TÀI LIỆU ÔN TẬP MÔN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Khoa CNTT ĐH KHTN, tháng 06/2023

GV: Lê Phúc Lữ. Email: lplu@fit.hcmus.edu.vn

A. Kiến thức cần nắm.

1) Định nghĩa và các khái niệm cơ bản.

Bài toán QHTT có dạng $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to \min, \max$ với hệ các ràng buộc cho trước dưới dạng $\mathbf{Ax}(\geq, \leq, =)\mathbf{B}$ với $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ là các ma trận mô tả hệ số của các biến trong ràng buộc.

Do xuất phát từ thực tế, bài toán QHTT thường xét các biến ≥ 0.

Để chuyển ràng buộc $"\leq" \to "="$, ta thực hiện thêm biến dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k + \boxed{a_{k+1}} = c \text{ với } a_{k+1} \geq 0 \text{ là biến thêm vào.}$$

Tương tự, nếu là $"\geq" \to "="$, thì $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k - \boxed{a_{k+1}} = c$ với $a_{k+1} \geq 0$.

2) Phương pháp hình học.

Đối với bài toán QHTT 2 biến (với số ràng buộc tùy ý), ta có thể:

- Chuyển các ràng buộc về dạng đẳng thức, vẽ đường thẳng có phương trình tương ứng, lấy phần mặt phẳng ứng với dấu $\geq, \leq$ thích hợp tạo thành một đa giác lồi.
- Đỉnh của đa giác chính là các điểm cực biên.
- Để tìm lời giải tối ưu cho bài toán, ta thay tọa độ các điểm cực biên vào hàm mục tiêu và chọn ra giá trị lớn nhất/nhỏ nhất.

3) Thuật toán đơn hình.

Thuật toán áp dụng cho bài toán mà các biến đều ≥ 0 và các ràng buộc ở dạng **đẳng thức**.

Trước hết, ta phải chọn ra phương án cực biên cơ sở (các hệ số của nó chúng tạo thành ma trận đơn vị). Nếu không có sẵn phương án đó, ta dùng phương pháp big M để tạo biến ảo để có ma trận đơn vị.

Cơ sở	Hệ số	Phương án	x_1 c_1	x_2 c_2	x_3 c_3
x_1	c_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2	c_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$f_{\min}$		$\sum b_i c_i$	Δ_1	Δ_2	Δ_3

- Trong bài toán QHTT tìm min, thuật toán dừng lại khi tất cả các $\Delta \leq 0.$ Nếu còn $\Delta > 0,$ ta chọn ra số lớn nhất, và trên cột tương ứng, ta chọn phần tử xoay a_{ij} theo tiêu chí: nó là số dương, xét $\lambda_v = \min\limits_{a_{iv}>0} \dfrac{b_i}{a_{iv}}$ từ đó tìm $\max\{\Delta_v \cdot \lambda_v \mid \forall \Delta_v > 0\}$.
- Trong bài toán QHTT tìm max, thuật toán dừng lại khi tất cả các $\Delta \geq 0.$ Nếu còn $\Delta < 0,$ ta chọn ra số âm nhỏ nhất, và trên cột tương ứng, ta chọn phần tử xoay a_{ij} theo tiêu chí: nó là số dương, xét $\lambda_v = \min\limits_{a_{iv}>0} \dfrac{b_i}{a_{iv}}$ từ đó tìm $\max\{|\Delta_v| \cdot \lambda_v \mid \forall \Delta_v < 0\}$.

Sau khi chọn được phần tử xoay, ta sẽ có biến cơ sở vào/ra, và bảng đơn hình mới.

4) Phương pháp đối ngẫu.

* Quy tắc chuyển đổi giữa bài toán min – max.

Dạng chuyển đổi	Hệ số b, điều kiện y	Hệ số c, điều kiện x
$\min \to \max$	cùng	trái
$\max \to \min$	trái	cùng

Bài toán đối ngẫu (D) giúp ta khảo sát tính chất của bài toán gốc (P) (mà không đi giải trực tiếp bài gốc), cụ thể là:

- Nếu (P) tìm max thì mỗi phương án của bài (D) sẽ cho ta chặn trên của (P).
- Nếu (P) tìm min thì mỗi phương án của bài (D) sẽ cho ta chặn dưới của (P).

* Định lý độ lệch bù giúp tìm lời giải gốc (primal) dựa trên lời giải bài toán đối ngẫu (dual), cụ thể là:

- Nếu đẳng thức không xảy ra trong x thì giá trị y tương ứng phải bằng 0;
- Ngược lại nếu đẳng thức không xảy ra trong y thì giá trị x tương ứng phải bằng 0.

VD. Xét hai bài toán sau (đối chiếu với quy luật chuyển đổi của bài toán đối ngẫu).

$$\begin{cases} f = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 4x_1 \ge 1 \\ x_1 + x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases} \xrightarrow{dual} \begin{cases} f = 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 2y_4 \to \max \\ y_1 + 3y_2 + y_4 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 \le 3 \\ y_2 + 4y_3 + y_4 \le 3 \\ y_i \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Giả sử ta có nghiệm của bài toán đối ngẫu là $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1, 0, 3/4, 0)$. Ta sẽ tìm nghiệm của bài toán gốc theo định lý độ lệch bù.

Do $y_1, y_3 \ne 0$ nên ta phải có đẳng thức xảy ra ở ràng buộc thứ (1) và (3) của biến x. Khi đó $x_1 + 2x_2 = 4$ và $4x_1 = 1$.

Thay các số vào ràng buộc thứ (2) của biến y, ta thấy không có dấu = nên phải có $x_2 = 0$.

Vì thế giải ra được $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 1/4)$.

5) Bài toán vận tải.

Bài toán vận tải cân bằng thu phát có cấu trúc gồm: m trạm phát (nhà kho), n trạm thu (cửa hàng) với tổng cung – cầu bằng nhau. Ngoài ra, ta còn có thông tin về chi phí của tuyến đường đi (trên 1 đơn vị hàng hóa). Bài toán đòi hỏi mô tả việc gửi hàng để cho tổng chi phí vận chuyển là ít nhất.

Tiêu chí chung để chọn lượng hàng và loại cột/hàng:

$$x_{ij} = \min\{a_i; b_j\} = \begin{cases} a_i & \text{loại dòng } i, b_j = b_j - a_i \\ b_j & \text{loại cột } j, a_i = a_i - b_j \\ a_i = b_j & \text{loại dòng } i \text{ cột j} \end{cases}$$

Ta xét bài toán cụ thể sau đây để thấy rõ các phương pháp này.

a_i \ b_j	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Chú ý rằng khi có phương án tối ưu thì số đường đi được dùng (cũng là số ô khác 0 trên bảng) sẽ $\leq 3+4-1=6$. *Nếu không sẽ tạo chu trình và phát sinh phương án tốt hơn.*

Phương án min cost: phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có chi phí thấp nhất.

a_i \ b_j	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **35**	9 **10**
55	12	2 **40**	3 **15**	6

Phương án góc Tây Bắc: xét việc phân phối hàng vào ô ở góc trên bên trái của bảng hiện tại (phương án dễ thực hiện nhưng kém hiệu quả).

a_i \ b_j	30	40	50	60
80	1 **30**	5 **40**	7 **10**	2
45	5	7	4 **40**	9 **5**
55	12	2	3	6 **55**

Phương án Fogel: trên mỗi dòng/cột, tính hiệu số hai cước phí nhỏ nhất. Chọn dòng/cột có hiệu max và phân hàng vào ô có cước phí nhỏ nhất vào dòng/cột vừa chọn (phức tạp nhưng lại hiểu quả nhất).

a_i \ b_j	30	40	50	60
80	1 **30**	5	7	2 **50**
45	5	7	4 **45**	9
55	12	2 **40**	3 **5**	6 **10**

Để giải bằng phương pháp thế vị, ta thực hiện các bước sau:

(1) Chuẩn hóa bảng (còn gọi là quy-0 bảng). Cộng vào mỗi hàng, cột các số thích hợp sao cho tổng cước phí mới ở từng ô được chọn là 0. Trong hệ, ta chọn một giá trị nào đó, chẳng hạn là r1 = 0 thì tính được giá trị của các biến kia, sau đó thay vào để được bảng mới.

(2) Nếu bảng vừa tính được có các số đều không âm thì dừng lại. Nếu không thì qua (3).

(3) Đầu tiên chọn ô có cước phí c âm nhỏ nhất, ô đó sẽ là ô chọn mới. Xét chu trình chứa ô đó và các ô chọn ban đầu; đánh dấu (+) cho ô đó, các ô còn lại trên chu trình thì đánh dấu (+), (-) xen kẽ. Điều chỉnh phương án cực biên bằng cách:

+ Lượng điều chỉnh là: q = min{x_ij với (i,j) có dấu (-)}.

+ Phương án mới tính bằng cách: ô dấu (+) thì thêm q, ô dấu (-) thì bớt q, ô không có dấu thì giữ nguyên. Cứ thế lặp lại bước (1) cho đến khi dừng lại ở (2) thì thôi.

B. Đề thi tham khảo.

Phần 1. *Các câu hỏi lý thuyết (10 câu).*

Bài 1. Cho bài toán QHTT có ràng buộc $x \geq 0, x \leq 0, x + 2y \leq 7, 4x - y \geq 5$. Xét các cặp số $(x, y) = (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)$. Hỏi có bao nhiêu cặp số là phương án chấp nhận được?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Bài 2. Nhận xét nào sai về phương pháp hình học?

A. Khá hạn chế vì chỉ dùng cho bài toán 2 biến.

B. Giúp mô tả bài toán trực quan.

C. Miền ràng buộc luôn khép kín nên luôn tìm được nghiệm tối ưu.

D. Số biến là 2 nhưng số ràng buộc có thể nhiều hơn 2.

Bài 3. Một bài toán vận tải cân bằng thu phát có 16 kho và 22 cửa hàng. Hỏi trong lời giải của bài toán, có tối đa bao nhiêu đường đi được sử dụng?

A. 16 B. 22 C. 38 D. 37

Bài 4. Trong bảng đơn hình với hàm mục tiêu tìm max, tại cột ứng với biến cơ sở thì giá trị của delta bằng bao nhiêu?

A. delta = 0 B. delta > 0

C. delta < 0 D. delta cùng dấu với hàm mục tiêu

Bài 5. Một SV giải bằng phương pháp đơn hình một bài toán QHTT có 5 biến, 3 điều kiện và ma trận ràng buộc không có sẵn bộ ba biến có hệ số tạo thành ma trận đơn vị nên không thể chọn ra ngay bộ 3 biến cơ sở được. Hỏi nếu X không dùng phương pháp big M thì X phải thử tối đa bao nhiêu trường hợp để chọn được các biến đó?

A. 15 B. 10 C. 5 D. 3

Bài 6. Nhận xét nào **không phải** là ưu điểm đúng của lý thuyết đối ngẫu trong QHTT?

A. Đối ngẫu giúp hoán đổi số lượng ràng buộc và biến cho nhau và đôi khi có thể đổi chiều của các ràng buộc dạng >= sang <=.

B. Giúp ta khảo sát được nghiệm của bài toán gốc mà không giải trực tiếp.

C. Giúp ta đánh giá được chặn trên của hàm mục tiêu trong bài toán tìm max và chặn dưới của hàm mục tiêu trong bài toán tìm min.

D. Giải bài toán đối ngẫu luôn nhanh hơn so với việc giải bài toán gốc.

Bài 7. Một bài toán QHTT có hàm mục tiêu $f = x_1 - 2x_2 + 3x_3$, thỏa mãn hệ ràng buộc T và có hai phương án chấp nhận được là: $(1,2,2)$ và $(0,3,1)$. Gọi $m = \min f$ và $M = \max f$. Hỏi kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. $m \geq -5, M \geq 4$ **B.** $-3 \leq m \leq M \leq 3$

C. $m \leq -3,\ M \geq 3$ **D.** $m \leq -6,\ M \leq 3$.

Bài 8. Khi tìm phương án cơ sở cho bài toán vận tải cân bằng thu phát dùng Fogel, tiêu chí để chọn hàng/cột là?

A. Xét chênh lệch của 2 số lớn nhất trên hàng/cột rồi chọn ra chênh lệch lớn nhất.

B. Xét chênh lệch của 2 số nhỏ nhất trên hàng/cột rồi chọn ra chênh lệch nhỏ nhất.

C. Xét chênh lệch của 2 số nhỏ nhất trên hàng/cột rồi chọn ra chênh lệch lớn nhất.

D. Xét chênh lệch của 2 số lớn nhất trên hàng/cột rồi chọn ra chênh lệch nhỏ nhất.

Bài 9. Một bài toán QHTT tìm max $f(x_1, x_2, x_3)$ có một phương án chấp nhận được cho giá trị f là a. Khi xét bài toán đối ngẫu, ta tìm được một phương án chấp nhận được cho giá trị hàm mục tiêu là b. Hỏi nhận xét nào sau đây là **sai** về a, b?

A. Giá trị a cho ta chặn dưới của hàm mục tiêu của bài toán gốc.

B. Ta luôn có $a < b$.

C. Nếu $a = b$ thì đó cũng chính là phương án tối ưu.

D. Giá trị b cho ta chặn trên của hàm mục tiêu của bài toán gốc.

Bài 10. Khi giải bài toán QHTT tìm min bằng phương pháp đơn hình, ta sẽ dừng thuật toán và kết luận rằng không có phương án tối ưu nếu như?

A. Có một cột mà delta tại đó dương và các giá trị hệ số bên trong đều âm.

B. Có một cột mà delta tại đó dương và các giá trị hệ số bên trong đều dương.

C. Có một cột mà delta tại đó âm và các giá trị hệ số bên trong đều âm.

D. Có một cột mà delta tại đó âm và các giá trị hệ số bên trong đều dương.

Bảng đáp án.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	D	D	A	B	D	C	C	B	A

Giải thích một số câu.

(1) Thay vào các điều kiện để kiểm tra.

(3) Tổng quát là $m + n - 1$.

(5) Cần phải thử tất cả các cách chọn 3 trong 5 biến, tổng cộng là $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$.

(7) Thay các bộ số vào hàm f, ta có hai giá trị là $3, -3$. Khi đó, $\min \leq -3, \max \geq 3$.