GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG III

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

I. ĐỊNH THỨC:

1.1/ KHÁI NIỆM: Với mỗi $A \in M_n(\mathbf{R})$, người ta xác định duy nhất *một giá trị thực* c_A gắn liền với A và gọi c_A là *định thức* (determinant) của A.
Ta ký hiệu $c_A = \det(A)$ hay $c_A = |A|$.
Giá trị $\det(A) = |A|$ biểu thị *tính khả nghịch* hoặc *không khả nghịch* của A.
Nếu $|A| \neq 0$ thì A *khả nghịch*. Nếu $|A| = 0$ thì A *không khả nghịch*.

1.2/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP 1, 2, 3:

a) Nếu $A = (a) \in M_1(\mathbf{R})$ thì $|A| = a$.

b) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ thì A có *đường chéo xuôi* là ad và *đường chéo ngược* là bc. Ta đặt $|A| = ad - bc$.

c) Nếu $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta viết lại cột 1 và 2 bên cạnh A như sau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ để hình thành 6 *đường chéo* (3 *đường chéo xuôi* là aei, bfg, cdh và 3 *đường chéo ngược* là ceg, afh, bdi).

Ta có qui tắc SARRUS tính định thức của A theo 6 *đường chéo* như sau:

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Ví dụ:

a) $A = (-\sqrt{6}) \in M_1(\mathbf{R})$ có $|A| = -\sqrt{6}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|A| = (-8)2 - 7(-5) = 19$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ thì ta viết lại $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{matrix}$ và có

$$|A| = [\,4.3(-6) + (-1).1.(-5) + 2(-2).2\,] - [\,2.3(-5) + 4.1.2 + (-1)(-2)(-6)\,]$$
$$= (-72 + 5 - 8) - (-30 + 8 - 12) = (-75) - (-34) = -41$$

1.3/ KÝ HIỆU:

Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ với $n \geq 2$ và $1 \leq i, j \leq n$.

Đặt $A(i, j)$ là ma trận A *xóa dòng (i) và cột (j)*, nghĩa là $A(i, j) \in M_{n-1}(\mathbf{R})$.

Ta nói $A(i, j)$ là *ma trận đồng thừa của A tại vị trí (i, j)*.

Đặt $C_{ij}^A = (-1)^{i+j} |A(i, j)|$. Nếu không có sự ngộ nhận, ta viết gọn $C_{ij}^A = C_{ij}$.

Ta nói C_{ij}^A là *hệ số đồng thừa của A tại vị trí (i, j)*.

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A(2,3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ và $C_{23}^A = C_{23} = (-1)^{2+3} |A(2,3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$.

Ta có $A(3,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ và $C_{31}^A = C_{31} = (-1)^{3+1} |A(2,3)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$.

1.4/ ĐỊNH THỨC MA TRẬN CẤP n (n ≥ 2):

Cho $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \leq i, j \leq n$.

$|A|$ được tính theo định thức của các ma trận đồng thừa [cấp $(n-1)$] của A (*hình thức đệ qui*).

Ta có thể tính $|A|$ theo *bất kỳ một dòng hay một cột nào* của A.

$|A|$ được tính *theo dòng (i)* như sau :

$$|A| = a_{i1} C_{i1}^A + a_{i2} C_{i2}^A + \ldots + a_{in} C_{in}^A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}^A$$

$|A|$ được tính *theo cột (j)* như sau :

$$|A| = a_{1j} C_{1j}^A + a_{2j} C_{2j}^A + \ldots + a_{nj} C_{nj}^A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}^A$$

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

$|A|$ được tính theo dòng (1) như sau : $|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} =$

$= 4(-1)^{1+1} |A(1,1)| - (-1)^{1+2} |A(1,2)| + 2(-1)^{1+3} |A(1,3)| =$

$$= 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4(-20) + 17 + 2(11) = -41$$

$|A|$ được tính theo cột (2) như sau : $|A| = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32} =$

$= -(-1)^{1+2} |A(1,2)| + 3(-1)^{2+2} |A(2,2)| + 2(-1)^{3+2} |A(3,2)| =$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 17 - 42 - 2(8) = -41$$

1.5/ **NHẬN XÉT:**

Cho $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le r, s \le n$.

Nếu $a_{rs} = 0$ thì $a_{rs}C_{rs} = 0$ mà không cần tính C_{rs}. Như vậy ta sẽ tính $|A|$ theo dòng hay cột nào *có nhiều nhất các hệ số bằng* 0.

Ví dụ:

Cho $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 \\ -8 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{R})$,

$$B = A(2,2) = (b_{ij})_{1 \le i, j \le 3} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 7 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}) \text{ và}$$

$$D = B(1,3) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}).$$

Ta có $|A| = a_{22}C_{22}^A = -2|B| = -2b_{13}C_{13}^B = -2(-3)|D| = 6(-12) = -72$

($|A|$ được tính theo dòng (2) và $|B|$ được tính theo cột (3)).

1.6/ **MỆNH ĐỀ:**

Cho $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Nếu A có một dòng (hay một cột) nào đó *toàn hệ số 0* thì $|A| = 0$.

b) Nếu A có hai dòng (hay hai cột) nào đó *tỉ lệ với nhau* (đặc biệt *bằng nhau*) thì $|A| = 0$.

c) Nếu A là *ma trận tam giác trên* hoặc *dưới* (đặc biệt là *ma trận đường chéo*) thì $|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ (tích các hệ số trên đường chéo chính).

d) $|A^t| = |A|$.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & 0 & y \\ c & 0 & z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & a & b \\ 0 & -3 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4(-3)(-2) = 24 \qquad \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 9.0.(-6) = 0$$

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ và $A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $|A^t| = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi) = |A|$.

II. ĐỊNH THỨC VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG VÀ CỘT CỦA MA TRẬN:

2.1/ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN CỘT:

Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$.

Có 3 hình thức *biến đổi sơ cấp trên cột* cho ma trận:

a) Hoán vị cột (i) với cột (j). Ta ghi $(i)' \leftrightarrow (j)'$.

b) Nhân cột (i) với số $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ta ghi $(i)' \to c(i)'$.

c) Thế cột (i) bằng [cột (i) + c.cột (j)] với số $c \in \mathbf{R}$.
Ta ghi $(i)' \to [(i)' + c(j)']$.

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên cột trên lần lượt là $(i)' \leftrightarrow (j)'$, $(i)' \to c^{-1}(i)'$ và $(i)' \to [(i)' - c(j)']$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_1 = \begin{pmatrix} 4^* & 2 & -3^* & 5 \\ -1^* & 0 & 7^* & 8 \\ -6^* & 9 & -2^* & -4 \end{pmatrix}$$ qua phép biến đổi $(1)' \leftrightarrow (3)'$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6^* & 4 & 5 \\ 7 & 0^* & -1 & 8 \\ -2 & -27^* & -6 & -4 \end{pmatrix}$$ qua phép biến đổi $(2)' \to -3(2)'$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 9 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 14^* & 5 \\ 7 & 0 & 15^* & 8 \\ -2 & 9 & -14^* & -4 \end{pmatrix}$$ qua phép biến đổi sơ cấp trên cột $(3)' \to [\,(3)' + 2(4)'\,]$.

Các phép biến đổi đảo ngược của các phép biến đổi sơ cấp trên cột nói trên lần lượt là $(1)' \leftrightarrow (3)'$, $(2)' \to \frac{-1}{3}(2)'$ và $(3)' \to [\,(3)' - 2(4)'\,]$.

2.2/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp $(i) \leftrightarrow (j)$ [hoặc $(i)' \leftrightarrow (j)'$].

Khi đó $|\,A'\,| = -\,|\,A\,|$ (*đổi dấu*).

Ví dụ:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|\,A\,| = -41$.

$$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5^* & 2^* & -6^* \\ -2^* & 3^* & 1^* \end{pmatrix} [(2) \leftrightarrow (3)] \text{ và } A \to A_2 = \begin{pmatrix} 2^* & -1 & 4^* \\ 1^* & 3 & -2^* \\ -6^* & 2 & -5 \end{pmatrix} [(1)' \leftrightarrow (3)']$$

Ta có $|\,A_1\,| = -\,|\,A\,| = 41$ và $|\,A_2\,| = -\,|\,A\,| = 41$.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} a & c^* & b^* \\ d & f^* & e^* \\ g & i^* & h^* \end{pmatrix} \to C = \begin{pmatrix} g^* & i^* & h^* \\ d & f & e \\ a^* & c^* & b^* \end{pmatrix}$

do $[(2)' \leftrightarrow (3)']$ và $[(1) \leftrightarrow (3)]$.

Ta có $|C| = -|B| = -(-|A|) = |A|$.

2.3/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \le n$ và $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp $(i) \to c(i)$ [hoặc $(i)' \to c(i)'$].

Khi đó $|A'| = c\,|A|$ (*bội c*).

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -6^* & 9^* & 3^* \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} [(2) \to 3(2)]$ và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4^* \\ -2 & 3 & -2^* \\ -5 & 2 & 12^* \end{pmatrix} [(3)' \to -2(3)']$.

Ta có $|A_1| = 3|A| = -123$ và $|A_2| = -2|A| = 82$.

2.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$ và $c \in \mathbf{R}$. Khi đó

a) $|cA| = c^n|A|$ (vì $A \to cA$ bằng cách nhân n dòng của A với c).

b) Có thể *rút thừa số chung ở mỗi dòng* (hay *mỗi cột*) của A ra ngoài dấu định thức.

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$ và $B = -2A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -4 \\ 4 & -6 & -2 \\ 10 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

Ta có $|B| = (-2)^3|A| = -8(-41) = 328$.

b) $\begin{vmatrix} 28^* & -40^* & 76^* & -12^* \\ -1 & 25 & 6 & -3 \\ 4 & 10 & -5 & 2 \\ -7 & -35 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 7 & -10^* & 19 & -3 \\ -1 & 25^* & 6 & -3 \\ 4 & 10^* & -5 & 2 \\ -7 & -35^* & 9 & 1 \end{vmatrix} = (4 \text{ x } 5)\begin{vmatrix} 7^* & -2^* & 19^* & -3^* \\ -1 & 5^* & 6 & -3 \\ 4 & 2^* & -5 & 2 \\ -7 & -7^* & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

bằng cách rút các thừa số chung từ dòng (1) và cột (2).

2.5/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$. Xét $1 \le i \ne j \le n$ và $c \in \mathbf{R}$.

Giả sử $A \to A'$ bằng phép biến đổi sơ cấp $(i) \to [\,(i) + c(j)\,]$ (hoặc $[\,(i)' \to (i)' + c(j)'\,]$).

Khi đó $|A'| = |A|$ (*không thay đổi và độc lập với* c).

Ví dụ:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41$.

$A \to A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3^* & 0^* & -2^* \end{pmatrix}$ và $A \to A_2 = \begin{pmatrix} 7^* & -1 & 2 \\ -11^* & 3 & 1 \\ -11^* & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Ta có

$|A_1| = |A|$ do $(3) \to [\,(3) + 2(1)\,]$ và $|A_2| = |A|$ do $(1)' \to [\,(1)' - 3(2)'\,]$.

2.6/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Ta có thể phân tích $|A|$ thành tổng của 2 định thức dựa theo một dòng (hay một cột) nào đó. Chẳng hạn phân tích đối với định thức cấp 3 như dưới đây:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ (phân tích theo dòng (1))}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+b' & c \\ d & e+e' & f \\ g & h+h' & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' & c \\ d & e' & f \\ g & h' & i \end{vmatrix} \text{ (phân tích theo cột (2))}$$

Ví dụ: Rút gọn định thức sau (trước khi tính bằng qui tắc SARRUS):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & b-ax & c \\ d+ex & e-dx & f \\ g+hx & h-gx & i \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b-ax & c \\ d & e-dx & f \\ g & h-gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b-ax & c \\ ex & e-dx & f \\ hx & h-gx & i \end{vmatrix} \text{ (phân tích theo cột (1))}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -ax & c \\ d & -dx & f \\ g & -gx & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ hx & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & -ax & c \\ ex & -dx & f \\ hx & -gx & i \end{vmatrix} \text{ (phân tích theo cột (2))}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 + 0 - x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = (x^2+1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

(để ý sự hoán vị và sự tỉ lệ của các cột trong các ma trận trên).

2.7/ <u>ÁP DỤNG:</u> Trước khi tính định thức một ma trận, ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thích hợp để *tạo nhiều hệ số* 0 *trên một dòng* (hay *cột*) *nào đó*. Các hệ số 0 này được tạo ra dựa vào *hệ số* ± 1 *có trên dòng* (hay *cột*) *tương ứng* hoặc dựa vào *quan hệ bội số - ước số*. Nếu không có sẵn hệ số ± 1, ta lại dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hay cột) thích hợp để tạo ± 1.

Ví dụ:

a) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 & -20 \\ 2 & -4 & 3 & 16 \\ 5 & -8 & 8 & 28 \\ 4 & -8 & 5 & 24 \end{vmatrix} = \frac{4.4}{480}\begin{vmatrix} 3 & 2^* & -2 & -5^* \\ 2 & -1^* & 3 & 4^* \\ 5 & -2^* & 8 & 7^* \\ 4 & -2^* & 5 & 6^* \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 0^* & 3 & 1 \\ 2 & -1^* & 3 & 4 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \\ 0 & 0^* & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1^* & -2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{30}\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0^* & -1^* & 0^* \end{vmatrix} = \frac{-1}{30}\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 1.$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2^* & 2^* & 1^* \\ -5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 5 & 5 \\ 0^* & 0^* & 1^* \\ -1 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 5 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 138$ hay

$\begin{vmatrix} -3 & 2^* & 5 \\ 7 & -4^* & 3 \\ -5 & 6^* & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2^* & 5 \\ 1 & 0^* & 13 \\ 4 & 0^* & -17 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} = 138$

c) $\begin{vmatrix} a^* & a^* & a^* & a^* \\ b & x & b & b \\ c & c & y & c \\ d & d & d & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^* & 0^* & 0^* & 0^* \\ b & x-b & 0 & 0 \\ c & 0 & y-c & 0 \\ d & 0 & 0 & z-d \end{vmatrix} = a(x-b)(y-c)(z-d)$

d) $\begin{vmatrix} \cos 2a & d & 2\sin^2 a \\ (\sin b - \cos b)^2 & 2d & (\sin b + \cos b)^2 \\ -2\cos^2 c & -d & \cos 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & d^* & 2\sin^2 a \\ 2^* & 2d^* & (\sin b + \cos b)^2 \\ -1^* & -d^* & \cos 2c \end{vmatrix} = 0$ (có 2 cột tỉ lệ).

e) $\begin{vmatrix} 657419 & 656419 \\ 928308 & 927308 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1000^* & 656419 \\ 1000^* & 927308 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 656419 \\ 1 & 927308 \end{vmatrix} =$

$= 1000(927308 - 656419) = 270.889.000$

III. ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH:

3.1/ MỆNH ĐỀ: Cho $A \in M_n(\mathbf{R})$.

a) A *khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ b) A *không khả nghịch* $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

Ví dụ:

Xét tính khả nghịch của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ (a, b, c là các tham số thực).

Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1^* & 1^* & 1^* \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1^* & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1^* & 0^* \\ b+a & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Suy ra: A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \neq c \neq a$

A không khả nghịch $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (a = b)$ hay $(b = c)$ hay $(c = a)$

3.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Giả sử $A \in M_n(\mathbf{R})$ và A khả nghịch (nghĩa là $|A| \neq 0$).

Ta xác định *ma trận nghịch đảo* A^{-1} bằng *phương pháp định thức* như sau:

* Tính các hệ số đồng thừa $C_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i,j)|$ $(1 \le i, j \le n)$ của A.

* Lập ma trận $C = (C_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbf{R})$.

* Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t$ (t = transposition).

<u>Ví dụ:</u> Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$ có $|A| = -41 \neq 0$ nên A khả nghịch.

$C_{11} = (-1)^{1+1}|A(1,1)| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -20$ $\qquad C_{12} = (-1)^{1+2}|A(1,2)| = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -17$

$C_{13} = (-1)^{1+3}|A(1,3)| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 11$ $\qquad C_{21} = (-1)^{2+1}|A(2,1)| = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -2$

$C_{22} = (-1)^{2+2}|A(2,2)| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -14$ $\qquad C_{23} = (-1)^{2+3}|A(2,3)| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$C_{31} = (-1)^{3+1}|A(3,1)| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$ $\qquad C_{32} = (-1)^{3+2}|A(3,2)| = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$C_{33} = (-1)^{3+3}|A(3,3)| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10$

Lập $C = (C_{ij})_{1 \le i,j \le 3} = \begin{pmatrix} -20 & -17 & 11 \\ -2 & -14 & -3 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}C^t = \dfrac{-1}{41}\begin{pmatrix} -20 & -2 & -7 \\ -17 & -14 & -8 \\ 11 & -3 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{41}\begin{pmatrix} 20 & 2 & 7 \\ 17 & 14 & 8 \\ -11 & 3 & -10 \end{pmatrix}$

3.3/ <u>GHI CHÚ:</u> Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ và A *khả nghịch*.

(nghĩa là $\Delta = |A| = (ad - bc) \neq 0$).

Ta có thể *tính nhẩm* ma trận nghịch đảo A^{-1} *một cách nhanh chóng* như sau:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (*hoán vị* đường chéo xuôi và *đổi dấu* đường chéo ngược)

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ có $|A| = 60 \neq 0$ nên A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.4/ MỆNH ĐỀ: Cho $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n(\mathbf{R})$. Khi đó:

a) $|AB| = |A|.|B|$ và $|A_1A_2 \ldots A_k| = |A_1|.|A_2| \ldots |A_k|$.

b) Suy ra $|A^k| = |A|^k\ \forall k \geq 2$ (áp dụng khi $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$).

c) Nếu A khả nghịch thì $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ và $|A^r| = |A|^r\ \forall r \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ: $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ có $|A| = -3$, $|B| = 4$ và $|C| = -6$. Ta có

$|AB| = |A|.|B| = (-3)4 = -12$ và $|ABC| = |A|.|B|.|C| = (-3)4(-6) = 72$

$|A^4| = |A|^4 = (-3)^4 = 81$, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{-1}{3}$ và $|A^{-5}| = |A|^{-5} = (-3)^{-5} = \dfrac{-1}{243}$

IV. QUI TẮC CRAMER:

Định thức được áp dụng vào việc khảo sát các hệ phương trình tuyến tính có *số phương trình và số ẩn bằng nhau.*

4.1/ KÝ HIỆU: Xét hệ phương trình tuyến tính thực $AX = B$ (có n phương trình và n ẩn số) trong đó $A \in M_n(\mathbf{R})$, $B \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$ và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Với $1 \leq j \leq n$, đặt

$\Delta = |A|$ và $\Delta_j = |A_j|$ trong đó A_j là A *xóa cột* (j) và *thay bằng cột* B.

4.2/ MỆNH ĐỀ: Với các ký hiệu như trên,

a) $\Delta x_j = \Delta_j$ khi $1 \leq j \leq n$.

b) Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ *có nghiệm duy nhất* là $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ khi $1 \leq j \leq n$.

c) Nếu $\Delta = 0$ và $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Delta_k \neq 0$ thì hệ *vô nghiệm.* (lúc đó đẳng thức $\Delta x_k = \Delta_k$ vô nghĩa).

d) Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$ thì hệ *vô nghiệm* hoặc *vô số nghiệm*. Lúc này ta phải giải hệ bằng *phương pháp Gauss* hay *Gauss – Jordan* để có kết quả chính xác (lúc này qui tắc CRAMER *không còn hiệu lực nữa*).

Ví dụ:

a) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số thực m:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ (m-2)x_2 + (m-5)x_3 - 2x_1 = 2 \\ (m+1)x_3 + mx_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có dạng $AX = B$ với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ta tính $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ và Δ_3.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1^* & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ -2 & 3 & m-1 \\ m & -m & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ -m & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ 3-m & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)(m-3)$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 2 \\ 2^* & m-2 & m-5 \\ -2^* & 1 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 2 \\ 2^* & m-2 & m-5 \\ 0^* & m-1 & 2m-4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ m-1 & 2m-4 \end{vmatrix} = 4(3-m)$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0^* & 2 \\ -2 & 2^* & m-5 \\ m & -2^* & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0^* & 2 \\ -2 & 2^* & m-5 \\ m-2 & 0^* & 2m-4 \end{vmatrix} = 0 \text{ (dòng (1) tỉ lệ với dòng (3)).}$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0^* \\ -2 & m-2 & 2^* \\ m & 1 & -2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0^* \\ -2 & m-2 & 2^* \\ m-2 & m-1 & 0^* \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-3)$$

* Nếu $1 \neq m \neq 3$ thì $\Delta \neq 0$ nên hệ *có nghiệm duy nhất* là

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1-m}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0 \text{ và } x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{m-1}$$

* Nếu $m = 1$ thì $\Delta = 0 \neq \Delta_1 = 8$ nên hệ vô nghiệm.

* Nếu $m = 3$ thì $\Delta = 0 = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, ta giải hệ bằng phương pháp Gauss – Jordan:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 2 & 2 & 0 \\ 0^* & 5 & 2 & 2 \\ 0^* & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1^* & 0^* & 6/5 & -4/5 \\ 0^* & 1^* & 2/5 & 2/5 \\ 0^* & 0^* & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có vô số nghiệm như sau: $x_3 = a$ ($a \in \mathbf{R}$), $x_1 = -(6a + 4)/5$ và $x_2 = (2 - 2a)/5$.

b) Xét 4 hệ phương trình tuyến tính (2 ẩn số x, y và m, p, q là các hằng số thực)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} m-3 & -1 & p \\ 5-m & m & q \end{array}\right) \end{array} (1) \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array} (2) \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{array}\right) \end{array} (3) \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} (4)$$

Hệ (1) : $\Delta = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 \geq 1 > 0 \;\; \forall m \in \mathbf{R}$,

$\Delta_x = mp + q$ và $\Delta_y = m(p+q) - (5p+3q)$. $\forall m, p, q \in \mathbf{R}$, hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{mp+q}{m^2-4m+5}$ và $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{m(p+q)-(5p+3q)}{m^2-4m+5}$.

Hệ (2) : $\Delta = 0 \neq \Delta_y = -21$ nên hệ vô nghiệm.

Hệ (3) : $\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y$ và hệ $\Leftrightarrow$ $(2x - 3y = 1)$. Hệ có vô số nghiệm với 1 ẩn tự do $y \in \mathbf{R}$, $x = 2^{-1}(3y + 1)$.

Hệ (4) : $\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y$ và hệ vô nghiệm vì hệ có phương trình $0x + 0y = 2$.
