ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
KHOA KINH TẾ

NGUYỄN THÀNH LONG
NGUYỄN CÔNG TÂM

TOÁN CAO CẤP C1

Lưu hành nội bộ

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2004

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là giáo trình Toán Cao cấp C1 dành cho sinh viên Khoa Kinh Tế, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh. Giáo trình gồm 3 đơn vị học tập (45 tiết) cả lý thuyết và bài tập.

Giáo trình gồm 5 chương:

Chương I trình bày nội dung về phép tính vi phân hàm một biến.

Chương II trình bày nội dung về phép tính vi phân hàm hai biến.

Chương III trình bày nội dung về phép tính tích phân hàm một biến.

Chương IV trình bày sơ lược về phương trình vi phân (cấp 1 và 2).

Chương V trình bày nội dung về lý thuyết chuỗi.

Trong mỗi chương đều có ví dụ kèm theo cùng với phần bài tập với độ khó khác nhau để sinh viên rèn luyện kỹ năng tính toán. Một số định lý khó chỉ được phát biểu mà không chứng minh và thay vào đó là phần minh họa ý chính của đ ịnh lý.

Giáo trình sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc gần xa để giáo trình được hoàn thiện hơn.

Tp. Hồ Chí Minh tháng 9 năm 2004.

Các tác giả

Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm.

CHƯƠNG I. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Khái niệm về hàm số

1.1. Định nghĩa

Cho tập hợp $D \subset \mathbb{R}$, ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số xác định trên tập D. Tập D được gọi là miền xác định của hàm số f. Tập $\{f(x) : x \in D\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số f.

Vậy một hàm f xác định trên D là một phép tương ứng với mỗi số thực $x \in D$ với một số thực xác định duy nhất mà ta ký hiệu nó là $f(x)$. Ta viết

$$f : x \mapsto f(x).$$

Ta cũng gọi $f(x)$ là giá trị của f tại x.
Nếu đặt $y = f(x)$, thì ta có thể biểu diễn hàm f như sau:

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

hay gọn hơn

$$y = f(x).$$

Ta gọi x là *biến độc lập* hay *đối số*, y là *biến phụ thuộc* (hay là *hàm*).
Đối với một hàm đã xác định thì các ký hiệu để chỉ các biến rõ ràng là không quan trọng. Chẳng hạn, các ánh xạ

$$t \mapsto t^2,\ \alpha \mapsto \beta = \alpha^2,$$
$$w \mapsto u = w^2,\ y \mapsto x = y^2,$$

xác định cùng một hàm, vì trong tất cả các trường hợp trên phép tương ứng là như nhau: ứng với mỗi số là bình phương của nó. Để chỉ các hàm khác nhau ta dùng các chữ khác nhau

$$y = f(x),\ y = g(x),\ y = \varphi(x), \ldots$$

Trị của hàm f tại $x = a$ được ký hiệu là $f(a)$ hay $f(x)|_{x=a}$ và đọc là "f tại a".
Xét hàm $y = f(x)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Chọn trong mặt phẳng một hệ trục tọa độ vuông góc Oxy và biểu diễn biến độc lập x trên trục hoành, còn biến phụ thuộc y trên trục tung.Ta gọi tập tất cả các điểm của mặt phẳng có dạng

$$\{(x, f(x)) \ : x \in D\}$$

là *đồ thị* của hàm số f.

Hình 1

1.2. Các hàm số sơ cấp cơ bản

Các hàm sau đây được gọi là các hàm số sơ cấp cơ bản: Hàm lũy thừa x^α, hàm mũ a^x, Hàm logarit $\log_a x$, các hàm lượng giác $\cos x$, $\sin x$, tgx, $\cot gx$ và các hàm lượng giác ngược. Tất cả các hàm nầy, ngoại trừ các hàm lượng giác ngược, đ ều đã học ở phổ thông nên ở đây chỉ nhắc lại những tính chất chủ yếu của chúng, riêng các hàm lượng giác ngược sẽ đ ược trình bày kỹ hơn.

• Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$, α là một số thực. Miền xác định của nó phụ thuộc vào α.

Ví dụ:
- Các hàm $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3, \ldots$ xác định tại mọi x.
- Các $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}, \ldots$ xác định tại mọi $x \neq 0$.
- Hàm $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ xác định khi $x \geq 0$.
- Hàm $y = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ chỉ xác định khi $x > 0$.
- Hàm $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ xác định tại mọi x.

Chú ý rằng nếu α vô tỉ tì ta qui ước chỉ xét hàm $y = x^\alpha$ tại mọi $x \geq 0$ nếu $\alpha > 0$ và tại mọi $x > 0$ nếu $\alpha < 0$.

Đồ thị của tất cả các hàm $y = x^\alpha$ đều đi qua điểm $(1, 1)$, chúng đi qua gốc tọa độ nếu $\alpha > 0$ và không đi qua gốc tọa độ nếu $\alpha < 0$.

Hình 2 **Hình 3**

• Hàm mũ $y = a^x$, $a > 0$ và $a \neq 1$. Số a được gọi là cơ số của hàm mũ. Hàm mũ xác định tại mọi x và luôn luôn dương. Nó tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$. Ngoài ra ta luôn có $a^0 = 1$.

• Hàm logarit.

Hàm mũ $y = a^x$ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ lên khoảng $(0, +\infty)$, nên nó có hàm ngược mà ta ký hiệu là $x = \log_a y$ (đ ọc là logarit cơ số a của y). Như vậy

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$(a > 1)$ $(0 < a < 1)$

Hình 4 **Hình 5**

Với qui ước, dùng chữ x để chỉ là biến độc lập, chữ y đ ể chỉ hàm thì hàm ngược của hàm mũ $y = a^x$ là $y = \log_a x$.
Đồ thị của hàm $y = \log_a x$ là đối xứng của đồ thị của hàm $y = a^x$ qua đường phân giác thứ nhất.
Hàm $y = \log_a x$ chỉ xác định khi $x > 0$, nó tăng khi $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$. Ngoài ra ta luôn có $\log_a 1 = 0$.
Với $a = 10$, ta ký hiệu

$$\lg x = \log_{10} x$$

và gọi nó là hàm logarit thập phân.
Hàm logarit còn có các tính chất sau:

$$\log_a(AB) = \log_a|A| + \log_a|B|, \quad (AB > 0),$$
$$\log_a\left(\tfrac{A}{B}\right) = \log_a|A| - \log_a|B|, \quad (AB > 0),$$
$$\log_a A^\alpha = \alpha \log_a|A|, \qquad (A^\alpha > 0),$$
$$\log_{a^\alpha} A^\beta = \tfrac{\beta}{\alpha} \log_a|A|, \quad (A^\beta > 0, \alpha \neq 0).$$

Mọi số dương N đều có thể viết dưới dạng mũ

$$N = a^{\log_a N}.$$

• Các hàm lượng giác $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = \cot gx$. Các hàm nầy được xác định trên vòng tròn lượng giác (vòng tròn đơn vị) như sau

$$\overline{OP} = \cos x,$$
$$\overline{OQ} = \sin x,$$
$$\overline{AT} = tgx,$$
$$\overline{BC} = \cot gx,$$

Hình 6

trong đó, x được đó bằng radian. Hai hàm $y = \sin x$ và $y = \cos x$ xác định tại mọi x, có giá trị thuộc $[-1, 1]$, tuần hoàn với chu kỳ 2π.

$y = \sin x$

Hình 7

$y = \cos x$

Hình 8

• Hàm $y = tgx$ xác định tại mọi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, (k$ nguyên$)$, là hàm tăng trên từng khoảng, tuần hoàn với chu kỳ π.
• Hàm $y = \cot gx$ xác định tại mọi $x \neq k\pi, (k$ nguyên$)$, là hàm giảm trên từng khoảng, tuần hoàn với chu kỳ π.

$y = tgx$

Hình 9

$y = \cot gx$

Hình 10

• Các hàm lượng giác ngược.

• $y = \arcsin x$. Hàm $y = \sin x$ với $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là một song ánh từ đoạn $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ lên đoạn $[-1, 1]$ nên nó có hàm ngược mà ta ký hiệu là $x = \arcsin y$ (x bằng số đo của cung mà sin của nó bằng y). Vậy

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

Với qui ước dùng chữ x để chỉ là biến độc lập, chữ y đ ể chỉ hàm, thì hàm ngược của hàm $y = \sin x$ với $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là $y = \arcsin x$.
Đồ thị của hàm đó sẽ đối xứng với đồ thị của hàm $y = \sin x, (\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ qua đường phân giác thứ nhất.

Hàm $y = \arcsin x$ xác định và tăng trên $-1 \leq x \leq 1$.
• $y = \arccos x$. Cũng như trên, hàm $y = \cos x$ với $0 \leq x \leq \pi$ có hàm ngược là $x = \arccos y$ (x bằng số đo của cung mà cosin của nó bằng y). Vậy

$$\begin{cases} y = \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

Đồ thị của hàm $y = \arccos x$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = \cos x, (0 \leq x \leq \pi)$ qua đường phân giác thứ nhất.
Hàm $y = \arcsin x$ xác định và giảm trên $-1 \leq x \leq 1$.
Ta có đẳng thức sau

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2}.$$

$y = \arcsin x$

Hình 11

$y = \arccos x$

Hình 12

• $y = arctgx$. Hàm $y = tgx$ với $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ có hàm ngược là $x = arctgy$ (x bằng số đo của cung mà tg của nó là y). Vậy

$$\begin{cases} y = tgx, \\ \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = arctgy.$$

Đồ thị của hàm $y = arctgx$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = tgx, (\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ qua đường phân giác thứ nhất.
• $y = \mathrm{arccot}gx$. Hàm $y = \cot gx$ với $0 < x < \pi$ có hàm ngược là $x = \mathrm{arccot}gy$ (x bằng số đo của cung mà tg của nó là y). Vậy

$$\begin{cases} y = \cot gx, \\ 0 < x < \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \mathrm{arccot}gy.$$

Đồ thị của hàm $y = \mathrm{arccot}gx$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = \cot gx, (0 < x < \pi)$ qua đường phân giác thứ nhất.
Ta có đẳng thức sau

$$arctgx + \mathrm{arccot}gx = \tfrac{\pi}{2}.$$

$y = arctgx$ $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{arccot} gx$

Hình 13 $\qquad\qquad$ **Hình 14**

§2. Giới hạn của dãy số thực

2.1. Định nghĩa dãy số, giới hạn của dãy số

• **Định nghĩa**: Cho hàm số $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Các giá trị của x tại $n = 1, 2, \ldots$ lập thành một dãy số (gọi tắt là dãy)

$$x(1),\ x(2),\ x(3), \ldots$$

Nếu đặt $x_n = x(n)$, ta có thể viết dãy số đó như sau

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \text{ hay } \{x_n\}.$$

Các số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ được gọi là các số hạng của dãy, x_n được gọi là các số hạng tổng quát của dãy, còn n được gọi là chỉ số của nó.

Ví dụ: Cho $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = a$, $x_n = (-1)^n$, thì các dãy tương ứng sẽ là

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, \ldots$$

$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

• **Định nghĩa**: Cho dãy số $\{x_n\}$. Ta nói $\{x_n\}$ *hội tụ* nếu, tồn tại một số thực a sao cho, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ta có thể nghiệm lại rằng, nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì số thực a trong định nghĩa ở trên là duy nhất (xem tính chất 1), ta gọi a là *giới hạn của dãy* $\{x_n\}$ và ký hiệu nó là

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ hay } x_n \to a \text{ khi } n \to \infty.$$

Dùng các ký hiệu logic ta có thể diễn đạt định nghĩa trên như sau:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Chú ý rằng, số N tồn tại trên đây nói chung phụ thuộc vào ε, do đó ta có thể viết $N = N(\varepsilon)$. Hơn cũng không cần thiết N phải là số tự nhiên.

• Định nghĩa: Dãy không hội tụ được gọi là *phân kỳ*.

Ví dụ: Cho $\{x_n\}$, với $x_n = \frac{1}{n}$. Ta có $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Thật vậy

$$|x_n - 0| = |\tfrac{1}{n} - 0| = \tfrac{1}{n}$$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \tfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Rõ ràng, nếu chọn $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1,$ ta có

$$\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

2.2. Các tính chất và các phép tính về giới hạn của dãy số

• **Tính chất 1.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Khi đó số thực a trong định nghĩa ở trên là duy nhất.

Chứng minh: Giả sử có hai số thực $a, \widehat{a}$ như trong định nghĩa ở trên. Ta chứng minh rằng $a = \widehat{a}$. Thật vậy, giả sử ngược lại: $a \neq \widehat{a}$. Chọn $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - \widehat{a}| > 0,$ ta có:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, \ \text{(bởi vì } x_n \to a)$$

và

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - \widehat{a}| < \varepsilon, \text{ (bởi vì } x_n \to \widehat{a}).$$

Chọn số tự nhiên $n \geq \max\{N_1, N_2\},$ ta có:

$$3\varepsilon = |a - \widehat{a}| \leq |a - x_n| + |x_n - \widehat{a}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Điều nầy mâu thuẫn. Vậy tính chất 1 được chứng minh.

• **Tính chất 2.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ về $a.$ Nếu $a > p$ (tương ứng với $a < p$), thì

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n > p \ \text{ (tương ứng với } x_n < p)$$

Chứng minh: Chọn $0 < \varepsilon < a - p$ thì $a - \varepsilon > p.$ Với số ε đó thì $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow x_n > p.$

• **Tính chất 3.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a và ta có $x_n \leq p \ (x_n \geq q)$ với mọi $n,$ thì $a \leq p$

$(a \geq q).$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n > p \ \text{ (tương ứng với } x_n < p)$$

Chứng minh: Giả sử ngược lại $a > p \ (a < q).$ Khi đó theo tính chất 2 thì $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > p \ (x_n < q).$ Điều nầy mâu thuẫn với giả thiết. Vậy tính chất 3 được chứng minh.

• **Tính chất 4.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Khi đó nó bị chặn, nghĩa là:

$$\exists M > 0 : |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh: Chọn $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < 1,$ từ đó $|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} = M$ với mọi $n.$

• **Định lý 1.** Cho hai dãy hội tụ $\{x_n\}$ và $\{y_n\}.$ Nếu $x_n \geq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

Chứng minh: Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$ Giả sử ta có $a < b.$ Lấy một số r sao cho $a < r < b.$ Khi đó theo tính chất 2

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \Rightarrow x_n < r.$$

Mặt khác,

$$\exists N'' \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'' \Rightarrow y_n > r.$$

Đặt $N = \max\{N', N''\}$. Khi đó $\forall n \geq N \Rightarrow x_n < r < y_n$. Điều nầy mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $a \geq b$.

• **Định lý 2.** Cho ba dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ và $\{z_n\}$ thỏa

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Khi đó dãy $\{y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh: Theo định nghĩa giới hạn

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N' \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$\exists N'' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N'' \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Đặt $N = \max\{N', N''\}$. Ta có $\forall n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, hay $|y_n - a| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

• **Định lý 3.** Nếu các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ thì dãy $\{x_n \pm y_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Theo đ ịnh nghĩa giới hạn, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists N' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N' \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2,$$

$$\exists N'' \in \mathbb{N} : \forall n \geq N'' \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Đặt $N = \max\{N', N''\}$. Ta có
$\forall n \geq N \Rightarrow |(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

• **Định lý 4.** Nếu các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ thì dãy $\{x_n y_n\}$ cũng hội tụ

và $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Khi đ ó $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$, $x_n - a = \alpha_n$, $y_n - b = \beta_n$. Ta có

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |(a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab| \\ &= |\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n| \leq |\alpha_n||b| + |\beta_n||a| + |\alpha_n||\beta_n| \\ &= |x_n - a||b| + |y_n - b||a| + |x_n - a||y_n - b| \\ &\leq \varepsilon|b| + \varepsilon|a| + \varepsilon M = \varepsilon(|b| + |a| + M). \end{aligned}$$

Vì $y_n - b \to 0$ nên nó bị chặn bởi hằng số dương M Vậy đánh giá trên cho ta $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

• **Hệ quả.** Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ, và k là một số tùy ý, thì dãy $\{kx_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

• **Định lý 5.** Nếu các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ hội tụ, và $y_n \neq 0\ \ \forall n,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ thì dãy $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Chứng minh: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. Đ ặt $x_n - a = \alpha_n,\ y_n - b = \beta_n$, ta có

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}\right| \leq \frac{|b||\alpha_n| + |a||\beta_n|}{|b||b+\beta_n|}.$$

Lấy $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|b|$ thì

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon,$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \varepsilon.$$

Đặt $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ta có

$$|b+\beta_n| \geq |b| - |\beta_n| \geq |b| - \varepsilon \geq |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|.$$

Khi đó $\forall n \geq N_1 \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2(|b|+|a|)}{b^2}\varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

§3. Giới hạn của hàm số

3.1. Các định nghĩa giới hạn

Định nghĩa 1. Xét hàm $y = f(x)$ xác đ ịnh ở lân cận giá trị hữu hạn x_0, không nhất thiết xác định tại x_0. Trong lân cận đó ta có thể lấy được dãy $\{x_n\}$, sao cho $x_n \neq x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ta nói rằng số L là *giới hạn* của hàm số $y = f(x)$ khi x tiến dần về x_0, nếu đối với dãy $\{x_n\}$ bất kỳ như trên, dãy tương ứng các giá trị của hàm $\{f(x_n)\}$ luôn luôn hội tụ và có giới hạn là L. Khi đ ó ta ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ. Xét hàm $y = x\sin\frac{1}{x}$ trong khoảng $(-1,1)\backslash\{0\}$. Ta có nếu $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$ là dãy hội tụ đến 0, thì

$$0 \leq |f(x_n)| = |x_n||\sin\frac{1}{x_n}| \leq |x_n|.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, nên $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Ví dụ. Xét hàm $y = \sin\frac{1}{x}$ trên khoảng $(-1,1)$. Hàm đó không có giới hạn khi x tiến dần về 0.

Thật vậy đặt $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ta được dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến 0, dãy tương ứng $\{f(x_n)\} = \{\sin n\pi\} = \{0\}$ hội tụ đến 0.
Nếu đặt $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ ta được dãy $\{x'_n\}$ hội tụ đến 0, dãy tương ứng $\{f(x'_n)\} = \{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\} = \{1\}$ hội tụ đến 1.
Vậy hàm $y = \sin\frac{1}{x}$ không có giới hạn khi x dần về 0.

Định nghĩa 2. Ta gọi số L là *giới hạn* của hàm số $y = f(x)$ khi x tiến về x_0, nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nói chung số δ phụ thuộc vào ε. Nói một cách khác, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ nếu các giá trị của hàm $f(x)$

gần L một cách tùy ý khi các giá trị của biến x đủ gần x_0 nhưng khác với x_0.
Ta công nhận định lý sau.
Định lý. Hai định nghĩa giới hạn ở trên là tương đương.
Ví dụ. Chứng minh $\lim\limits_{x \to 2} (2x+1) = 5$. Thật vậy, ta có với mọi $\varepsilon > 0$,
$|(2x+1) - 5| = 2|x-2| < \varepsilon$ khi $|x-2| < \varepsilon/2$, nghĩa là nếu lấy $\delta = \varepsilon/2$ thì $|(2x+1)-5| < \varepsilon$ khi $|x-2| < \delta$. Đpcm.
Ví dụ. Xét giới hạn của hàm $\frac{x^2-4}{x-2}$ khi $x \to 2$. Hàm nầy không xác định khi $x = 2$, nhưng khi $x \neq 2$ ta có
$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$.
Do đó khi $x \neq 2$ ta có $\frac{x^2-4}{x-2} - 4 = (x+2) - 4 = x-2$, nên $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$, khi $x \neq 2$ và

$|x-2| < \delta = \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.
Định nghĩa. Ta gọi số L là *giới hạn* của hàm số $y = f(x)$ khi x tiến ra vô cực, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : |x| > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nói chung số N phụ thuộc vào ε. Ta ký hiệu $\lim\limits_{x_n \to \infty} f(x) = L$.
Ví dụ. Chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x}$. Thật vậy,

$|\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ khi $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, nên $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\varepsilon} : |x| > N \Rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

3.2. Các tính chất của hàm số có giới hạn

Rõ ràng ta có một số tính chất đ ơn giản sau đây:
i) Nếu $f(x) = C$ là hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = C$.

ii) Một hàm $f(x)$ nếu có giới hạn (khi $x \to x_0$ hay $x \to \infty$) thì chỉ có duy nhất một giới hạn.
iii) Một hàm $f(x)$ nếu có giới hạn dương (âm) khi $x \to x_0$ thì luôn luôn dương (âm) tại mọi $x \neq x_0$, và đủ gần x_0.
iv) Nếu hàm $f(x) \geq 0$ ở lân cận x_0 và có giới hạn khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy phải ≥ 0. Nếu hàm

$f(x) > 0$ ở lân cận x_0 và có giới hạn khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy vẫn ≥ 0.

3.3. Các phép toán giới hạn của hàm số

Dựa vào định nghĩa giới hạn của hàm ta dễ dàng chứng minh được:
Định lý. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

i) Tổng $f(x) + g(x)$ cũng có giới hạn, và $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.
ii) Tích $f(x)g(x)$ cũng có giới hạn, và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$.
iii) Nếu $M \neq 0$ thì thương $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng có giới hạn, và $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.
Chú thích: Định lý trên cũng đúng với quá trình $x \to \infty$ thay vì quá trình $x \to x_0$.
Định lý. Xét hàm hợp $f \circ u : x \mapsto f[u(x)]$.
Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Nếu
a) $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$,

b) $f(u)$ xác định trong một khoảng chứa u_0 và $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$.

Khi đó, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f[u(x)] = f(u_0) = f[\lim\limits_{x\to x_0} u(x)]$.

Chứng minh: Theo b)

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0 : 0 < |u - u_0| < \alpha \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

Với α ấy, theo a), ta lại có

$$\exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x) - u_0| < \alpha.$$

Do đó

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to x_0} f[u(x)] = f(u_0)$.

Ta công nhận kết quả sau:

Định lý. Nếu hàm sơ cấp $f(x)$ xác định trong một khoảng chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3.4. Các giới hạn cơ bản

Ta có các giới hạn cơ bản sau:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$,

Với e là một số vô tỉ, $e \simeq 2,71828\ldots$ Người ta chứng minh được rằng $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Ký hiệu ln là lôgarit cơ số e, hay *lôgarit tự nhiên* hay *lôgarit Néper*.

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

§4. Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (CVL)

4.1. Vô cùng bé

4.1.1. Định nghĩa. Hàm $\alpha(x)$ được gọi là *vô cùng bé* (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Chú thích: Ta cũng có khái niệm VCB cho quá trình $x \to \infty$ thay vì quá trình $x \to x_0$.

Trở lại định nghĩa về giới hạn của hàm, ta có thể phát biểu đ ịnh nghĩa VCB khi $x \to x_0$ như sau

Hàm $\alpha(x)$ được gọi là VCB khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa giới hạn ta có ngay:

Định lý. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - L$ là VCB khi $x \to x_0$

Chú thích: Định lý nầy vẫn đ úng cho quá trình $x \to \infty$ thay vì quá trình $x \to x_0$.

Ta cũng thấy ngay tính chất sau đây của VCB:

• **Tính chất 1.** Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$ và C là một hằng số thì cũng là $C\alpha(x)$ cũng là VCB khi $x \to x_0$.

• **Tính chất 2.** Nếu $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ là một số hữu hạn các VCB khi $x \to x_0$ thì tổng $\alpha_1(x) + \ldots + \alpha_n(x)$ và tích của chúng $\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)$ cũng là các VCB khi $x \to x_0$.

• **Tính chất 3.** Nếu $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to x_0$ và $f(x)$ là hàm bị chặn trong một lân cận: $0 < |x - x_0| < \delta$, thì thì tích $\alpha(x)f(x)$ cũng là các VCB khi $x \to x_0$.

Thậy vậy, theo giả thiết

$$\exists M > 0 \,:\, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Mặt khác

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \,:\, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \tfrac{\varepsilon}{M}.$$

Đặt $\delta^{/} = \min\{\delta, \delta_1\}$. Khi đó, nếu $0 < |x - x_0| < \delta^{/}$, ta có

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)||f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{M}.M = \varepsilon. \text{ Đpcm.}$$

Chú thích: Các tính chất 1-3 vẫn đ úng cho quá trình $x \to \infty$ thay vì quá trình $x \to x_0$.

4.1.2. So sánh các vô cùng bé

Xét hai VCB $\alpha(x)$, $\beta(x)$ trong cùng một quá trình $x \to x_0$ hay $x \to \infty$ (ta cũng viết chung là $x \to x_0$ với $x_0 \in \mathbb{R}$ hoặc $x_0 = \infty$).

i) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$: thì ta nói $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là hai *VCB ngang cấp*.

ii) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$: thì ta nói $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là *hai VCB tương đương*. Ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

iii) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$: thì ta nói $\alpha(x)$ là *VCB cấp cao hơn* $\beta(x)$, hay $\beta(x)$ là *VCB cấp thấp hơn* $\alpha(x)$. Ta ký hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

iv) Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ thì ta nói $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là *hai VCB không so sánh được với nhau.*

v) Nếu $\alpha(x)$ là VCB ngang cấp với $\beta^k(x), (k > 0)$: thì ta nói $\alpha(x)$ *là VCB cấp k so với VCB* $\beta(x)$.

Ví dụ:

i) $1 - \cos x$ và x^2 là hai VCB ngang cấp khi $x \to 0$, và do đó $1 - \cos x$ cũng là VCB cấp hai so với x^2, vì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$.

ii) $\sin x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, khi $x \to 0$

iii) $1 - \cos x$ là VCB cấp cao hơn x khi $x \to 0$, vì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = 0$.

4.1.3. Khử dạng vô định

• **Tính chất 1.** Nếu $\alpha(x) \sim \overline{\alpha}(x)$ và $\beta(x) \sim \overline{\beta}(x)$ khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$.

Thật vậy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)} \frac{\overline{\beta}(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\overline{\alpha}(x)}.\lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.\lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\beta}(x)}{\beta(x)} = 1.\lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.1 = \lim_{x \to x_0} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}.$$

Ví dụ: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+2x)}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

• **Tính chất 2.** Nếu $\alpha(x) = o(\beta(x))$ khi $x \to x_0$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$ khi $x \to x_0$.

Thật vậy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1\right] = 1.$$

Như vậy tổng của hai VCB tương đ ương với VCB có cấp thấp hơn.

• **Tính chất 3.** Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao.

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$, trong đó $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ đều là tổng của một số hữu hạn các VCB khi $x \to x_0$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}$ của tỷ số hai VCB cấp thấp nhất ở tử số và mẫu số.

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\sin^2 x+ tg^3 x}{2x+x^3+4x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

4.2. Vô cùng lớn

4.2.1. Định nghĩa. Cho hàm $f(x)$ xác đ ịnh ở lân cận của x_0, không nhất thiết xác định tại x_0. Ta nói hàm $f(x)$ là *vô cùng lớn* (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.

Tương tự, ta cũng có khái niệm VCL cho các quá trình $x \to +\infty, x \to -\infty$ thay vì quá trình $x \to x_0$.

4.2.2. Liên hệ giữa VCB và VCL.

Định lý. Giả sử $f(x) \neq 0$ trong một lân cận của x_0. Khi đó

$$f(x) \text{ là (VCB)} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ là (VCL), khi } x \to x_0,$$
$$f(x) \text{ là (VCL)} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \text{ là (VCB), khi } x \to x_0.$$

Ví dụ: $\frac{1}{\sin x}$ là (VCL), khi $x \to 0$,

$\frac{1}{x}$ là (VCB), khi $x \to \infty$.

4.2.3. So sánh các vô cùng lớn

Giả sử $A(x), B(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$(ta cũng viết chung là $x \to x_0$ với $x_0 \in \mathbb{R}$ hoặc $x_0 = \infty$).

i) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = k \in \mathbb{R}, k \neq 0$: thì ta nói $A(x), B(x)$ là hai *VCL ngang cấp*.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = 1$: thì ta nói $A(x), B(x)$ là *hai VCL tương đương*. Ta ký hiệu $A(x)\sim B(x)$.

iii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = 0$: thì ta nói $A(x)$ là *VCL cấp thấp hơn* $B(x)$, hay $B(x)$ là *VCL cấp cao hơn* $A(x)$.

iv) Nếu $\frac{A(x)}{B(x)}$ là hai VCL khi $x \to x_0$ thì ta nói $A(x)$ là *VCL cấp cao hơn* $B(x)$, hay $B(x)$ là *VCL cấp thấp hơn* $A(x)$.

v) Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$ và $\frac{A(x)}{B(x)}$ cũng không là VCL khi $x \to x_0$ thì ta nói $A(x), B(x)$ là *hai VCL không so sánh được với nhau.*

Từ ii) ta có các tính chất sau:

j) Giả sử $A(x), \overline{A}(x), B(x)$ và $\overline{B}(x)$ là các VCL khi $x \to x_0$. Nếu $A(x)\sim\overline{A}(x)$ và $B(x)\sim\overline{B}(x)$ thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overline{A}(x)}{\overline{B}(x)}.$$

jj) Nếu $A(x)$ là VCL cấp cao hơn VCL $B(x)$ khi $x \to x_0$, thì $A(x) + B(x)\sim A(x)$ khi $x \to x_0$.

Thật vậy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)+B(x)}{A(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{B(x)}{A(x)}\right) = 1.$$

Ví dụ: Khi $x \to \infty$, thì $x^3 + 1$ là VCL cấp cao hơn VCL x^2, vì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Ví dụ: Khi $x \to \infty$, thì $3x^4 + x \sim 3x^4$.

4.2.4. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty$.

* Qui tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp.

Giả sử $A(x)$ và $B(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$, trong đó $A(x)$ và $B(x)$ đều là tổng của một số hữu hạn các VCL khi $x \to x_0$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}$ của tỷ số hai VCL cấp cao nhất ở tử số và mẫu số.

Ví dụ: (Dạng $\frac{\infty}{\infty}$). $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+2}{4x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$.

Ví dụ: (Dạng $\infty - \infty$).

Xét $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2} - \sqrt{x^4 - 1})$. Khi $x \to \infty$, thì $\sqrt{x^4 + 3x^2} \to +\infty$ và $\sqrt{x^4 - 1} \to +\infty$, nên ta gặp dạng vô định $\infty - \infty$. Muốn khử nó ta nhân và chia nó với biểu thức liên hợp $\sqrt{x^4 + 3x^2} + \sqrt{x^4 - 1}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2} - \sqrt{x^4 - 1}) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^4+3x^2} - \sqrt{x^4-1})(\sqrt{x^4+3x^2} + \sqrt{x^4-1})}{\sqrt{x^4+3x^2} + \sqrt{x^4-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^4+3x^2} + \sqrt{x^4-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \quad (\text{ chia tử và mẫu cho } x^2) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ví dụ: (Dạng $0 \times \infty$). Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

Vậy giới hạn đã cho có dạng vô định $\infty \times 0$. Muốn khử nó, ta biến đổi như trên thì được

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1} (\text{ chia tử và mẫu cho } x) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

§5. Hàm số liên tục

5.1. Các định nghĩa về hàm số liên tục tại một điểm

* Cho $D \subset \mathbb{R}$, điểm $x_0 \in D$ được gọi là *điểm tụ* của D nếu tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset D\backslash\{x_0\}$ sao cho $x_n \to x_0$. Điểm $x_0 \in D$ không phải là điểm tụ của D được gọi là *điểm cô lập* của D.

* Cho $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$.

Nếu x_0 được gọi là *điểm cô lập* của D. Ta nói f *liên tục* tại x_0.

Nếu x_0 được gọi là *điểm tụ* của D. Ta nói f *liên tục* tại $x_0 \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Trong trường hợp, $x_0 \in D$ là điểm tụ của D. Ta cũng có

f liên tục tại $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Vẫn là $x_0 \in D$ là điểm tụ của D. Ta cũng có các định nghĩa khác liên quan đến liên tục một phía như sau:

*Ta nói f *liên tục bên phải* tại $x_0 \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$, tức là,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ x_0 \le x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Ta nói f *liên tục bên trái* tại $x_0 \in D$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$, tức là,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ x_0 - \delta < x \le x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hiển nhiên, điều kiện cần và đ ủ để hàm f liên tục tại x_0 là f liên tục bên phải và bên trái tại x_0.

5.2. Định nghĩa trong khoảng, trên đoạn

* Hàm $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trong kh*oảng (a,b) nếu f liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (a,b)$.

* Hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục trên đoạn* $[a,b]$ nếu f liên tục trong khoảng (a,b) và liên tục bên phải tại a, liên tục bên trái tại b.

5.3. Các phép toán trên các hàm số liên tục tại một điểm

Áp dụng các phép toán đơn giản về các hàm số có giới hạn ta có một số kết quả sau đây:

Định lý. Nếu hàm f là liên tục tại điểm x_0 thì hàm $|f|$ cũng liên tục tại x_0.

Định lý. Nếu các hàm f và g liên tục tại điểm x_0 thì các hàm $f + g$, fg, Cf (C là hằng số) $|f|$ cũng liên tục tại x_0.

Ngoài ra, nếu các hàm $g(x_0) \neq 0$ thì hàm $\frac{f}{g}$ liên tục tại x_0.

Định lý. Giả sử $I, J \subset \mathbb{R}$ và $f : I \to J, g : J \to \mathbb{R}$. Nếu hàm f liên tục tại điểm x_0 và g liên tục tại điểm $y_0 = f(x_0) \in J$, thì hàm hợp $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ cũng liên tục tại x_0.

5.4. Điểm gián đoạn. Phân loại

Định nghĩa. Hàm f được gọi là *gián đoạn* tại x_0 nếu f không liên tục tại điểm x_0. Lúc đó x_0 *điểm gián đoạn* của f. Nếu f gián đoạn tại x_0 thì đồ thị của hàm $y = f(x)$ không liền tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$, mà bị ngắt quảng tại M_0.

Căn cứ vào định nghĩa ta thấy rằng hàm f gián đoạn tại x_0 nếu gặp một trong các trường hợp sau:

i) Nếu các giới hạn bên phải $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, giới hạn bên trái $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ tồn tại và ba số thực $f(x_0), f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ không đồng thời bằng nhau, thì ta nói x_0 là *điểm gián* *đoạn loại một*.

j) Nếu $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$, thì ta nói x_0 là *điểm gián đoạn bỏ được*.

jj) Nếu $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, thì ta nói x_0 là *điểm nhảy*. Hiệu số $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ được gọi là *bước nhảy*.

ii) Điểm gián đoạn không thuộc loại một được gọi là *điểm gián đoạn loại hai*.

Ví dụ: Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{nếu} \quad x \geq 0, \\ x-1, & \text{nếu} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ta có: $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} f(x) = 1$, $f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = -1$.

Vậy $x = 0$ là một điểm nhảy, với bước nhảy là $f(+0) - f(-0) = 2$.

Ví dụ: Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{nếu} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2$, nên gián đoạn loại một tại $x = 0$. Hơn nữa, $x = 0$ là một điểm gián đoạn bỏ được.

Nếu xét hàm

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{nếu} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{nếu} \quad x = 0. \end{cases}$$

thì $\widetilde{f}$ sẽ liên tục tại $x = 0$, điều nầy giải thích từ "*bỏ được*".

Ví dụ: Hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ có điểm gián đoạn loại hai tại $x = 0$, vì $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

5.5. Tính liên tục của các hàm sơ cấp

Ta sẽ chỉ ra rằng các hàm sơ cấp đều liên tục trên tập xác đ ịnh của chúng.

1/ Đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Vì hàm số $y = C$ = hằng và hàm số $y = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$$x \mapsto ax^k = a\underbrace{xx\ldots x}_{k \text{ thừa số}}$$

trong đó a là một số tực không đ ổi và k là một số tự nhiên, liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm $P_n(x)$ là tổng hữu hạn các hàm thuộc dạng trên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm hữu tỉ $\frac{P}{Q}$, trong đó P và Q là các đa thức, liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ tại đó $Q(x) \neq 0$.

2/ Hàm mũ $y = a^x$ $(a > 0)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $a^x = a^{x_0}a^{x-x_0}$.

Khi $x \to x_0$ ta có $x - x_0 \to 0$ và $a^{x-x_0} \to 1$. Do đó $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Vậy hàm $y = a^x$ liên tục tại điểm x_0. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ và } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ với } a > 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ và } \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \text{ với } 0 < a < 1.$$

Tập các giá trị của hàm số $y = a^x$ là khoảng $(0,+\infty)$.
3/ Hàm số Lôgarit $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ liên tục trên $(0,+\infty)$. (Xem mục 5.5)

Giả sử $x_0 > 0$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $\log_a x = \log_a x_0 + \log_a \frac{x}{x_0}$.

Khi $x \to x_0$ ta có $\frac{x}{x_0} \to 1$ và $\log_a \frac{x}{x_0} \to 0$. Do đó $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$. Vậy hàm $y = \log_a x$ liên tục tại điểm x_0. Ta có:

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{nếu } a > 1,$$

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = +\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{nếu } 0 < a < 1.$$

4/ Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ liên tục trên $(0,+\infty)$. Vì $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ nên theo định lý về tính liên tục của hàm số hợp, hàm số lũy thừa liên tục trên $(0,+\infty)$.
5/ Các hàm số lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.
Thật vậy, Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos \tfrac{x+x_0}{2} \sin \tfrac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin \tfrac{x-x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.
Vậy hàm số $y = \sin x$ liên tục tại điểm x_0, tức là liên tục trên $\mathbb{R}$.
Vì $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên theo định lý về tính liên tục của hàm số hợp, suy ra hàm số $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Cũng theo tính chất hàm liên tục ta có hàm số $y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ tập các số nguyên.
Hàm số $y = \cot gx = \frac{\cos x}{\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

6/ Người ta chứng minh được rằng các hàm lượng giác ngược liên tục trên tập xác định của chúng. (xem mục 5.5). Cụ thể là

- Hàm số $y = \arcsin x$ liên tục và tăng trên từ $[-1,1]$ lên $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Hàm số $y = \arccos x$ liên tục và giảm trên từ $[-1,1]$ lên $[0,\pi]$.
- Hàm số $y = arctgx$ liên tục và tăng trên từ $\mathbb{R}$ lên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Hàm số $y = \mathrm{arccot}\, gx$ liên tục và giảm trên từ $\mathbb{R}$ lên $(0,\pi)$.

5.6. Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn

· Ý nghĩa hình học của khái niệm liên tục

Hình 15 **Hình 16**

Giả sử hàm $y = f(x)$ liên tục tại x_0. Xét điểm $P_0(x_0,y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ trên đồ thị. Khi

$\Delta x = x - x_0 \to 0$ thì $\Delta f = f(x) - f(x_0) \to 0$, nên khi $x \to x_0$, thì trên đồ thị, điểm $P(x,y)$ chạy đến điểm P_0 không bị ngắt quãng.

Từ đó suy ra rằng nếu hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì đồ thị của nó là một đường liền nối điểm $A(a,f(a))$ với điểm $B(b,f(b))$.

Dựa vào ý nghĩa hình học của hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ ta rút ra một số tính chất của nó mà không chứng minh:

• Đường cong liền đi từ điểm A đến điểm B không thể chạy ra vô tận, nên ta có:

Định lý. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó, tức là

$$\exists M > 0 : |f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b].$$

• Đường cong liền đi từ điểm A đến điểm B bao giờ cũng có ít nhất một điểm cao nhất và một điểm thấp nhất, nên ta có:

Định lý. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì ít nhất một lần nó đạt giá trị lớn nhất và một lần nó đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a,b]$, tức là

$$\exists c_1, c_2 \in [a,b] : f(c_1) \le f(x) \le f(c_2) \quad \forall x \in [a,b]. \quad \text{(xem hình 17)}$$

Hình 17 **Hình 18** **Hình 19**

• Nếu hai điểm A và B ở hai phía của trục ox thì đường cong liền đi từ điểm A đến điểm B phải cắt trục ox ít nhất một lần, nên ta có:

Định lý. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và nếu các giá trị $f(a)$ và $f(b)$ trái dấu nhau thì $f(x)$ triệt tiêu tại ít nhất một lần trong khoảng (a,b), tức là, tồn tại ít nhất một giá trị $c \in [a,b]$ sao cho $f(c) = 0$. (xem hình 19)

• Nếu vẽ một đường thẳng song song với trục Ox trong khoảng giữa điểm thấp nhất và điểm cao nhất của đường cong nối liền A đến B bao giờ đường thẳng ấy cũng cắt đường cong ấy ít nhất một lần, nên ta có:

Định lý. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ và μ là một giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của f thì μ là giá trị của f tại ít nhất một điểm trên đoạn $[a,b]$, tức là, nếu $\max\limits_{a \le x \le b} f(x) \le \mu \le \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$ thì tồn tại ít nhất một giá trị $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f(c)$. (xem hình 18)

Cuối cùng ta có:

Định lý. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và tăng(giảm) trên đoạn $[a,b]$. Khi đó f là một song ánh từ $[a,b]$ lên $[f(a),f(b)]$ ($[f(b),f(a)]$) và hàm số ngược $f^{-1} : [f(a),f(b)] \to [a,b]$ ($f^{-1} : [f(b),f(a)] \to [a,b]$) của hàm f là liên tục và tăng(giảm).

Một hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *tăng* (*giảm*) trên đoạn $[a,b]$, nếu

$$\forall x, x' \in [a,b],\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \text{ (tương ứng } f(x) > f(x')).$$

Một hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ được gọi là *không giảm* (*không tăng*) trên đoạn $[a,b]$, nếu

$$\forall x, x' \in [a,b],\ x < x' \Rightarrow f(x) \le f(x') \text{ (tương ứng } f(x) \ge f(x')).$$

§6. Đạo hàm

6.1. Các khái niệm đạo hàm

6.1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa

Xét hàm số $f : (a,b)$ và $x_0 \in (a,b)$. Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu tồn tại được gọi là *đạo hàm* của hàm số f tại x_0 và ta ký hiệu giới hạn đó là $f'(x_0)$ hay $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Đặt $\Delta x = x - x_0$ thì đạo hàm $f'(x_0)$ được định nghĩa là giới hạn (nếu có)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2$. Tính $f'(2)$.

Ta có

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Vậy $f'(2) = (x^2)'|_{x=2} = 4$.

6.1.2. Ý nghĩa của đạo hàm

• Tiếp tuyến của đường cong

Hình 20

Xét đường cong (L) có phương trình $y = f(x)$ và một điểm cố định M trên (L) có toạ độ $M(x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$. Xét cát tuyến MN. Nếu khi điểm N chạy trên đường cong (L) tới điểm M mà cát tuyến MN dần đến một vị trí giới hạn MT thì đ ường thẳng MT được gọi là tiếp tuyến của đường (L) tại M. Vấn đề đặt ra là khi nào đường (L) có tiếp tuyến tại M và nếu có thì hệ số góc của tiếp tuyến ấy được tính như thế nào? Gọi hoành độ của N là $x_0 + \Delta x$. Hệ số góc của cát tuyến MN là

$$tg\beta = \frac{PN}{MP} = \frac{y-y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bây giờ cho điểm N chạy trên tới điểm M trên đường (L), lúc đó $\Delta x \to 0$ nếu tỉ số ở vế phải $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ có giới hạn thì $tg\beta$ ở vế trái cũng có giới hạn ấy, do đó góc β tiến tới một góc xác định mà ta gọi là $\alpha,$ nghĩa là cát tuyến MN dần đến một vị trí giới hạn MT nghiêng với trục ox một góc $\alpha.$ Vậy hệ số góc $tg\alpha$ của tiếp tuyến MT nếu có chính là

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Suy ra ý nghĩa hình học của đạo hàm:
Nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì đồ thị của hàm $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0),$ trong đó $y_0 = f(x_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến là

$$k = tg\alpha = f'(x_0).$$

Do đó phương trình của tiếp tuyến tại M_0 là

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

và phương trình của pháp tuyến tại M_0 là

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

• Vận tốc chuyển động thẳng

Hình 21

Xét một vật chuyển động trên một đường thẳng tại thời điểm t_0 nó ở M_0 với hoành độ $s(t_0),$ tại thời điểm t nó ở M với hoành độ $s(t).$ Vậy trong khoảng thời gian $t - t_0 = \Delta t$ nó đi được quãng đường $\Delta s = s(t) - s(t_0).$ Tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ là vận tốc trung bình của vật chuyển động trong khoảng thời gian trên. Khi $\Delta t \to 0$ (hay $t \to t_0$) nếu tỉ số $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ có giới hạn thì giới hạn đ ó ta gọi là vận tốc tức thời của vật chuyển động tại thời điểm $t_0.$ Vậy theo định nghĩa

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(t_0).$$

Suy ra ý nghĩa cơ học của đạo hàm: Đạo hàm của hoành độ $s(t)$ đ ối với thời gian t chính là vận tốc tức thời của vật chuyển đ ộng thẳng tại thời điểm t_0 : $v(t_0) = s'(t_0).$

6.1.3. Liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Định lý. Nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại $x_0.$
Thật vậy, ta có

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \text{ với } \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Suy ra

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Vậy $\Delta f \to 0$ khi $\Delta x \to 0,$ nghĩa là f liên tục tại $x_0.$

Chú thích. Điều ngược lại nói chung không đúng, nghĩa là một hàm liên tục chưa chắc đã có đạo hàm tại đó.
liên tục tại $x_0.$

Ví dụ: Các hàm $y = |x|$ và $y = \sqrt[3]{x}$) liên tục tại $x_0 = 0$ mà không có đạo hàm tại đ ó.

6.2. Các qui tắc tính đạo hàm

Định lý. (Đạo hàm của tổng, tích thương)
Nếu hàm $u(x)$ và $v(x)$ đều có đạo hàm đối với x thì tổng $u+v$, tích uv, thương $\frac{u}{v}$ của chúng cũng có đạo hàm đối với x và

$$(u+v)' = u' + v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ với } v(x) \neq 0.$$

Chứng minh: Vì $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ nên để tính đ ạo hàm ta nhận xét khi cho x số gia Δx thì số gia tương ứng của hàm f là

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

nên ta có $$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f = f + \Delta f.$$

i/ Bây giờ cho $f = u + v$, ta có

$$\Delta f = (u+\Delta u) + (v + \Delta v) - (u+v) = \Delta u + \Delta v.$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v' \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Từ đó suy ra $(u+v)' = u' + v'$.

ii/ Nếu $f = uv$, thì ta có

$$\Delta f = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} \to uv' + vu' \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Từ đó suy ra $(uv)' = uv' + vu'$.

iii/ Nếu $f = \frac{u}{v}$, thì ta có

$$\Delta f = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} \to \frac{vu' - uv'}{v^2} \text{ khi } \Delta x \to 0, \text{nếu } v(x) \neq 0.$$

Từ đó suy ra $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

Hệ quả.

1/ Nếu $u = C$ – hằng thì đạo hàm $u' = 0$, vì $u' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$.

2/ $(Cu)' = Cu'$,

3/ $(u-v)' = u' - v'$,

4/ $(u_1 + \ldots + u_n)' = u_1' + \ldots + u_n'$,

5/ $\left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-Cv'}{v^2}$ với $v \neq 0$.

Định lý. (Đạo hàm của hàm hợp)
Xét hàm hợp $y = y[u(x)]$. Nếu hàm $y = y(u)$ có đạo hàm đối với u và $u = u(x)$ có đạo hàm đối với x thì hàm hợp $y = y[u(x)]$ cũng có đạo hàm đối với x và $y_x' = y_u' u_x'$.

Chứng minh.
Cho x số gia Δx thì u có số gia Δu, ứng với số gia ấy y có số gia Δy. Nếu $\Delta u \neq 0$ thì

$$\Delta y = y_u' \Delta u + \alpha \Delta u, \text{ với } \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta u \to 0.$$

Từ đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y_u' \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \to y_u' u_x' \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Suy ra Đpcm.

Định lý. (Đạo hàm của hàm ngược)

Giả sử hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 sao cho $f'(x_0) \neq 0$. Nếu hàm $x = f^{-1}(y)$ là hàm ngược của hàm $y = f(x)$ liên tục tại y_0 thì $f^{-1}(y)$ cũng có đ ạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Chứng minh. Vì $\Delta x = \Delta f^{-1} = (f^{-1})(y_0 + \Delta y) - (f^{-1})(y_0)$ nên khi $\Delta y \neq 0$, ta có $\Delta x \neq 0$. Như vậy khi $\Delta y \neq 0$, ta có

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Cho $\Delta y \to 0$, vì hàm $x = (f^{-1})(y)$ liên tục tại y_0 nên $\Delta x \to 0$, do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \neq 0.$$

Vậy, tồn tại $(f^{-1})'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{xy \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

6.3. Bảng các đạo hàm cơ bản

1/ Nếu $f(x) = C$ thì $f'(x) = 0$.

2/ Nếu $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$.

Thật vậy $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \to 1$ khi $\Delta x \to 0$.

3/ Nếu $f(x) = \sin x$ thì $f'(x) = \cos x$.

Thật vậy $\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2})\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to \cos x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Tương tự ta có $(\cos)'(x) = \sin x$.

4/ Nếu $f(x) = e^x$ thì $f'(x) = e^x$.

Thật vậy $\Delta f = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to e^x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

5/ Nếu $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ thì $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Thật vậy $\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln(1 + \frac{\Delta x}{x})$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \to \frac{1}{x} \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

6/ Nếu $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ thì $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Thật vậy, ta có

$\ln f(x) = \alpha\ln x$. Suy ra

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x}$ hay $f'(x) = \alpha\frac{f(x)}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

7/ Nếu $f(x) = tgx$ thì $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.

Vì $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$(tg)'(x) = \frac{(\sin)'(x)\cos x - \sin x(\cos)'(x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$

8/ Nếu $f(x) = \cot gx$ thì $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$.

Thật vậy, ta có

$$(\cot g)'(x) = (\frac{\cos}{\sin})'(x) = \frac{(\cos)'(x)\sin x - \cos x(\sin)'(x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g$$

9/ Nếu $f(x) = \arcsin x$ thì $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Đặt $y = \arcsin x$ thì $x = \sin y = x(y)$, $\frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Ta có

$y^{/}(x) = \frac{1}{x^{/}(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10/ Nếu $f(x) = arc\cos x$ thì $f^{/}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Đặt $y = arc\cos x$ thì $x = \cos y = x(y), 0 \le y \le \pi$. Ta có

$y^{/}(x) = \frac{1}{x^{/}(y)} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

11/ Nếu $f(x) = arctgx$ thì $f^{/}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Đặt $y = arctgx$ thì $x = tgy = x(y), \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Ta có

$y^{/}(x) = \frac{1}{x^{/}(y)} = \frac{1}{(tg)^{/}(y)} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Tương tự ta có $(arc\cot g)^{/}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

Bảng các công thức đáng nhớ

Hàm số	Đạo hàm	Hàm số	Đạo hàm
C	0	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\cot gx$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$, $a > 0,\ a \neq 1$	$arc\cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a}, x \neq 0$, $a > 0,\ a \neq 1$	$arc\cot gx$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
$\cos x$	$-\sin x$		

6.4. Đạo hàm cấp cao

Ta thấy nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng nào đ ó thì đạo hàm $f^{/}(x)$ là một hàm mới của x xác định trên khoảng ấy. Đạo hàm $f^{/}(x)$ ấy được gọi là đạo hàm cấp một. Đạo hàm của đạo hàm cấp một $f^{/}(x)$, nếu có, được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và được ký hiệu là $f^{//}(x)$:

$$f^{//}(x) = (f^{/}(x))^{/}.$$

Bằng qui nạp, giả sử đạo hàm cấp $n-1$ được xác định và đ ược ký hiệu là $f^{(n-1)}(x)$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n được ký hiệu là $f^{(n)}(x)$, và được xác đ ịnh bởi

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))^{/}.$$

Các đạo hàm cấp hai trở lên được gọi là đạo hàm cấp cao.

Ví dụ: $y = x^n$ (n nguyên dương)

$y^{/} = nx^{n-1}$,

$y^{//} = n(n-1)x^{n-2}, \ldots,$

$y^{(n)} = n!$ trong đó $n! = 1.2\ldots n$.

Ví dụ: $y = \sin x,$
$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$
$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}), \ldots,$
$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$

Ví dụ: $y = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1},$
$y' = (-1)(x+a)^{-2},$
$y'' = (-1)(-2)(x+a)^{-3}, , \ldots,$
$y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(x+a)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$

Định lý. (Leibnitz)
Giả sử u và v là hai hàm số có đ ạo hàm cấp n tại x_0. Khi đó hàm số uv có đạo hàm cấp n tại x_0 và

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x_0) v^{(n-k)}(x_0),$$

ở đây $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

§7. Vi phân

7.1. Định nghĩa vi phân

Cho hàm số $f : (a,b)$ và $x_0 \in (a,b)$. Lấy Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Nếu số gia $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ của hàm có dạng $\Delta f = A.\Delta x + o(\Delta x)$, trong đó A đ ộc lập với Δx (chỉ

phụ thuộc vào x_0), $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn Δx, thì ta nói f *khả vi* tại x_0 và biểu thức $A.\Delta x$ được gọi là *vi phân* của hàm f tại x_0 và được ký hiệu là $df = A.\Delta x$.

Chú thích.
1/ Biểu thức của vi phân $A.\Delta x$ là tuyến tính đối với Δx nên nói chung nó đơn giản hơn Δf.
2/ Nếu $A \neq 0$ thì vi phân df là VCB tương đương với số gia Δf :

$$\Delta f \sim df.$$

Ví dụ: Tính vi phân của hàm $f(x) = x^2$ tại điểm x_0.
Ta có

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Vì $(\Delta x)^2$ là VCB VCB cấp cao hơn Δx, nên $df(x_0) = 2x_0\Delta x$.

7.2. Liên hệ giữa vi phân và đạo hàm

Định lý.
i/ Nếu hàm f khả vi tại x_0 thì nó có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0) = A$.
ii/ Ngược lại, nếu f có đ ạo hàm tại x_0 thì nó khả vi tại x_0 và $df = f'(x_0)\Delta x$.

Chứng minh.
i/ Theo giả thiết ta có

$\Delta f = A.\Delta x + o(\Delta x)$, suy ra
$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. Cho $\Delta x \to 0$ và chú ý $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$, ta được $f'(x_0) = A$.

ii/ Theo giả thiết ta có $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$ khi $\Delta x \to 0$.

Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,\ \alpha \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Ta suy ra

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Vì $o(\Delta x)$ là VCB VCB cấp cao hơn Δx. Vậy f khả vi tại x_0 và $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.
Do đó công thức tính vi phân của f tại x là $df(x) = f'(x)\Delta x$.
Chú thích. Nếu $f(x) = 1$ thì $f'(x) = 1$, do đó $df = dx = 1.\Delta x = \Delta x$ và ta có

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Từ đó suy ra

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

7.3. Tính bất biến của biểu thức vi phân

Bây giờ ta xét hàm hợp $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, trong đó t là biến độc lập. Vậy $y = f[\varphi(t)]$. Ta có

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}_t' dt = f'(x)\varphi'(t)dt.$$

Nhưng vì $dx = \varphi'(t)dt$ nên $dy = f'(x)dx$.
Vậy dạng vi phân của hàm f không thay đổi dù x là biến độc lập hay là hàm khả vi theo một biến độc lập khác.
Người ta nói đó là *tính bất biến* của biểu thức vi phân (cấp một).

7.4. Các qui tắc tính vi phân

Vì $df = f'(x)dx$, ta có các qui tắc sau đây:

$d(u+v) = du + dv$,
$d(uv) = udv + vdu$,
$d(Cu) = Cdu$, C – là hằng số,
$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Dựa vào bảng đạo hàm ta có bảng vi phân tương ứng

7.5. Vi phân cấp cao

Xét hàm f khả vi tại mọi x thuộc một khoảng nào đó. Vi phân $df = f'(x)dx$ đ ược gọi là vi phân cấp một tại x. Nó là một hàm của x, trong đ ó dx không đổi. Vi phân của vi phân cấp một được gọi là vi phân cấp hai và được ký hiệu là d^2f. Ta có

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2 \equiv f''(x)dx^2.$$

Vậy

$$d^2f = f''(x)dx^2.$$

Vi phân của vi phân cấp hai được gọi là vi phân cấp ba và được ký hiệu là d^3f. Cũng như trên ta có

$$d^3f = d(d^2f) = f'''(x)(dx)^3 \equiv f'''(x)dx^3.$$

Bằng qui nạp, giả sử vi phân cấp $n-1$ được xác định và ký hiệu nó là $d^{n-1}f$, ta định nghĩa vi phân cấp n được ký hiệu là d^nf, và đ ược xác định bởi

$$d^nf = d(d^{n-1}f) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Các vi phân cấp hai trở lên được gọi là vi phân cấp cao của f. Ta có

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}.$$

7.6. Các định lý về giá trị trung bình

Giả sử hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Ta nói rằng hàm số f đạt cực tiểu (cực đại) tại điểm
$x_0 \in D$, nếu tồn tại một khoảng $(a,b) \subset D$ sao cho $x_0 \in (a,b)$ và

$$f(x) \geq f(x_0) \;\; [f(x) \leq f(x_0)] \text{ với mọi } x \in (a,b).$$

x_0 gọi là điểm cực tiểu (cực đại) của hàm f nói chung gọi là điểm cực trị của hàm f.

Định lý (Fermat)

Nếu hàm số $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a,b)$. Nếu f khả vi tại x_0 thì $f^{/}(x_0) = 0$.

Chứng minh. Giả sử hàm f đ ạt cực tiểu tại điểm $x_0 \in (a,b)$. Khi đó tồn tại một khoảng

$(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ sao cho $x_0 \in (\alpha,\beta)$ và có

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ với mọi } x \in (\alpha,\beta).$$

- $x_0 < x < \beta$, ta có $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Do đó

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0.$$

- $\alpha < x < x_0$, ta có $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Do đó

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Suy ra $\qquad f^{/}(x_0) = 0$.

Định lý (Rolle)

Giả sử hàm số $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ thỏa

i) Liên tục trên $[a,b]$,

ii) Khả vi trong (a,b),

iii) $f(a) = f(b)$.

Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f^{/}(c) = 0$.

Chứng minh. Vì f liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên hàm f đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn nầy.

- Nếu $m = M$ thì $f(x) = m = M$ với mọi $x \in [a,b]$. Do đó $f^{/}(x) = 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Có thể lấy c là một điểm bất kỳ của (a,b).
- Nếu $m < M$ thì $f(a) \neq m$ hoặc $f(a) \neq M$. Giả sử $f(a) = f(b) \neq m$. Theo tính chất hàm liên tục trên một đoạn, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = m$ (chú ý $c \neq a$ và $c \neq b$). Theo định lý Fermat, ta có $f^{/}(c) = 0$.

Định lý (Lagrange)

Giả sử hàm số $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ thỏa

i) Liên tục trên $[a,b]$,

ii) Khả vi trong (a,b),

Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f^{/}(c)(b-a)$.

Chứng minh. Ta áp dụng định lý Rolle. Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \;\; x \in [a,b].$$

Dễ thấy rằng φ thỏa mãn các giả thiết của định lý Rolle:

- φ liên tục trên $[a,b]$,
- φ khả vi trong (a,b), $\varphi^{/}(x) = f^{/}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Do đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\varphi^{/}(c) = f^{/}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Suy ra công thức cần chứng minh.

Chú thích. Khi $f(a) = f(b)$ ta nhận đ ược định lý Rolle từ định lý Lagrange. Đặt $a = x_0$,

$b = x_0 + h$. Khi đó $c = x_0 + \theta h$, trong đó $0 < \theta < 1$ và công thức Lagrange được viết dưới dạng
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h).$$
Định lý Lagrange còn được gọi là *định lý về các số gia hữu hạn*.

Hệ quả.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong (a,b). Khi đó

i) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a,b)$ thì f là một hàm hằng trên $[a,b]$.

ii) Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a,b)$, thì f là một hàm tăng(giảm) trên $[a,b]$.

Chứng minh. i) Giả sử $a \leq x < x' \leq b$. Theo định lý Lagrange, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (x,x')$ sao cho
$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') = 0 \text{ vì } f'(c) = 0.$$
Do đó $f(x) = f(x')$.

ii) Tương tự.

Định lý (Cauchy)

Giả sử hàm số $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ thỏa

i) f,g liên tục trên $[a,b]$,

ii) f,g khả vi trong (a,b),

iii) $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$.

Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Chú thích. Trong định lý trên, nếu ta lấy $g(x) = x$ thì ta được định lý Lagrange.

Chứng minh. Trước hết ta để ý rằng hàm số g thỏa mãn các giả thiết của định lý Lagrange. Do đó tồn tại ít nhất một điểm $\xi \in (a,b)$ sao cho $g(b) - g(b) = g'(\xi)(b - a)$. Vì $g'(\xi) \neq 0$ nên từ đó ta suy ra $g(b) - g(b) \neq 0$. Xét hàm số
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)], \quad x \in [a,b].$$
Dễ thấy rằng hàm số φ thỏa mãn các giả thiết của định lý Rolle:

- φ liên tục trên đoạn $[a,b]$,
- φ khả vi trong khoảng (a,b), $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$,
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Do đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$. Suy ra Đpcm.

§8. Một số ứng dụng của đ ạo hàn và vi phân

8.1. Qui tắc L'Hopital

Các qui tắc L'Hopital mà ta sẽ xét trong mục nầy là một công cụ tiện dụng giúp ta khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

Định lý.

Giả sử $f,g : (x_0,b) \to \mathbb{R}$ thỏa khả vi trong (x_0,b) và

i) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = 0$,

ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0,b)$,

iii) $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad (L \in \mathbb{R}$ hay $L = \pm\infty)$,

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Chứng minh. Đặt $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Với mỗi $x \in [x_0,b)$, các hàm số f và g liên tục trên

$[x_0, x]$ và khả vi trong (x_0, x). Ngoài ra từ giả thiết ii/ trong đ ịnh lý suy ra $g^/(t) \neq 0$ với mọi $t \in (x_0, x)$ với x đủ gần x_0. Theo đ ịnh lý Cauchy tồn tại ít nhất một điểm $c \in (x_0, x)$ sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(b)-f(x_0)}{g(b)-g(x_0)} = \frac{f^/(c)}{g^/(c)}.$$

Khi $x \to x_0$ $(x > x_0)$, thì $c \to x_0$. Vậy

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0+} \frac{f^/(c)}{g^/(c)} = L.$$

Chú thích.

i/ Trường hợp $x \to x_0 +$ hay $x \to x_0$ định lý vẫn đúng.
ii/ Định lý vẫn đúng trong trường hợp $x_0 = \pm\infty$. Thật vậy giả sử $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa khả vi trong (x_0, b) và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và thoả ii) với $x_0 = +\infty$.
Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi đó $x_0 \to +\infty \Leftrightarrow t \to +0$.
Đặt

$$F(t) = f(\tfrac{1}{t}) = f(x),$$
$$G(t) = g(\tfrac{1}{t}) = g(x),$$

ta có

$$\lim_{t\to+0} F(t) = \lim_{t\to+0} G(t) = 0,$$
$$F^/(t) = f^/(\tfrac{1}{t})\left(\frac{-1}{t^2}\right),$$
$$G^/(t) = g^/(\tfrac{1}{t})\left(\frac{-1}{t^2}\right).$$

Do đó

$$\lim_{t\to+0} \frac{F^/(t)}{G^/(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{f^/(\frac{1}{t})}{g^/(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^/(x)}{g^/(x)} = L.$$

Theo định lý ta suy ra $\lim\limits_{t\to+0} \frac{F(t)}{G(t)} = L$. Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Định lý.
Giả sử các hàm $f, g : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ thỏa khả vi trong (x_0, b) và
i) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+} g(x) = \pm\infty$,
ii) $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f^/(x)}{g^/(x)} = L$ $(L \in \mathbb{R}$ hay $L = \pm\infty)$,
Khi đó

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_0+} \frac{f^/(x)}{g^/(x)}.$$

Ta công nhận định lý nầy.
Chú thích.
i/ Định lý vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0 -, x \to x_0$ hay $x \to \pm\infty$.
ii/ Có thể áp dụng qui tắc L'Hopital nhiều lần.
Ví dụ. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$
Ví dụ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Giới hạn nầy có dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Vậy khi $x \to +\infty$, $\ln x$ là một VCL bậc thấp hơn mọi $x^\alpha, (\alpha > 0)$.
Ví dụ. Với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}}.$$

Áp dụng qui tắc L'Hopital n ta được

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = 0.$$

Vậy khi $x \to +\infty$, e^x là một VCL bậc cao hơn mọi lũy thừa nguyên dương của x.
Áp dụng qui tắc L'Hopital để khử các dạng vô định khác.

Ví dụ. $\lim\limits_{x\to 0_+} x^\alpha \ln x$, $(\alpha > 0)$. Đây là giới hạn nầy có dạng $0 \times \infty$. Ta viết lại $A = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$ và bây giờ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Dùng qui tắc L'Hopital ta có

$$A = \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{\left(\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)} = \lim_{x\to 0_+} \left(-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = 0.$$

Ví dụ. Tính $A = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$. Giới hạn nầy có dạng $\infty - \infty$. Ta biến đổi như sau

$A = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ và bây giờ có dạng $\frac{0}{0}$. Dùng qui tắc L'Hopital, ta được

$$A = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ. Tính $A = \lim\limits_{x\to 0_+} x^x$. Giới hạn nầy có dạng 0^0. Lấy lôgarit hai vế, ta được

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln\left(\lim_{x\to 0_+} x^x\right) = \lim_{x\to 0_+} \ln x^x \\ &= \lim_{x\to 0_+} x\ln x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0_+} x^x = A = 1.$$

Ví dụ. Tính $A = \lim\limits_{x\to 0_+} (\cot gx)^{1/\ln x}$. Giới hạn nầy có dạng ∞^0. Lấy lôgarit hai vế, ta được

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln\left[\lim_{x\to 0_+} (\cot gx)^{1/\ln x}\right] = \lim_{x\to 0_+} \left[\ln(\cot gx)^{1/\ln x}\right] \\ &= \lim_{x\to 0_+} \left[\frac{\ln(\cot gx)}{\ln x}\right].\end{aligned}$$

Đó là giới hạn có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Dùng qui tắc L'Hopital, ta được

$$\ln A = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{-1}{\cot gx.\ \sin^2 x}}{1/x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{-x}{\sin x \cos x} = -1.$$

Vậy

$$A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Ví dụ. Tính $A = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. Giới hạn nầy có dạng 1^∞. Lấy lôgarit hai vế, ta đ ược

$$\begin{aligned}\ln A &= \ln\left[\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}\right] \\ &= \lim_{x\to 0} \left[\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}.\end{aligned}$$

Đó là giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$. Dùng qui tắc L'Hopital, ta được

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x\sin x + x^2 \cos x}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\sin x + x\cos x}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-1}{6}$$

Vậy
$$A = e^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

8.2. Tính gần đúng

Cho hàm số f khả vi tại x_0. với Δx bé, ta có
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Nếu bỏ phần VCB cấp cao $o(\Delta x)$ ta có công thức gần đúng
$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \text{ với } \Delta x \text{ bé.}$$

Ví dụ. Tính gần đúng $\sqrt[10]{1000}$.

Ta có
$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024 - 24} = \sqrt[10]{2^{10} - 24}$$
$$= \sqrt[10]{2^{10}\left(1 - \frac{24}{2^{10}}\right)} = 2\sqrt[10]{1 - \frac{3}{2^7}}.$$

Chọn hàm $f(x) = 2\sqrt[10]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -\frac{3}{2^7}$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[10]{x^9}}$, $f'(1) = \frac{1}{5}$.

Vậy $\sqrt[10]{1000} \cong 2.1 - \frac{1}{5}.\frac{3}{2^7} \cong 1,9955.$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Tìm miền xác định của các hàm sau đây
1/ $y = \sqrt{x+1}$
2/ $y = \sqrt[3]{x+1}$
3/ $y = \frac{1}{4-x^2}$
4/ $y = \sqrt{x^2-2}$
5/ $y = \sqrt{x-x^2}$
6/ $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
7/ $y = \sqrt{x-x^3}$
8/ $y = \lg\frac{2+x}{2-x}$
9/ $y = \lg\frac{x^2-3x+2}{x+1}$
10/ $y = \arccos\frac{2x}{x+1}$
11/ $y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$
2. Tìm miền xác định và miền giá trị của hàm $y = \sin 2x$.
3. Cho hàm $f: (-a,a) \to \mathbb{R}$.
Hàm f được gọi là *hàm chẵn* nếu $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in (-a,a)$.
Hàm f được gọi là *hàm lẻ* nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in (-a,a)$.
Trong các hàm sau đây, hàm nào chẵn, hàm nào lẻ.
1/ $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$

2/ $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$
3/ $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$
4/ $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$
5/ $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$
4. Cho hàm $f: D \to \mathbb{R}$.
Nếu tồn tại số $a \neq 0$ sao cho
$$f(x+a) = f(x) \text{ với mọi } x \in D,$$
thì f được gọi là *hàm tuần hoàn.* Số dương T bé nhất thoả đẳng thức trên được gọi là *chu kỳ* của f.
Trong các hàm sau đây, hàm nào là hàm tuần hoàn? Hãy tìm chu kỳ T của mỗi hàm tuần hoàn đó.
1/ $f(x) = 10\sin 3x$
2/ $f(x) = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$
3/ $f(x) = \sqrt{tgx}$
4/ $f(x) = \sin^2 x$
5/ $f(x) = \sin\sqrt{x}$.
5. Tìm hàm ngược của các hàm sau đây.
1/ $y = 2x+3$
2/ $y = x^2 - 1$ với $x \leq 0$
3/ $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

4/ $y = \lg \frac{x}{2}$.

6. Đặt $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với $n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Chứng minh

1/ $C_n^0 = C_n^n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$,

2/ $C_n^k = C_n^{n-k}, \ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$

3/ $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \ \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Suy ra rằng $C_n^k \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$.

7. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta luôn có

$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \forall \alpha \geq -1$. (Bất đẳng thức Bernuoully).

8. Chứng minh rằng

1/ Với $p > 0$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

2/ Với $p > 0$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

3/ Với $p > 0$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4/ Với $p > 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$

5/ Với $|x| < 1$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

9. Tìm các giới hạn sau đây

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

3/ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

10. Tìm các giới hạn sau đây

1/ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x-1}{2x+5}$

2/ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

5/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

11. Tìm các giới hạn sau đây

1/ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

2/ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$.

12. Áp dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau

1/ $f(x) = -\cot gx - x$

2/ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

3/ $f(x) = e^{x^2}$

4/ $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$.

13. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

1/ $y = x^3 arctgx$

2/ $y = \frac{\arcsin x}{x}$

3/ $y = \ln tg(\frac{x}{2})$

4/ $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

5/ $y = \ln\left(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}\right)$

6/ $y = arctg \sin \frac{2x^2}{1+x^4}$

7/ $y = e^x arctge^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}$

8/ $y = \frac{1}{2}tg^2(\sqrt{x}) + \ln\cos\sqrt{x}$.

14. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

1/ $y = x^{x^2}$, $x > 0$,

2/ $y = (\sin x)^{tgx}$.

15. Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ tại điểm $(3,2)$.

16. Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ tại điểm có hoành độ $x = 2a$.

17. Tìm vi phân của các hàm số sau

1/ $y = (a^2 - x^2)^5$

2/ $y = \sqrt{x^2+1}$

3/ $y = e^{x^3}$

4/ $y = xe^x$

5/ $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$

6/ $y = \arccos s\frac{1}{|x|}$

7/ $y = \frac{\sin x}{x}$.

18. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

1/ $y = \ln x$

2/ $y = 2^x$

3/ $y = \sin 2x$

4/ $y = \cos 3x$

5/ $y = \sin^2 x$

6/ $y = \sin^3 x$

7/ $y = \sin ax \sin bx$

8/ $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

9/ $y = x\cos ax$

10/ $y = \ln\frac{a+bx}{a-bx}$

11/ $y = xe^x$.

19. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

1/ Cho $y = x^2\sin 2x$. Tìm $y^{(100)}$

2/ Cho $y = x^2e^{2x}$. Tìm $y^{(20)}$

3/ Cho $y = \frac{x^2}{1-x}$. Tìm $y^{(8)}$.

20. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1/ $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

2/ $|arctgx - arctgy| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

3/ $\frac{a-b}{a} \le \ln\frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ với $0 < b < a$.

21. Tìm giới hạn của các hàm số sau

1/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

3/ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$

4/ $\lim\limits_{x\to +0} x^2 \ln x$

5/ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

6/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$

7/ $\lim\limits_{x\to 0} x^{-100} e^{\frac{-1}{x^2}}$

8/ $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

9/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$

10/ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$

11/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

12/ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

13/ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{arctgx}{x}\right)^{1/x^2}$

14/ $\lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^x$

15/ $\lim\limits_{x\to\pi/2} (tgx)^{2\cos x}$

16/ $\lim\limits_{x\to +0} (1+x)^{\ln x}$.

22. Tính gần đúng

1/ $\sqrt[3]{28}$

2/ Diện tích hình tròn, bán kính $R = 3,02m$.

CHƯƠNG 2. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM HAI BIẾN

§1. Các khái niệm

1.1. Miền phẳng

Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ta chọn một hệ trục tọa độ Descertes vuông góc Oxy. Trục ngang ox được gọi là trục hoành. Trục thẳng đ ứng $Oy \perp Ox$ được gọi là trục tung. Mỗi điểm $M \in \mathbb{R}^2$ là một cặp thứ tự hai số thực $M = (a,b),\ a,b \in \mathbb{R}$. Ta gọi tập hợp phẳng là tập hợp các điểm cùng nằm trong một mặt phẳng. Cho $A(a_1,a_2)$ và $B(b_1,b_2)$ thuộc $\mathbb{R}^2$. Khi đó khoảng cách giữa A và $B,$ ký hiệu là AB cho bởi

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\ .$$

Hình 22 **Hình 23**

Ta gọi $\delta -$ *lân cận* của điểm M_0 trong mặt phẳng là tập hợp tất cả các điểm M của mặt phẳng sao cho khoảng cách $MM_0 < \delta.$ Nói cách khác, $\delta -$ lân cận của điểm M_0 là *hình tròn* (*dĩa tròn*) *mở* tâm M_0 bán kính $\delta.$ Ta cũng ký hiệu

$$B_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 : MM_0 < \delta\}$$

để chỉ dĩa tròn mở tâm M_0 bán kính $\delta.$

Điểm $M_0 \in \Omega$ được gọi là *điểm trong* của Ω nếu tồn tại một hình tròn mở $B_\delta(M_0)$ tâm M_0 bán kính δ sao cho $B_\delta(M_0) \subset \Omega.$

Tập hợp Ω được gọi là *mở* nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.

Điểm $M_0 \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *điểm biên* của Ω nếu mọi lân cận của M_0 đều chứa các điểm của Ω đồng thời chứa các điểm không thuộc $\Omega.$

nghĩa là, $B_\delta(M_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ và $B_\delta(M_0) \cap (\mathbb{R}^2 \backslash \Omega) \neq \emptyset, \forall \delta > 0.$

Điểm biên của Ω có thể thuộc Ω và cũng có thể không thuộc $\Omega.$ Tập hợp tất cả các điểm biên của Ω được gọi là *biên của* $\Omega.$ Tập hợp Ω được gọi là *đóng* nếu nó chứa mọi điểm biên của nó.

Hình 24 **Hình 25**

1.2. Định nghĩa hàm hai biến

Xét tích $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ và tập hợp $G \subset \mathbb{R}^2$. Ta gọi ánh xạ $f : G \to \mathbb{R}$ là một hàm hai biến xác định trên G. G được gọi là miền xác đ ịnh của hàm f. Vậy một hàm hai biến f xác định trên G là một phép tương ứng sao cho mỗi cặp thứ tự các số thực $(x,y) \in G$ ta có một số thực xác định duy nhất mà ta ký hiệu là $f(x,y)$. Ta viết $f : (x,y) \mapsto z = f(x,y)$, hay gọn hơn là $z = f(x,y)$, trong đó x,y đ ược gọi là các biến độc lập, z được gọi là các biến phụ thuộc. Để chỉ những hàm khác nhau ta dùng các chữ khác nhau

$$z = f(x,y),\ \ z = g(x,y),\ \ z = \varphi(x,y), \ldots$$

Ta qui ước rằng nếu hàm được xác định bởi một biểu thức nào đó và nếu không nói gì thêm thì miền xác định là tập hợp tất cả các điểm tương ứng với mó biểu thức đã cho có nghĩa.

1.3. Biểu diễn hình học

Hình 26

Giả sử cho hàm hai biến $f : (x,y) \mapsto z = f(x,y), (x,y) \in G$. Nhưng mỗi cặp (x,y) đều được biểu diễn bởi một điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng Oxy, nên ta có thể xem hàm hai biến $f(x,y)$ là hàm của điểm $M(x,y)$:

$$f : M \mapsto z = f(M)$$

có thể biểu diễn hình học một hàm hai biến như sau: Vẽ hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$. Với mỗi điểm $(x,y) \in G$ ứng với một điểm P trong không gian với tọa độ là $P(x,y,f(x,y))$. Tập hợp

$$\{P(x,y,f(x,y)) \ : (x,y) \in G\}$$

được gọi là là *đồ thị* của hàm $z = f(x,y)$ xác định trên G. Đ ồ thị của hàm hai biến nói chung là một mặt cong trong không gian ba chiều.

Ví dụ: Hàm $z = x^2 + y^2$ có đ ồ thị là một mặt paraboloid tròn xoay. Miền xác định là toàn bộ mặt phẳng.

Ví dụ: Hàm $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có đồ thị là nửa mặt cầu đơn vị, tâm tại gốc tọa độ, nằm về phía $z \geq 0$. Miền xác định là tập những điểm (x,y) sao cho $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 \leq 1$. Đó là hình tròn đơn vị đóng tâm O.

Ví dụ: Hàm $z = \ln(x + y)$ chỉ xác định với các giá trị x, y sao cho $x + y > 0$ hay $y > -x$. Đó là nửa mặt phẳng nằm phía trên đường phân giác thứ hai.

Hình 27

• **Định nghĩa**: Dãy điểm $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là *hội tụ* đến (x_0, y_0), nếu

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

§2. Giới hạn và sự liên tục của hàm hai biến

2.1. Định nghĩa

Cho hàm hai biến $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ta nói rằng số thực L là *giới hạn* của hàm số $f(x,y)$ khi (x,y) tiến về (x_0, y_0), nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in G :$$
$$0 < \|(x,y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Khi đó ta ký viết $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

$(*)$ Chú ý rằng trong định nghĩa giới hạn của hàm nhiều biến cũng như một biến là điểm (x_0, y_0) không nhất thiết thuộc miền xác định G của f. Điểm (x_0, y_0) được giả sử là *điểm tụ* của G, nghĩa là, tồn tại một dãy $(x_n, y_n) \in G$ và $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ với mọi n, sao cho (x_n, y_n) hội tụ về (x_0, y_0).

• **Định nghĩa**:

Cho $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in G$.

i) Ta nói rằng hàm f *liên tục tại điểm* (x_0, y_0), nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in G : \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

ii) Ta nói rằng hàm f *liên tục trên* G, nếu f liên tục tại mọi điểm thuộc G.

Ví dụ: Xét hàm $f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. (chuẩn của (x,y))

Với $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ cho trước. Từ bất đẳng thức tam giác ta có

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = \left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|$$
$$\leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \text{ với mọi } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Do đó với mỗi $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \varepsilon$, thì với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

nghĩa là f liên tục tại điểm (x_0,y_0) và do đó, liên tục trên $\mathbb{R}^2$.
Ví dụ: Xét các phép chiếu $pr_1(x,y) = x$, $pr_2(x,y) = y$.

Từ các bất đẳng thức

$$|x-x_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$
$$|y-y_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

ta có ứng với $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \varepsilon$, thì với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |pr_1(x,y) - pr_1(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$
$$\text{và } |pr_2(x,y) - pr_2(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Vậy pr_1 và pr_2 là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

• **Định lý**
Cho $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0,y_0) \in G$ là điểm tụ của G. Khi đó,
f liên tục tại (x_0,y_0) $\Leftrightarrow$ Với mọi dãy $\{(x_n,y_n)\}$ trong G hội tụ về (x_0,y_0), ta có dãy tương ứng $\{f(x_n,y_n)\}$ luôn luôn hội tụ về $f(x_0,y_0)$.
Chứng minh.
Chiều thuận: Do f liên tục tại (x_0,y_0), nên với $\varepsilon > 0$, ta chọn đ ược $\delta > 0$ sao cho với mọi $(x,y) \in G$,

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Mặt khác, Với mọi dãy $\{(x_n,y_n)\}$ trong G hội tụ về (x_0,y_0), ta có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, thì

$$\|(x_n,y_n) - (x_0,y_0)\| < \delta, \text{ và do đó } |f(x_n,y_n) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Tóm lại,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n,y_n) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

nghĩa là $f(x_n,y_n) \to f(x_0,y_0)$ khi $n \to \infty$.
Chiều đảo: Dùng phản chứng, giả sử f không liên tục tại (x_0,y_0), nghĩa là

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0, \exists(x_\delta,y_\delta) \in G : \|(x_\delta,y_\delta) - (x_0,y_0)\| < \delta$$
$$\text{và } |f(x_\delta,y_\delta) - f(x_0,y_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Chọn $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ta có dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset G$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$,
$\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| \geq \varepsilon_0$. Rõ ràng $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ nhưng

$f(x_n, y_n) \nrightarrow f(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$. Vô lý.
Với một chứng minh hoàn toàn tương tự ta có

• Định lý

Cho $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là điểm tụ của G. Khi đó,
$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow$ Với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\}$ trong $G \backslash \{(x_0, y_0)\}$ hội tụ về (x_0, y_0), ta có dãy $\{f(x_n, y_n)\}$ hội tụ về L.

Từ các định lý trên ta nhận được sự liên hệ giữa khái niệm liên tục và giới hạn của hàm hai

biến như sau:

• Định lý

Cho $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là điểm tụ của G. Khi đó,

$$f \text{ liên tục tại } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

• Định lý

Cho $f, g : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là điểm tụ của G. Giả sử

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b. \text{Khi đó,}$$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = a + b$,

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = ab$,

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = ka, \quad k \in \mathbb{R}$,

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{a}{b}$, nếu $b \neq 0$.

2.2. Định lý

Cho $f, g : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in G$. Ta có nếu f liên tục tại (x_0, y_0) (trên G), thì,
i) $f \pm g$ liên tục tại (x_0, y_0) (trên G),

ii) fg liên tục tại (x_0, y_0) (trên G),
iii) kf (k là hằng số), liên tục tại (x_0, y_0) (trên G),
iv) Nếu $g(x_0, y_0) \neq 0$ ($g(x,y) \neq 0$ với mọi $(x,y) \in G$), thì $\frac{f}{g}$ liên tục tại (x_0, y_0) (trên G).
Ta phát biểu mà không chứng minh một số tính chất của hàm liên tục trên một số miền đặc biệt.
Tập $G \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một hình tròn(dĩa tròn) B_M sao cho $G \subset B_M$. Điều nầy cũng tương với tồn tại một hằng số dương M sao cho:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M \quad \text{với mọi } (x,y) \in G.$$

Định lý

Cho $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên tập đ óng và bị chặn G. Khi đó
i) f là một hàm bị chặn trên G, nghĩa là:

$$\exists M > 0 : |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in G.$$

ii) f đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên G, tức là, tồn tại ít nhất hai điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ sao cho

$$f(x_1,y_1) \le f(x,y) \le f(x_2,y_2) \quad \forall (x,y) \in G.$$

• **Định nghĩa**:
Hàm $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là *liên tục đ ều trên G*, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x,y),(x',y') \in G : \|(x,y)-(x',y')\| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y)-f(x',y')| < \varepsilon.$$

Định lý
Nếu $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên tập đ óng và bị chặn G, thì f liên tục đều trên G.

§3. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần

3.1. Đạo hàm riêng cấp một, cấp cao, đạo hàm của hàm hợp

Định nghĩa
Cho tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $f : G \to \mathbb{R}$. Cho $(x_0,y_0) \in G$, và lấy $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ khá bé sao cho $(x_0+\Delta x, y_0), (x_0, y_0+\Delta y) \in G$. Khi đó giới hạn(nếu có)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

đạo hàm riêng theo biến x (biến thứ nhất) của hàm số f tại (x_0,y_0), ký hiệu

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ hay $D_1 f(x_0,y_0)$ hay $D_x f(x_0,y_0)$ hay $f'_x(x_0,y_0)$ hay gọn hơn $f_x(x_0,y_0)$.

Tương tự giới hạn(nếu có)

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

đạo hàm riêng theo biến y (biến thứ hai) của hàm số f tại (x_0,y_0), ký hiệu

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ hay $D_2 f(x_0,y_0)$ hay $D_y f(x_0,y_0)$ hay $f'_y(x_0,y_0)$ hay gọn hơn $f_y(x_0,y_0)$.

Ví dụ: Cho hàm $f(x,y) = x^3 y$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 y - x^3 y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2 y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^3(y_0+\Delta y)-x^3 y}{\Delta y} = x^3.$$

3.2. Vi phân riêng, vi phân toàn phần

Định nghĩa (Vi phân riêng). Ta gọi *vi phân riêng của hàm $z = f(x,y)$ đối với x tại điểm* (x_0,y_0), ký hiệu là $d_x f(x_0,y_0)$ được xác đ ịnh bởi

$$d_x f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx.$$

Tương tự, ta gọi *vi phân riêng của hàm $z = f(x,y)$ đối với y tại điểm* (x_0,y_0), ký hiệu là $d_y f(x_0,y_0)$ được xác định bởi

$$d_y f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy.$$

Định nghĩa (Vi phân toàn phần). Cho tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$ và hàm $f : G \to \mathbb{R}$. Cho $(x_0,y_0) \in G$, và lấy $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ khá bé sao cho $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in G$. Nếu số gia toàn phần

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

có thể biểu diễn được dưới dạng
$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, trong đ ó A, B là những số thực độc lập với $\Delta x, \Delta y$ (phụ thuộc vào (x_0, y_0)), còn $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, thì ta nói rằng hàm f *khả vi tại* (x_0, y_0), biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ được gọi là *vi phân toàn phần của hàm $z = f(x,y)$ tại điểm* (x_0, y_0), ký hiệu là $df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y$. Đẳng thức trên còn được viết dưới dạng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \text{ với } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

trong đó $o(\rho)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn ρ.
Nếu A và B không đồn thời bằng không thì khi $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, thì $\Delta f \sim df$.

Nếu hàm f khả vi tại mọi điểm thuộc G thì ta nói rằng nó *khả vi trên G*.
Chú thích. Nếu hàm f khả vi tại điểm (x_0, y_0), thì f liên tục tại (x_0, y_0).

Thật vậy từ định nghĩa ta có

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \to 0 \text{ khi } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$$

Định lý. Nếu hàm f khả vi tại điểm (x_0, y_0), thì tại điểm ấy hàm f có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ và ta có

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Chứng minh.
Từ giả thiết ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Cho $\Delta y = 0$ ta được

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Do đó

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A.$$

Vậy tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, và có $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$.
Tương tự ta cũng có $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, và có $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$.
Vì vậy

$$df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Định lý. Nếu hàm f có các đ ạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ trong một lận cận của (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại điểm (x_0, y_0), thì hàm f khả vi tại điểm (x_0, y_0).
Chứng minh.
Ta có

$$\Delta f = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

Áp dụng công thức Lagrange ta được

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x,$$

và $$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

trong đó $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.
Vì các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại điểm (x_0, y_0), nên

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \alpha,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta,$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Vậy

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

tức là f khả vi tại điểm (x_0, y_0).

Đạo hàm của hàm hợp

Cho $z = f(u,v)$, trong đó u,v là hai hàm theo hai biến độc lập x,y : $u = u(x,y), v = v(x,y)$. Khi đ ó ta nói rằng z là một hàm hợp của x,y thông qua hai biến trung gian u,v : $z = f[u(x,y), v(x,y)]$.

Định lý.
Nếu hàm f khả vi và nếu u,v có các đạo hàn riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục thì tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ và ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Chứng minh.

Nếu cho x một số gia Δx và giữ y không đổi thì u,v,z có số gia tương ứng là các số gia riêng $\Delta_x u, \Delta_x v, \Delta_x z$. Khi đó,

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v,$$

trong đó $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, khi $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x v \to 0$. Do đó

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

Nhưng $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Từ đó qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$ ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tương tự ta có đẳng thức thứ hai trong định lý.

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho hàm hai biến $z = f(x,y)$. Các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ thường được gọi là các đạo hàm riêng cấp một. Chúng lại là các hàm theo hai biến x,y và có thể có các đạo hàm riêng. Các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng đạo hàm cấp một được gọi là các đạo hàm cấp hai của z.
Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai:

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y),$

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$(lần đầu lấy đạo hàm riêng theo biến x, lần thứ hai lấy đạo hàm riêng theo biến y).

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y),$(lần đầu lấy đạo hàm riêng theo biến y, lần thứ hai lấy đạo hàm riêng theo biến x).

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y),$

Người ta cũng định nghĩa đ ạo hàm riêng cấp $n \geq 3$ một cách tương tự.

Một vấn đề đặt ra là: kết quả việc lấy đạo hàm riêng có phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm riêng theo từng biến không? Ta có kết quả sau đây:

Định lý (Schwartz)

Cho hàm hai biến $f(x,y)$ có các đạo hàn riêng đến cấp hai vá chúng liên tục trong tập mở U. Khi đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Chúng minh. Cho $(x,y) \in U$, và lấy $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ khá bé sao cho $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in U$. Xét biểu thức

$$H(\Delta x, \Delta y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y).$$

Đặt
$$g(x) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Theo định lý giá trị trung bình ta có $c = x + \theta\Delta x$, $0 < \theta < 1$, sao cho

$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(c)\Delta x.$$

Ta có

$$g'(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,y).$$

Mặt khác $g'(c)$ là một hàm theo y, vậy tồn tại $c_1 = y + \theta_1 \Delta y$, $0 < \theta_1 < 1$, sao cho

$$g'(c) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(c, c_1)\Delta y.$$

Chú ý rằng $H(\Delta x, \Delta y) = g(x+\Delta x) - g(x)$, ta có

$$H(\Delta x, \Delta y) = g'(c)\Delta x = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(c, c_1)\Delta y \Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, c_1)\Delta y \Delta x.$$

Cho $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, ta có $(c, c_1) \to (x,y)$, do tính liên tục của $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ta có

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{H(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Tương tự, xét $g_1(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$, ta có

$$H(\Delta x, \Delta y) = g_1(y + \Delta y) - g_1(y) = g_1^{/}(c_2)\Delta y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_2)\Delta x \Delta y,$$

với $c_2 = y + \theta_2 \Delta y$, $c_3 = x + \theta_3 \Delta x$, $0 < \theta_2, \theta_3 < 1$. Ta suy ra

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{H(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Tóm lại

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{H(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Ví dụ: Cho hàm $f(x, y) = x^2 y - xy^4$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^4, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4xy^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y^4) = 2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y^4) = 2x - 4y^3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4xy^3) = 2x - 4y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 4xy^3) = -12xy^2.$$

Ta thấy rằng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần để tính gần đúng

Do định nghĩa, nếu hàm f khả vi tại điểm (x_0, y_0), tức là

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, thì $o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, nghĩa là

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

do đó

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \simeq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Ví dụ. Tính gần đúng $A = \sqrt{(3,012)^2 + (3,997)^2}$.
Xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chọn $(x_0, y_0) = (3, 4)$, $\Delta x = 0,012$, $\Delta y = -0,003$.
Khi đó

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \simeq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Ta có:

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = \frac{4}{5},$$

Vậy

$$A \simeq 5 + \frac{3}{5} \times 0,012 + \frac{4}{5} \times (-0,003) = 5,0048.$$

§4. Cực trị của hàm hai biến

4.1. Cực trị không điều kiện(cực trị tự do)

4.1.1. Định nghĩa

Cho hàm hai biến $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và cho $M_0(x_0,y_0) \in G$. Ta nói rằng hàm f đạt cực tiểu(địa phương) tại M_0 nếu có một tập mở $\omega \subset G$ sao cho $M_0(x_0,y_0) \in \omega$ và

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in \omega.$$

Tương tự, ta nói rằng hàm f đ ạt cực đại(địa phương) tại M_0 nếu có một tập mở $\omega \subset G$ sao cho $M_0(x_0,y_0) \in \omega$ và

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in \omega.$$

Nếu hàm f đạt cực tiểu hay cực đại (địa phương) tại M_0 thì ta nói hàm f đạt cực trị (đ ịa phương) tại M_0.

Hình 28

4.1.2. Qui tắc tìm cực trị không điều kiện

Định lý (Điều kiện cần)

Nếu hàm f đạt cực trị (địa phương) tại $M_0(x_0,y_0) \in G$ và nếu f có các đạo hàm riêng tại $M_0(x_0,y_0)$ thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Chứng minh. Giả sử hàm f đạt cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$. Xét hàm $g(x) = f(x,y_0)$, thì

$$g(x) = f(x,y_0) \geq g(x_0) = f(x_0,y_0),$$

với x trong một khoảng nào đó chứa x_0. Do đó ta có $g'(x_0) = 0$.

Mặt khác

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0). \text{ Vậy } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0.$$

Tương tự, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Điểm (x_0,y_0) mà tại đó $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, được gọi là *điểm dừng*.

Định lý (Điều kiện đ ủ của cực trị)

Giả sử hàm hai biến f có các đ ạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận của điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$.
Đặt:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).$$

Khi đó
a) Nếu $B^2 - AC < 0$ và $A > 0$ (hay $C > 0$) thì f đ ạt cực tiểu tại M_0,
b) Nếu $B^2 - AC < 0$ và $A < 0$ (hay $C < 0$) thì f đ ạt cực đại tại M_0,
c) Nếu $B^2 - AC > 0$ thì f không đạt cực trị tại M_0,
d) Nếu $B^2 - AC = 0$ ta chưa kết luận và cần phải xét cụ thể.
Ta công nhận định lý nầy.
Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$

ta được hai điểm dừng $M_1(1,1)$ và $M_2(0,0)$. Ta có

$$z''_{xx} = 6x,\ \ z''_{xy} = -3,\ z''_{yy} = 6y.$$

Tại $M_1(1,1)$ ta có: $A = 6, B = -3, C = 6,\ B^2 - AC = -27 < 0$. Vậy hàm z đạt cực tiểu tại M_1 và $z_{\min} = z(1,1) = -1$.
Tại $M_2(0,0)$ ta có: $A = 0, B = -3, C = 0,\ B^2 - AC = 9 >$. Vậy hàm z không đạt cực trị tại M_2.
Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$

ta được ba điểm dừng $M_1(0,0), M_2(-1,-1)$ và $M_3(1,1)$.
Ta có

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2,\ \ z''_{xy} = -2,\ z''_{yy} = 12y^2 - 2.$$

Tại M_1 ta có: $A = -2, B = -2, C = -2,\ B^2 - AC = 0$. Trường hợp nầy cần phải khảo sát thêm bằng phương pháp khác. Ta có $z(M_1) = 0$. Với $x = y = \frac{1}{n}$, ta được

$$z(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \frac{2}{n^2}(\frac{2}{n^2} - 2) < 0 \ \text{ với } n \geq 2.$$

Mặt khác, ta có $z(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}) = \frac{2}{n^4} > 0$. Vậy trong lân cận của $M_1(0,0)$ hàm số đổi dấu, hàm số không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$.
Tại hai điểm dừng còn lại: $M_2(-1,-1)$ và $M_3(1,1)$, ta có $A = 10, B = -2, C = 10$, $B^2 - AC = -96 < 0$.
Vậy hàm z đạt cực tiểu tại M_2 và M_3; $z_{\min} = -2$.

4.2. Cực trị có điều kiện(cực trị ràng buộc)

4.2.1. Định nghĩa

Ta nói rằng hàm $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ đạt *cực tiểu* tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại một lân cận ω của $M_0(x_0,y_0)$ sao cho

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in \omega \ \ \text{thỏa } \varphi(x,y) = 0.$$

Thông thường phương trình $\varphi(x,y) = 0$ là phương trình của đường cong (C). Như vậy ta chỉ so sánh $f(M_0)$ với $f(M)$ khi M nằm trên (C).

Hình 29

Ta cũng định nghĩa *cực đại có điều kiện* một cách tương tự. Cực tiểu có điều kiện và cực đại có điều kiện được gọi chung là *cực trị có điều kiện.*

4.2.2. Các phương pháp tìm cực trị có điều kiện

- Đưa về bài toán tìm cực trị của hàm một biến

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

Giải. Từ điều kiện trên ta rút ra $y = 1 - x$. Thay vào biểu thức của $z = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2}\sqrt{x - x^2}$. Đây là hàm một biến, xác dịnh khi $x - x^2 \geq 0$, tức là khi $0 \leq x \leq 1$. Ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$\frac{dz}{dx} = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$. Ta lập bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{dz}{dx}$		$+$	0	$-$	
z	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Vậy z đạt cực đại có điều kiện tại điểm $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và giá trị cực đại là $z_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Phương pháp nhân tử Lagrange. Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Xét bài toán: Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.
Điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là *điểm kỳ dị của đường cong* $(C) : \varphi(x,y) = 0$ nếu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Định lý (Nhân tử Lagrange).

Cho điểm $M_0(x_0,y_0)$ thỏa điều kiện

i) Điểm M_0 không là điểm kỳ dị của đường cong (C).

ii) Các hàm số $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ và các đ ạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong lân cận của M_0.

iii) Hàm $f(x,y)$ đạt cực trị có điều kiện tại M_0.

Khi đó tồn tại một số thực λ sao cho (x_0,y_0,λ) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0, \\ \varphi(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Số thực λ được gọi là *nhân tử Lagrange*. Hàm $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ được gọi là *hàm*

Lagrange.

Chúng minh. Vì M_0 không là điểm kỳ dị của (C), nên ta có thể giả sử rằng $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Người ta chứng minh được rằng tồn tại một hàm ẩn $y = y(x)$ xác đ ịnh trong một khoảng nào đó chứa x_0. Thay vào hàm $f(x,y)$ ta được

$$z = f(x,y(x)).$$

Hàm nầy đạt cực trị tại x_0, nên $dz(x_0) = 0$, tức là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y(x_0))dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y(x_0))dy = 0.$$

Nhưng $y(x_0) = y_0$, vậy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy = 0.$$

Mặc khác lấy vi phân điều kiện tại (x_0,y_0), ta được

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)dy = 0.$$

Nhân hai vế của đẳng thức nầy cho λ rồi cộng với đẳng thức trên, ta được

$$[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)]dx + [\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)]dy = 0.$$

Lấy λ sao cho $\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)}$. Khi đ ó ta cũng được

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0.$$

Cùng với phương trình $\varphi(x_0,y_0) = 0$ ta nhận được hệ phương trình nêu trong định lý.

Định lý chỉ cho ta điều kiện cần của cực trị. Tuy vậy, trong nhiều bài toán cụ thể có thể xác đ ịnh được $M_0(x_0,y_0)$ có phải là điểm cực trị hay không.

Ví dụ.- Đưa về bài toán tìm cực trị của hàm một biến

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Ta có hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L'_x = 3 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 4 + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Từ hai phương trình đầu ta rút ra: $x = \frac{-3}{2\lambda}$, $y = \frac{-2}{\lambda}$, sau đó thay vào phương trình cuối, ta được

$$(\frac{-3}{2\lambda})^2 + (\frac{-2}{\lambda})^2 - 1 = 0. \text{ Do đó: } \lambda = \pm\frac{5}{2}.$$

Với $\lambda_1 = \frac{5}{2}$: $x_1 = \frac{-3}{5}$, $y_1 = \frac{-4}{5}$, $M_1(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5})$.
Với $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$: $x_2 = \frac{3}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $M_2(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Vì hàm $z = 3x + 4y$ là hàm liên tục trên tập đóng và bị chận $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (đường tròn đơn vị) nên nó đ ạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đó. Theo định lý nó chỉ đạt tại M_1 hoặc tại $M_2(-1,-1)$. Suy ra

$z_{\min} = z(M_1) = -5$, $z_{\max} = z(M_2) = 5$.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = xy$ với điều kiện $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Giải. Ta có hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L'_x = y + \frac{\lambda x}{4} = 0, \\ L'_y = x + \lambda y = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0. \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai ta rút ra: $x = -\lambda y$, sau đó thay vào phương trình đ ầu, ta được

$$y = -\frac{\lambda}{4}(-\lambda y) = \frac{\lambda^2 y}{4}.$$

Do đó $\frac{y}{4}(\lambda^2 - 4) = 0$, tức là $y = 0$ hay $\lambda = \pm 2$.

• Nếu $y = 0$ thì $x = 0$: Không thỏa phương trình thứ ba. Ta loại trường hợp nầy.

• Nếu $\lambda = 2$ thì $x = -2y$, thay vào phương trình cuối, ta được:

$$\frac{(-2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \text{ hay } y = \pm 1.$$

Vậy ta có hai điểm dừng $M_1(-2,1)$, $M_2(2,-1)$.

• Nếu $\lambda = -2$ thì $x = 2y$. Tương tự ta có thêm hai điểm dừng $M_3(2,1)$, $M_4(-2,-1)$.

Tính các giá trị: $z(M_1) = z(M_2) = -2$, $z(M_3) = z(M_4) = 2$.

Vì hàm $z = xy$ liên tục trên tập đóng và bị chặn $\{(x,y) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\}$ (là đường ellip tâm O)

nên nó đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đó. Theo định lý nó chỉ đạt các giá trị trên tại các điểm dừng nói trên. Suy ra

$$z_{\min} = z(M_1) = z(M_2) = -2,$$
$$z_{\max} = z(M_3) = z(M_4) = 2.$$

Chú thích. Trong trường hợp tổng quát, tập hợp $\{(x,y) : \varphi(x,y) = 0\}$ có thể là tập không bị

chặn, nên ta cần phải sử dụng điều kiện đ ủ của cực trị có điều kiện

- Điều kiện đủ của cực trị có điều kiện

Giả sử các hàm số $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$ thỏa mãn định lý nhân tử Lagrange.(Điểm $M_0(x_0,y_0)$ được gọi là điểm dừng của bài toán cực trị có điều kiện). Ta chuyển bài toán cực trị hàm $f(x,y)$ có điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ sang bài toán cực trị không điều kiện của hàm Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$

Giả sử thêm rằng các hàm số $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp hai của chúng liên tục trong lân cận của M_0 và λ là giá trị tương ứng với (x_0,y_0).

Xét vi phân cấp hai của hàm $L(x,y)$ tại (x_0,y_0):

$$d^2L(x_0,y_0) = L''_{xx}(x_0,y_0)(dx)^2dy + 2L''_{xy}(x_0,y_0)dxdy + L''_{yy}(x_0,y_0)(dy)^2,$$

nhưng các vi phân dx, dy không phải tự do, mà bị ràng buộc bởi điều kiện

$$\varphi'_x(x_0,y_0)dx + \varphi'_y(x_0,y_0)dy = 0,$$
$$(dx)^2 + (dy)^2 > 0.$$

Khi đó,

Nếu $d^2L(x_0,y_0) > 0$, thì hàm f đ ạt cực tiểu có điều kiện.

Nếu $d^2L(x_0,y_0) < 0$, thì hàm f đ ạt cực đại có điều kiện.

Nếu $d^2L(x_0,y_0)$ thay đổi dấu, thì hàm f không đạt cực trị có điều kiện.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = x + y$ với điều kiện $xy = 1$.

Giải. Ta có hàm Lagrange $L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(xy - 1)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L'_x = 1 + \lambda y = 0, \\ L'_y = 1 + \lambda x = 0, \\ L'_\lambda = xy - 1 = 0, \end{cases}$
ta được $x = y = 1, \lambda = -1$. Ta có một điểm dừng $M_0(1,1)$ tương ứng với $\lambda = -1$.

Mặt khác $L''_{xx} = 0, L''_{xy} = -1, L''_{yy} = 0, d^2L(1,1) = -2dxdy$.

Hơn nữa, từ điều kiện ràng buộc $xy - 1 = 0$, ta có
$$dx + dy = 0 \text{ hay } dy = -dx.$$
Vậy $d^2L(1,1) = 2(dx)^2 > 0$ nếu $(dx)^2 + (dy)^2 > 0$. Vậy hàm z đạt cực tiểu có điều kiện tại $M_0(1,1)$ và $z_{\min} = z(1,1) = 2$.
Chú thích. Ta có thể giải bài toán trên bằng cách đưa về bài toán tìm cực trị của hàm một biến

như sau.
Từ phương trình $xy = 1$ $(x, y > 0)$ suy ra $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Thay vào hàm z ta có
$z(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$.
$z'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Vậy $z'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Lập bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$z'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$z(x)$	$+\infty$ $\parallel$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $z_{\min} = z(1,1) = 2$.
4.3. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên một miền đóng và bị chặn

Xét bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất(còn gọi là cực trị tuyệt đối) của một hàm liên tục f trên một miền đóng và bị chặn $G \subset \mathbb{R}^2$.
Giả sử $G = D \cup C$ trong đó D là một tập mở và C là một đường cong trơn (khả vi). Giả sử thêm rằng hàm f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên D. Do đó để tìm các giá trị nầy, ta làm theo các bước sau:
- Dùng định lý Weierstrass về sự tồn tại cực trị của hàm liên tục trên $D \cup C$.

- Xét bài toán tìm cực trị ở trong D bằng cách giải hệ
$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

- Xét bài toán tìm cực trị ở trên C bằng định lý nhân tử Lagrange.
- Sau đó lấy giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất tại các điểm tính ra từ hai bước trên.
Ví dụ. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $z = f(x,y) = x^2y(2 - x - y)$ trong tam

giác đóng G giới hạn bởi các đường thẳng: $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

Giải. Ta có $G = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$ là tập đóng và bị chặn. Đây là một tam giác đóng có ba đỉnh $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(0,6)$, $D = \{(x,y) : x > 0, y > 0, x + y < 6\}$ là phần trong của G.
- Trước hết ta tìm điểm dừng trong D bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} z'_x = xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ z'_y = x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Hình 30

Vì $x > 0, y > 0$ nên ta được $x = 1, y = \frac{1}{2}$.
Điểm $M_0(1, \frac{1}{2}) \in D,\ z(M_0) = \frac{1}{4}$.
- Xét trên biên
Trên OA và OB thì $z = 0$.
Trên AB thế $y = 6 - x$ vào hàm đã cho ta được

$$z = -4x^2(6 - x),\ 0 \leq x \leq 6.$$

$$z'(x) = 12x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Tương ứng ta có hai điểm trên AB là: $M_1(0,6)$, $M_2(4,2)$.
Tại điểm $M_1(0,6) \equiv B$ đã xét.
Tại điểm $M_2(4,2),\ z(M_2) = z(4,2) = -128$.
Vậy giá trị nhỏ nhất là $z(M_2) = z(4,2) = -128$, giá trị lớn nhất là $z(M_0) = z(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Tìm miền xác định của các hàm sau đây

1/ $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

2/ $z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$

3/ $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

4/ $z = \ln xy$

5/ $z = \arcsin\left(\frac{y-1}{x}\right)$

6/ $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

7/ $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}$, $0 < r < R$

2. Các hàm số sau đây có giới hạn tại $(0,0)$ không?

1/ $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

2/ $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3/ $z = \frac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

4/ $z = \frac{x-y}{x+y}$

5/ $z = \frac{x^2}{x^2 - y}$

6/ $z = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

7/ $z = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

8/ $z = \frac{e^y \sin x}{x}$

3. Tính các giới hạn sau đây

1/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

2/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

3/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy}$

4/ $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

5/ $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

6/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

4. Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số sau đây

1/ $z = x^3y - xy^3$

2/ $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

3/ $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

4/ $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

5/ $z = arctg\frac{y}{x}$

6/ $z = x^y$

7/ $z = (1+xy)^y$
8/ $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

5. Tính đạo hàm của các hàm hợp sau
1/ $z = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3$. Tính $\frac{dz}{dt}$
2/ $z = \arcsin(x-y),\ x = 3t,\ y = 4t^3$. Tính $\frac{dz}{dt}$
3/ $z = x^2 \ln y,\ x = \frac{u}{v},\ y = 3u-2v$. Tính $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$
4/ $z = x^3 \sin(xy),\ x = u\cos v,\ y = u\sin v$. Tính $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

6. Tính vi phân của các hàm số sau
1/ $z = xy^3$
2/ $z = e^{xy}$
3/ $z = \ln(y + \sqrt{x^2+y^2})$
4/ $z = \ln(\cos\frac{x}{y})$
5/ Tính $df(1,1)$ nếu $f(x,y) = (x+y)e^{xy}$.

7. Tính gần đúng các giá trị sau đ ây nhờ vi phân cấp 1
1/ $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$
2/ $(2,01)^{3,03}$ biết $\ln 2 \simeq 0,69$
3/ $\sin 28^0 \cos 61^0$ biết rằng $\cos\frac{\pi}{6} \simeq 0,87$ và $\frac{\pi}{180} \simeq 0,017$.

8. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau đây
1/ $z = \sqrt{x^2+y^2}$
2/ $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$
3/ $z = \frac{x-y}{x+y}$
4/ $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
5/ $z = \ln(x^2+y^2)$
6/ $z = arctg\frac{y}{x}$
7/ $z = (e^y + e^{-y})\sin x$

9. Tìm cực trị của các hàm sau đ ây
1/ $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$
2/ $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
3/ $z = x + y - xe^y$
4/ $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
5/ $z = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$
6/ $z = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$
7/ $z = xy - x^2$
8/ $z = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$
9/ $z = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$
10/ $z = x^3 - 6x^2 - 3y^2$
11/ $z = x^3 + y^3 - 6xy$
12/ $z = x^3 - 12xy + 8y^3$
13/ $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$
14/ $z = x^2 - e^{y^2}$
15/ $z = (y-2)\ln xy$
16/ $z = e^{xy}$
17/ $z = y\sin x$.

10. Tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện ràng buộc đã cho
1/ $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$, nếu $x^2 + y^2 = 1$; $(a, b > 0)$
2/ $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, nếu $4x^2 + y^2 = 25$
3/ $f(x,y) = x^2 + y^2$, nếu $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$
4/ $f(x,y) = xy$, nếu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(a, b > 0)$
5/ $f(x,y) = xy$, nếu $x + y = 1$
6/ $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, nếu $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$; $(a > 0)$
7/ $f(x,y) = x + y$, nếu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
8/ $f(x,y) = x + y$, nếu $xy = 1$; $(x > 0, y > 0)$
9/ $f(x,y) = (x-3)^2 + y^2$, nếu $y - x^2 = 0$.
11. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số sau
1/ $z = x^2 - y^2$ trong miền $x^2 + y^2 \leq 4$
2/ $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ trong miền $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
3/ $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ trong miền $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
4/ $z = x^2 + y$ trong miền $|x| \leq 1, |y|^2 \leq 1$
5/ $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ trong miền $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$
6/ $z = x - x^2 + y^2$ trong miền $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$
7/ $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trong miền $x^2 + y^2 \leq 25$
8/ $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong miền $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$
9/ $z = x^3 + y^3 - 3xy$ trong miền $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$
10/ $z = xy^2$ trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$
11/ $z = x^2 + 2y^2 - x$ trong miền $x^2 + y^2 \leq 1$
12/ $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ trong miền $|x| + |y| \leq 1$.

CHƯƠNG 3. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. Tích phân bất định

1.1. Nguyên hàm

1.1.1. Định nghĩa

Trong thưc tế, ta xét bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm của một hàm cho trước. Cho hàm $f(x)$ xác đ ịnh trong một khoảng nào đó. Hãy tìm tất cả những hàm $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$.

Định nghĩa. Hàm $F(x)$ được gọi là một *nguyên hàm* của $f(x)$ trong khoảng (a,b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a,b)$.

Ví dụ. $\sin x$ là một nguyên hàm của $\cos x$ trên $\mathbb{R}$ vì $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1.1.2. Định lý.

Nếu hàm $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ trong khoảng (a,b) thì

i) $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số tùy ý, cũng là một nguyên hàm của $f(x)$.

(ii) Mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số.

Chứng minh.

i) Vì $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$ nên $F(x) + C$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

ii) Giả sử $\Phi(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Do đó $\Phi(x) - F(x) = C$, với C là một hằng số.

Vậy $\Phi(x) = F(x) + C$.

Từ định lý ta thấy rằng nếu một hàm có một nguyên hàm thì nó có vô số nguyên hàm và các nguyên hàm đó sai khác nhau một hằng số cộng.

1.2. Định nghĩa và tính chất của tích phân bất định

1.2.1. Định nghĩa

Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm $f(x)$ thì biểu thức $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số tùy ý, được gọi là *tích phân bất định* **c**ủa hàm $f(x)$ và được ký hiệu là $\int f(x)dx$. Vậy .

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ nếu } F'(x) = f(x).$$

Dấu $\int$ được gọi là *dấu tích phân,* $f(x)$ được gọi là *hàm dưới dấu tích phân,* $f(x)dx$ đ ược gọi là *biểu thức dưới dấu tích phân* và x gọi là *biến tích phân*.

1.2.2. Các tính chất của tích phân bất định

Tính chất 1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx.$

Thật vậy, ta có

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Suy ra $$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Tính chất 2. Giả sử $F(x)$ có đ ạo hàm là $f(x)$ thì $\int dF(x) = F(x) + C$.

Thật vậy, ta có $dF(x) = f(x)dx$ suy ra $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Tính chất 3. Nếu C là một hằng số thì

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

Thật vậy, ta có

$$\left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x).\text{ Đpcm.}$$

Tính chất 4. Nếu các hàm $f(x)$, $g(x)$ đều có nguyên hàm thì

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Thật vậy, ta có

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x).\text{ Đpcm.}$$

Tính chất 5. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ khả vi liên tục, thì

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

1.3. Bảng các tính phân cơ bản

Từ bảng các công thức đáng nhớ của đạo hàm ta suy ra bảng các tính phân cơ bản sau:

1/ $\int 1dx = x + C$

2/ $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$

3/ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4/ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0, a \neq -1)$

5/ $\int e^x dx = e^x + C$

6/ $\int \cos x dx = \sin x + C$

7/ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

9/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$

10/ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

11/ $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -\text{arccot}\,gx + C$

12/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

1.4. Hai phương pháp tính tích phân bất định

1.4.1. Phương pháp đổi biến số

Phương pháp đổi biến số dựa vào định lý sau

Định lý

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$$

với $\varphi(t)$ là một hàm khả vi liên tục.

Chứng minh.

$$[F(\varphi(t)) + C]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Ví dụ. (Ghi vào bảng tích phân)
13/ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Ví dụ. (Ghi vào bảng tích phân)
14/ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

1.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý

Giả sử $u(x)$ và $v(x)$ có các đạo hàm liên tục. Khi đó ta có công thức

$$\int udv = uv - \int vdu$$

hay

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Chứng minh.

Ta có $\quad d(uv) = udv + vdu.$

Suy ra $\quad udv = d(uv) - vdu.$

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức nầy ta được công thức nêu trên, công thức nầy được gọi là *tích phân từng phần*.

Ví dụ. (Ghi vào bảng tích phân)

15/ $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ($u = \sqrt{a^2-x^2}$, $v = x$), ta có

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(-x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \underbrace{\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx}_{=I} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + 2C = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a} + 2C.$$

Vậy

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Ví dụ. (Ghi vào bảng tích phân)
16/ $J = \int \sqrt{x^2+b}\,dx.$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ($u = \sqrt{x^2+b}$, $v = x$), ta có

$$J = \int \sqrt{x^2+b}\,dx = x\sqrt{x^2+b} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+b}} = x\sqrt{x^2+b} - \int \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+b}}dx + b\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$= x\sqrt{x^2+b} - J + b\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + 2C.$$

Vậy

$$\int \sqrt{x^2+b}\,dx = J = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+b} + \frac{1}{2}b\ln\left|x+\sqrt{x^2+b}\right| + C.$$

Ví dụ. Tính $\quad I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad du = \frac{-2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$$

$$dv = dx, \qquad v = x.$$

Ta có

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right]$$
$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).$$

Suy ra

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n.$$

Vì

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$$

nên theo công thức qui nạp trên ta có thể lần lượt tính I_n.

§2. Tích phân xác định

2.1. Định nghĩa

Cho hàm $f(x)$ xác đ ịnh trên đoạn $[a,b]$. Chia tùy ý đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_i <\ldots< x_{n-1} < x_n = b.$$

Phép như vậy gọi là một *phân hoạch của đoạn* $[a,b]$.

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ ta lấy một điểm ξ_i tùy ý, ($i = 1,2,\ldots,n$).
Lập tổng

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

σ được gọi là *tổng tích phân* của hàm f trên đoạn $[a,b]$. Cho số điểm chia x_i tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i \to 0$, Nếu σ có một giới hạn xác định (hữu hạn) I không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách lấy điểm ξ_i, thì ta gọi I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và ký hiệu nó là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Khi đó ta cũng nói hàm $f(x)$ *khả tích* trên đoạn $[a,b]$.
Như vậy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \text{ Với mọi phân hoạch của đoạn } [a,b]$$
$$\text{và nếu } \lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon,$$
$$\text{với mọi cách chọn điểm } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ta viết

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Chú thích 1. Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ (nếu có) chỉ phụ thuộc vào hàm f dưới dấu tích phân, các cận a và b, không phụ thuộc vào biến tích phân, tức là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Chú thích 2. Khi định nghĩa tích phân xác định ta giả thiết $a \leq b$. Nếu $b < a$ ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

và khi $a = b$ thì ta định nghĩa $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Định lý

i) Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì nó khả tích trên đoạn $[a,b]$.

ii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là một hàm bị chặn, liên tục ngoại trừ một số điểm gián đoạn loại một thì nó khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Ta công nhận định lý nầy.

Ví dụ. Tính $\int_0^1 x^2 dx$.

Vì hàm $f(x) = x^2$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên nó khả tích trên đoạn $[0,1]$. Do đó ta có

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i.$$

Ta chia đoạn $[0,1]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau và lấy các điểm ξ_i là các đầu mút bên phải của mỗi đoạn nhỏ, khi đó, ta có

$$\Delta x_i = \tfrac{1}{n},\ \xi_i = x_i = \tfrac{i}{n},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

và $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \to 0$ tương đương với $n \to \infty$.

Do đó

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{i}{n}\right)^2 \tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \tfrac{1}{3}.$$

Ví dụ. Tính $\int_a^b \sin x dx$.

Vì hàm $f(x) = \sin x$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên nó khả tích trên đoạn $[a,b]$. Do đó ta có thể chia đoạn $[a,b]$ thành n phần bằng nhau và lấy các điểm ξ_i là các đầu mút bên trái của mỗi đoạn nhỏ, khi đó, ta có

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \tfrac{b-a}{n} = h,$$

$$\max_{1\le i\le n} \Delta x_i = h, \xi_i = x_{i-1} = a + (i-1)h, \; i = 1,2,\ldots,n.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin x dx &= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\sin\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{h\to 0} h[\sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin(a+(n-1)h)].\end{aligned}$$

Đặt

$$\sigma_n = \sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin(a+(n-1)h).$$

Nhân hai vế của đẳng thức nầy cho $2\sin\frac{h}{2}$, ta được

$$\begin{aligned}2\sigma_n \sin\tfrac{h}{2} &= 2\sin a \sin\tfrac{h}{2} + 2\sin(a+h)\sin\tfrac{h}{2} \\ &\quad + \ldots + 2\sin[a+(n-1)h]\sin\tfrac{h}{2} \\ &= \cos(a-\tfrac{h}{2}) - \cos(a+\tfrac{h}{2}) + \cos(a+\tfrac{h}{2}) - \cos(a+3\tfrac{h}{2}) \\ &\quad + \ldots + \cos[a+(n-\tfrac{3}{2})h] - \cos[a+(n-\tfrac{1}{2})h].\end{aligned}$$

Vậy

$$\sigma_n = \frac{\cos(a-\frac{h}{2}) - \cos[a+(n-\frac{1}{2})h]}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Nhưng $a + nh = b$, do đó ta có

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}[\cos(a-\tfrac{h}{2}) - \cos(b-\tfrac{h}{2})] = \cos a - \cos b.$$

2.2. Các tính chất của tích phân xác định

Giả sử các hàm dưới dấu tích phân đều khả tích trên đoạn lấy tích phân

Tính chất 1. Nếu C là một hằng số thì $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$

Tính chất 2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Tính chất 3. Với ba số thực a,b,c tùy ý ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Tính chất 4. Nếu $f(x) = C$ là hàm hằng thì $\int_a^b Cdx = C(b-a).$

Tính chất 5. Nếu $f(x) \le g(x)$ trên $[a,b]$ và $a < b$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 6. Nếu m và M là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của f trên $[a,b]$ và $a < b$ thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Tính chất 7. Nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $|f|$ cũng khả tích trên $[a,b]$, giả sử $a < b$, khi đó

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Định lý (Về giá trị trung bình). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì trên đoạn đó có ít nhất một điểm c sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Chứng minh. Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên ta có

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b],$$

với m và M lần lượt là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của f trên $[a,b]$.
Theo tính chất 6 ta có ($a < b$).

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

hay

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Vì hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì trong đoạn đó có ít nhất một điểm c sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

do đó

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Giá trị $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ được gọi là *giá trị trung bình của hàm f* trên đoạn $[a,b]$.

2.3. Công thức Newton-Leibnitz

Ta đặt

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dx, \quad a \le x \le b.$$

Định lý. Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì hàm $\Phi(x)$ có đạo hàm trên đoạn đó và

i) $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(t)dt = f(x), \quad a < x < b.$

ii) $\Phi'(x+0) = f(a),$

iii) $\Phi'(x-0) = f(b).$

Chứng minh. Ta lấy $x \in (a,b).$ Lấy Δx đủ nhỏ sao cho $x + \Delta x \in (a,b)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.\end{aligned}$$

Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại một điểm c nằm trong khoảng giữa x và $x+\Delta x$ sao cho

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

Do đó $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$ hay $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$. Cho $\Delta x \to 0$, khi đó $c \to x$ và vì hàm f liên tục tại x nên $f(c) \to f(x)$. Do đó ta có

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

Vậy tồn tại $\Phi'(x) = f(x)$.
Mặt khác, tại các điểm nút $x = a, x = b$ cũng chứng minh tương tự như trên ta được $\Phi'(x+0) = f(a), \Phi'(x-0) = f(b)$.
Từ định lý trên, ta suy ra ngay

Hệ quả. Mọi hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

Chú thích. Nếu các cận tích phân là các hàm theo x thì theo qui tắc đạo hàm của hàm hợp ta có thể chứng minh được công thức sau

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} f(t)dt = f[B(x)]B'(x) - f[A(x)]A'(x),$$

trong đó f là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ và các hàm A, B có đạo hàm trên đoạn $[a,b]$ sao cho $a \le A(x), B(x) \le b$ với mọi $x \in [a,b]$.

Định lý. Nếu f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó trên đoạn đó thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Công thức nầy được gọi là *công thức Newton-Leibnitz*.
Chứng minh. Theo giả thiết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và theo định lý trên thì $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$. Do đó $F(x)$ và $\Phi(x)$ chỉ khác nhau một hằng số cộng, tức là

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \text{với mọi } x \in [a,b].$$

Cho $x = a$, ta có $\Phi(a) = F(a) + C$, nhưng $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, do đó $C = -F(a)$. Vậy

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \quad a \le x \le b.$$

Cho $x = b$, ta có $\Phi(a) = F(a) + C$, nhưng $\Phi(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, do đó $C = -F(a)$. Vậy

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

hay

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Người ta thường ký hiệu $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, như vậy công thức Newton-Leibnitz được viết lại thành

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ví dụ. Tính $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$. Ta có

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}(\ln^3 e - \ln^3 1) = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ. Tính $\int_0^2 |1-x|dx$. Ta có

$$\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$
$$= \frac{(1-x)^2}{-2}\Big|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^2$$
$$= -(0-\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}-0) = 1.$$

Ví dụ. Tính giá trị trung bình của hàm $f(x) = \sin^2 x$ trên đoạn $[0, 2\pi]$.
Ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{4\pi}x - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

2.4. Hai phương pháp tính tích phân xác định

2.4.1. Phương pháp đổi biến số

Định lý

Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$. Giả sử hàm $x = \varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện
a) $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$,
b) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$,
c) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$
Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Chứng minh.
Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a,b]$. Khi đó $F[\varphi(t)]$ là một nguyên hàm của $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ trên đoạn $[\alpha,\beta]$. Từ công thức Newton-Leibnitz, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\big|_\alpha^\beta$$
$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Suy ra Đpcm.
Chú thích. Sau khi tính tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến, ta không cần trở lại biến cũ như khi tính tích phân bất định.

Ví dụ. Tính $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Đặt $x = 2\sin t$. Ta có $dx = 2\cos t dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2|\cos t|$ và $2\sin\alpha = 0$, $2\sin\beta = 2$. Suy ra $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$, $|\cos t| = \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Do đó

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2t + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[-a, a]$ thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } f \text{ là hàm lẻ,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{nếu } f \text{ là hàm chẵn.} \end{cases}$$

Thật vậy, ta có

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Trong tích phân thứ nhất ở v61 phải, ta đặt $x = -t$ và có

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx.$$

Do đó
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx.$$

Vậy, nếu f là hàm lẻ, tức là $f(-x) = -f(x)$ hay $f(-x) + f(x) = 0$, do đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Nếu f là hàm chẵn, tức là $f(-x) = f(x)$ hay $f(-x) + f(x) = 2f(x)$, do đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2.4.2. Phương pháp tích phân từng phần

Định lý. Giả sử $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm có các đạo hàm liên tục trong đoạn $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

hay

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Công thức nầy được gọi là *tích phân từng phần*.

Chứng minh.

Ta có $\quad d(uv) = udv + vdu.$

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức nầy trên đoạn $[a,b]$ ta được

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu.$$

Nhưng $\int_a^b d(uv) = (uv)|_a^b$, do đó ta có

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

Ví dụ. Tính $\int_1^e \ln x dx.$

Ta có

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e\ln e - 1\ln 1 - (e-1) = 1.$$

Ví dụ. Tính $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad (n = 0,1,2,\dots)$

Ta có

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x).$$

Đặt

$$u = \sin^{n-1} x, \qquad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx,$$

$$dv = d(-\cos x), \qquad v = -\cos x.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

hay

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Từ đó ta có công thức qui nạp sau

$$I_n = \tfrac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Ta tính các tích phân sau:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \tfrac{\pi}{2},$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)...3.1}{n(n-2)...4.2}\,\frac{\pi}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẳn,} \\ \frac{(n-1)(n-3)...4.2}{n(n-2)...3.1}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Nếu ký hiệu tích của k số lẻ đầu tiên là

$$1.3.5\ldots(2k-1) = (2k-1)!!$$

và tích của k số chẳn đầu tiên là

$$2.4.6\ldots(2k) = (2k)!!$$

thì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{\pi}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẳn,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Ví dụ. Tính $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta có

$$J_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = I_n.$$

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Chẳng hạn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{1.3}{2.4} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4!!}{5!!} = \frac{2.4}{1.3.5} = \frac{8}{15}.$$

2.5. Ứng dụng của tích phân xác định

· **Diện tích hình thang cong**.

Ta gọi *hình thang cong* là hình phẳng giới hạn bởi trục Ox, hai đường thẳng $x = a, x = b$ và một đường cong có phương trình $y = f(x)$ đơn trị trên $[a, b]$. Giả sử $f(x) > 0$ và liên tục. Ta chia tùy ý đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Từ các điểm đó, ta dựng những đ ường thẳng song song với trục Oy. Khi đó hình thang cong $aABb$ được chia thành n hình thang cong nhỏ.(như hình vẽ).

Hình 31

Trong mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), ta lấy một điểm ξ_i tùy ý, khi đ ó tung độ y_i ứng với hoành đ ộ ξ_i là $y_i = f(\xi_i)$.

Nếu ứng với mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ ta xây dựng một hình chữ nhật có kích thước là $(x_i - x_{i-1})$ và $f(\xi_i)$, thì diện tích của nó là $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Do đó tổng diện tích của n hình chữ nhật đó là

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

trong đó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Nếu tổng σ (tổng tích phân của hàm f trên đoạn $[a, b]$) có một giới hạn xác định S khi số điểm chia x_i tăng vô hạn ($n \to \infty$) sao cho $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, thì S được gọi là diện tích hình thang cong $aABb$. Vậy diện tích hình thang cong $aABb$ là

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

hay

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Nếu $f(x) \le 0$ với mọi $x \in [a,b]$ thì

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Trong mọi trường hợp ta có

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Nếu miền phẳng có dạng:

$$D = \{(x,y) : f_1(x) \le y \le f_2(x),\ a \le x \le b\}, \text{ (hình 32)}$$

(f_1, f_2 liên tục), thì diện tích của nó là

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Hình 32 **Hình 33**

Nếu miền phẳng có dạng:

$$D = \{(x,y) : \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y),\ c \le y \le d\}, \text{ (hình 33)}$$

(φ_1, φ_2 liên tục), thì diện tích của nó là

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy.$$

Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

với $x(t), y(t), x'(t)$ liên tục trong đoạn $[t_1, t_2]$, với $a = x(t_1),\ b = y(t_2)$, thì diện tích của nó là

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|x'(t)dt.$$

Ví dụ. Tính diện tích của hình ellip

$$\{(x,y)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ (a>0,\ b>0)$$

Vì hình ellip nhận các trục toạ đ ộ làm trục đối xứng nên diện tích của nó là

$$S = 4\int_0^a y(x)dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Đổi biến $x = a\sin t$, ta có $dx = a\cos t dt$.
Khi $x = 0$, thì $t = 0$, khi $x = a$, thì $t = \frac{\pi}{2}$,
$\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos t| = a\cos t$ với $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
Vậy

$$S = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt$$

$$= 2abt + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

• **Diện tích hình quạt cong**.
Người ta gọi *hình quạt cong* là một hình phẳng giới hạn bởi hai tia đi qua cực và một đường cong mà mọi tia qua cực cắt đường cong ấy ở không quá một điểm.

Giả sử hình quạt cong giới hạn bởi hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ với $\alpha < \beta$ và cung $\overset{\frown}{AB}$ đi của đ ường cong $r = r(\varphi)$, trong đó $r(\varphi)$ là hàm liên tục đơn trị trên đoạn $[\alpha,\beta]$.

Ta chia góc $\widehat{AOB}$ thành n góc nhỏ mà ta ký hiệu là $\Delta\varphi_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$), như thế hình quạt cong đó được chia thành n hình quạt cong nhỏ có diện tích là ΔS_i ($i = 1,2,\ldots,n$)(như hình vẽ 34).

Hình 34

Hình quạt cong nhỏ thứ i có diện tích xấp xỉ bằng diện tích hình quạt tròn có cùng góc ở tâm $\Delta\varphi_i$ và có bán kính là $r(\overline{\varphi}_i)$ với $\varphi_i \le \overline{\varphi}_i \le \varphi_i + \Delta\varphi_i$

$$\Delta S_i \simeq \frac{1}{2}r^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i.$$

Do đó diện tích hình quạt đã cho xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i.$$

Vậy

$$S = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ 1\le i\le n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i$$

hay

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Ví dụ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường Cardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.

Vì hình trên nhận trục cực làm trục đối xứng nên diện tích của nó bằng hai lần diện tích hình quạt OAB, ứng với khoảng biến thiên của φ từ 0 đến π. Ta có

$$S = 2.\frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(\varphi) d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

Hình 35

$$= a^2 \frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2.$$

• **Thể tích vật tròn xoay**.

Giả sử phải tìm thể tích vật tròn xoay tạo bởi hình thang cong $aABb$ giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ (liên tục, dương, đơn trị), trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox.

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Qua mỗi điểm đó ta dựng một mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng đó chia vật thể thành n phần nhỏ.

Hình 36 **Hình 37**

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), ta lấy một điểm ξ_i tùy ý. Ta xây dựng một hình trụ đứng giới hạn bởi các mặt phẳng $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ và mặt trụ có đường sinh song song với Ox và đi qua vòng tròn biên của thiết diện của vật thể tròn xoay với mặt phẳng $x = \xi_i$.

Thể tích của hình trụ đó là

$$V_i = S(\xi_i)\Delta x_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

trong đó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Thể tích của tất cả các hình trụ đó ứng với $i = 1, 2, \ldots, n$ là

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i.$$

Do đó, ta có công thức tính thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Ox là

$$V_x = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$$

hay

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Tương tự, nếu hình thang cong $cCDd$ giới hạn bởi đường cong $x = \varphi(y)$ (liên tục, dương, đơn trị), trục Oy và các đường thẳng $y = c, y = d,$ thì thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi hình thang cong đó khi cho nó quay quanh trục Oy là (hình 38)

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

Hình 38

Ví dụ. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đường astroide

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ($a > 0$) khi cho nó quay quanh trục Ox.

Ta có: $y^2 = (a^{2/3} - x^{2/3})^3, -a \le x \le a.$

Do tính đối xứng của hình phẳng đ ã cho, ta được

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx \\ &= 2\pi \int_0^a (a^2 - 3a^{4/3}x^{2/3} + 3a^{2/3}x^{4/3} - x^2) dx \\ &= 2\pi a^2 x - \tfrac{9}{5} a^{4/3} x^{5/3} + \tfrac{9}{7} a^{2/3} x^{7/3} - \tfrac{1}{3} x^2 \Big|_0^a \\ &= \tfrac{32\pi}{105} a^3. \end{aligned}$$

Hình 39

• **Độ dài đường cong phẳng**.

• Trường hợp đường cong đ ược cho trong toạ độ Descartes.

Giả sử đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm đơn trị, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Lấy trên cung $\overset{\frown}{AB}$ những điểm $M_0 = A, M_1, \ldots, M_i, \ldots, M_n = B$ có hoành đ ộ theo thứ tự là $x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b$. Ta gọi độ dài L của cung $\overset{\frown}{AB}$ là giới hạn của độ dài đường gấp khúc $AM_1M_2 \ldots M_i \ldots B$ khi số cạnh của đ ường gấp khúc tăng vô hạn sao cho đ ộ dài cạnh lớn nhất của nó tiến về không.

Chiếu các đoạn $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) xuống trục Ox ta được cách chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ Δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

Hình 40

Giả sử Δy_i là số gia của hàm $y = f(x)$ ứng với Δx_i. Ta có

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,.$$

Theo định lý Lagrange, ta có

$$\Delta y_i = f^{/}(\xi_i)\Delta x_i,\ \ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Do đó

$$M_{i-1}M_i = \sqrt{1 + f^{/}(\xi_i)^2}\,\Delta x_i.$$

và độ dài đường gấp khúc $M_0M_1M_2 \dots M_n$ bằng

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f^{/}(\xi_i)^2}\,\Delta x_i.$$

Do đó

$$L = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ 1\le i\le n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f^{/}(\xi_i)^2}\,\Delta x_i.$$

Giới hạn đó tồn tại vì hàm $f^{/}(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và theo định nghĩa của tích phân xác đ ịnh, ta có

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f^{/}(x)^2}\,dx.$$

• Trường hợp cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ \ t_0 \le t \le T, \end{cases}$$

với $x(t), y(t)$ là các hàm có các đạo hàm $x^{/}(t), y^{/}(t)$ liên tục trên đoạn $[t_0, T]$, thì lý luận tương tự như trên ta có thể tính được độ dài L của cung $\overset{\frown}{AB}$ là

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x^{/}(t)^2 + y^{/}(t)^2}\,dt.$$

Ví dụ. Tính độ dài của đường cong $y^2 = x^3$ từ gốc tọa độ đến điểm $(4, 8)$.

Ta có $y = x^{3/2}$, $\quad y^{/} = \frac{3}{2}x^{1/2}$.

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx = \tfrac{4}{9}\tfrac{2}{3}\left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4$$

$$= \tfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Ví dụ. Tính độ dài của đ ường astroide

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \ \ a > 0. \end{cases}$$

Vì tính đối xứng của đ ường astroide nên chỉ cần tính đ ộ dài của một nhánh rồi nhân kết quả với 4. Nhánh ở góc phần tư thứ nhất ứng với khoảng biến thiên của t từ 0 đến $\pi/2$. Ta có

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t dt = 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt$$

Hình 41

$$= -3a\cos 2t\big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

• Trường hợp đường cong đ ược cho trong hệ toạ độ cực.

Giả sử phương trình của cung đ ường cong $\overset{\frown}{AB}$ có dạng $r = r(\varphi)$, trong đó $r(\varphi)$ là hàm liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ và $r(\varphi)$ đơn trị.

Trước hết ta lập công thức vi phân cung. Ta có

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi.$$

Có thể coi đó như là những phương trình tham số của cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$. Do đó

$$x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

$$y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi.$$

Suy ra

$$x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2.$$

Vậy

$$dL = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \quad (\text{vì} \ \ dL^2 = dx^2 + dy^2)$$

và độ dài của cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được tính bởi công thức

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

Ví dụ. Tính độ dài của đ ường Cardioide $r = a(1 + \cos\varphi), \ \ a > 0$.

Vì tính đối xứng của đường Cardioide nên chỉ cần tính độ dài của một nửa đường, rồi nhân kết quả với 2. Nửa đường Cardioide ứng với khoảng biến thiên của φ từ 0 đến π. Do đó ta có

$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\tfrac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\tfrac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Hình 42

§3. Tích phân suy rộng

Ở mục tiêu trên ta đã xét khái niệm tích phân xác định với giả thiết khoảng lấy tích phân là hữu hạn và hàm dưới dấu tích phân bị chặn. Bây giờ ta sẽ mở rộng định nghĩa tích phân xác định trong hai trường hợp.

i) Khoảng lấy tích phân là vô hạn.

ii) Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn.

3.1. Tích phân suy rộng loại 1(Khoảng lấy tích phân là vô hạn)

3.1.1. Định nghĩa.

• Khoảng lấy tích phân là $[a,+\infty)$

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a,b]$, $a \le b < +\infty$.
Tích phân suy rộng loại 1 của hàm $f(x)$ trên $[a,+\infty)$ được ký hiệu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

là giới hạn hữu hạn (nếu có)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{b} f(x)dx.$$

Khi đó ta nói rằng *tích phân hội tụ*. Nếu ngược lại, ta nói rằng *tích phân phân kỳ* (tức là khi giới hạn bằng ∞ hoặc không tồn tại)

Về phương diện hình học, tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ biểu thị diện tích hình thang cong vô hạn như hình 43.

Hình 43

Ví dụ. Xét tích phân $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, $(a > 0)$.

Nếu $\alpha \ne 1$, thì

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$$

Nếu $\alpha > 1$, thì $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = 0$. Suy ra

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Nếu $\alpha < 1$, thì $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$. Suy ra $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Nếu $\alpha = 1$, thì $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a \to +\infty$ khi $b \to +\infty$. Vậy tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ.

Tóm lại: tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $(a > 0)\begin{cases} \text{hội tụ nếu} & \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ nếu} & \alpha \le 1. \end{cases}$

3.1.2. Phương pháp tính. Công thức Newton-Leibnitz mở rộng

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,+\infty)$. Vậy

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)].$$

Cho nên tích phân suy rộng hội tụ khi và chỉ khi $\exists \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$. Vậy ta có thể viết

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Công thức nầy được gọi là *công thứcNewton-Leibnitz mở rộng*

• Khoảng lấy tích phân là $(-\infty, b]$

Tương tự như trên, ta định nghĩa tích phân suy rộng (loại 1)

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty, b]$ và đặt $F(-\infty) = \lim\limits_{a\to-\infty} F(a)$, thì

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b f(x)dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} [F(b) - F(a)] \\ &= F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^b.\end{aligned}$$

Công thức nầy cũng được gọi là *công thứcNewton-Leibnitz mở rộng*

• Khoảng lấy tích phân là $(-\infty, +\infty)$.

Ta viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ* khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải là hội tụ.

Ta cũng có *công thức Newton-Leibnitz mở rộng*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty,+\infty)$ và

$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b),\ F(-\infty) = \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Ví dụ. Tính tích phân $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Ta có

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \int_{2}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_{2}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x-1}{x+2} - \ln\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(0 + \ln 4) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

3.1.3. Tích phân các hàm không âm. Các đ ịnh lý so sánh.

Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên $[a,b]$, $\forall b \geq a$, thì

$$\Phi(b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

là một hàm tăng trên $[a,+\infty)$, cho nên giới hạn $\lim_{b\to+\infty} \Phi(b)$ tồn tại khi và chỉ khi $\Phi(b)$ bị chặn trên, nghĩa là tồn tại hằng số M sao cho

$$\Phi(b) \leq M \qquad \forall b \geq a.$$

Từ đó ta có

Định lý. Cho $f(x) \geq 0$ trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên $[a,b]$, $\forall b \geq a$. Khi đó tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi tồn tại hằng số M sao cho

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \leq M \qquad \forall b \geq a.$$

Định lý. Cho $f(x), g(x) \geq 0$ trên $[a,+\infty)$ và khả tích trên $[a,b]$, $\forall b \geq a$.

Giả sử rằng

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \ge a.$$

Khi đó, nếu

i) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

ii) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Định lý. Cho $f(x), g(x) \ge 0$ trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên $[a, b]$, $\forall b \ge a$.

Giả sử rằng

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 \le K \le +\infty.$$

Khi đó,

i) $0 < K < +\infty$: Hai tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng tính chất, tức là, đồng thời hội tụ hay đồng thời phân kỳ.

ii) $K = 0$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

iii) $K = +\infty$: Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Chứng minh.

i) $0 < K < +\infty$: Với $0 < \varepsilon < K$ và với x đủ lớn ta có

$$0 < K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon$$

hay

$$(K - \varepsilon)g(x) < f(x) < (K + \varepsilon)g(x).$$

Tiếp theo ta sử dụng định lý trên.

ii) $K = 0$: Với $\varepsilon > 0$ và ta có với x đủ lớn

$$0 \le \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon, \text{ do đó } 0 < f(x) < \varepsilon g(x).$$

Sử dụng định lý trên ta có Đpcm.

iii) $K = +\infty$: Suy ra $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1/K = 0$. Sử dụng phần ii) ta có Đpcm.

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx$.

Vì

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \text{ với mọi } x \ge 0.$$

Mà tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Ta có $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ là hội tụ, và

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} : \frac{1}{x^2}\right] = 1,$$

nên tích phân đã cho hội tụ ($K = 1$).

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$.

Ta có $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ phân kỳ, và

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{3/2}}{1+x^2} : \frac{1}{x^{1/2}}\right] = 1,$$

nên tích phân đã cho phân kỳ ($K = 1$).

3.1.4. Hội tụ tuyệt đối

Người ta chứng minh được rằng

Định lý. Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Trong trường hợp nầy, người ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*.

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, mà $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ, thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *bán hội tụ* (hội tụ mà không hội tụ tuyệt đ ối).

Chú thích. Đối với các tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ hoặc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ta cũng có các tiêu chuẩn so sánh tương tự.

Ví dụ. Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối, vì tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}dx$ hội tụ

Thật vậy ta có

$$\frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \text{ với mọi } x \ge 0 \text{ và } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ hội tụ.}$$

3.2. Tích phân suy rộng loại 2(Hàm dưới dấu tích phân không bị chặn)

3.2.1. Định nghĩa.

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $[a,b)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a,b']$, $a \le b' < b$.
Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân suy rộng loại* 2 của hàm $f(x)$ trên $[a, b)$ và được ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Như vậy,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Ví dụ. $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon)$. Vậy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \arcsin(1-\varepsilon)$$

$$= \arcsin 1 = \pi/2.$$

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, $(a < b)$.

Với $\lambda \leq 0$ thì ta được tích phân xác định thông thường.

Với $\lambda \neq 1$, ta có

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{-1}{1-\lambda}(b-x)^{1-\lambda} \Big|_a^b = \frac{1}{1-\lambda}[(b-a)^{1-\lambda} - \varepsilon^{1-\lambda}].$$

Nếu $\lambda < 1$, thì $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{1-\lambda} = 0$, vậy

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}.$$

Nếu $\lambda > 1$, thì $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{1-\lambda} = +\infty$, do đó $\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = +\infty$, vậy tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ phân kỳ.

Nếu $\lambda = 1$, thì $\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \ln(b-a) - \ln\varepsilon \to +\infty$ khi $\varepsilon \to 0+$. Vậy tích phân $\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ phân kỳ.

Tóm lại ta có: tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \begin{cases} \text{hội tụ nếu } & \lambda < 1, \\ \text{phân kỳ nếu } & \lambda \geq 1. \end{cases}$

• Nếu $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x)$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a', b]$, $a < a' \leq b$.

Ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a+0} \int_{a'}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

• Nếu $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R},\ a < c < b$, ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Trong đẳng thức trên, tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ* khi và chỉ khi cả hai tích phân suy rộng ở vế phải là hội tụ.

3.2.2. Công thức Newton-Leibnitz mở rộng

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a,b)$. Ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx = \lim_{b'\to b-0} [F(b') - F(a)]$$
$$= F(b-) - F(a).$$

Ta có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-},$$

với $F(b-) = \lim_{x\to b-0} F(x)$.

Tương tự cho các trường hợp khác.

3.2.3. Tích phân các hàm không âm. Các đ ịnh lý so sánh.

Cho $f(x), g(x) \geq 0$ trên $[a,b)$ và khả tích trên $[a,b'],\ \forall b' \in [a,b)$.

Ta có các định lý so sánh như sau.

Định lý. Nếu

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b).$$

Khi đó, nếu

i) $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ,

ii) $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

Định lý. Giả sử rằng

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 \leq K \leq +\infty.$$

Khi đó,

i) $0 < K < +\infty$: Hai tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng tính chất, tức là, đồng thời hội tụ hay đồng thời phân kỳ.

ii) $K = 0$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

iii) $K = +\infty$: Nếu $\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Chứng minh.các định lý trên cũng tương tự như chứng minh các định lý 3.1.3.
Chú thích: Các định lý so sánh trên đây cũng đúng cho các hàm không âm trên $(a,b]$ và khả tích trên $[a',b]$, $\forall a' \in (a,b]$, trong đó điều kiện $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b)$ sẽ được thay bởi $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in (a,b]$ và $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ sẽ được thay bởi $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3.2.4. Hội tụ tuyệt đối

Người ta chứng minh được rằng

Định lý. Nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Trong trường hợp nầy, người ta nói $\int_a^b f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối*. Nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, mà $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ, thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ *bán hội tụ* (hội tụ mà không hội tụ tuyệt đ ối).

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

Ta có $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}}dx$ hội tụ ($\lambda = 1/3 < 1$). Hơn nữa

$$\lim_{x\to 1-}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} : \frac{1}{(1-x)^{1/3}}\right] = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

nên tích phân đã cho hội tụ ($K = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$).

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Tính các tích phân bất định sau đây

1/ $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

2/ $\int (a^x + b^x)^2 dx$

3/ $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

4/ $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2}\, dx$

5/ $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$

6/ $\int \frac{1+tg^2x}{\sqrt{1+tgx}}dx$

7/ $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx$

8/ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, $(x > 0)$

9/ $\int x^3(1-2x^4)^3 dx$

10/ $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

11/ $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$

12/ $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^2 2x+4}$

13/ $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}dx$

14/ $\int tg^3 x dx$

15/ $\int x^3 \sqrt{a-x^2}\, dx$

16/ $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$

17/ $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, \frac{dx}{x^2}$

18/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

19/ $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

20/ $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

21/ $\int x^2 arctgx dx$

22/ $\int (x^2+2x+3)\cos x dx$

23/ $\int x^3 \ln x dx$

24/ $\int (x^2+1)e^{-2x}dx$

25/ $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

26/ $\int e^{-2x}\cos 3x dx$

27/ $\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx$

28/ $\int \frac{arctgx}{x^2(1+x^2)}dx$

29/ $\int \sin(\ln x)dx$

30/ $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

2. Tính tích phân các hàm hữu tỉ sau đây

1/ $\int \frac{2x^2+x+3}{x^3+3x^2+3x+2}dx$

2/ $\int \frac{1+x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

3/ $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)^2}dx$

4/ $\int \frac{2xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}$

5/ $\int \frac{1-x^4}{1+x^4}dx$

6/ $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

7/ $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx$

8/ $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$

9/ $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$

10/ $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$.

3. Tính tích phân các hàm lượng giác sau

1/ $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

2/ $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$

3/ $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}$

4/ $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$

5/ $\int \cot g^3 3xdx$

6/ $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

7/ $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$

8/ $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$

9/ $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$

10/ $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

4. Tính tích phân các hàm hữu tỉ sau đây

1/ $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

2/ $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

3/ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

4/ $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

5/ $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

6/ $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

7/ $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

8/ $\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

9/ $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$

10/ $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

5. Dùng định nghĩa tính các tích phân sau

1/ $\int_1^2 e^x dx$

2/ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x dx$

3/ $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^2}$; $(0 < a < b)$

4/ $\int\limits_{0}^{1} a^x dx$; $(a > 0,\ a \neq 1)$.

6. Tìm giá trị trung bình của các hàm sau

1/ $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[1,9]$

2/ $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$; trên $[0,\pi/6]$.

7. Dùng công thức Newton-Leibnitz để tính các tích phân sau

1/ $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

2/ $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$

3/ $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x| dx$

4/ $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

5/ $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx$ nếu $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{khi } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & \text{khi } 1 < x \le 2. \end{cases}$

6/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

7/ $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

8. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp đổi biến

1/ $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

2/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}$

3/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$

4/ $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} dx$

5/ $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$

6/ $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

7/ $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$

8/ $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx.$

9. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp tích phân từng phần

1/ $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$

2/ $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$

3/ $\int\limits_{-1}^{1} x\,arctg x dx$

4/ $\int\limits_{0}^{\pi/2} e^x\cos x dx$

5/ $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x dx.$

10. Khảo sát sự hội tụ và tìm giá trị (trong trường hợp hội tụ) của các tích phân suy rộng sau

1/ $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx$

2/ $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$

3/ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

4/ $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

5/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

6/ $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

7/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln^2 x}{x}dx$

8/ $\int\limits_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-1}.$

11. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau

1/ $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

2/ $\int\limits_{1}^{+\infty} (1 - \cos\frac{2}{x})dx$

3/ $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx$

4/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$

5/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{tgx-x}$

6/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$

7/ $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

1/ $y^2 = x^3,\ x = 0,\ y = 4$

2/ Một nhịp của đường Cycloide $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ và trục Ox.

3/ $y = x^2 + 4$ và $x - y + 4 = 0$

4/ $y = x^3,\ y = x,\ y = 2x$

5/ $x^2 + y^2 = 4$ và $y^2 = 2x$

6/ Đường Cardioide $r = a(1-\cos\varphi)$ và đ ường tròn $r = a,\ (a > 0)$

7/ $ax = y^2$ và $ay = x^2,\ (a > 0)$

8/ $r = 3 + 2\cos\varphi$

9/ $x^2 + y^2 = 4$ và $x^2 + y^2 + 2x = 0$

10/ $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$ (phần tự cắt của đường cong)

13. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền phẳng giới hạn bởi các đường cong sau đây khi cho nó quay quanh trục tương ứng

1/ $y^2 + x - 4 = 0,\ x = 0$ quay quanh trục Oy.

2/ $xy = 4, y = 0,\ x = 1$ và $x = 4$ quay quanh trục Ox.

3/ Một nhịp của đường Cycloide $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $(a > 0)$ quay quanh trục Ox.

4/ $y = x\sin x,\ y = 0, 0 \le x \le \pi$ quay quanh trục Ox.

5/ $y = e^{-2x} - 1,\ y = e^{-x} + 1,\ x = 0$ quay quanh trục Ox.

14. Tìm độ dài của đường cong

1/ $9y^2 = 4(3-x)^3$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Oy.

2/ $2y = x^2 - 2$ gồm giữa các giao điểm của nó với trục Ox.

3/ $r = a(1+\cos\varphi),\ (a > 0)$

4/ $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x},\ 0 \le x \le 3$

5/ $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ 1 \le x \le e$

6/ $x = a\cos^4 t,\ y = a\sin^4 t,\ 0 \le t \le \pi/2,\ (a > 0)$

7/ $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
8/ $r = a\sin^3 \frac{\varphi}{3},\ (a > 0).$

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. Bổ túc về số phức

1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa. Đơn vị ảo, ký hiệu là i, là một số thỏa:

$$i^2 = -1.$$

Định nghĩa. Biểu thức có dạng $a + bi$, trong đó a và b là các số thực, được gọi là một số phức, thường viết là
$$z = a + bi,$$
a được gọi là phần thực của z, ký hiệu là $\mathrm{Re}z$,
b được gọi là phần ảo của z, ký hiệu là Imz,
$$a = \mathrm{Re}z,\ b = \mathrm{Im}z.$$

Chú thích.
- Nếu $b = 0$, thì $z = a$ là một số thực, vậy số thực là một trường hợp riêng của số phức.
- Nếu $a = 0$, thì $z = bi$ là một số thuần ảo.

Định nghĩa. (*hai số phức bằng nhau*). $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
Định nghĩa. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức $\overline{z} = a - bi$ được gọi là *số phức liên hợp* của z.
Như vậy hai số phức liên hợp với nhau nếu chúng có phần thực bằng nhau và phần ảo đối nhau.

1.2. Biểu diễn hình học và dạng đại số, lượng giác, mũ của số phức

Hình 44

• Biểu diễn số phức trên mặt phẳng
Người ta biểu diễn số phức $z = a + bi$ trên mặt phẳng Oxy bằng một điểm A có tọa độ (a, b). Điểm $A(a, b)$ đ ược gọi là *ảnh* của số phức $z = a + bi$. Như vậy mỗi số phức có một ảnh xác định và mỗi điểm của mặt phẳng Oxy là ảnh của một số phức xác định. Mặt phẳng Oxy được gọi là mặt phẳng phức. Người ta không phân biệt số phức $z = a + bi$ với ảnh $A(a, b)$ của nó. Tập hợp tất cả các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$. Ảnh của hai số phức liên hợp với nhau là hai điểm đối xứng với nhau qua trục Ox.
Nếu $b = 0$ thì A nằm trên Ox, lúc đó $z = a$ là một số thực, cho nên trục Ox còn được gọi là *trục thực*.
Nếu $a = 0$ thì A nằm trên Oy, lúc đó $z = bi$ là một số thuần ảo, cho nên trục Oy còn được gọi là *trục ảo*.
Nếu ta nối điểm A với gốc O, ta được véctơ $\overrightarrow{OA}$ thì ta có thể xem véctơ $\overrightarrow{OA}$ là biểu diễn hình học của số phức $z = a + bi$.
• **Định nghĩa.** Dạng $z = a + bi$ đ ược gọi là *dạng đại số* của số phức z.

Hình 45

• Dạng lượng giác của số phức.
Gọi (r, φ), $r \geq 0$ là tọa độc cực của điểm $A(a, b)$ đối với trục cực Ox và cực O.
Người ta gọi r là môđun của số phức $z = a + bi$, ký hiệu là $|z|$ và φ (được xác định sai khác $2k\pi$) là arcgument của số phức z, ký hiệu là $Argz$:

$$r = |z|, \quad \varphi = Argz.$$

Rõ ràng ta có

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Do đó

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z.
Ta có

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = \tfrac{b}{a}.$$

Giá trị $\varphi \in [0, 2\pi)$ được gọi là *giá trị chính* của $Argz$. Góc φ tổng quát được xác đ ịnh sai khác $2k\pi$, (k nguyên). Để có giá trị chính $\varphi \in [0, 2\pi)$ ta chú ý $b = r\sin\varphi$ nên $\sin\varphi$ trùng dấu với y.
Ví dụ. Viết các số phức sau đ ây dưới dạng lượng giác
a) $1 + i$; b) 1; c) i; d) -1; e) $-i$.
a) Ta có $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ và điểm $(1, 1)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất. Từ $tg\varphi = 1$, ta chọn $\varphi = \pi/4$. Vậy

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4).$$

Tương tự ta có
b) $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$
c) $i = 1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$
d) $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$
e) $-i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

• Dạng mũ của số phức.
Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dưới dạng lượng giác. Ta công nhận công thức Euler sau đây

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Khi đó ta có dạng mũ của số phức

$$z = re^{i\varphi}.$$

1.3. Các phép tính về số phức

• *Phép cộng và trừ số phức*
Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Tổng $(z_1 + z_2)$ và hiệu $(z_1 - z_2)$ của chúng được định nghĩa như sau

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i.$$

Dễ thấy rằng véctơ biểu diễn tổng (hiệu) của hai số phức là tổng (hiệu) của hai véctơ biểu diễn các số phức nói trên.

Hình 46 **Hình 47**

Chú thích. Ta có

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Vậy tổng của hai số phức liên hợp với nhau là một số thực.

• *Phép nhân số phức*

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$. Tích của hai số phức $z_1 z_2$ mà ta có được bằng cách nhân chúng như nhân hai nhị thức trong đại số, với chú ý là $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned}$$

Chú thích. $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$.

Vậy tích của hai số phức liên hợp với nhau bằng bình phương của môđun của mỗi số phức đó. là một số thực.

Bây giờ giả sử hai số phức được viết dưới dạng lượng giác.

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2). \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\ Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2), \quad (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

Ký hiệu $\alpha_1 = \alpha_2 \ (\text{mod}\, 2\pi)$ có nghĩa là $\alpha_1 = \alpha_2$ là bội số của 2π.

• *Phép chia số phức*

Số phức z_1 chia cho số phức $z_2 \neq 0$ là một số phức ký hiệu là $\frac{z_1}{z_2} = z$ sao cho $zz_2 = z_1$. Nếu

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \\ z &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \end{aligned}$$

thì ta suy ra

$$\begin{cases} \rho r_2 = r_1, \\ \theta + \varphi_2 = \varphi_1, \pmod{2\pi} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \rho = \frac{r_1}{r_2}, \\ \theta = \varphi_1 - \varphi_2, \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Do đó

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \ (r_2 \neq 0)$$

Đặc biệt nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ thì

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

Nếu các số phức z_1, z_2 được cho dưới dạng đại số $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, thì phép chia đ ược thực hiện như sau

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{|z_2|^2} \\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i. \end{aligned}$$

Chú thích. Tập hợp $\mathbb{C}$ với các phép tính cộng, trừ, nhân, chia như trên tạo thành một trường mà ta gọi là trường số phức. Như vậy trường số phức $\mathbb{C}$ là mở rộng của trường số thực $\mathbb{R}$.

• *Phép lũy thừa*

Từ qui tắc của phép nhân các số phức dưới dạng lượng giác, ta suy ra rằng, nếu

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

thì

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

hay

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Từ đó ta suy ra *công thức Moivre*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, (n = 1, 2, \ldots).$$

• *Phép khai căn*

Giả sử n là số tư nhiên và $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Ta gọi số phức $\zeta = \sqrt[n]{z}$ là một căn bậc n của z nếu $\zeta^n = z$. Muốn tìm ζ ta viết nó dưới dạng lượng giác $\zeta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Khi đó

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

hay

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Suy ra

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ (tập các số nguyên)} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy

$$\zeta = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})\right],\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do tính tuần hoàn của các hàm lượng giác cos và sin, ta suy ra có n giá trị $\zeta = \sqrt[n]{z}$ khác nhau ứng với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ví dụ. Tính $\sqrt[3]{1}$.

Ta có $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

vậy

$$\zeta_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\tfrac{0+2k\pi}{3} + i\sin\tfrac{0+2k\pi}{3}\right).$$

Cho $k = 0, 1, 2$ ta được 3 căn bậc ba khác nhau của 1 là

$$\zeta_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\zeta_1 = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{-1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\zeta_2 = \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3} = \tfrac{-1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hình 48

Ví dụ. Giải phương trình $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$.

i) Nếu $\Delta > 0$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

ii) Nếu $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

iii) Nếu $\Delta < 0$: thì $\sqrt{\Delta}$ có hai giá trị phức liên hợp $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-\Delta)i^2} = \pm i\sqrt{-\Delta}$, với $\sqrt{-\Delta}$ là căn số học của số dương $-\Delta$. Do đó phương trình có hai nghiệm phức liên hợp: $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Định lý Viet vẫn đúng trong trường hợp này, vì

$$x_1 + x_2 = \tfrac{-b}{a},$$

$$x_1x_2 = (\tfrac{-b}{2a})^2 - i^2\left(\tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$= \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{-\Delta}{4a^2} = \tfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \tfrac{c}{a}.$$

Chẳng hạn phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có $\Delta = 1 - 4 = -3$, nên nó có hai nghiệm phức liên hợp: $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

§2. Phương trình vi phân cấp 1

2.1. Các khái niệm chung

2.1.1. Định nghĩa. *Phương trình vi phân cấp*1 là phương trình có dạng

(1) $$F(x,y,y') = 0,$$

trong đó F là một hàm theo ba biến đ ộc lập. Nếu giải được phương trình đó đối với y' thì phương trình vi phân cấp1 có dạng

(2) $$y' = f(x,y) \quad \text{hay} \quad \tfrac{dy}{dx} = f(x,y),$$

trong đó f là một hàm theo hai biến đ ộc lập.

Định nghĩa. *Bài toán Cauchy* hay *bài toán điều kiện đầu* là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) thỏa điều kiện

(3) $$y(x_0) = y_0.$$

Định nghĩa. Nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trên khoảng I là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (1) hoặc (2) ta được đ ồng nhất thức trên I :

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0, \ \forall x \in I,$$

hoặc

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \ \forall x \in I,$$

Ví dụ. Xét bài toán Cauchy

$$y' = \tfrac{y}{x}, \quad y(1) = 2.$$

Từ $y' = \frac{y}{x}$, ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{dy} = \frac{dx}{x}$.

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \ (C_1 > 0).$$

Suy ra

$y = Cx, \ x \neq 0, \ (C = \pm C_1)$.

Với $x = 1, y = 2$ thì $2 = C.1$. Vậy $C = 2$. Suy ra nghiệm của bài toán là $y = 2x, x \neq 0$.

2.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý. Xét bài toán Cauchy (2), (3). Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$, thì với mọi điểm

$(x_0,y_0) \in D$, bài toán Cauchy (2), (3) có nghiệm xác định trong một lận cận của x_0.

Ngoài ra nếu, đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và bị chặn trong D thì nghiệm đó là duy nhất.

Định lý trên thường được gọi là định lý Peano-Cauchy-Picard. Ta công nhận định lý nầy.

2.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị, tích phân tổng quát.

Thông thường nghiệm của phương trình vi phân cấp một thường phụ thuộc vào một hằng số thực C, và có dạng

$$y = \varphi(x,C)$$

Định nghĩa. Hàm số $y = \varphi(x,C)$ đ ược gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$, nếu với mọi điểm $(x_0,y_0) \in D$, tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x,C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$,

nghĩa là: tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho

i/ $y = \varphi(x,C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1) hoặc (2) trong khoảng nào đ ó chứa x_0,

ii/ $y(x_0,C_0) = y_0$.

Định nghĩa. Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình vi phân cấp một là nghiệm $y = \varphi(x,C_0)$ mà

ta nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ bằng cách cho hằng số tùy ý C một giá trị cụ thể C_0.
Trở lại ví dụ trên, ta thấy

$$y = Cx, (x \neq 0)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (C là một hằng số tùy ý),

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Ngoài ra, $y = 2x, (x \neq 0)$
là nghiệm riêng của phương trình trên, thỏa điều kiện đầu $y(1) = 2,\ (C = 2)$
Tất nhiên mọi nghiệm của bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng.
Định nghĩa. Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào sẽ được gọi là *nghiệm kỳ dị*.
Ví dụ. Xét phương trình vi phân $y' = \sqrt{1 - x^2}$.
Ta có $\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}} = dx$.
Lấy tích phân hai vế ta được $\arcsin y = x + c$. Suy ra $y = \sin(x + C)$, C là hằng số tùy ý. Đó là nghiệm tổng quát.
Ngoài ra ta thấy $y = \pm 1$ cũng là nghiệm, nhưng chúng không nhận được từ nghiệm tổng quát. Đó là các nghiệm kỳ dị. Khi giải phương trình (1) hoặc (2) có khi ta cũng không nhận được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = \varphi(x, C)$, mà nhận được một hệ thức có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{4}$$

Khi đó nghiệm tổng quát được xác định dưới dạng hàm ẩn. Phương trình (4) được gọi là *tích phân tổng quát* của (1) hoặc (2). Cho $C = C_0$ ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \tag{5}$$

mà ta gọi là *tích phân riêng* của phương trình vi phân nói trên.

2.2. Phương trình vi phân cấp 1 tách biến

2.2.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 1 *tách biến* là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \tag{6}$$

2.2.2. Cách giải: Lấy tích phân bất định hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Lấy tích phân, ta được

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = C_1$$

$$\ln[(1 + x^2)(1 + y^2)] = 2C_1.$$

Ta được tích phân tổng quát

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C, \quad (C = e^{2C_1} > 0).$$

Chú thích. Phương trình dạng

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{7}$$

có thể đưa về dạng (6) như sau:

- Nếu $g_1(y) = 0$ tại $y = b$ (tức là $g_1(b) = 0$) thì $y = b$ là nghiệm của (7).
- Nếu $f_2(x) = 0$ tại $x = a$ (tức là $f_2(a) = 0$) thì $x = a$ là nghiệm của (7).
- Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì chia hai vế của (7) cho $g_1(y)f_2(x)$, ta được

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Lấy tích phân hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$y' = xy(y+2).$$

Ta có

$$dy = xy(y+2)dx.$$

- Nếu $y(y+2) = 0$ thì $y = 0, y = -2$ là nghiệm của phương trình.
- Các nghiệm khác tìm được bằng cách thì chia hai vế của phương trình cho $y(y+2)$ rồi lấy tích phân, ta được

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} - \int xdx = C_1$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy - \frac{1}{2}x^2 = C_1$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - x^2 = \ln C = 2C_1.$$

Vậy tích phân tổng quát là

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2}, \quad (C > 0)$$

Chú thích. Phương trình dạng

(7) $$y' = f(ax + by + c)$$

có thể đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $z = ax + by + c$. Thật vậy

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

Nếu $a + bf(z) = 0$ khi $z = z_0$, thì $ax + by + c = z_0$ là nghiệm của phương trình vi phân nói trên. Các nghiệm khác tìm được bằng cách thì chia hai vế của phương trình cho $a + bf(z)$ rồi lấy tích phân, ta được

$$\int \frac{dz}{a+bf(z)} = x + C.$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

Đặt $z = x - y + 1$ thì $z' = 1 - y'$. Thay vào phương trình, ta có $1 - z' = z^2$ hay

$$dz = (1 - z^2)dx.$$

• Nếu $1 - z^2 = 0$ thì $z = 1, z = -1$ là các nghiệm. Chuyển về ẩn hàm cũ bằng cách thay vào $z = \pm 1$, ta có $y = x$, $y = x + 2$ là các nghiệm riêng.
• Nếu $1 - z^2 \neq 0$. Chia hai vế cho $1 - z^2$ ta có

$$\frac{dz}{1-z^2} = dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = x + \frac{1}{2}\ln C,\ \ C > 0.$$

Suy ra

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = Ce^{2x},\ \ C > 0.$$

Sau cùng, ta được tích phân tổng quát

$$\left|\frac{x-y+2}{x-y}\right| = Ce^{2x},\ \ C > 0.$$

2.3. Phương trình vi phân đ ẳng cấp cấp 1

2.3.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân *đẳng cấp cấp* 1 là phương trình có dạng

(8) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

trong đó f là hàm số cho trước.

2.3.2. Cách giải: Ta đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đ ổi qua ẩn hàm mới $u = \frac{y}{x}$. Khi đó

$$y = ux,\ \ y' = xu' + u.$$

Thay vào (8) ta được

$$xu' + u = f(u).$$

hay

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

• Nếu $f(u) - u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}.$$

Đây là phương trình vi phân tách biến. Tích phân hai vế của phương trình đó, ta được

$$\ln|x| = \int\frac{du}{f(u)-u} + \ln|C| = \Phi(u) + \ln|C|,$$

trong đó $\Phi(u) = \int\frac{du}{f(u)-u}$. Do đó $x = Ce^{\Phi(u)}$. Vậy tích phân tổng quát của (8) là

$$x = Ce^{\Phi(y/x)}$$

• Nếu $f(u) - u \equiv 0$, thì $f(y/x) = y/x$ và phương trình (8) có dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

hay

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Tích phân hai vế của, ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

hay

$$y = Cx,\ \ x \neq 0$$

là nghiệm tổng quát của (8) trong trường hợp $f(y/x) = y/x$.

• Nếu $f(u) - u \equiv 0$, tại $u = u_0$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy rằng hàm $y = u_0x,\ (x \neq 0)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân đẳng cấp

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Ta viết lại phương trình vi phân ở trên như sau

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Đặt $\frac{y}{x} = u$ hay $y = ux$, ta có $y' = u'x + u$, và thay vào phương trình, ta có

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

hay

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}du$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\begin{aligned}\ln|x| &= \int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln|C|\\ &= \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln|C|\\ &= arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\ln|C|,\end{aligned}$$

hay

$$\ln[x^2(1+u^2)] = 2arctgu + \ln|C|,$$

do đó

$$x^2(1+u^2) = C_1e^{2arctgu}$$

hay

$$x^2 + y^2 = C_1e^{2arctg(y/x)}, C_1 > 0.$$

Chú thích. Phương trình dạng

(9) $$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

trong đó $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các hằng số cho trước, có thể đ ưa về phương trình vi phân đẳng cấp. Thật vậy, ta xét hai trường hợp:

i) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$: Khi đó hệ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0,\\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,\end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Khi đ ó đặt $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, ta có $Y = Y(X) = y(x) - y_0$. Cũng chú ý rằng $Y'(X) = y'(x)$, sau khi thay vào phương trình, ta nhận được phương trình vi phân đẳng cấp:

$$Y' = f\left(\frac{a_1(X+x_0)+b_1(Y+y_0)+c_1}{a_2(X+x_0)+b_2(Y+y_0)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right) = \widetilde{f}\left(\frac{Y}{X}\right).$$

ii) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$: Khi đó ta có $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$.

Đặt $Z = a_2x + b_2y$ thì $Z' = a_2 + b_2y'$ và ta được phương trình vi phân tách biến

$$Z' = a_2 + b_2 f\left(\frac{\lambda Z + c_1}{Z + c_2}\right) \equiv \Phi(Z).$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Hệ

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ 2x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

vô nghiệm. Đặt $Z = x + y$, ta có $dZ = dx + dy$.
Vậy ta viết lại phương trình vi phân ở trên như sau

$$(Z + 2)dx + (2Z - 1)(dZ - dx) = 0,$$

hay

$$(3 - Z)dx + (2Z - 1)dZ = 0.$$

- Nếu $Z - 3 = 0$, thì $Z = 3$ là nghiệm hay $x + y = 3$ là nghiệm.
- Nếu $Z - 3 \neq 0$, thì ta có

$$\frac{2Z-1}{Z-3}dZ = dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{2Z-1}{Z-3}dZ = \int dx + C$$

hay

$$2Z + 5\ln|Z - 3| - x = C.$$

Suy ra tích phân tổng quát của phương trình vi phân là

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C.$$

2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

2.4.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 1 là phương trình có dạng

(10) $$y' + p(x)y = q(x),$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục cho trước.

Nếu $q(x) \equiv 0$, thì (10) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *thuần nhất*.

Nếu $q(x) \neq 0$, thì (10) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *không thuần nhất*.

2.4.2. Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)

Trước hết ta xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng với (10)

(11) $$y' + p(x)y = 0,$$

hay $$\frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

Với $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1.$$

Do đó

(12) $$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình (11). Ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (11) và cũng là một nghiệm riêng của phương trình (11) ứng với $C = 0$.
Bây giờ ta coi C không phải là hằng số mà là một hàm khả vi theo biến x. Ta sẽ tìm hàm số $C = C(x)$ để biểu thức

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

là nghiệm của phương trình không thuần nhất (10). Lấy đạo hàm (12), ta đ ược

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Thay vào phương trình (10), ta được

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

hay

$$dC = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$C = C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (10) là

(13) $$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right].$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}.$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + y\cos x = 0.$$

Với $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx.$$

Lấy tích phân, ta được

$$\ln|y| = -\sin x + \ln C_1.$$

Do đó

$$y = Ce^{-\sin x}.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Măt khác $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất. ứng với $C = 0$.
Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = C(x)e^{-\sin x},$$

với $C = C(x)$ cần phải tìm. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)e^{-\sin x} - \cos x e^{-\sin x}C(x) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x},$$

hay

$$C'(x) = 1.$$

Lấy tích phân, ta được

$$C(x) = x + C_1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (x + C_1)e^{-\sin x}.$$

2.4.3. Phương pháp Bernuoulli

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (10) dưới dạng

(14) $$y = u(x)v(x).$$

Thế vào (10), ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

hay

(15) $$[u' + p(x)u]v + uv' = q(x).$$

Chọn $u(x)$ là một nghiệm của phương trình

(16) $$u' + p(x)u = 0,$$

ta có

(17) $$u = e^{-\int p(x)dx}$$

Từ (15)–(17), ta được

$$v'e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Vậy

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Cuối cùng ta nhận được nghiệm tổng quát cho bởi (13).

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

$$y'\sin x - y\cos x = -\tfrac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Đặt $y = u(x)v(x)$, ta có

$$u'v\sin x + uv'\sin x - uv\cos x = -\tfrac{\sin^2 x}{x^2},$$

hay

$$v[u'\sin x - u\cos x] + uv'\sin x = -\tfrac{\sin^2 x}{x^2},$$

Chọn $u(x)$ là một nghiệm của phương trình

$$u'\sin x - u\cos x = 0,$$

ta có thể lấy $u = \sin x$. Vậy ta có phương trình

$$v'\sin^2 x = -\tfrac{\sin^2 x}{x^2},$$

hay $$v' = -\frac{1}{x^2}.$$

Tích phân, ta được
$$v(x) = \frac{1}{x} + C.$$

Vậy
$$y = uv = (\frac{1}{x} + C)\sin x.$$

2.4.4. Phương pháp thừa số tích phân

Nhân hai vế của (10) với thừa số
$$e^{\int p(x)dx},$$

ta được
$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

mà vế trái của đẳng thức nầy chính là đạo hàm của tích số $ye^{\int p(x)dx}$. Vậy ta viết lại đẳng thức nầy như sau
$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được
$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (10) là
$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân
$$y' + 2xy = 4x.$$

Nhân hai vế của phương trình với thừa số
$$e^{\int 2xdx} = e^{x^2},$$

ta được
$$y' e^{x^2} + 2xe^{x^2} y = 4xe^{x^2},$$

hay
$$\frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = 4xe^{x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được
$$ye^{x^2} = 4\int xe^{x^2}dx + C = 2e^{x^2} + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (10) là
$$y = 2 + Ce^{-x^2}.$$

2.5. Phương trình vi phân Bernuoulli

2.5.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân *Bernuoulli* là phương trình có dạng

(18) $$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục của x cho trước và α là một hằng số thực cho trước.

Với $\alpha = 0$, thì (18) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Với $\alpha = 1$, thì (18) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0.$$

Ở đây ta chỉ cần xét $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

2.5.2. Cách giải

Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Nếu $\alpha > 0$, thì $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của (18). Ngược lại nếu $\alpha \leq 0$, thì $y \equiv 0$ không là nghiệm của (18).

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của (18) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ và phương trình trên được viết lại

(19) $$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z. Sau khi giải tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (19), ta trở về ẩn y bởi công thức $z = y^{1-\alpha}$, ta đ ược nghiệm tổng quát của phương trình (18).

Ví dụ: Giải phương trình vi phân

(20) $$y' - 2xy = 4x^3y^2.$$

Đây là phương trình vi phân Bernuoulli ứng với $\alpha = 2 > 0$, do đó thì $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^2, ta được

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 4x^3.$$

Đặt $z = y^{-1}$, khi đó ta có $z' = -y^{-2}y'$ và phương trình trên trở thành

(21) $$z' + 2xz = -4x^3.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z.

Nhân hai vế của phương trình (21) với thừa số

$$e^{\int 2xdx} = e^{x^2},$$

ta được

$$z'e^{x^2} + 2xe^{x^2}z = -4x^3e^{x^2},$$

hay

$$\tfrac{d}{dx}(ze^{x^2}) = -4x^3e^{x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ze^{x^2} = -4\int x^3e^{x^2}dx + C.$$

Đổi biến $t = x^2$, $dt = 2xdx$, ta có

$$ze^{x^2} = -2\int te^t dt + C = -2[te^t - \int e^t dt] + C$$
$$= -2(t-1)e^t + C$$
$$= -2(x^2-1)e^{x^2} + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (21) là

$$z = -2x^2 + 2 + Ce^{-x^2}.$$

Trở về ẩn cũ ta thu được nghiệm tổng quát của (20) là

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-2x^2+2+Ce^{-x^2}}.$$

§3. Phương trình vi phân cấp 2

3.1. Các khái niệm chung

3.1.1. Định nghĩa. *Phương trình vi phân cấp*2 là phương trình có dạng

(22) $$F(x,y,y',y'') = 0,$$

trong đó F là một hàm cho trước theo bốn biến độc lập. Nếu giải đ ược phương trình (22) đối với y'' thì phương trình vi phân cấp 2 có dạng

(23) $$y'' = f(x,y,y'),$$

trong đó f là một hàm cho trước theo ba biến độc lập.

Nghiệm của phương trình vi phân (22) trên khoảng I là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (22) ta đ ược đồng nhất thức trên I :

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)) = 0, \ \forall x \in I.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y'' = 6x + 2.$$

Đặt $y' = Z$, ta có $Z' = y'' = 6x + 2$,

suy ra $Z = \int Z' dx + C_1 = 3x^2 + 2x + C_1$,

tức là $y' = 3x^2 + 2x + C_1$.

Vậy $y = \int (3x^2 + 2x + C_1)dx + C_2 = x^3 + x^2 + C_1x + C_2$.

Ta thấy phương trình vi phân cấp2 có nghiệm phụ thuộc vào hai hằng số, nên để xác định một nghiệm cụ thể cần có hai điều kiện nào đó. Người ta thường xét bài toán Cauchy(bài toán điều kiện đầu). Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp 2 thỏa điều kiện đầu

(24) $$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0.$$

với x_0, y_0, y'_0 là những số cho trước.

3.1.2. Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Nếu hàm số $f(x,y,y')$ liên tục trong miền mở nào đó chứa (x_0,y_0,y'_0), tồn tại nghiệm của bài toán (23), (24).

Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục và bị chặn trong miền mở nào đó chứa (x_0,y_0,y'_0), thì nghiệm ấy là duy nhất.

Ta công nhận định lý nầy.

3.1.3. Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2

Như đã thấy, nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thường phụ thuộc vào hai hằng số thực C_1, C_2, và có dạng

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

Định nghĩa. Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp hai (23) trong miền $D \subset \mathbb{R}^3$ nếu $(x_0, y_0, y_0^{/}) \in D$, tồn tại duy nhất một cặp hằng số (C_1^0, C_2^0) sao cho $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (23) thỏa các điều kiện đầu $y(x_0) = y_0,\ y^{/}(x_0) = y_0^{/}$.

Ví dụ. Phương trình vi phân $y^{//} + y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ trong $\mathbb{R}^3$. Thật vậy, trước tiên ta thấy hàm số đó là nghiệm của phương trình $y^{//} + y = 0$ với mọi hằng số C_1, C_2 (kiểm tra trực tiếp). Lấy $(x_0, y_0, y_0^{/}) \in \mathbb{R}^3$, điều kiện đầu (24) có dạng

$$(25) \qquad \begin{cases} C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0 = y_0, \\ -C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_0^{/}. \end{cases}$$

Coi C_1, C_2 như là ẩn, hệ phương trình tuyến tính (25) có nghiệm duy nhất (C_1^0, C_2^0), vì định thức của hệ nầy bằng $1 \neq 0$. Vậy tồn tại duy nhất một cặp (C_1^0, C_2^0) để hàm $y = C_1^0 \cos x + C_2^0 \sin x$ là nghiệm của phương trình vi phân $y^{//} + y = 0$ thỏa các điều kiện đầu (25).

Định nghĩa. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ bằng cách cho các hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể đ ược gọi là *nghiệm riêng*.

Định nghĩa. Phương trình

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

cho ta mối quan hệ giữa biến độc lập và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai được gọi là *tích phân tổng quát* của nó trên.

Nếu cho $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ là những giá trị cụ thể ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$$

mà ta gọi nó là *tích phân nghiệm riêng* của phương trình vi phân nói trên.

Về phương diện hình học, tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp hai xác định một họ đường cong trong mặt phẳng tọa độ phụ thuộc vào hai tham số tùy ý. Các đ ường cong ấy được gọi là *đường cong tích phân* của phương trình vi phân.

3.2. Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được

Bây giờ ta xét phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y^{//} = f(x, y, y^{/})$$

mà ta có thể đưa chúng về cấp một.

3.2.1. Phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(x)$

$$(26) \qquad y^{//} = f(x)$$

Cách giải. Vì $y^{//} = (y^{/})^{/}$ nên từ (26) ta có

$$y^{/} = \int f(x)dx + C_1.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta đ ược

$$y^{/} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2.$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$y'' = \sin x$$

thỏa các điều kiện đầu

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Ta có:

(27) $$y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

(28) $$\begin{aligned} y' &= \int(-\cos x + C_1)dx + C_2 \\ &= -\sin x + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Mặt khác khi $x = 0$ thì $y = 0$ nên từ (29) ta có $C_2 = 0$. Khi $x = 0$ thì $y' = 0$ nên từ (27) ta có $1 = -1 + C_1$ hay $C_1 = 2$. Do đó nghiệm riêng của bài toán Cauchy đã cho là $y = -\sin x + 2x$.

3.2.2. Phương trình vi phân dạng $y'' = f(x,y')$

(29) $$y'' = f(x,y')$$

Cách giải. Đặt $y' = p$, khi đó $y'' = p'$ và (29) có dạng

$$p' = f(x,p).$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát là

$$p = \varphi(x, C_1).$$

Vì $y' = p$, nên ta có

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (29) là

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y'' = x - \frac{y'}{x}.$$

Đặt $y' = p$, ta có $y'' = p'$. Do đó phương trình đã cho có dạng

$$p' = x - \frac{p}{x}$$

hay

$$p' + \frac{p}{x} = x$$

Đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Nhân hai vế với x, ta được

$$xp' + p = x^2,$$

hay

$$\frac{d}{dx}(xp) = x^2$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$xp = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

hay

$$p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int(\tfrac{x^2}{3} + \tfrac{C_1}{x})dx + C_2$$

$$= \tfrac{x^3}{9} + C_1 \ln|x|)dx + C_2.$$

3.2.3. Phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(y, y^{/})$

Cách giải. Đặt $y^{/} = p = p(y)$ và xem như là hàm của y. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức nầy theo x, ta có

$$y^{//} = \tfrac{dp}{dx} = \tfrac{dp}{dy}\tfrac{dy}{dx} = p\tfrac{dp}{dy}.$$

Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$p^{/}\tfrac{dy}{dx} = f(y, p).$$

Đó là phương trình vi phân cấp 1 với ẩn hàm là $p = p(y)$. Nếu phương trình nầy giải được, ta có

$$p = \varphi(y, C_1),$$

hay

$$\tfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y^{/} = \varphi(x, C_1).$$

Suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$yy^{//} - y^{/\,2} = 0.$$

Đặt $y^{/} = p = p(y)$. Ta có $y^{//} = \tfrac{dp}{dx} = \tfrac{dp}{dy}\tfrac{dy}{dx} = p\tfrac{dp}{dy}$ và phương trình đ ã cho có dạng

$$yp\tfrac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

hay

$$p(y\tfrac{dp}{dy} - p) = 0.$$

Do đó ta được hoặc $p = 0$, hoặc là $y\tfrac{dp}{dy} - p = 0$.

Nếu $p = 0$, ta có $y^{/} = p = 0$, suy ra $y = C$.

Nếu $y\tfrac{dp}{dy} - p = 0$, ta nhân hai vế với thừa số $\tfrac{1}{y^2}$, ta thu được

$$\tfrac{1}{y}\tfrac{dp}{dy} - \tfrac{1}{y^2}p = 0,$$

hay

$$\tfrac{d}{dy}(\tfrac{1}{y}p) = 0,$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{y}p = C_1, \text{ hay } p = C_1 y, \text{ hay } y' = C_1 y.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta đ ược $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Nếu lấy $C_1 = 0$, ta được $y = C_2$ là nghiệm đã thấy ở trên. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đ ã cho là
$y = C_2 e^{C_1 x}$, C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng

3.3.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 2 *có hệ số hằng* là phương trình có dạng

(30) $$y'' + py' + qy = f(x), \ a < x < b,$$

trong đó p, q là các hằng số. Ta luôn giả thiết $f(x)$ hàm liên tục trong khoảng (a,b).
Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

(31) $$y'' + py' + qy = 0,$$

được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (30). Ký hiệu vế trái của (30) là $L(y)$, tức là

$$L(y) = y'' + py' + qy = 0.$$

Khi đó L là một ánh xạ tuyến tính. Tính chất tuyến tính được thể hiện như sau:

i) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$,

ii) $L(Cy) = CL(y)$, C là hằng số

Các tính chất nầy được kiểm tra dễ dàng. Vậy các phương trình (30) và (31) có thể viết dưới dạng

(32) $$L(y) = 0,$$

(33) $$L(y) = 0,$$

Từ các tính chất tuyến tính ta thấy rằng, nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (31) thì $C_1 y_1 + C_2 y_2$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (31), trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

• Bài toán Cauchy

Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình (30) thỏa điều kiện đầu

(34) $$y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y'_0,$$

với $x_0 \in (a,b), y_0, y'_0$ cho trước.Ta công nhận kết quả sau:

Định lý (sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b), thì với mọi $x_0 \in (a,b)$, và với mọi y_0, y'_0 cho trước, bài toán Cauchy (30),(31) có duy nhất một nghiệm.

Định nghĩa. Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* trong khoảng (a,b), nếu tồn tại các số α_1, α_2 không đ ồng thời bằng không, sao cho

(35) $$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \ \ \forall x \in (a,b).$$

Trường hợp ngược lại, tức là chỉ đúng trong trường hợp duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì các hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *đ ộc lập tuyến tính*.

Như vậy, các hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ không là hằng số.

3.3.2. Phương trình vi phân thuần nhất

Xét phương trình vi phân thuần nhất (31)

(31) $$y'' + py' + qy = 0.$$

Trước hết ta lập một vài kết quả bổ trợ.

Định nghĩa. Cho hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b). Khi đ ó định thức

$$W(x) = W[y_1,y_2] = \det\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$
$$= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0$$

được gọi là định thức Wronski của các hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$.

Định lý. Nếu hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ có đạo hàm $y_1'(x), y_2'(x)$ phụ thuộc tuyến tính trong khoảng (a,b), thì định thức Wronski $W(x) = 0, \forall x \in (a,b)$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $W(x_0) \neq 0$ và

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Lấy đạo hàm, ta được

$$\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Cho $x = x_0$ ta được hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn α_1, α_2 :

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Hệ đó có định thức $W(x_0) \neq 0$, vậy nó có nghiệm tầm thường duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tức là, $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính. Đpcm.

Định lý. Xét phương trình vi phân thuần nhất (31). Hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ của nó độc lập tuyến tính khi và chỉ khi định thức Wronski $W[y_1,y_2] \neq 0, \forall x \in (a,b)$.

Chứng minh. Nếu $W[y_1,y_2] \neq 0$, trong (a,b), thì theo định lý trên, các hàm y_1, y_2 của nó độc lập tuyến tính.

Ngược lại, Giả sử hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ của nó độc lập tuyến tính trong (a,b). Ta cần chứng minh $W(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$.

Giả sử ngược lại, $\exists x_0 \in (a,b)$ sao cho $W(x_0) = 0$. Khi đó hệ

(36) $$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases}$$

có định thức $W(x_0) = 0$, nên có nghiệm không tầm thường(không đồng thời bằng không).

Xét hàm số

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Hàm nầy cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (31). Hơn nữa, theo (36) thì nghiệm đó thỏa mãn điều kiện đầu

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

Nhưng theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, đó chính là nghiệm $y \equiv 0$ trong (a,b), vậy

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0, \quad \text{trong} \quad (a,b),$$

tức là y_1 và y_2 phụ thuộc tuyến tính. Định lý được chứng minh.
Định lý. Cho $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong (a,b) của phương trình thuần nhất (31). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (31) có dạng

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{37}$$

với C_1, C_2 là hai hằng số.
Chứng minh. Hiển nhiên hàm số có dạng (37) là nghiệm của phương trình (31) với mọi hằng số C_1, C_2.
Ngược lại, Giả sử $u = u(x)$ là nghiệm của bài toán (31), (34). Ta cần chứng minh rằng, khi đó tồn tại duy nhất một cặp số C_1^0, C_2^0 sao cho $u = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x)$.
Với $x_0, u_0, u_0^/$ ta xét hệ phương trình với ẩn là C_1, C_2.

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = u_0, \\ C_1y_1^/(x_0) + C_2y_2^/(x_0) = u_0^/. \end{cases} \tag{38}$$

Định thức của hệ phương trình nầy là

$$W(x_0) = \det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1^/(x_0) & y_2^/(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

vì hai nghiệm y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Vậy hệ (38) có một nghiệm C_1^0, C_2^0 duy nhất. Điều nầy có nghĩa là
$u = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (31), thỏa điều kiện (34).

Như vậy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (31), ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng đ ộc lập tuyến tính của nó, rồi lấy tổ hợp tuyến tính của chúng.

Ta tìm nghiệm riêng của (31) dưới dạng

$$y = e^{kx}, \tag{39}$$

trong đó k là một hằng số nào đó. Ta có

$$y^/ = ke^{kx}, y^{//} = k^2e^{kx}.$$

Thay các biểu thức $y, y^/, y^{//}$ vào (31) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta được

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{40}$$

Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (40) thì hàm $y = e^{kx}$ là một nghiệm riêng của phương trình (31). Phương trình (40) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (31). Có ba trường hợp sau đây
i) Phương trình (40) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2.

Khi đó ta có hai nghiệm riêng của phương trình (31) là

$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}.$$

Hai nghiệm ấy độc lập tuyến tính, vì

$$\tfrac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq \text{hằng số}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (31) là

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 2, k_2 = 4$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$, trong đ ó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

ii) Phương trình (40) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -p/2$.
Lúc đó ta có một nghiệm riêng của phương trình (31) là $y_1 = e^{k_1 x}$. Ta sẽ chứng minh $y_2 = xe^{k_1 x}$ cũng là một nghiệm riêng của phương trình (31). Thật vậy, ta có

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x} = (1 + k_1 x)e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = k_1 e^{k_1 x} + k_1(1 + k_1 x)e^{k_1 x}$$
$$= (2k_1 + k_1^2 x)e^{k_1 x}.$$

Thay các biểu thức y_2, y_2', y_2'' vào (31) ta được

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = e^{k_1 x}[(2k_1 + k_1^2 x) + p(1 + k_1 x) + qx]$$
$$= e^{k_1 x}[(k_1^2 + pk_1 + q)x + (2k_1 + p)].$$

Vì $k_1 = -p/2$ là nghiệm kép của phương trình (40) nên

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0,\ 2k_1 + p = 0.$$

Vậy

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Hai nghiệm y_1 và y_2 độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{hằng số}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (31) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

iii) Phương trình (40) có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$.

Ta có hai nghiệm riêng của phương trình (31) là

$$\overline{y}_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

$$\overline{y}_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$$

Dùng công thức Euler

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x,\ e^{i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x,$$

ta được

$$\overline{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$\overline{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Khi đó các hàm

$$y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_2 = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

cũng là các nghiệm của phương trình (31). Hai nghiệm nầy độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = \cot g\beta x \neq \text{hằng số}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (31) là

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y^{//} + 4y^{/} + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $k_1 = k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$, trong đ ó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ. Giải phương trình vi phân

$$y^{//} + 2y^{/} + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 + 2k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $k_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}\,x + C_2\sin\sqrt{3}\,x)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

3.3.3. Phương trình vi phân không thuần nhất

Bây giờ ta xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (30) sau

(30) $$y^{//} + py^{/} + qy = f(x),\ \ a < x < b,$$

trong đó p, q là các hằng số và hàm $f(x)$ hàm liên tục trong khoảng (a, b). Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với phương trình(30)

(31) $$y^{//} + py^{/} + qy = f(x).$$

Định lý. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (30) bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (31) với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất (30).

Chúng minh. Gọi y_{tq} là nghiệm tổng quát của (31) và y_r là nghiệm riêng của (30).

Đặt $y = y_{tq} + y_r$.

Ta có $y^{/} = y^{/}_{tq} + y^{/}_r$, $y^{//} = y^{//}_{tq} + y^{//}_r$.

Khi đó, thay $y, y^{/}, y^{//}$ vào vế trái của (30), ta có $y = y_{tq} + y_r$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất (30), bởi vì

$$L(y) = y'' + py' + qy$$
$$= L(y_{tq}) + L(y_r)$$
$$= 0 + f(x) = f(x).$$

Ngược lại, cho y là một nghiệm của (30). Do y_r cũng là nghiệm của (30), nên hiệu số hai nghiệm $u(x) = y(x) - y_r(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (31), bởi vì,

$$L(u) = L(y - y_r) = L(y) - L(y_r)$$
$$= f(x) - f(x) = 0.$$

Theo định lý về tồn tại và duy nhất nghiệm thì nghiệm của (31) có dạng (37):

$$u = C_1y_1 + C_2y_2,$$

trong đó $y_1,\ y_2$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (31), C_1, C_2 là các hằng số thích hợp. Vậy

$$y = u + y_r = C_1y_1 + C_2y_2 + y_r.$$

Định lý.(Nguyên lý chồng chất nghiệm). Cho phương trình không thuần nhất

(41) $$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Nếu y_1 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

và y_2 là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + py' + qy = f_2(x).$$

thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình (41).

Chúng minh. Thay $y = y_1 + y_2$ vào vế trái của (41), ta có $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của phương trình (41), bởi vì

$$L(y) = L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$= f_1(x) + f_2(x).$$

Chú thích. Định lý vẫn đúng nếu vế phải của phương trình là tổng của một số hữu hạn các hàm. Sau đây chúng ta đưa ra một phương pháp để tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (30) khi vế phải $f(x)$ có một số dạng đ ặc biệt. Đó là phương pháp hệ số bất định. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó α là số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

a) Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$y_r = e^{\alpha x}Q_n(x)$, với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n với $n + 1$ hệ số chưa biết.

Để tìm các hệ số chưa biết, ta thay y_r vào phương trình (30) rồi đ ồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai vế ta sẽ được một hệ $(n + 1)$ phương trình bậc nhất với $(n + 1)$ ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

b) Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$y_r = xe^{\alpha x}Q_n(x)$, với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

c) Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$y_r = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$, với $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - y' - 2y = 4x^2.$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = -1, k_2 = 2$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$y_{tq} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý. Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = 4x^2 = e^{\alpha x}P_n(x)$, ta có $n = 2, \alpha = 0$. Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng

$$y_r = e^{0x}Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Lấy đạo hàm y'_r, y''_r rồi thế vào phương trình đã cho

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2,$$

hay

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + 2A - B - 2C = 4x^2.$$

Cân bằng các hệ số cùng bậc ở hai vế, ta được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = 4, \\ -2A - 2B = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Giải hệ nầy, ta được $A = -2, B = 2, C = -3$. Vậy

$$y_r = -2x^2 + 2x - 3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_{tq} + y_r = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}.$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0.$$

có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$y_{tq} = C_1\cos x + C_2\sin x$, với C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.
Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng tổng

$$y_r = y_1 + y_2,$$

trong đó y_1, y_2 lần lượt là các nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau

$$y'' + y = xe^x,$$

và $\quad y'' + y = 2e^{-x}$

Do $\alpha = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên y_1, y_2 có dạng

$$y_1 = (Ax+B)e^x, \quad y_2 = Ce^{-x}.$$

Vậy y_r có dạng

$$y_r = (Ax+B)e^x + Ce^{-x}.$$

Lấy đạo hàm $y_r^{/}, y_r^{//}$ rồi thế vào phương trình đã cho, ta thu đ ược

$$y_r^{//} + y_r = (2Ax + 2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.$$

Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2C = 2. \end{cases}$$

Giải hệ nầy, ta được $A = \frac{1}{2}, B = \frac{-1}{2}, C = 1$. Vậy

$$y_r = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x},$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y^{//} - 3y^{/} + 2y = e^x(3-4x).$$

Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1, k_2 = 2$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình đã cho là

$$y_{tq} = C_1e^x + C_2e^{2x},\ \text{trong đ ó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = e^x(3-4x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, ta có $n = 1, \alpha = 1$. Vì $\alpha = 1$ trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng tìm nghiệm riêng y_r được tìm của phương trình đã có theo dạng

$$y_r = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Thay vào phương trình đã cho và rút gọn, ta thu được

$$y_r^{//} - 3y_r^{/} + 2y_r = e^x(-2Ax + 2A - B) = e^x(-4x+3),$$

hay

$$-2Ax + 2A - B = -4x + 3.,$$

Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ 2A - B = 3. \end{cases}$$

Do đó $A = 2, B = 1$. Vậy

$$y_r = e^x(2x^2 + x),$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x(2x^2 + x).$$

Trường hợp 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_m(x)\sin\beta x]$, trong đó α, β là hằng số thực, $P_n(x)$, $\widetilde{P}_m(x)$ là các đa thức bậc n, m tương ứng.
Khi đó:
a) Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (40), thì một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = e^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.
b) Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (40), thì một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = xe^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.
Ví dụ. Hãy tìm một nghiệm riêng của các phương trình

$$y'' + 2y' - 3y = f(x)$$

với $f(x)$ là các hàm số sau:

$a)$ $2\cos 3x$

$b)$ $3xe^x$

$c)$ $(x+1)\cos x$

$d)$ $3xe^x\sin x + e^x\cos x$.

Giải.
Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1$, $k_2 = -3$.
a) $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $n = m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng theo dạng

$$y_r = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được sau khi rút gọn

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = (-12A + 6B)\cos 3x + (-6A - 12B)\sin 3x = 2\cos 3x.$$

Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} -12A + 6B = 2, \\ -6A - 12B = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A = \frac{-2}{15}$, $B = \frac{1}{15}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = \frac{-2}{15}\cos 3x + \frac{1}{15}\sin 3x.$$

b) $\alpha = 1$, $n = 1$.(trường hợp 1). Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta được

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = e^x(8Ax + 2A + 4B) = 3xe^x.$$

Suy ra
$$8Ax + 2A + 4B = 3x.$$
Ta thu được hệ
$$\begin{cases} 8A = 3, \\ 2A + 4B = 0. \end{cases}$$
Giải ra ta được $A = \frac{3}{8}, B = \frac{-3}{16}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là
$$y_r = (\tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{3}{16}x)e^x.$$
c) $\alpha = 0, \beta = 1, n = 1, m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng,

nên ta tìm một nghiệm riêng dưới dạng
$$y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$
Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta có
$$\begin{aligned} &[(-4A + 2C)x + 2A - 4B + 2C + 2D]\cos x \\ &+[(-2A - 4C)x - 2A - 2B + 2C - 3D]\sin x \\ &= (x + 1)\cos x. \end{aligned}$$
Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ
$$\begin{cases} -4A + 2C = 1, \\ 2A - 4B + 2C + 2D = 1, \\ -2A - 4C = 0, \\ -2A - 2B + 2C - 3D = 0. \end{cases}$$
Giải hệ nầy ta được $A = \frac{-1}{5}, B = \frac{-3}{20}, C = \frac{1}{10}, D = \frac{3}{10}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là
$$y_r = -(\tfrac{1}{5}x + \tfrac{3}{20})\cos x + (\tfrac{1}{10}x + \tfrac{3}{10})\sin x.$$
d) $\alpha = 1, \beta = 1, n = 0, m = 1$. Vậy $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng
$$y_r = e^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$
Giải tương tự như trên. Phần còn lại dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Thực hiện các phép tính

1/ $(3+4i)-(1-2i)$

2/ $\frac{3+4i}{1-2i}$

3/ $\frac{1-i}{1+i}$

4/ $(1+i\sqrt{3})^3$

5/ i^{1721}

6/ $(1-i)^{3442}$.

2. Tìm môđun của các số phức sau

1/ $(1+i)(\sqrt{3}+i)$

2/ $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

3/ $\frac{(1+i)(3+i)(-2-i)}{i(3+4i)(5+i)}$

4/ $-i+\frac{3+i}{1-i}$

5/ $\frac{(3+4i)^5}{3-4i}$

6/ $\left[\frac{(3+4i)(1+i)}{3-4i}\right]^4$

7/ $\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

3. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác, dạng mũ

1/ $-1-i$

2/ $1+i\sqrt{3}$

3/ $\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i}$

4/ $(\sqrt{3}+i)^4(1-i)$.

4. Tính căn các số phức sau

1/ $\sqrt[3]{1}$

2/ $\sqrt[4]{-1}$

3/ $\sqrt[3]{-2+2i}$.

5. Giải các phương trình

1/ $z^2=-1+i$

2/ $4z^2+4z+i=0$

3/ $z^4-2\sqrt{3}z^2+4=0$

4/ $z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

6. Giải các phương trình vi phân tách biến

1/ $tgydx-x\ln xdy=0$

2/ $(\cos x)y'=y$

3/ $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}y'$

4/ $y'=a\cos y+b \quad (b>a>0)$

5/ $y'-y^2-3y+4=0$

6/ $y'=\cos(ay+bx)$

7/ $y'=\frac{1}{2x+y}$

8/ $y'(x+y)=1$

9/ $y' = \sqrt{2x + y - 3}$
10/ $y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$
11/ $y' = \sin(y - x - 1)$
12/ $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2dy = 0$, thỏa $y(0) = 1$
13/ $(1 + e^{2x})y^2dy = e^xdx$, thỏa $y(0) = 0$
14/ $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0$, thỏa $y(\sqrt{8}) = 1$
15/ $y' = -\frac{3x+3y-1}{2(x+y)}$, thỏa $y(0) = 2$
16/ $y'tgx = y$, thỏa $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

7. Giải các phương trình vi phân đ ẳng cấp cấp 1
1/ $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$
2/ $xy' = xtg\frac{y}{x} - y$
3/ $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$
4/ $(x + 2y)dx - xdy = 0$
5/ $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$
6/ $xydy - y^2dx = (x + y)^2e^{-y/x}dx$
7/ $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$
8/ $xy' = y\ln\frac{y}{x}$, thỏa $y(1) = 1$
9/ $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, thỏa $y(1) = 1$
10/ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$, thỏa $y(1) = 0$.

8. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau
1/ $y' + ay = e^{bx}$, $(a + b \neq 0)$
2/ $y' - 2xy = 1 - 2x^2$
3/ $y' = \frac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$
4/ $x(1 + x^2)y' + y = arctgx$.

9. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau
1/ $y' + y\cos x = \sin x\cos x$, thỏa $y(0) = 0$
2/ $y'\sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$, thỏa $y(0) = 0$
3/ $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$, thỏa $y(1) = 0$
4/ $y' = 2y + e^x - x$, thỏa $y(0) = \frac{1}{4}$
5/ $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$, thỏa $y(1) = 1$.

10. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau
1/ $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$
2/ $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$
3/ $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$
4/ $y' - 2ytgx + y^2\sin^2x = 0$
5/ $y' = y(y^3\cos x + tgx)$
6/ $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

11. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân Bernoulli sau
1/ $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3 + 1)\sin x$, thỏa $y(0) = 1$
2/ $3dy + (1 + 3y^3)y\sin xdx = 0$, thỏa $y(\frac{\pi}{2}) = 1$
3/ $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$, thỏa $y(1) = 0$
4/ $ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0$, thỏa $y(\frac{1}{2}) = 1$

12. Giải các phương trình vi phân dạng $y'' = f(x)$ sau

1/ $y^{//} = x^2 + xe^x + 1$
2/ $y^{//} = 2\sin x\cos^2 x - \sin^2 x$
3/ $y^{//} = xe^{-x}$, thỏa $y(0) = 1$, $y^{/}(0) = 1$.
13. Giải các phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(x, y^{/})$
1/ $xy^{//} = y^{/}\ln\left(\frac{y^{/}}{x}\right)$
2/ $y^{//} - \frac{y^{/}}{x-1} = x(x-1)$, thỏa $y(2) = 1$, $y^{/}(2) = -1$.
3/ $y^{//} = \frac{y^{/}}{x} + x$
4/ $(y^{//})^2 = y^{/}$.
14. Giải các phương trình vi phân dạng $y^{//} = f(y, y^{/})$
1/ $yy^{//} - (y^{/})^2 = 0$, thỏa $y(0) = 1$, $y^{/}(0) = 2$
2/ $1 + (y^{/})^2 = yy^{//}$
3/ $yy^{//} - (y^{/})^2 = y^2\ln y$
4/ $y^{//}\cos y + (y^{/})^2\sin y - y^{/} = 0$, thỏa $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y^{/}(-1) = 2$.
5/ $yy^{//} = y^{/}(y^{/} + 1)$.
15. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng. Giải các phương trình vi phân thuần nhất sau
1/ $y^{//} - 5y^{/} + 6y = 0$
2/ $y^{//} - 4y^{/} + 4y = 0$
3/ $y^{//} + 4y = 0$
4/ $y^{//} - 2y^{/} - y = 0$
5/ $y^{//} + y = 0$
6/ $4y^{//} - 20y^{/} + 25y = 0$.
15. Giải các phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau
1/ $y^{//} - 4y^{/} = -12x^2 - 6x - 4$
2/ $y^{//} - 4y^{/} + 3y = e^{5x}$, thỏa $y(0) = 3$, $y^{/}(0) = 9$
3/ $y^{//} - 9y^{/} + 20y = x^2e^{4x}$
4/ $y^{//} - y = 2\sin x - 4\cos x$
5/ $y^{//} - 4y = e^x[(-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x]$
6/ $y^{//} + y = \cos x + \cos 2x$
7/ $y^{//} - 3y^{/} = e^{3x} - 18x$
8/ $y^{//} - y = x\cos^2 x$
9/ $y^{//} + 4y = \sin 2x + 1$, thỏa $y(0) = \frac{1}{4}$, $y^{/}(0) = 0$
10/ $y^{//} + 6y^{/} + 9y = xe^{\alpha x}$, (α là hằng số)
11/ $y^{//} - (m+1)y^{/} + my = e^x - x - 1$, (m là hằng số)
12/ $y^{//} - 2y^{/} + 2y = e^x\sin x$
13/ $y^{//} - 3y^{/} + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

CHƯƠNG 5. LÝ THUYẾT CHUỖI

§1. Khái niệm về chuỗi số

1.1. Định nghĩa. Cho dãy số thực $\{u_n\}, n \in \mathbb{N}$, từ đó ta thiết lập một dãy số mới $\{S_n\}, n \in \mathbb{N}$ như sau

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nếu ta khảo sát sự hội tụ của dãy số $\{S_n\}$ thì ta gọi $\{u_n\}$ là một *chuỗi số*. Tuy nhiên, cùng một ký hiệu $\{u_n\}$ mà chỉ hai khái niệm dãy và chuỗi dễ gây nhầm lẫn, cho nên người ta sẽ dùng một trong các ký hiệu sau đây để chỉ chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ hay } u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \text{ hay } u_1 + u_2 + \ldots,$$

hay đơn giản hơn ta ký hiệu $\sum u_n$.

Nếu dãy số $\{S_n\}$ hội tụ ta nói *chuỗi số* $\sum u_n$ *hội tụ*. Khi đó $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ được gọi là *tổng của chuỗi số* $\sum u_n$. Ta dùng một trong ba ký hiệu đầu tiên của chuỗi số để chỉ tổng của chuỗi số, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \text{ hay } u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S, \text{ hay } u_1 + u_2 + \ldots = S.$$

Chuỗi số không hội tụ được gọi là *phân kỳ*.

Về tên gọi thì u_n được gọi là *số hạng thứ n* hay *số hạng tổng quát* và tổng hữu hạn

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

1.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

Định lý. Nếu chuỗi $\sum u_n$ hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Chứng minh. Do $\sum u_n$ hội tụ, nên $S_n \to S$, do đó $S_{n-1} \to S$. Vậy $u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$.

Chú thích. Từ điều kiện cần nầy ta suy ra một hệ quả rất thông dụng để chứng minh một chuỗi số phân kỳ sau

Hệ quả. Nếu $u_n \nrightarrow 0$ thì chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ.

Ví dụ. Chuỗi cấp số nhân $\sum q^n,\ q \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + \ldots + q^n = \begin{cases} \frac{q(1-q^n)}{1-q}, & \text{nếu } q \neq 1, \\ n, & \text{nếu } q = 1. \end{cases}$$

- Nếu $|q| < 1$, thì $q^n \to 0$. Do đó $S_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} \to \frac{q}{1-q}$ và như vậy chuỗi $\sum q^n$ hội tụ và có tổng là

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{1-q}.$$

- Nếu $|q| \geq 1$, thì $q^n \nrightarrow 0$ và theo hệ quả trên ta có chuỗi $\sum q^n$ phân kỳ.
Tóm lại:

$$\text{Chuỗi } \sum q^n \begin{cases} \text{hội tụ, nếu } & |q| < 1, \\ \text{phân kỳ, nếu } & |q| \geq 1. \end{cases}$$

Hơn nữa nếu $|q| < 1$, tổng của chuỗi cho bởi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

Ví dụ. Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(1+k) - \ln k]$$
$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + [\ln(n+1) - \ln n]$$
$$= \ln(n+1) \to +\infty, \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

Ví dụ. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ phân kỳ, vì $u_n = n \to \infty \neq 0$.

Ví dụ. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ phân kỳ, vì $u_n = \frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Ví dụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ phân kỳ, vì $u_n = (-1)^n \nrightarrow 0$, (chú ý là $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ không tồn tại).

1.3. Các tính chất của chuỗi số hội tụ

Định lý. a) Cho các chuỗi $\sum u_n$, $\sum v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là u, v. Cho C là một hằng số. Khi đó các chuỗi $\sum(u_n + v_n)$, $\sum Cu_n$ cũng hội tụ và có tổng lần lượt là $u + v$, Cv.

b) Nếu chuỗi $\sum u_n$ hội tụ và $\sum v_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum(u_n \pm v_n)$ phân kỳ.

Chứng minh. a) Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, theo giả thiết ta có $S_n \to u$, $t_n \to v$. Do đó,

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = S_n + t_n \to u + v.$$

Vậy chuỗi $\sum(u_n + v_n)$ hội tụ và có tổng $u + v$. Tương tự, ta cũng kết luận phần còn lại nhờ vào

$$\sum_{k=1}^{n} Cu_k = CS_n \to Cu.$$

b) Giả sử chuỗi $\sum u_n$ hội tụ và $\sum v_n$ phân kỳ, ta cũng kết luận chuỗi $\sum(u_n + v_n)$ phân kỳ. Thật vậy, nếu chuỗi $\sum(u_n + v_n)$ hội tụ, ta có tổng của chuỗi nầy với một chuỗi hội tụ $\sum(-u_n)$ là chuỗi sau đây

$\sum[(u_n + v_n) + (-u_n)] = \sum v_n$ cũng là một chuỗi hội tụ. Điều nầy mâu thuẫn với giả thiết

rằng chuỗi $\sum v_n$ phân kỳ. Vậy chuỗi $\sum(u_n + v_n)$ phân kỳ. Lý luận tương tự, ta cũng có chuỗi $\sum(u_n - v_n)$ phân kỳ.

Định nghĩa. Chuỗi số

$$R_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

được gọi là *chuỗi số dư* của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Định lý. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi số dư của nó hội tụ.

Chứng minh. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S. Đặt $S'_k = \sum_{m=n+1}^{k} u_k$ là tổng riêng thứ k của chuỗi dư $\sum_{m=n+1}^{\infty} u_m$. (với n cố định).Vậy

$$S'_k = \sum_{m=n+1}^{k} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} = S_{n+k} - S_n \to S - S_n, \text{ khi } k \to \infty.$$

Vậy chuỗi số dư $\sum_{m=n+1}^{\infty} u_m$ hội tụ và và có tổng là $S' = S - S_n$.

Ngược lại, nếu chuỗi dư $\sum_{m=n+1}^{\infty} u_m$ hội tụ và và có tổng là S'. Với $m > n$, ta có

$$S'_{m-n} = S_m - S_n, \text{ suy ra } S_m = S_n + S'_{m-n}.$$

Do đó
$$\lim_{m\to\infty} S_m = S_n + \lim_{m\to\infty} S'_{m-n} = S_n + S'$$
Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và và có tổng là $S_n + S'$.

Hệ quả. Tính chất hội tụ của chuỗi số không thay đổi nếu ta bỏ đi hoặc thêm vào một số hữu hạn các số hạng đầu tiên.

§2. Chuỗi số dương

2.1. Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, được gọi là *chuỗi số không âm* nếu $u_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, được gọi là *chuỗi số dương* nếu $u_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét chuỗi số không âm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0$. Vì $S_{n+1} = S_n + u_n \geq S_n$ nên dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ không giảm nên nó có giới hạn khi và chỉ khi nó bí chặn trên, nghĩa là tồn tại số thực M sao cho $S_n \leq M \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2.2. Các tiêu chuẩn hội tụ

2.2.1. Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý. Cho hai chuỗi $\sum u_n,\ \sum v_n$ thỏa điều kiện
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq v_n \ \ \forall n \geq n_0.$$

Khi đó

a) Nếu chuỗi $\sum v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum u_n$ hội tụ.

b) Nếu chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum v_n$ phân kỳ.

Chứng minh. Không làm giảm tính tổng quát, có thể giả sử
$$0 \leq u_n \leq v_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gọi S_n và S'_n lần lượt là các tổng riêng của các chuỗi $\sum u_n,\ \sum v_n$. Ta có
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k = S'_n.$$
Nếu $\{S'_n\}$ hội tụ thì $\{S'_n\}$ bị chặn trên, nên $\{S_n\}$ cũng bị chặn trên. Vậy $\{S_n\}$ hội tụ và do đó phần a) được chứng minh. Phần b) được suy ra trực tiếp từ phần a).

2.2.2. Tiêu chuẩn so sánh 2

Định lý. Cho hai chuỗi dương $\sum u_n,\ \sum v_n$. Giả sử
$$K = \lim_{n\to\infty} \tfrac{u_n}{v_n},\ (0 \leq K \leq +\infty).$$

Khi đó có ba trường hợp:

a) $0 < K < +\infty$: Hai chuỗi $\sum u_n$ và $\sum v_n$ có cùng tính chất, nghĩa là, đ ồng thời hội tụ hoặc

đồng thời phân kỳ. b) $K = 0$: Nếu $\sum v_n$ hội tụ thì $\sum u_n$ hội tụ.

c) $K = +\infty$: Nếu $\sum v_n$ phân kỳ thì $\sum u_n$ phân kỳ.

Chứng minh. Không làm giảm tính tổng quát, có thể giả sử
a) $0 < K < +\infty$: Chọn $0 < \varepsilon < K$ và vì $K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |\tfrac{u_n}{v_n} - K| < \varepsilon.$$

Do đó

$$(K-\varepsilon)v_n < u_n < (K+\varepsilon)v_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Từ đây ta có kết luận a) nhờ vào tiêu chuẩn so sánh 1.
b) $K = 0$: Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ nên nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |\tfrac{u_n}{v_n} - 0| < 1.$$

Do đó

$$0 \leq u_n < v_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Áp dụng tiêu chuẩn so sánh 1 ta có $\sum u_n$ hội tụ nếu như chuỗi $\sum v_n$ hội tụ.
c) $K = +\infty$: Ta có giới hạn nghịch đảo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}} = 0.$

Áp dụng lại trường hợp b) ta có c) đúng.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$, mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ phân kỳ (ví dụ mục 1.1) nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh 2.
Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{4^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^2} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1).$$

Giải:
a) Ta có $u_n = 2^n \sin\frac{1}{4^n} > 0$ vì $0 < \frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4}$, $n = 1,2,\ldots$ Hơn nữa, $u_n = 2^n \sin\frac{1}{4^n} \sim v_n = \frac{1}{2^n}$ khi $n \to \infty$. Nhưng mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ (ví dụ mục 1.1, với $q = \frac{1}{2}$, có $|q| < 1$) nên chuỗi $\sum u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2.
b) Ta có $u_n = n\sin\frac{1}{n^2} > 0$ vì $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$, $n = 1,2,\ldots$ Hơn nữa, $u_n = n\sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh 1
c) $u_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0 \;\; \forall n \geq 2$. Hơn nữa, $u_n = \sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln n > \frac{1}{n}, \forall n \geq 3$. Vậy chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh 1 và 2.

2.2.3. Tiêu chuẩn tỉ số D'Alembert

Định lý. Cho chuỗi dương $\sum u_n$. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D, \;\; (0 \leq D \leq +\infty).$$

Khi đó có ba trường hợp:
a) Nếu $D < 1$, thì chuỗi $\sum u_n$ hội tụ

b) Nếu $D > 1$, thì chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ.
c) Nếu $D = 1$, chưa có kết luận.
Chứng minh.
a) Cho $D < 1$, chọn $0 < \varepsilon < 1 - D$ và vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |\tfrac{u_{n+1}}{u_n} - D| < \varepsilon.$$

Do đó

$$0 < D - \varepsilon < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Đặt $D + \varepsilon = q$, $0 < q < 1$, ta được

$$0 < \tfrac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Từ các bất đẳng thức nầy ta suy ra

$$\begin{aligned} \tfrac{u_n}{u_{n_0}} &= \tfrac{u_n}{u_{n-1}}\tfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\bullet\bullet\bullet\tfrac{u_{n_0-1}}{u_{n_0}} \\ &\leq \underbrace{q.q\ldots q}_{(n-n_0-1)\text{ thừa số}} = q^{n-n_0-1}. \end{aligned}$$

Vậy $$0 < u_n < \left(\tfrac{u_{n_0}}{q^{n_0+1}}\right)q^n \quad \forall n > n_0.$$

Mà chuỗi $\sum q^n$ cũng như chuỗi $\sum\left(\tfrac{u_{n_0}}{q^{n_0+1}}\right)q^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 1.
đây ta có kết luận a) nhờ vào tiêu chuẩn so sánh 1.
b) Cho $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, khi đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\tfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \ \forall n \geq n_0,$$

hay

$$u_{n+1} > u_n > 0, \ \forall n \geq n_0.$$

Từ các bất đẳng thức nầy ta suy ra

$$u_{n+1} > u_n > \bullet\bullet\bullet > u_{n_0+1} > u_{n_0} > 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Do đó $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ (theo điều kiện cần để chuỗi số hội tụ).
c) Nếu $D = 1$, chưa có kết luận trong trường hợp tổng quát. Ta xét hai ví dụ đã nêu ở trên:

- chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nhưng $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$
- chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ nhưng $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2} \to 1.$

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n!)^2}{(2n!)} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}.$$

Giải:

a) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) \to \frac{1}{2} < 1$. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert.

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2!)} \times \frac{(2n!}{5^n(n!)^2)} = \frac{5(1+\frac{1}{n})}{2(2+\frac{1}{n})} \to \frac{5}{4} > 1$. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n!)^2}{(2n!)}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert.

c) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{e^n n!} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$.

Nhưng ta có $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$, nên $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. Tuy nhiên ta có dãy $(1 + \frac{1}{n})^n$ là dãy tăng và $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, vậy

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ và do đó $u_{n+1} > u_n$. Suy ra $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ.

2.2.4. Tiêu chuẩn căn số Cauchy

Định lý. Cho chuỗi không âm $\sum u_n$. Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C, \ (0 \le C \le +\infty).$$

Khi đó có ba trường hợp:

a) Nếu $C < 1$, thì chuỗi $\sum u_n$ hội tụ

b) Nếu $C > 1$, thì chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ.

c) Nếu $C = 1$, chưa có kết luận.

Chứng minh.

a) Cho $C < 1$, chọn $0 < \varepsilon < 1 - C$, vì $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\forall n \ge n_0 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{u_n} - C \right| < \varepsilon.$$

Do đó

$$\sqrt[n]{u_n} < D + \varepsilon \equiv q < 1 \quad \forall n \ge n_0,$$

hay

$$0 \le u_n < q^n \quad \forall n \ge n_0.$$

Nhưng chuỗi cấp số nhân $\sum q^n$hội tụ, vì $|q| < 1$, do đó chuỗi $\sum u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 1.

b) Cho $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, khi đ ó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[n]{u_n} > 1, \ \forall n \ge n_0,$$

hay

$$u_n > 1, \ \forall n \ge n_0.$$

Vậy $u_n \nrightarrow 0$ nên chuỗi $\sum u_n$ phân kỳ.

c) Nếu $C = 1$, chưa có kết luận chung. Thật vậy hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ có cùng giới hạn $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ còn chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n,$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ với } \quad u_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{nếu } n \text{ chẳn,} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Giải:

a) Ta có $\sqrt[n]{u_n} = \frac{3n}{2n+1} \to \frac{3}{2} > 1$. Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy.

b) Ta có $\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{nếu } n \text{ chẳn,} \\ \frac{1}{2}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$

Vậy $$\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{u_n} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C = \frac{1}{2} < 1$, nên chuỗi $\sum u_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

Chú ý rằng chuỗi nầy không sử dụng được tiêu chuẩn D'Alembert, bởi vì

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & \text{nếu } n \text{ chẳn,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{nếu } n \text{ lẻ,} \end{cases}$$

và do đó giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ không tồn tại.

2.2.5. Tiêu chuẩn tích phân Maclaurin-Cauchy

Định lý. Cho hàm $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục, không âm và giảm trên $[1, +\infty)$. Khi đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ đồng thời hội tụ hay đồng thời phân kỳ.

Chứng minh. Do $f(x)$ giảm, ta có

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k), \ \forall x \in [k, k+1].$$

Tích phân các vế trên đoạn $[k, k+1]$, ta có

Vậy

$$f(k+1) \le \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

Suy ra

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Từ các bất đẳng thức nầy ta có Đpcm.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi điều hoà mở rộng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, trong đó α là một hằng số thực(độc lập với n).

Nếu $\alpha \le 0$, thì $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ.

Nếu $\alpha > 0$, thì hàm số $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \nrightarrow 0$ liên tục, không âm và giảm trên $[1,+\infty)$. Mặt khác, tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 1$. Vậy chuỗi điều hoà mở rộng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ,} & \text{nếu} \quad \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ, nếu} & \alpha \le 1. \end{cases}$$

Chú ý rằng nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn Cauchy thì ta đều có $D = C = 1$ nên hai tiêu chuẩn nầy không sử dụng được cho chuỗi nầy.

Chú thích. Đôi khi ta gặp một chuỗi $\sum f(n)$ có số hạng $f(n)$ tương ứng với hàm $f(x)$ liên tục, không âm và giảm trên $[N_0,+\infty)$, lúc đó ta sử dụng tiêu chuẩn tích phân dưới dạng:

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} f(n) \text{ hội tụ (tương ứng phân kỳ)} \Leftrightarrow \int_{N_0}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ (tương ứng phân kỳ)}$$

§3. Chuỗi số có dấu thay đổi

3.1. Chuỗi đan dấu. Định lý Leibnitz

Định nghĩa. Chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

hoặc chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 +,$$

với $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, được gọi là *chuỗi đan dấu.* Chuỗi thứ nhất còn được gọi là chuỗi đan dấu có số hạng đầu tiên $u_1 > 0$, còn chuỗi thứ hai đ ược gọi là chuỗi đan dấu có số hạng đầu tiên $-u_1 < 0$. Hai chuỗi nầy có cùng tính chất hội tụ và trong trường hợp nầy các tổng của chúng đối nhau. Cho nên ta chỉ cần khảo sát một trong hai chuỗi. Từ đây về sau ta sẽ xét chuỗi thứ nhất.

Định lý Leibnitz. Nếu dãy u_n dương, giảm và hội tụ về 0, thì chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}u_n$ hội tụ và có tổng S thỏa mãn bất đẳng thức $0 \le S \le u_1$.

Chứng minh. Ta có:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}u_k = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

mà $u_k - u_{k+1} > 0$ nên $\{S_{2n}\}$ là một dãy tăng. Mặt khác

$$S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + u_{2n}],$$

mà biểu thức trong dấu móc vuông là dương, nên

$$0 < S_{2n} < u_1$$

Vậy $\{S_{2n}\}$ là một dãy tăng, và bị chặn trên nên hội tụ, giả sử $S_{2n} \to S$, do đó $0 \le S \le u_1$. Ta lại có

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1} \to S + 0 = S.$$

Từ đó ta được $S_n \to S$ và $0 \le S \le u_1$.

Chú thích. Thật ra ta có đánh giá $0 < S < u_1$ thay vì $0 \le S \le u_1$. Thật vậy, từ các đẳng thức trên ta rút ra

$$0 < u_1 - u_2 < S_{2n} < u_1 - (u_2 - u_3)$$

Qua giới hạn ($n \to \infty$), ta được

$$0 < u_1 - u_2 \le S \le u_1 - (u_2 - u_3) < u_1.$$

Ví dụ. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz, vì $u_n = \frac{1}{n}$ dương, giảm và $u_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Chú thích.Chuỗi đan dấu hội tụ có chuỗi dư (thứ m) là

$$\pm(u_{m+1} - u_{m+2} + u_{m+3} - u_{m+4} + \dots)$$

cũng là một chuỗi đan dấu hội tụ. Vì vậy tổng R_m của nó thỏa một đánh giá

$$|R_m| \le u_{m+1}.$$

Bất đẳng thức nầy dùng để đ ánh giá sai số trong quá trình tính gần đúng giá trị của một chuỗi.

3.2. Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

Định lý. Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ và các tổng của chúng thỏa mãn bất đẳng thức $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|.$

Chứng minh. Ta có

$$0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 1. Mặt khác chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-|u_n|)$ cũng hội tụ, nên cộng 2 chuỗi với nhau ta thu đ ược chuỗi sau đây

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(u_n + |u_n|) + (-|u_n|)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Ta lại có

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Qua giới hạn ($n \to \infty$), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Định nghĩa. Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì ta nói rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối*.

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ thì ta nói rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *bán hội tụ*.

Ví dụ. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là bán hội tụ.

Chú thích. Chú ý rằng nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ mà biết được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ hoặc phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ cũng hội tụ (tuyệt đối) hoặc phân kỳ.

Thật vậy, Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì theo định lý trên thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ mà thấy nó phân kỳ ($D > 1$ hoặc $C > 1$), thì có nghĩa là $|u_n| \nrightarrow 0$. Suy ra $u_n \nrightarrow 0$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Người ta chứng minh được rằng:

Định lý. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là S thì chuỗi số được suy ra từ chuỗi nầy bằng cách thay đổi vị trí một cách tùy ý các số hạng của nó cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S.

Còn nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ thì ta có thể thay đổi vị trí các số hạng của nó để cho chuỗi số thu được hội tụ và có tổng là một số thực cho trước hoặc trở nên phân kỳ.

Định nghĩa. Cho hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Ta gọi tích Cauchy của hai chuỗi trên là chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j v_{n-j+1}\right).$$

Để dễ nhớ ta có thể xét bảng nhân sau

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & u_1 & & u_2 & & u_3 & \cdots & \cdots & u_n & \cdots \\
v_1 & u_1v_1 & & u_2v_1 & & u_3v_1 & \cdots & \cdots & u_nv_1 & \cdots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \nearrow & & \\
v_2 & u_1v_2 & & u_2v_2 & & u_3v_2 & \cdots & \cdots & u_nv_2 & \\
 & & \nearrow & & & & & & & \\
v_3 & u_1v_3 & & u_2v_3 & & u_3v_3 & \cdots & \cdots & u_nv_3 & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & \nearrow & & & & & & & \\
v_n & u_1v_n & & u_2v_n & & u_3v_n & \cdots & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Các số hạng thứ n bằng $\sum_{j=1}^{n} u_j v_{n-j+1}$ là tổng của các số hạng nằm trên đường chéo thứ n như trên sơ đồ.

Định lý. (Cauchy) Cho hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đ ối và có tổng lần lượt là u và v. Khi đó chuỗi số với số hạng tổng quát $u_i v_j$ $(i \geq 1, j \geq 1)$ theo một thứ tự bất kỳ (trường hợp riêng là chuỗi tích Cauchy) sẽ hội tụ tuyệt đối và có tổng uv.

§4. Chuỗi lũy thừa

4.1. Định nghĩa. Định lý Abel

Định nghĩa. Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, các hằng số $a_0, a_1, a_2, \ldots$được gọi là các hệ số của chuỗi, x_0 là số thực x_0 cho trước. Chuỗi nầy còn được gọi là chuỗi lũy thừa tâm x_0. Bằng một phép biến đổi tịnh tiến $X = x - x_0$, chuỗi trên trở thành $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Từ đ ây trở đi ta sẽ xét chuỗi lũy thừa tâm $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ta chú ý rằng chuỗi nầy luôn luôn hội tụ tại $x = 0$.

Định lý (Abel). Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0$, thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Chứng minh.Vì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ tại nên $a_n x_0^n \to 0$ ($n \to \infty$), nên dãy $\{a_n x_0^n\}$ bị chặn. Do đó tồn tại một hằng số dương sao cho

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, ta có

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \leq M\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n \equiv Mq^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ hội tụ, vì $q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$, với $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ (tiêu chuẩn so sánh) tức là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối.

Hệ quả. Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kỳ tại x_1, thì nó phân kỳ tại mọi điểm x sao cho $|x| > |x_1|$.

Thật vậy, nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại một điểm x' sao cho $|x'| > |x_1|$ thì theo định lý Abel nó phải hội tụ tại x_1, mà điều nầy trái với giả thiết.

Như vậy đối với chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ta có ba trường hợp sau:

a) Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chỉ hội tụ tại $x = 0$.

Ví dụ: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ chỉ hội tụ tại $x = 0$. Thật vậy, Với mọi $x \neq 0$, thì

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x| = +\infty > 1.$

Suy ra chuỗi phân kỳ.

b) Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ. Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ tại $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} : \frac{|x^n|}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ hội tụ theo tiêu chuẩn A'Alembert, và do đó hội tụ.

c) Tồn tại số thực $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in (-R, R)$ và phân kỳ tại mọi x, $|x| > R$.

4.2. Bán kính hội tụ và miền hội tụ

Định nghĩa. Số thực $R > 0$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối tại mọi $x \in (-R, R)$ và phân kỳ tại mọi x, $|x| > R$, được gọi là *bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Khoảng $(-R, R)$ được gọi là *khoảng hội tụ.* Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ phân kỳ tại mọi $x \neq 0$, thì ta gọi *bán kính hội tụ* $R = 0$.

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$, thì ta gọi *bán kính hội tụ* $R = +\infty$

Ví dụ. Nếu chuỗi cấp số nhân $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ có bán kính hội tụ $R = 1$.

Chú thích. Tại $x = \pm R$ chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

Định lý. Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho, \ (0 \leq \rho \leq +\infty).$$

Khi đó, bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cho bởi công thức

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \text{ nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, \text{ nếu } \quad \rho = +\infty, \\ +\infty, \text{ nếu } \quad \rho = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \rho |x|.$$

Nếu $0 < \rho < +\infty$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ nếu $\rho|x| < 1$ hay $|x| < 1/\rho$, và phân kỳ nếu

$\rho|x| > 1$ hay $|x| > 1/\rho$. Vậy $R = 1/\rho$.

Nếu $\rho = +\infty$, thì $\rho|x| = +\infty > 1$, với mọi $x \neq 0$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ phân kỳ tại mọi $x \neq 0$, và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng vậy. Do đó $R = 0$.

Nếu $\rho = 0$, thì $\rho|x| = 0 < 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbb{R}$, và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng vậy. Vậy $R = 0$.

Định lý (Cauchy- Hadamard). Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \ (0 \leq \rho \leq +\infty).$$

Khi đó, bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cho bởi công thức

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \text{ nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, \text{ nếu } \quad \rho = +\infty, \\ +\infty, \text{ nếu } \quad \rho = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Dùng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Chú thích. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ thì giới hạn đó chính là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 3^n}$$

a) Bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to\infty} [\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}] = 1$. Khoảng hội tụ là $-1 < x < 1$.

Tại $x = -1$, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ là $[-1, 1)$.

a) Đặt $X = x + 2$, ta có xét chuỗi mới $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$

Bán kính hội tụ $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2 3^n} : \frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}} \right] = \lim_{n\to\infty} 3(1 + \frac{1}{n})^2 = 3$. Khoảng hội tụ là $-3 < X < 3$.

Tại $X = -3$, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đ ối.

Tại $X = 3$, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n^2 3^n}$ là $[-3, 3]$. Suy ra miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 3^n}$ là:
$-3 \leq x + 2 \leq 3$ hay $-5 \leq x \leq 1$.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Tìm số hạng tổng quát của các chuỗi số

1/ $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

2/ $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\frac{10}{16}+\ldots$

3/ $\frac{2}{3}+\frac{3^2}{7^2}+\frac{4^3}{11^3}+\ldots$

4/ $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+\ldots$

5/ $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1.2}+\frac{2^3}{1.2.3}+\frac{2^4}{1.2.3.4}+\ldots$

2. Tìm tổng riêng và tổng (nếu có) của các chuỗi số

1/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

2/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$

3/ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$

4/ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$.

3. Chứng minh các chuỗi sau phân kỳ

1/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n+2}$

2/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$

3/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin(\frac{\pi}{2n})$

4/ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln^2 n}$.

4. Dùng các tiêu chuẩn so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi số

1/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$

2/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

3/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

4/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

5/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\frac{1+n}{n})^n$

6/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^{\alpha},\quad (\alpha\in\mathbb{R})$

7/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4.2^n-3}$

8/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

9/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1}$

10/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

11/ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$

12/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

13/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n+1}{\sqrt{n^5+n}}$

14/ $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$

15/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

16/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n\pi}{n^2}$

17/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+2n}$.

5. Dùng các tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi số

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+5}{2^n}$

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$

4/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$

5/ $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$

6/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$

7/ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$

8/ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

9/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

10/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1} \right)^n$.

6. Dùng các tiêu chuẩn tích phân đ ể xét sự hội tụ của các chuỗi số

1/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1/n)}{n^2}$

2/ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$

3/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$.

7. Xét sự hội tụ của các chuỗi số đan dấu sau

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}+1}{2^n}$

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+n+1}$

4/ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$

6/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$

7/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

8/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

9/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

10/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

11/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$

12/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$.

8. Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối của các chuỗi số sau

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(-1)^n \sqrt{n} - n}$

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^n$

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2-5}$

4/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{2^n}$.

9. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6n-8}$

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n9^n}$

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}$

4/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n^2}}{n^2}$

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$

6/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$

7/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$

8/ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

9/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

10/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} x^n$

11/ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$

12/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n} (x+5)^{2n-1}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Trí, (chủ biên), *Toán học Cao cấp*, *Tập II*, NXB Giáo dục, 1993.
2. Nguyễn Đình Trí, (chủ biên), *Toán học Cao cấp*, *Tập III*, NXB Giáo dục, 1993.
3. Đỗ Công Khanh, (chủ biên), *Toán Cao cấp*, *Giải tích hàm một biến*, (*Toán* 1), NXB ĐHQG Tp.HCM, 2002.
4. Đỗ Công Khanh, (chủ biên), *Toán Cao cấp*, *Giải tích hàm nhiều biến*, (*Toán* 3), NXB ĐHQG Tp.HCM, 2003.
5. Đỗ Công Khanh, (chủ biên), Toán Cao cấp, *Chuỗi và Phương trình vi phân*, (*Toán* 4), NXB ĐHQG Tp.HCM, 2003.
6. Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình Giải tích- Hàm một biến*, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2002.
7. Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình Giải tích- Hàm nhiều biến*, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2002.
8. Robert A. Adams, *Calculus, A complete course*, 1990.

MỤC LỤC

Trang

Trang

Trang

Trang