) \to (2)-2(1).$

Bảng 2 : $(2) \to -11^{-1}(2),\ (1) \to (1)-4(2).$

Hệ (I) : z ∈ **R**, x = (7z + 3)/11, y = (23z – 20)/11

Hệ (II) : w ∈ **R**, u = (7w + 1)/11, v = (23w + 19)/11

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm $X = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 7z+3 & 23z-20 & 11z \\ 7w+1 & 23w+19 & 11w \end{pmatrix}$ với z, w ∈ **R**

b) Y ∈ M_2(**R**). Đặt $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, ta có $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+yz=0 (PT1) \\ y(x+t)=0 (PT2) \\ z(x+t)=0 (PT3) \\ t^2+yz=0 (PT4) \end{cases}$

Từ (PT 2), ta xét

* Nếu y = 0 : từ (PT1) và (PT4), ta có x = t = 0. Lúc này (PT 3) cũng thỏa với z ∈ **R**.

* Nếu y thực tùy ý ≠ 0 : t = –x (PT 2), z = $-x^2/y$ (PT 1) với x thực tùy ý. Lúc này (PT 3) và (PT 4) cũng thỏa.

Vậy phương trình ma trận có vô số nghiệm như sau :

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$ và $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ -x^2/y & -x \end{pmatrix}$ với x, y, z ∈ **R** (y ≠ 0).
