VI TÍCH PHÂN 1C

GV: CAO NGHI THỤC

EMAIL: cnthuc@hcmus.edu.vn

Chương 2
Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến

I. Hàm số và cách biểu diễn hàm số
II. Hàm đơn ánh, toàn ánh, song ánh
III. Hàm hợp, hàm ngược
IV. Giới hạn của hàm số - khử dạng vô định
V. Hàm số liên tục
VI. Định lý giá trị trung gian
VII. Bài tập

Biểu diễn hàm số

Định nghĩa

Cho Y,$X \subset R$. Hàm số f từ X vào Y là 1 quy tắc cho tương ứng với mỗi số thực x thuộc X một số thực y thuộc Y

KH: $$f : X \to Y$$

Hoặc $$y = f(x)$$

Biểu diễn hàm số

Biểu diễn hàm số

Có 4 cách

1)Hàm số cho bằng bảng

2)Hàm số cho bằng biểu đồ

3)Hàm số cho bằng công thức

4)Hàm số được mô tả bằng lời

Biểu diễn hàm số

<u>Định nghĩa</u>

Miền xác định: D(f) = X

Miền giá trị của hàm f

$$R(Y) = Y = \{y \in R \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

Hàm số đơn ánh, toán ánh, song ánh

Đơn ánh

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f là đơn ánh $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ý nghĩa: một phần tử của Y là ảnh của nhiều nhất một phần tử của X

VD1: $f: N \to N, y = f(x) = 3x$ là đơn ánh

Hàm số đơn ánh, toán ánh, song ánh

Toàn ánh

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu

$$f(X) = Y \quad \text{hay} \quad \forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

Ý nghĩa: một phần tử của Y là ảnh của ít nhất một phần tử của X

VD2: $f: N \to N, y = f(x) = 3x$

không là toàn ánh

Song ánh

Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh

f là song ánh $\Leftrightarrow \forall y \in Y:\ f(x) = y$ có duy nhất nghiệm

VD3: $f: R \to R, f(x) = x + 1$ là song ánh

Hàm hợp

Cho các ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Hàm hợp của chúng là $h = gof : X \to Z$ được xác định bởi

$$h(x) = g[f(x)]$$

VD4: Cho $f: R \to R, g: R \to R, f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 - 2$

Xác định $(gof)(4), (fog)(2)$

Hàm ngược

Cho ánh xạ $\begin{array}{l} f : X \to Y \\ x \to y = f(x) \end{array}$ là song ánh. Ánh xạ ngược của f là

$$f^{-1} : Y \to X$$

$$y = f(x) \to x = f^{-1}(y)$$

Hàm hợp – hàm ngược

Hàm ngược

VD5 :

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R, f(x)=\tan x$$

$$f^{-1}??$$

VD6 :

$$f:(0,\pi)\to R, f(x)=\cot x$$

$$f^{-1}??$$

Hàm ngược

VD7 :

$$f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1],\ f(x)=\sin x$$

$$f^{-1}\ ??$$

VD8 :

$$f:[0,\pi]\to[-1,1],\ f(x)=\cos x$$

$$f^{-1}\ ??$$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 1

Cho hàm số y=f(x) xác định trên miền D. Ta nói L là giới hạn của hàm f khi x tiến tới x_0 nếu với bất kỳ dãy x_n trong D\{x_0} mà $x_n \longrightarrow x_0$ thì $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 2

Cho hàm số y=f(x) xác định trên miền D chứa x $_0$.

Ta nói L là giới hạn của hàm f khi x tiến tới x $_0$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in$

D thoả $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 3

Cho hàm số f xác định trên $D = (a; +\infty)$. Ta nói f có giới hạn là L khi x tiến ra $+\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: x \in D, x > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Kí hiệu: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 4

Cho hàm số f xác định trên $D = (-\infty; a)$. Ta nói f có giới hạn là L khi x tiến ra $-\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: x \in D, x < -N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Kí hiệu: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 5

Cho hàm số f xác định trên D chứa x_0. Ta nói f có giới hạn là $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall M > 0, \exists\delta > 0: x \in D, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

Kí hiệu: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn của hàm số
- Định nghĩa 6

Cho hàm số f xác định trên D chứa x_0. Ta nói f có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to x_0$ nếu

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0: x \in D, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M$$

Kí hiệu: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

- Các tính chất của giới hạn
  - Định lý 1

Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Khi đó

i. $\lim\limits_{x \to x_0} c.f(x) = c.A$ với c là hằng số

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$

iii. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = A.B$

iv. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$

Giới hạn của hàm số

- Nhận xét
- Cho $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

  Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$
- VD9: $\lim\limits_{x \to 1}(2x^3 + x^2 - x + 1) = \lim\limits_{x \to 1}(2.1^3 + 1^2 - 1 + 1) = 3$
- Cho $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

  Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = \dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$

Giới hạn của hàm số

- Khi $A = +\infty, B = -\infty$ thì
  $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] \to \infty - \infty$ dạng vô định thứ nhất

- VD10: Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x} - x]$

- VD11: Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

- VD12: Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt[3]{2x^3 + 4x + 1} + \sqrt[3]{4 - x - 2x^3} \right)$

Giới hạn của hàm số

- Khi $A = 0, B = \infty$ hoặc $A = \infty, B = 0$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] \to 0.\infty$ dạng vô định thứ hai

Giới hạn của hàm số

- Khi $A = 0, B = 0$ hoặc $A = \infty, B = \infty$

thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0} \left(\dfrac{\infty}{\infty} \right)$ dạng vô định thứ ba(tư)

- VD13: Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

- VD14: Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$

- VD15: Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$

Giới hạn của hàm số

- Định lý 2 Cho 3 hàm số f(x), g(x), h(x) thỏa

$$f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in (a,b)$$

Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$ thì $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$

- Áp dụng ĐL2, ta CM được

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Giới hạn của hàm số

VD16: Tính $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

VD17: Tính $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

VD18: Tính $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

Giới hạn của hàm số

▪Định lý 3:

Cho f(x) là hàm số xác định trên R. Khi đó nếu f(x) tăng(giảm) và bị chặn trên (dưới) thì tồn tại

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x)$$

Áp dụng ĐL này, ta CM được

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

VD19: Tính $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x$$

VD20: Tính $$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\cot^2 x}$$

Giới hạn của hàm số

- Giới hạn một phía
- Định nghĩa
- Giới hạn bên trái của f(x) tại x_0 là giới hạn khi $x \longrightarrow x_0$ mà $x < x_0$

$$f(x_0^-) = \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$$

- Giới hạn bên phải của f(x) tại x_0 là giới hạn khi $x \longrightarrow x_0$ mà $x > x_0$

$$f(x_0^+) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$$

Giới hạn của hàm số

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

VD21: Cho $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ Tìm $f(0^+), f(0^-)$

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Vô cùng bé, vô cùng lớn
- Định nghĩa vô cùng bé(VCB)

Hàm f(x) được gọi là VCB khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

<u>VD22:</u> sinx là VCB $(x \to 0)$

Vì
$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Các tính chất
- Nếu f(x), g(x) là các VCB ($x \to x_0$) thì

  f(x)±g(x), f(x).g(x) là các VCB ($x \to x_0$)
- Nếu f(x) là VCB ($x \to x_0$) và g(x) bị chặn trong lân cận x_0 thì f(x).g(x) là VCB ($x \to x_0$)

Vô cùng bé, vô cùng lớn

So sánh các vô cùng bé

Cho f(x), g(x) là các VCB ($x \to x_0$) và

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Khi đó, nếu

- k=0: f(x) là VCB bậc cao hơn g(x),KH f(x)=o(g(x))
- k≠0, k ≠∞: f(x), g(x) là các VCB cùng bậc
- k=1: f(x),g(x) được gọi là VCB tương đương,KH:$f \sim g$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Sử dụng vô cùng bé tính giới hạn

Khi $x \to 0$ thì

1) $\sin x \sim x$
2) $\tan x \sim x$
3) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
4) $\ln(1 + x) \sim x$
5) $e^x - 1 \sim x$

Sử dụng vô cùng bé tính giới hạn

Cho $f \sim \bar{f}, g \sim \bar{g}$. Khi đó

1) $\lim_{x \to x_0} f.g = \lim\limits_{x \to x_0} \bar{f}.\bar{g}$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\bar{f}}{\bar{g}}$

VD23: Tính $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- VD24: 1-cosx là VCB bậc cao hơn sinx ($x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=0$$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- Định nghĩa vô cùng lớn(VCL)

Hàm f(x) được gọi là VCL khi $x \to x_0$ nếu

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$$

VD25: e^x là VCL khi $x \to +\infty$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

- So sánh các vô cùng lớn(VCL)

Cho f(x) ,g(x) là các VCL khi $x \to x_0$, $\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = k$

Khi đó:

- $k = 0$: f(x)là VCL bậc thấp hơn g(x)
- $0 < k < \infty$: f(x), g(x)VCL cùng bậc
- $k = \infty$: f(x)là VCL bậc cao hơn g(x)
- $k = 1$: f(x), g(x)là các VCL tương đương, $f \sim g$

Vô cùng bé, vô cùng lớn

Chú ý

Ta có quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp và thay thế VCL tương đương

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

VD26: Tính

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3}{4x-6x^4}$$

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số
- Định nghĩa: Cho f(x) là hàm số xác định trong (a,b), ta nói rằng f(x) liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- VD27: $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$ nên sin x liên tục tại $x_0 = 0$

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số
- Hàm f(x) được gọi là liên tục trái tại x_0 nếu $f(x_0^-) = f(x_0)$
- Hàm f(x) được gọi là liên tục phải tại x_0 nếu $f(x_0^+) = f(x_0$
- Hàm f(x) liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số trong khoảng (a,b)
- Hàm f(x) được gọi là liên tục trong khoảng (a,b) nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó

Sự liên tục của hàm số

- Sự liên tục của hàm số trong khoảng đóng[a,b]
- Hàm f(x) được gọi là liên tục trong khoảng đóng [a,b] nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại điểm b, liên tục phải tại điểm a

Sự liên tục của hàm số

- Các tính chất của hàm liên tục
- Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm liên tục thì liên tục
- Hàm số liên tục trên khoảng đóng [a,b] thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó

- VD28:
- Với giá trị nào của a thì hàm số

$$y = \begin{cases} \dfrac{x\sin x + 2\tan^2 x}{x^2}, x < 0 \\ \cos^2 x + 2a, x \geq 0 \end{cases}$$

liên tục tại x = 0

Định lý giá trị trung gian

Định lý

Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a;b]. Nếu $\mathrm{f(a)} \neq \mathrm{f(b)}$ thì với mỗi số thực α nằm giữa $\mathrm{f(a)}$ và $\mathrm{f(b)}$ tồn tại ít nhất một điểm $\mathrm{c} \in (\mathrm{a;b})$ sao cho $\mathrm{f(c)} = \alpha$

Định lý giá trị trung gian

Hệ quả

Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a;b]. Nếu $f(a).f(b) < 0$ thì) tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$

VD29: Chứng minh rằng phương trình $x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$

Bài Tập

Bài 1: Tính miền xác định của các hàm số sau

1) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$

2) $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{5+2x}}$

3) $y = \log\frac{2+x}{2-x}$

4) $y = \arccos\frac{2x}{x+1}$

Bài Tập

Bài 2: Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(2x+5)^3.(3x-1)^2}{x^5+4}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{3+x\sqrt{x}}$

Bài Tập

Bài 3: Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$

Bài Tập

Bài 4: Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

4) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$

Bài Tập

- Bài 5: Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x \to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$

Bài Tập

Bài 6: Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+10x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$

Bài Tập

Bài 7: Tìm m để các hàm số sau liên tục tại x_0

1) $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

2) $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos mx}{x^2} & \text{nếu } x < 0 \\ x + m & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

Bài Tập

Bài 8: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại x_0

1) $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

2) $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{5}{2} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$