GIỚI THIỆU MÔN GIẢI TÍCH A1

Môn giải tích 1 (6 tín chỉ) gồm hai môn :
- Giải tích A1 - Giải tích cơ bản (3 tín chỉ : 30 tiết giáo khoa + 30 tiết bài tập).
- Giải tích A1 - Vi tích phân (3 tín chỉ : 30 tiết giáo khoa + 30 tiết bài tập).

(15 tiết bài tập mỗi môn được dạy chung trong lớp lớn, phần còn lại được dạy trong các lớp bài tập nhỏ.)

Bài giảng dựa trên các slides soạn theo quyển sách "Toán Giải Tích" của GS Dương Minh Đức, Nhà xuất bản Thống Kê 2005. Các slides này được để trên webpage http://www.math.hcmuns.edu.vn/~dmduc/giangday.html và được photocopy để sinh viên đọc trước khi nghe bài giảng.

Các giờ bài tập tránh lối học đọc chép thụ động (giảng viên hoặc một sinh viên giải bài tập trên bảng và các sinh viên còn lại ghi chép bài giải). Lớp bài tập sẽ tạo tác phong học có thảo luận và sáng tạo. Sinh viên sẽ tìm hiểu cặn kẽ và tranh luận về lời giải của một số bài tập có giải sẵn (xem dạng html bài tập) và một số bài toán đã được giải trong giờ học lý thuyết (xem dạng html các slides bài giảng , danh sách bài tập).

CÁCH HỌC VÀ CHO ĐIỂM MÔN GIẢI TÍCH A1

1. Lớp học gồm 15 tuần, mỗi tuần có 4 tiết lý thuyết và 4 tiết bài tập. Môn Giải tích cơ bản được dạy trong bảy tuần rưởi đầu, và môn Vi tích phân được dạy trong 7 tuần rưởi cuối. Cả hai môn đều thi sau tuần thứ 15.

2. Điểm thi mỗi môn học (tối đa là 10) được tính như sau :

- điểm trong giờ bài tập (chỉ tính đến 3) + điểm kỳ thi chính thức môn học (chỉ tính đến 9). Tổng số điểm hai phần này không quá 9,5.
- khi sinh viên nào hỏi bạn trong giờ bài tập, mà bạn không trả lời được, sẽ được nửa điểm đỏ. Các điểm đỏ nảy được tính như các điểm bài tập khác.Nhưng sinh viên nào không có ít nhất nửa điểm đỏ chỉ có thể đạt điểm cuối môn học là 9,5.

3. Các điểm kiểm tra trong giờ lý thuyết được tính vào điểm phần bài tập. Nếu sinh viên nào có hơn 3 điểm trong phần bài tập, sinh viên đó chỉ được tính 3 điểm cho phần này. Các sinh viên vượt điểm này sẽ được bỏ qua các lỗi nhỏ trong bài thi cuối học kỳ.

4. Các bài tập được ghi trong danh sách bài tập. Đầu học kỳ , các giảng viên dạy bài tập sẽ thêm một số bài tập ngoài danh sách này, và hướng dẫn sinh viên giải tại lớp, để sinh viên làm quen với cách học "tương tác" (giữa sinh viên với sinh viên, giữa sinh viên với giảng viên). Giảng viên dạy bài tập có thể thêm một số bài tập nếu còn dư thì giờ.

Bốn bài tập đầu trong danh sách được phân công cho các sinh viên xung phong nhận (sẽ tổ chức bốc thăm, nếu có nhiều hơn 4 sinh viên xung phong nhận bài), các bài tập khác được phân theo lối bốc thăm. Số bài tập sẽ không đủ cho từng sinh viên, một số sinh viên chỉ có thể kiếm điểm qua tranh luận trong lớp, việc này cốt buộc sinh viên phải tranh luận với nhau. 5. Các bài giải đều có sẵn (của sinh viên khoá các trước), nhưng không bảo đảm hoàn toàn đúng, hoặc các bài giảng lý thuyết. Sinh viên nhận các bài tập, phải nghiên cứu thật kỹ các định nghĩa, các vấn đề có liên quan đến bài toán (không nhất thiết hạn chế trong các chi tiết của bài giải), các chi tiết chứng minh, và chỉ ra các lỗi sai trong bài giải có sẵn.

6. Các sinh viên không phụ trách bài tập, phải nghiên cứu đề bài cũng như lời giải tập đó, ghi lại những gì không hiểu rõ hỏi trong giờ bài tập. Các sinh viên này được quyền hỏi mọi định nghĩa, định lý và thí dụ liên quan đến bất kỳ một từ ngữ nào trong đề cũng như trong lời giải của bài toán, có thể hỏi cách suy nghĩ để bài toán đó, các phát triển của bài toán . . . .

7. Giảng viên giờ bài tập sẽ gợi câu hỏi thêm cần thiết, loại các câu hỏi quá khó và trả lời các câu hỏi mà mọi sinh viên trong lớp không trả lời được.

8. Cách cho điểm từng bài tập :

- Điểm sinh viên phụ trách bài tập = [0,5 (nếu có photocopy bài giải cho lớp trước một tuần) + 1] - 0.5×(tổng số điểm các sinh viên đặt câu hỏi)
- Điểm sinh viên đặt câu hỏi : 0,5 điểm đỏ cho mỗi câu hỏi mà sinh viên phụ trách bài tập không trả lời được, không hạn chế số lần hỏi trong một buổi học.
- Nhóm sinh viên giải bài tập nào bị trừ điểm nào, được cộng thêm 0,5 điểm đỏ cho mỗi sinh viên.

TOÁN GIẢI TÍCH 1

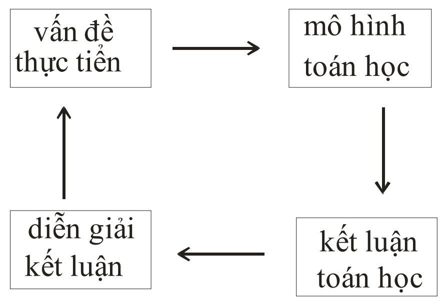
DƯƠNG MINH ĐỨC

Đây là các slides bài giảng môn Toán Giải Tích 1 dành cho sinh viên năm thứ nhất Khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa Học, Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh, niên học 2007-2008. Bài giảng này được soạn theo quyển : Giáo Trình Toán Giải Tích 1, của GS Dương Minh Đức, Nhà xuất bản Thống Kê, 2006.

1

CHƯƠNG MỘT

TẬP HỢP VÀ LÝ LUẬN CƠ BẢN



TOÁN HỌC VÀ THỰC TIỄN

2

Một vấn đề có thể giải quyết bằng các bước sau :

- dùng toán để mô hình vấn đề : làm rõ và gọn hơn,
- dùng các phương pháp toán để giải quyết bài toán trong mô hình.
- diễn giải kết quả toán học bằng ngôn ngử thực tiễn

Thí dụ1. Giá một cuốn tập là 3.000\$, quĩ tài trơ chỉ có 3.500.000\$, hỏi có thể mua được bao nhiêu tập cho học sinh nghèo?

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3.000\times n$.

3

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau: số tập mua là một số nguyên lớn hơn hay bằng 1, số tiền có thể chi trả chỉ có thể là các số từ 1 đến 3.500.000, nếu số tập mua được là n thì số tiền phải trả là $3000\times n$.

Chúng ta thấy trong mô hình này không còn các vấn đề rắc rối như : quĩ từ thiện, tập vở, tiền bạc và học sinh nghèo.

Và vấn đề biến thành : tìm số nguyên n lớn nhất sao cho $3000\times n \le 3500000$.

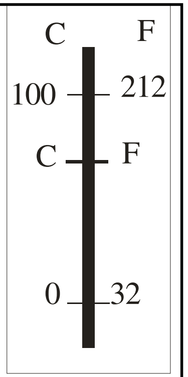
Dùng kỹ thuật làm toán thông thường, bài toán trở thành tìm số n lớn nhất sau cho $n \le 1166{,}66$.

Vậy ta có lời giải là 1166 quyễn sách.

4

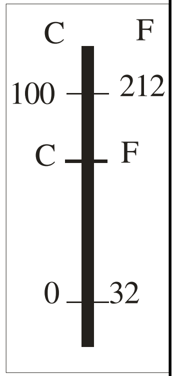
Thí dụ 2. Chúng ta có hai hệ thống đo nhiệt độ : Celcius và Fahrenheit. Nhiệt độ để nước đóng băng là 0^o C và 32^o F, và Nhiệt độ nước lúc bắt đầu sôi là 100^oC và 212^oF.

Để làm một nhiệt kế dùng trong nhà, chúng ta phải lập bảng kê các số đo trong hệ Fahrenheit tương ứng với các số đo từ -20 đến 70 của hệ Celcius,



Đặt C và F là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: C=0 khi F=32, và C=100 khi . Ta phải tính F tương ứng với các trị giá C từ -20 đến 70.

Đặt C và F là số đo nhiệt độ của một vật trong hệ Celcius và hệ Fahrenheit. Ta biết: C=0 khi F=32, và C=100 khi . Ta phải tính F tương ứng với các trị giá C từ -20 đến 70.



Ta để ý $\dfrac{C-0}{100-0} = \dfrac{F-32}{212-32}$

Vậy $\dfrac{F-32}{180} = \dfrac{C}{100}$ hay $F = \frac{18}{10}C + 32$

C	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35
F	-4	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95

C	40	45	50	55	60	65	70
F	104	113	122	131	140	149	158

A. TẬP HỢP

Trong việc mô hình như ở các thí dụ trên, chúng ta cần quan tâm đến một vài số nguyên (chứ không phải tất cả các số nguyên). Trong các vấn đề khác cũng vậy, ta phải quan tâm đến một số sự vật có chung vài tính chất nào. Một tập thể một số các sự vật như trên được gọi là một *tập hợp*, và các sự vật đó được gọi chung một tên là "*phần tử*" của tập hợp đó .

Thí dụ : trong bài tính số cây phải trồng dọc theo các con đường, ta phải tìm lời giải trong tập hợp các số nguyên dương ℕ

Thí dụ : Trong các bài toán về các chuyển động chúng ta quan tâm đến các yếu tố thời gian, vận tốc và khoảng đường di chuyển, các yếu tố này buộc chúng ta phải xét tập hợp các số thực.

Cho một tập hợp E và một phần tử x của E (ở đây x có thể là một số, một điểm hoặc một dữ liệu), lúc đó ta nói $x \in E$.

Dùng lý thuyết tập hợp chúng ta có thể diễn tả dễ dàng một số sự việc trong toán học. Ngoài ra chúng ta có thể khảo sát cùng một lúc một số vấn đề khác biệt nhau bằng cách sử dụng các khái niệm về tập hợp và ánh xạ.

Thí dụ. Để xét các nghiệm của phương trình

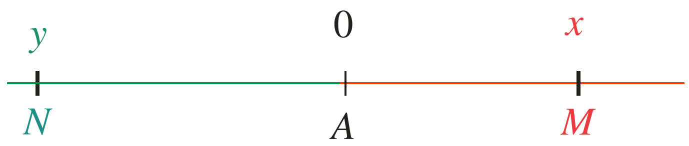
$$x^3 + 4x^2 - 5 = 0,$$

Ta xác định tập hợp $E = \{x :\ x^3 + 4x^2 - 5 = 0\}$.

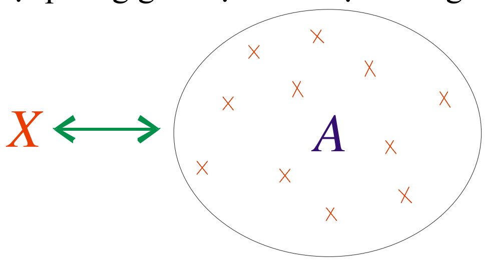
Ta có các tập hợp thông dụng như

- tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N} = \{1,2,3,.....\}$,
- tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}=\{....,-3,-2,-1,0,1,2,3,..\}$,
- tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{N}\}$,
- tập hợp các số thực $\mathbb{R}$,
- tập hợp các số phức $\mathbb{C} = \{x+iy : x$ và y trong $\mathbb{R}\}$,
- tập hợp trống ϕ là tập hợp không chứa phần tử nào cả

Ta thường mô hình tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ như là tập hợp các điểm ở trên một đường thẳng D. Số 0 được gán cho một điểm A trên đường D, một số thực dương x được gán cho một điểm M nằm phía bên phải A trên đường D với khoảng cách $AM = x$, và một số thực âm y được gán cho một điểm N nằm phía bên trái A trên đường D với khoảng cách $NA = -y$



Năm 1881, ông John Venn (nhà toán học người Anh) đề xuất việc mô hình một tập hợp X như một phần A *của* mặt phẳng giới hạn bởi một đường cong.



Ta gán các phần tử của X như là các điểm được đánh dấu trong miền A . Tuy nhiên nhiều lúc ta cứ mô hình X như miền A, mà không cần đánh dấu các điểm được gán trong A .

Mô hình tập hợp như ông Venn làm giản đơn nhiều bài toán, thí dụ một miền A trong mặt phẳng có thể mô hình một tập hợp X có vài phần tử hoặc tập hợp có rất nhiều phần tử như $\mathbb{R}$.

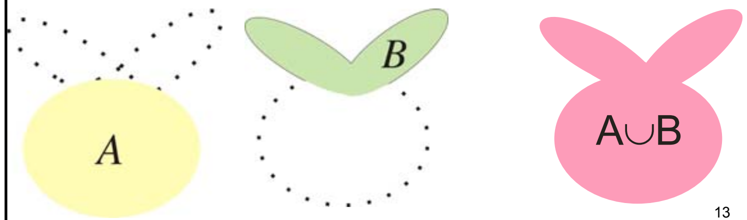
Ở đây chúng ta thấy toán học nhìn sự vật theo nhiều cách, nếu theo một cách nào đó, X và $\mathbb{R}$ chỉ được nhìn theo ý nghĩa tập hợp, thì chúng có thể được đối sữ như nhau và mô hình như nhau!

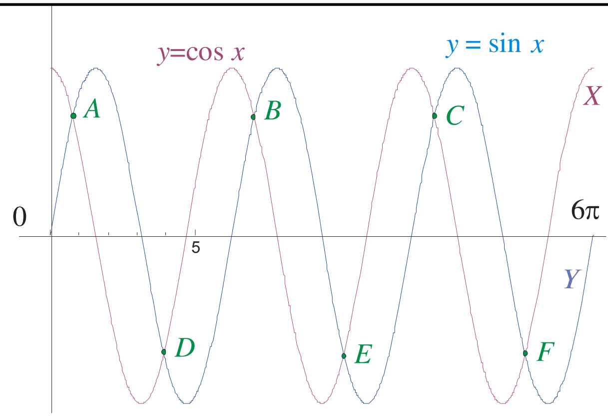
Chúng ta sẽ thấy nhờ tính đồng nhất hóa những sự việc khác nhau như vậy, trong toán có thể có các khái niệm chung cho các sự vật đó như : phần giao, phần hội của các tập hợp .

Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt

$E = \{x : x \in A$ và $x \in B\}$,
E là phần giao của A và B và ký hiệu là $A \cap B$

$F = \{x : x \in A$ hoặc $x \in B\}$,
F là phần hợp của A và B và ký hiệu là $A \cup B$.





Đặt X và Y là các đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$, với $x \in [0,6\pi]$. Lúc đó $X \cap Y$ là tập hợp gồm các điểm A, B, C, D, E và F. Các điểm chung của các đường thường được gọi là giao điểm.

Thí dụ : Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x\pi = 0\}$ và
$B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + x - 1 = 0\}$.

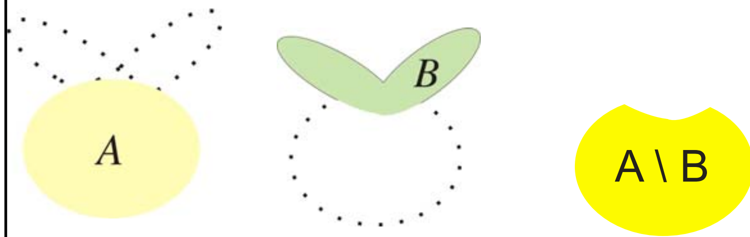
- $A \cap B$ là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x\pi = 0, \\ 2x^2 + x - 1 = 0. \end{cases}$$

- $A \cup B$ là tập hợp các nghiệm của phương trình

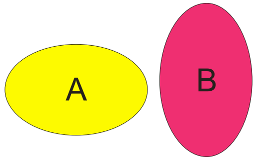
$$(2x^2 + x - 1)\sin x\pi = 0$$

Cho hai tập hợp A và B. Ta đặt
$G = \{x : x \in A$ và $x \notin B\}$.
Ta ký hiệu G là $A \setminus B$.

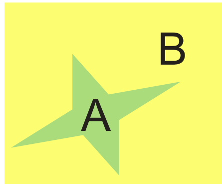


Định nghĩa. Cho hai tập hợp A và B. Ta nói

- A và B rời nhau nếu và chỉ nếu $A \cap B = \phi$,



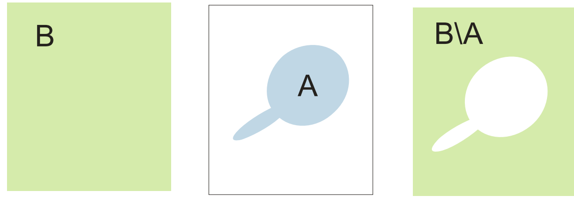
- A chứa trong B nếu và chỉ nếu mọi phần tử của A đều thuộc B (lúc đó ta nói A là tập con của B và ký hiệu $A \subset B$)



- A bằng B nếu và chỉ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, lúc đó ta ký hiệu $A = B$.

17

Nếu $A \subset B$, ta gọi $B \setminus A$ là phần bù của A trong B.



Cho A là một tập hợp, ta đặt P (A) là tập hợp tất cả các tập hợp con của A.

Thí dụ : A = { 2 , a , • }, lúc đó

P (A) = {ϕ ,{2},{a},{•},{2,a},{2, •}, {a, •},{2,a, •}}

18

Thí dụ . Gọi A là tập hợp tất cả các linh kiện trong một cửa hàng máy tính trong một ngày nào đó. Một máy tính được lắp ráp bằng các linh kiện này có thể coi như một tập con của A, hay là một phần tử trong P(A). Đặt M là tập hợp các máy tinh được lắp ráp và bán ra trong ngày hôm đó. Lúc đó M là một tập con của P(A).

Thí dụ. Đặt $A = \{0,1,2, . . .,9\}$. Lúc đó $\{1,9,2,4\}$ là một tập con của A, nhưng số 1924 không phải là một tập con của A.

19

Để khảo sát thiết kế hệ thống máy lạnh trong giảng đường này, chúng ta đo nhiệt độ tại một số vị trí trong giãng đường này (gọi A là tập hợp các vị trí đó) tại một số thời điểm từ 7.00 giờ sáng đến 6.00 giờ chiều trong một ngày nào đó. Lúc đó chúng ta quan tâm cùng mộït lúc đến hai tập hợp : A và [6,18] (các thời điểm mà ta đo nhiệt độ). Ta mô hình việc này bằng toán như sau.

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp, ta đặt tích của A và B là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x \in A$ và $y \in B$ và ký hiệu nó là $A \times B$.

Thí dụ: A = { 2 , • } và B = {@,#,&}, lúc đó

$A \times B$ = {(2, @), (2, #), (2, &), (•, @), (•, #), (•, &)}

$B \times A$ = {(@, 2), (@, •), (#, 2), (#, •), (&, 2), (&, •)}

20

Thí dụ: $A = \{ 2 , \bullet \}$ và $B = \{@,\#,\&\}$, lúc đó

$A\times B = \{(2, @), (2, \#), (2, \&), (\bullet, @), (\bullet, \#), (\bullet, \&)\}$

$B\times A = \{(@, 2), (@, \bullet), (\#, 2), (\#, \bullet), (\&, 2), (\&, \bullet) \}$

A \ B	2	•
&	(2,&)	(•,&)
#	(2,#)	(•,#)
@	(2,@)	(•,@)

B \ A	@	#	&
•	(@,•)	(#,•)	(&,•)
2	(@,2)	(#,2)	(&,2)

Thí dụ: $C = \{ m , n \}$ và $D = \{a,i,ô\}$, lúc đó

$D\times C = \{(a,m), (a, n), (i, m), (i,n), (ô,m), (ô,n) \}$

$C\times D = \{(m,a), (m,i), (m,ô), (n,a), (n,i), (n,ô)\}$

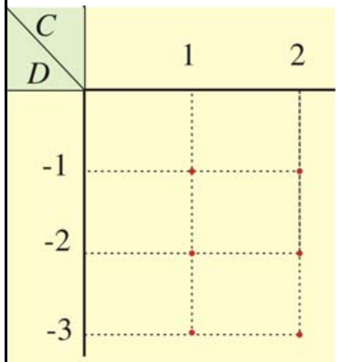
D \ C	a	i	ô
m	am	im	ôm
n	an	in	ôn

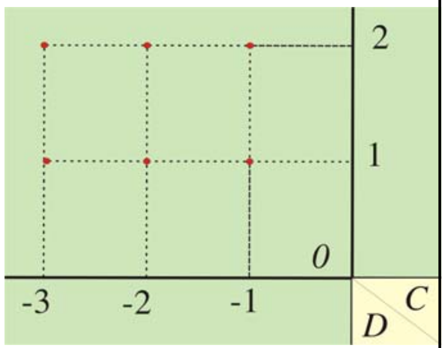
C \ D	m	n
a	ma	na
i	mi	ni
ô	mô	nô

Thí dụ: $C = \{ 1 , 2 \}$ và $D = \{-1,-2,-3\}$, lúc đó

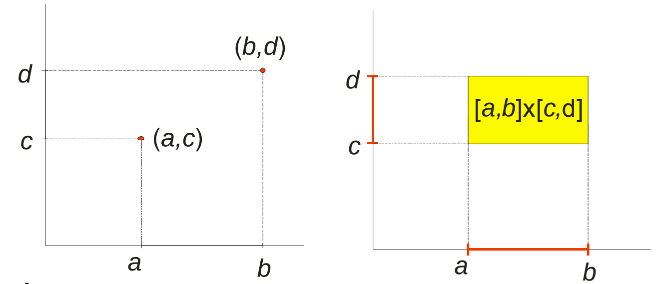
$C\times D = \{(1,-1), (1,-2), (1,-3), (2,-1), (2,-2), (2,-3)\}$

$D\times C = \{(-1, 1), (-1,2), (-2,1), (-2,2), (-3,1), (-3,2) \}$

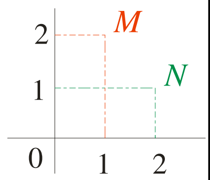




Dùng biểu diễn theo tích Descartes



Nếu $B = A$, ta thường ký hiệu $A \times A$ là A^2. Lúc đó A^2 là họ tất cả các cặp (x,y) với mọi $x\in A$ và $y\in A$, ta phải lưu ý trong trường hợp này là (x,y) có thể khác (y,x), thí dụ như $M = (1,2)$ khác $N = (2,1)$ trong $\mathbb{R}^2$.



Có hai bài toán cơ bản liên quan đến tập hợp : xác định một tập hợp và chứng minh tập hợp này chứa trong một tập hợp khác. Chúng ta xem các phương pháp thông dụng sau đây dùng để giải quyết các vấn đề này .

A.1. Xác định một tập hợp

Để xác định một tập hợp E ta có các phương pháp sau :

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***
- **Định nghĩa lại tập hợp *E* một cách giản dị hơn**
- **Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E***

- **Liệt kê tất cả các phần tử của *E***

Thí dụ. Xác định các tập hợp :

$$F = \{ x \in \mathbb{N} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$G = \{x \in \mathbb{Z} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$H = \{x \in \mathbb{Q} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \},$$
$$K = \{x \in \mathbb{R} : 4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0 \}.$$

$$4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = x(x - 1)(2x - 1)(2x + 1)$$

Phương trình $4x^4 - 4x^3 - x^2 + x = 0$ có các nghiệm $x = 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

$F = \{1 \}$, $G = \{ 0, 1 \}$,
$H = \{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ và $K = \{ 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

- Định nghĩa lại tập hợp *E* một cách giản dị hơn

Thí dụ. *Cho A và B là hai điểm trong một mặt phẳng P. Xác định tập hợp* $E = \{M \in P : \widehat{AMB} = 90^o \}$.

Đặt O là trung điểm của AB. Dùng các kết quả trong hình học phẳng ta thấy E là đường tròn tâm O bán kính OA ở trong P hay $E = \{M \in P : OM = OA \}$.

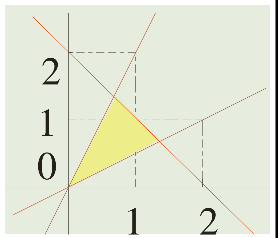
Thí dụ. *Xác định tập hợp* $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 < 0 \}$

Dùng phương pháp xét dấu của tam thức bậc hai ta có
$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.
Vậy E là khoảng mở (-2, 1)

- **Dùng đồ họa để diễn tả tập hợp *E***

Thí dụ. Xác định tập hợp
$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 2x > y > \frac{x}{2} \text{ và } y - 2 < -x \}$$

Dùng phương pháp giải hệ bất phương trình bậc một ở chương trình trung học ta thấy E là miền tam giác được tô màu vàng trong hình vẽ.



A.2. Chứng minh tập hợp A chứa trong tập hợp B

Cho hai tập hợp E và F. Ta thấy $E \subset F$ có thể có nhiều ý nghĩa như sau:

- nếu đó là giả thiết : với mọi x thuộc E thì x thuộc F.
- nếu đó là kết luận : với mọi x thuộc E chứng minh x thuộc F.

Tuy nhiên ta không thể nào xét cùng một lúc "mọi x" trong E. *Một kỹ thuật cơ bản trong toán học giúp ta vượt qua khó khăn đó như sau* :

Chỉ xét một x trong E, nhưng x bất kỳ, nghĩa là không có sự lựa chọn đặc biệt nào cho x đó. Đây là kỹ thuật "ăn một, nhưng nuốt tất cả". Kỹ thuật này thuộc về nguyên lý "tập trung tư tưởng" trong toán học.

29

Như vậy $E \subset F$ có thể có diễn tả như sau:

- nếu đó là giả thiết : cho một x thuộc E thì x thuộc F.
- nếu đó là kết luận : cho một x thuộc E chứng minh x thuộc F.

<u>Bài toán 1</u>. *Cho A, B và C là ba tập hợp khác trống sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng minh $A \subset C$.*

Giải Ta viết rõ các giả thiết và kết luận

Cho x trong A , ta có x thuộc B

Cho x trong B , ta có x thuộc C

Cho x trong A , chứng minh x thuộc C

30

Cách viết bên trên không chuẩn: *các phần tử trong ba dòng trên không nhất thiết giống nhau*, ta không được dùng một ký hiệu để diễn tả một số sự vật có thể khác nhau. Đây là kỹ thuật "không viết trùng ký hiệu". Ba dòng trên phải viết thành:

Cho x trong A , ta có x thuộc B (1)

Cho z trong B , ta có z thuộc C (2)

Cho t trong A , chứng minh t thuộc C (3)

Ta phải chứng minh (3) dựa vào hai giả thiết (1) và (2).

31

Cho x trong A , ta có x thuộc B (1)

Cho z trong B , ta có z thuộc C (2)

Cho t trong A , chứng minh t thuộc C (3)

Từ (3), ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "t trong A" và "x trong A". Ta làm cho chúng giống nhau và viết lại bài toán

Cho t trong A , ta có t thuộc B (1')

Cho z trong B , ta có z thuộc C (2)

Cho t trong A , chứng minh t thuộc C (3)

32

Cho t trong A , ta có t thuộc B (1')

Cho z trong B , ta có z thuộc C (2)

Cho t trong A , chứng minh t thuộc C (3)

Ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "t trong B" và "z trong B ". Ta làm cho chúng giống nhau và viết lại bài toán

Cho t trong A , ta có t thuộc B (1')

Cho t trong B , ta có t thuộc C (2)

Cho t trong A , chứng minh t thuộc C (3)

Bài toán đã giải xong

33

QUI TẮC GIẢI TOÁN 3

Viết và đánh số cẩn thận các giả thiết và kết luận của bài toán, với cùng các yếu tố đã được làm rõ.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 4

Không dùng cùng một ký hiệu cho hai sự việc có thể khác nhau.

34

QUI TẮC GIẢI TOÁN 6

Xét các các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán, cố gắng làm chúng ra dạng giống nhau hẵn. Sau đó viết lại bài toán với các dạng mới, và xét các yếu tố giống giống khác khác trong dạng bài toán mới. Lặp qui trình này cho đến khi giải xong bài toán. Chủ yếu trong quá trình này là tâm trung quan sát các yếu tố còn khác nhau, không nên để ý nhiều quá những yếu tố hoàn toàn giống nhau.

35

B. Quan hệ trong một tập hợp

Trong các động cơ nhiệt hay động cơ nổ chúng ta cần các hệ thống piston và cylinder, kích cở của piston phải tương thích với kích cở của cylinder : kích cở của piston phải nhỏ hơn hẵn kích cở của cylinder, để piston có thể chuyển động với ma sát nhỏ trong vận tốc nhanh trong cylinder, nhưng không được quá nhỏ để có thể tạo lực nén trong cylinder. Ta có thể mô hình toán học như sau: gọi r là đường kính của lòng trong cylinder và s đường kính của piston, ta phải có $0,998r \leq s \leq 0,999r$.

Như vậy chúng ta cần một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$.

36

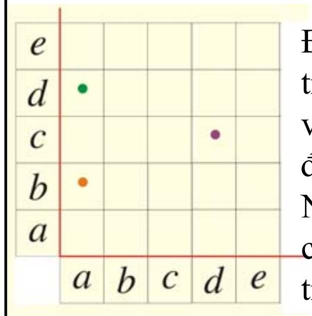
Trong nông lâm ngư nghiệp chúng ta thấy công việc thường tùy vào thời vụ, thí dụ không thể trồng lúa vào các mùa quá khô hạn được. Để mô hình các vấn đề này chúng có thể làm như sau: nếu lấy đơn vị là tháng, và m và n là hai tháng cho khởi sự một loại thời vụ, ta phải có một số nguyên (dương hay âm k sao cho $n - m = 12k$.

Như vậy chúng ta phải xét một quan hệ tương đương trên tập hợp $\mathbb{N}$:

$n \sim m$ nếu và chỉ nếu có $k \in \mathbb{Z}$ để cho $n - m = 12k$

37

Cho A là một tập thể nho nhỏ nào đó của loài người. Trong tập hợp A có thể có các mối liên hệ khác nhau, có thể cô x và anh y trong tập thể A này có dính dáng với nhau trong mối liên hệ này nhưng chẳng dính dáng với nhau trong quan hệ khác.



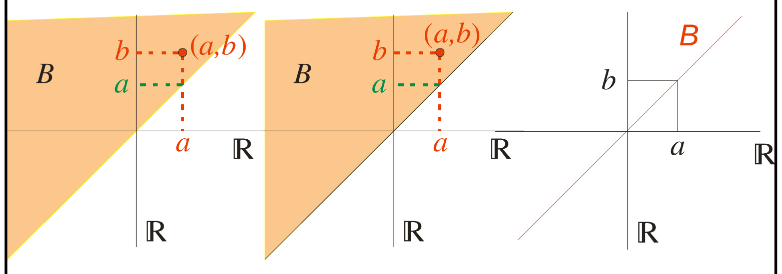
Để mô hình một mối liên hệ trong tập A, ta làm như sau: nếu a và b liên hệ với nhau, ta chấm điểm (a,b) lên trên tập tích $A \times A$. Như vậy một mối liên hệ trong A có thể mô hình bằng một tập con trong $A \times A$

38

Định nghĩa. Cho một tập hợp A khác trống và cho B là một tập con khác trống trong $A \times A$. Ta nói

$x \mathcal{R} y$ nếu và chỉ nếu $(x,y) \in B$.

Lúc đó ta gọi $\mathcal{R}$ là một quan hệ trong A.



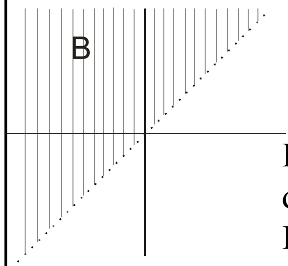
$B=\{(x,y) : x<y\}$ $B=\{(x,y) : x\leq y\}$ $B=\{(x,y) : x= y\}$

$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a < b$ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \leq b$ $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = b$

39

Cho B là phần nằm bên trên đường chéo trong $\mathbb{R}^2$ như trong hình vẽ bên dưới. Chứng minh

$B=\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \}$



Trong kết luận, có yếu tố B không rõ lắm. Ta phải làm rõ B.

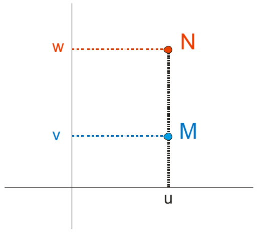
Liên quan đến B có hai yếu tố : đường chéo và "nằm bên trên". Khái niệm đường chéo có vẽ đơn giản hơn nên ta ghi ra trước.

Đường chéo $\Gamma = \{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 : s = t \}$

$= \{ (s,s) : s \in \mathbb{R}\}$

40

Đường chéo $\Gamma = \{ (s,s) : s \in \mathbb{R} \}$



Cho hai điểm M và N sao cho N ở bên trên M. Ta thấy M và N có cùng hoành độ, và tung độ của N lớn hơn tung độ của M. Vậy $M = (u,v)$ và $N = (u,w)$, với $v < w$.

Kết hợp hai điều nói trên, ta thấy B gồm các điểm $N(x,y)$ nằm trên một điểm $M(v,v)$. Vậy $x = v$ và $v < y$

Từ đó $B=\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \}$.

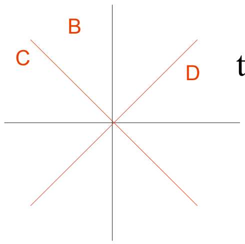
QUI TẮC GIẢI TOÁN 1

Khi bài toán có nhiều yếu tố chưa rõ ràng, trước hết ta làm rõ các yếu tố này trước khi giải bài toán. Thật là phi lý khi giải một bài toán khi chưa rõ các yếu tố trong bài toán.

Nhiều khi bài toán được giải ngay sau khi các yếu tố được làm rõ.

Cho B là phần hợp của hai đường thẳng C và D trong $\mathbb{R}^2$ như trong hình vẽ bên dưới. Chứng minh

$$B=\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y| \} \qquad (1)$$



Theo QTGT 1, ta làm rõ các chi tiết B và $|x| = |y|$.

Vì $|x| = |y|$ có vẽ giản dị hơn B , ta làm rõ chi tiết $|x| = |y|$ trước. Trong chi tiết này có chi tiết giá trị tuyệt đối $|a|$. Ta làm rõ chi tiết $|a|$.

$|a| = a$ nếu $a \geq 0$, $|a| = - a$ nếu $a < 0$.

$|x| = x$ nếu $x \geq 0$, $|x| = - x$ nếu $x < 0$.

$|y| = y$ nếu $y \geq 0$, $|y| = - y$ nếu $y < 0$.

$|x| = x$ nếu $x \geq 0$, $|x| = - x$ nếu $x < 0$.

$|y| = y$ nếu $y \geq 0$, $|y| = - y$ nếu $y < 0$.

Vậy $|x| = |y|$ tương đương với : $x = y$ hoặc $x = -y$ hoặc $-x = y$ hoặc $-x = y$. Từ đó ta có $|x| = |y|$ tương đương với : $x = y$ hoặc $x = -y$. Vậy dữ kiện trong bài toán có thể viết thành

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y| \} =$$
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ hoặc } x = -y \} \quad (1)$$

Nay ta làm rõ B. Vì $B = C \cup D$. Ta làm rõ C và D. Ta cần làm rõ C và D theo dạng (1).

11

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y| \} =$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ hoặc } x = -y \} \quad (1)$

Nay ta làm rõ B. Vì $B = C \cup D$. Ta làm rõ C và D. Ta cần làm rõ C và D theo dạng (1).

$C = \{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 : s = t\} \qquad (2)$

$D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = -v\} \qquad (3)$

Vậy bài toán trở thành chứng minh

$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s = t\} \cup \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = -v\} =$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ hoặc } x = -y \}$

45

Vậy bài toán trở thành chứng minh

$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s = t\} \cup \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = -v\} =$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ hoặc } x = -y \}$

Để chứng minh điều này, ta dùng kết quả sau đây (sẽ chứng minh trong phần sau)

Cho X là một tập hợp khác trống, $P(x)$ và $Q(x)$ là các mệnh đề toán học phụ thuộc vào $x \in X$. Lúc đó

$\{x \in X : \text{“}P(x) \text{ đúng” hoặc “}Q(x) \text{ đúng”}\} =$
$= \{x \in X : P(x) \text{ đúng}\} \cup \{x \in X : Q(x) \text{ đúng}\}$

$\{x \in X : \text{“}P(x) \text{ đúng” và “}Q(x) \text{ đúng”}\} =$
$= \{x \in X : P(x) \text{ đúng}\} \cap \{x \in X : Q(x) \text{ đúng}\}$

46

KIẾN THỨC CƠ BẢN 1

Cho A_i là các tập con của X với mọi $i \in I$, ta đặt

$\cup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists\, i \in I , x \in A_i \}$

$\cap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall\, i \in I , x \in A_i \}$

KIẾN THỨC CƠ BẢN 2

Cho A và B là các tập con của X,

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ hoặc } x \in B \}$

$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ và } x \in B \}$

47

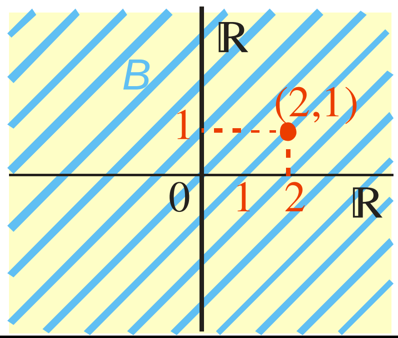
Trong thực tế ta hầu như không nhắc đến tập B khi định nghĩa một quan hệ. Thí dụ cho X là một tập hợp khác trống. Đặt A là P(X), họ các tập hợp con của X. Ta có thể đặt quan hệ sau đây : $C \,\mathcal{R}\, D \Leftrightarrow C \subset D$

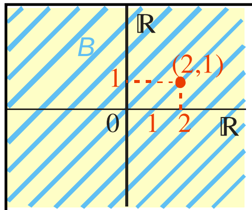
Quan hệ $\mathcal{R}$ tương ứng tập $B = \{(C,D) \in A\times A : C \subset D\}$

Tuy nhiên, với định nghĩa quan hệ bằng các tập hợp B trong $A\times A$, ta có các quan hệ không thông thường.

$a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow$

$\exists\, m \in \mathbb{Z} , a = b + m$





$a \, \mathcal{R} \, b \;\Leftrightarrow\; \exists\, m \in \mathbb{Z}\,,\, a = b + m$

Chứng minh B bằng tập hợp

$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists\, m \in \mathbb{Z}\,,\, a = b + m\}$

Ta tập trung xét từng đường thẳng trong B. Các đường thẳng này có hệ số góc là 1 và cắt trục hoành tại một số nguyên. Vậy mỗi tương ứng với tập $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y + n\}$ với một $n \in \mathbb{Z}$. Vậy

$B \;=\; \cup_{n \in \mathbb{Z}} D_n = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y + n\}$

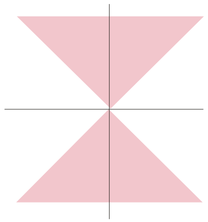
Theo Định nghĩa : Cho A_i là các tập con của X với mọi $i \in I$, ta đặt : $\cup_{i \in I} A_i \;=\; \{x \in X \;: \exists\, i \in I\,,\, x \in A_i\}$

49

QUI TẮC GIẢI TOÁN 7

Khi bài toán có yếu tố phức tạp, ta làm mất sự phức tạp đó bằng cách chia thành nhiều trường hợp. Sau đó giải quyết từng trường hợp. Đây là chính sách “chia để trị” trong toán học.

50



Cho B là phần mặt phẳng được tô màu hồng, và $\mathcal{R}$ là quan hệ trong ℝ tương ứng với B. Chứng minh

$a \, \mathcal{R} \, b \Leftrightarrow |a| < |b|$

Theo QTGT 1, ta viết bài toán thành

$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}2 : |x| < |y| \}$ (1)

51

$B = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \}$ (1)

Theo QTGT 7, ta làm rõ B bằng cách phân thành nhiều trường hợp

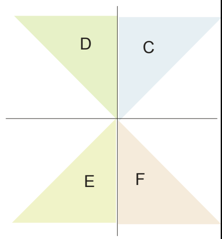
$B = C \cup D \cup E \cup F$

$C = \{\, (r,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0,\, t \geq 0,\, r < t\}$

$D = \{\, (t,u) \in \mathbb{R}^2 : t < 0,\, u > 0,\, \text{-}t < u\}$

$E = \{\, (v,w) \in \mathbb{R}^2 : v < 0,\, w < 0,\, \text{-}v > w\}$

$F = \{\, (p,q) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0,\, q < 0,\, p > q\}$

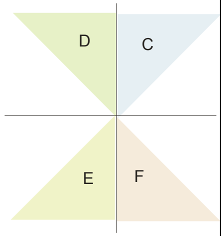


52

13

$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \}$ (1)

$B = C \cup D \cup E \cup F$



$C = \{ (r,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, t \geq 0, r < t \}$
$D = \{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 : t < 0, u > 0, -t < u \}$
$E = \{ (v,w) \in \mathbb{R}^2 : v < 0, w < 0, v > w \}$
$F = \{ (p,q) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, q < 0, -p > q \}$

Viết C, D, E và F theo dạng trị tuyệt đối trong (1)

$C = \{ (r,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, t \geq 0, |r| < |t| \}$
$D = \{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 : t < 0, u > 0, |t| < |u| \}$
$E = \{ (v,w) \in \mathbb{R}^2 : v < 0, w < 0, -|v| > -|w| \}$
$F = \{ (p,q) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, q < 0, -|p| > -|q| \}$

53

$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \}$ (1)

$B = C \cup D \cup E \cup F$

$C = \{ (r,s) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, t \geq 0, |r| < |t| \}$
$D = \{ (t,u) \in \mathbb{R}^2 : t < 0, u > 0, |t| < |u| \}$
$E = \{ (v,w) \in \mathbb{R}^2 : v < 0, w < 0, -|v| > -|w| \}$
$F = \{ (p,q) \in \mathbb{R}^2 : p \geq 0, q < 0, -|p| > -|q| \}$

Ta viết $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \}$ theo dạng của B.

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| \} = S \cup T \cup X \cup Y$

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, |x| < |y| \}$
$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y > 0, |x| < |y| \}$
$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0, |x| < |y| \}$
$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y < 0, |x| < |y| \}$

Từ đây ta có (1)

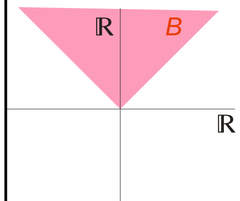
54

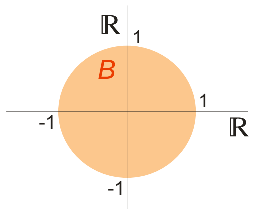
QUI TẮC GIẢI TOÁN 5

Viết các yếu tố trong bài toán cùng một dạng

55

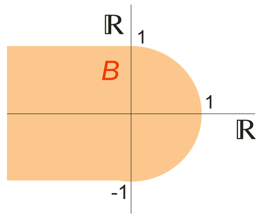
Hãy giải các bài toán sau





$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow |a| < b$

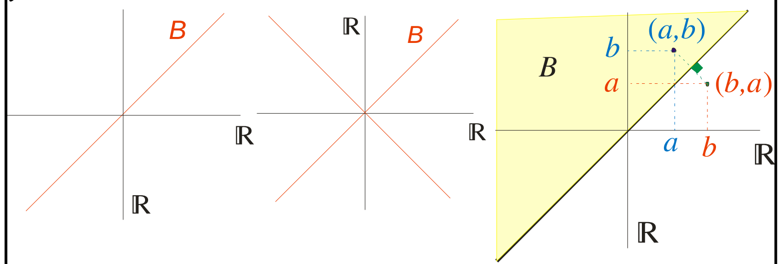
$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow |a| < \sqrt{1-b^2}$



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a < \sqrt{1-b^2}$

56

• Quan hệ $\mathcal{R}$ đối xứng nếu và chỉ nếu "$x\,\mathcal{R}\,y$ thì $y\,\mathcal{R}\,x$"



$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a = b$
đối xứng

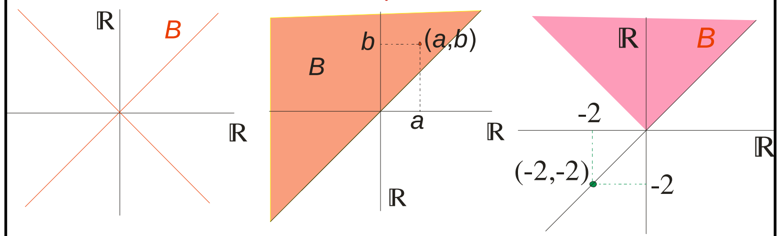
$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow |a|=|b|$
đối xứng

$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$
không đối xứng

Để cho quan hệ $\mathcal{R}$ đối xứng , ta thấy B phải đối xứng qua đường chéo của $A{\times}A$.

57

• Quan hệ $\mathcal{R}$ phản xạ nếu và chỉ nếu
"$x\,\mathcal{R}\,x$ với mọi $x \in A$"



$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow |a|=|b|$
phản xạ

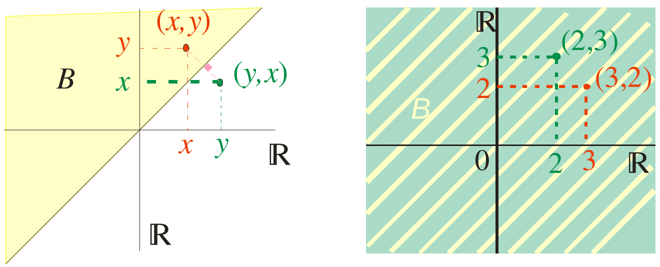
$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$
phản xạ

$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow |a| < b$
không phản xạ

Để cho quan hệ $\mathcal{R}$ phản xạ , ta thấy B phải chứa đường chéo của $A{\times}A$.

58

•Quan hệ $\mathcal{R}$ phản đối xứng nếu và chỉ nếu
"$x\,\mathcal{R}\,y$ và $y\,\mathcal{R}\,x$ thì $x = y$"



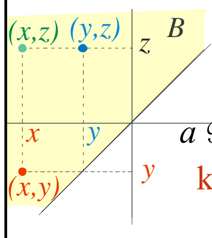
$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$
phản đối xứng

$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z},\ \ a = b + m$
không phản đối xứng

Để cho quan hệ $\mathcal{R}$ phản đối xứng , ta thấy $B \cap B'$ phải chứa trong đường chéo của $A{\times}A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A{\times}A$.

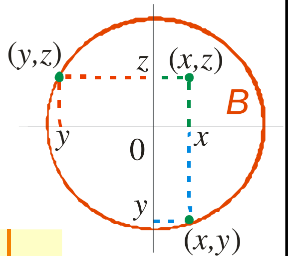
59

• Quan hệ $\mathcal{R}$ truyền nếu và chỉ nếu
"$x\,\mathcal{R}\,y$ và $y\,\mathcal{R}\,z$ thì $x\,\mathcal{R}\,z$"

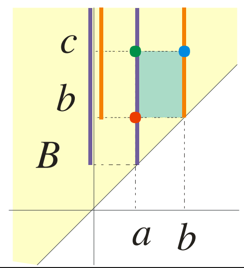


$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a \le b$
truyền

$a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow |\,a\,| = \sqrt{1-b^2}$
không truyền



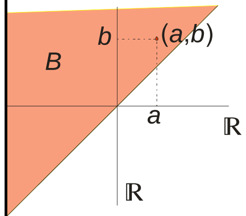
$\mathcal{R}$ truyền trong trường hợp B có tính chất như sau



60

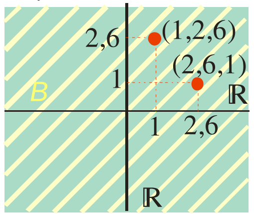
15

• Quan hệ $\mathcal{R}$ toàn phần nếu và chỉ nếu " với mọi x và y trong A thì hoặc $x \mathcal{R} y$ hoặc $y \mathcal{R} x$"



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \le b$

toàn phần



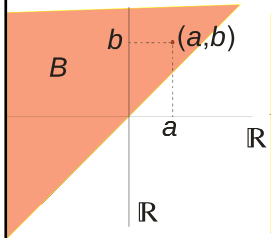
$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z},\ a = b + m$

không toàn phần

Để cho quan hệ $\mathcal{R}$ toàn phần , ta thấy $B \cup B'$ phải bằng $A \times A$, ở đây B' là đối xứng của B qua đường chéo của $A \times A$.

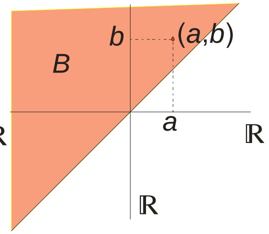
61

Quan hệ $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản đối xứng và truyền.



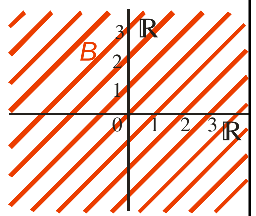
$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a < b$

không là quan hệ thứ tự



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \le b$

là quan hệ thứ tự

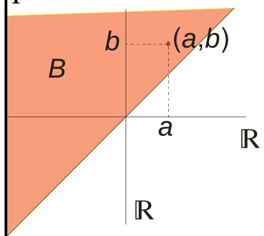


$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}$

$a = b + m$ không là quan hệ thứ tự

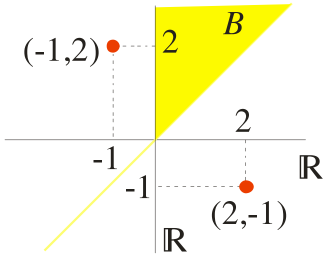
62

Quan hệ $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần nếu và chỉ nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản đối xứng, truyền và toàn phần.



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \le b$

là quan hệ thứ tự toàn phần

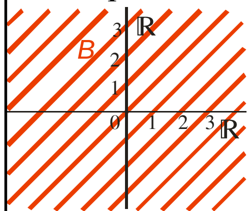


$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = b$

hoặc $0 \le a \le b$ là quan hệ thứ tự không toàn phần

63

Quan hệ $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu R phản xạ, đối xứng và truyền

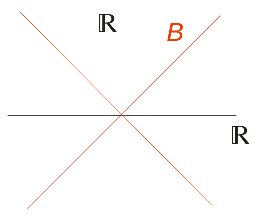


$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow$

$\exists\, m \in \mathbb{Z},$

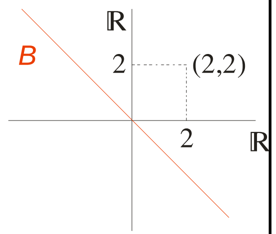
$a = b + m$

là một quan hệ tương đương



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow |a| = |b|$

là một quan hệ tương đương



$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a = -b$

không là một quan hệ tương đương

64

C. Mệnh Đề toán học

Sau khi mô hình toán học, ta phải rời bỏ khung trời thực tiễn và bước vào thế giới toán học, ở đó chúng ta phải dùng ngôn ngữ đặc thù toán học.

Một mệnh đề P có ý nghĩa *toán học* nếu và chỉ nếu hoặc là P đúng hoặc là P sai (nghĩa là không có trường hợp P vừa đúng vừa sai cũng như không có trường hợp P vừa không đúng vừa không sai)

Cho $x \in \mathbb{R}$ và đặt P là "$x^7 + x + 7 = 0$", thì P là một mệnh đề toán học.

Cho ε là một số thực dương, cho x và y trong $\mathbb{R}$ và đặt P là "$|y - x| < \varepsilon$", thì P là một mệnh đề toán học.

65

Xét mệnh đề R là "Tôi nói dối".

Mệnh đề R không thể đúng (vì nếu đúng thì tôi đang nói một sự thật, làm sao mà nói dối được)

Mệnh đề R cũng không sai (vì nếu nó sai, thì tôi không nói dối, và câu nói "Tôi nói dối" phải là sự thật và phải đúng).

Nếu P là một mệnh đề toán học thì mệnh đề "P sai" cũng là một mệnh đề toán học và ta ký hiệu nó là $\sim P$.

Ta gọi $\sim P$ là *phủ định* của P.

66

Cho A là một tập hợp. Ta ký hiệu

- "*với mọi phần tử x trong A*" là "$\forall x \in A$",
- "*có một phần tử x trong A*" là "$\exists x \in A$".

Ta thử xem tác động của phủ định đến $\forall$ và $\exists$:

Q : "$\forall x \in A$ thì P đúng đối với x".

$\sim Q$: "$\exists x \in A$ sao cho $\sim P$ đúng đối với x".

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là "≤ 4"

Q : "$\forall x \in A$ thì $x \leq 4$".

$\sim Q$: "$\exists x \in A$ sao cho $x > 4$".

67

R : "$\exists x \in A$ sao cho P đúng đối với x"

$\sim R$: "$\forall x \in A$ thì $\sim P$ đúng đối với x"

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$, và P là "< 4"

R : "$\forall x \in A$ thì $x < 4$".

$\sim R$: "$\exists x \in A$ sao cho $x \geq 4$".

68

17

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z , $\forall z \in B$ "

Ở đây $P(x)$ là một mệnh đề được xác định tùy theo các giá trị của x

$\sim S$: " $\forall\, x \in A$ $\exists\, z \in B$ sao cho $\sim P(x)$ đúng đối với z "

Cho B là một tập khác trống trong $\mathbb{R}$, $A = [0 , 1]$ và

$P(x)$ là " $< x$ "

S : " $\exists\, x \in A$ sao cho $z < x$, $\forall z \in B$ "

$\sim S$: " $\forall\, x \in A$ $\exists\, z \in B$ sao cho $z \geq x$ "

69

T : " $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in B$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z ,

$\forall\, z \in C(y)$ "

Ở đây $C(y)$ là một tập hợp được xác định tùy theo các giá trị của y

$\sim T$: " $\exists\, x \in A$ sao cho $\forall y \in B$, $\exists\, z \in C(y)$ để cho $\sim P(x)$ đúng đối với z ."

70

Cách viết một mệnh đề U thành dạng cơ bản

■ Để ý đến các cụm từ *"với mọi"* và *"có một" ở trong U,* và viết chúng thành một trong bốn dạng nêu trên. Nếu cần ta đặt thêm các tập hợp mới.

Cho các tập hợp C, D, E, F và G , ta đặt

$A = C \times D$ và $B = E \times F \times G$ và viết

- " $\forall\, x \in C$, $\forall\, y \in D$ " thành " $\forall\,(x,y) \in A$ " .
- " $\exists\, u \in E$, $\exists\, v \in F$ và $\exists\, t \in G$ " thành " $\exists\,(u,v,t) \in B$ "

■ Gom các mệnh đề toán còn lại trong U thành một mệnh đề P.

■ Viết U thành các dạng cơ bản ở trên.

71

Cách phủ định các mệnh đề ở dạng cơ bản

- đổi $\exists$ thành $\forall$
- đổi $\forall$ thành $\exists$
- đổi P thành $\sim P$
- để nguyên " $\in$ "
- để nguyên *" đúng với"*

72

KIẾN THỨC CƠ BẢN 3

Cách viết một mệnh đề U thành dạng cơ bản

Để ý đến các cụm từ *"với mọi"* và *"có một" ở trong U,* và viết chúng thành một trong bốn dạng

$\forall x \in A$ thì P đúng đối với x

$\exists x \in A$ sao cho P đúng đối với x

$\exists x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z, $\forall z \in$

$\forall x \in A, \exists y \in B$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z, $\forall z \in C(y)$

($P(x)$ là một mệnh đề được xác định tùy theo các giá trị của x, $C(y)$ là một tập hợp được xác định tùy theo các giá trị của y)

Nếu cần ta đặt thêm các tập hợp mới.

Cho các tập hợp C, D, E, F và G, ta đặt

$A = C \times D$ và $B = E \times F \times G$ và viết

- "$\forall x \in C, \forall y \in D$" thành "$\forall (x,y) \in A$".
- "$\exists u \in E, \exists v \in F$ và $\exists t \in G$" thành "$\exists (u,v,t) \in B$"

73

Cách phủ định các mệnh đề ở dạng cơ bản

- đổi $\exists$ thành $\forall$
- đổi $\forall$ thành $\exists$
- đổi P thành $\sim P$
- để nguyên "$\in$"
- để nguyên *" đúng với"*

74

Bài toán 2. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

" với mọi số thực dương ε có một số nguyên N sao cho

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ với mọi số nguyên dương m và $n \geq N$"

Từ đó suy ra phủ định của câu trên.

$\forall \varepsilon \in (0, \infty)$. $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_m - a_n| < \varepsilon$ $\forall m$ và $n \geq N$

$P(\varepsilon)$ là : "$|a_m - a_n| < \varepsilon$"

$\forall \varepsilon \in (0, \infty)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m, n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

75

$P(\varepsilon)$ là : "$|a_m - a_n| < \varepsilon$"

$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với mọi $m, n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$C(N) = \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\} \times \{k \in \mathbb{N} : k \geq N\}$

$\forall \varepsilon \in (0, \infty)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$P(\varepsilon)$ đúng với (m, n) $\forall (m, n) \in C(N)$

$\exists \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

76

$P(\varepsilon)$ là : "$| a_m - a_n | < \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $\sim P(\varepsilon)$ đúng với (m, n)

$\sim P(\varepsilon)$ là "$| a_m - a_n | \geq \varepsilon$"

$\exists\ \varepsilon \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\exists\ (m, n) \in C(N)$

để cho $| a_m - a_n | \geq \varepsilon$

có một số thực dương ε sao cho với mọi số nguyên dương N có m và $n \geq N$ để cho

$| a_m - a_n | \geq \varepsilon$

77

Bài toán 3. Viết mệnh đề sau đây ra dạng cơ bản :

" có một số thực dương M sao cho với mọi $x \in A$ ta có $x \leq M$".

Suy ra phủ định của nó.

$P(M)$ là "$x \leq M$"

$\exists\ M \in (0, \infty)$ sao cho $\forall\ x \in A$ thì $P(M)$ đúng đối với x

$\forall\ M \in (0,\infty)$, $\exists\ x \in A$ để cho $\sim P(M)$ đúng đối với x

$\sim P(M)$ là "$x > M$"

$\forall\ M \in (0, \infty)$, $\exists\ x \in A$ để cho $x > M$

78

Các mệnh đề có "và" hay "hoặc" và phủ định của chúng

P là "*R và S*"

$\sim P$ là "*~R hoặc ~S*"

Q là "*R hoặc S*"

$\sim Q$ là "*~R và ~S*"

P là "$x < 5$ và $y \geq 9$"

~P là "$x \geq 5$ hoặc $y < 9$"

79

KIẾN THỨC CƠ BẢN 4

Phủ định các mệnh đề có "và" hay "hoặc"

- *P* là "*R và S*" ; *~P* là "*~R hoặc ~S*"
- *Q* là "*R hoặc S*" ; *~Q* là "*~R và ~S*"

80

Các tương quan suy luận $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$

giả sử P đúng thì Q phải đúng
nếu P đúng thì Q phải đúng
Q đúng khi P đúng

Tất cả các câu này đều có cùng một nghĩa

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \Leftarrow P$$

Nếu "$P \Rightarrow Q$" và "$Q \Rightarrow P$" ta nói P và Q *tương đương* với nhau

$$P \Leftrightarrow Q$$

81

Phản chứng

để chứng minh "P đúng". ta chỉ cần chứng minh $\sim P$ không thể nào đúng được

- Giả sử $\sim P$ đúng, coi như đây là một giả thiết của bài toán. Giả thiết mới này thường được gọi là *giả thiết phản chứng*.
- Tìm một dữ kiện giả thiết phản chứng và một dữ liệu trong các giả thiết cho sẵn của bài toán, sao cho chúng có dạng giống nhau nhưng đối kháng với nhau. Từ đó chúng ta cố tìm ra một điều mâu thuẫn với các giả thiết cho sẵn của bài toán hoặc mâu thuẫn với các định nghĩa hoặc các kết quả có từ trước.

82

QUI TẮC GIẢI TOÁN 8

Chúng ta dùng phản chứng trong các trường hợp sau :

- Dữ kiện cho trước yếu hơn dữ kiện cần chứng minh.
- Dữ kiện cho trước không rõ ràng bằng dữ kiện cần chứng minh.
- Không thể dùng được dữ kiện cho trước.

83

Cách dùng phản chứng : để chứng minh "P đúng". ta chỉ cần chứng minh $\sim P$ không thể nào đúng được như sau

- Giả sử $\sim P$ đúng, coi như đây là một giả thiết của bài toán. Giả thiết mới này thường được gọi là *giả thiết phản chứng*.
- Dùng qui tắc giải toán 6, làm thật giống các yếu tố "giống giống khác khác".
- Sau cùng ta sẽ tìm được một yếu tố "giống giống chống chống". Ta viết lại các yếu tố này cho thật giống nhau và thật chống nhau. Từ đó chúng ta cố tìm ra một điều mâu thuẫn với các giả thiết cho sẵn của bài toán hoặc mâu thuẫn với các định nghĩa hoặc các kết quả có từ trước.

84

Bài tập 4. Cho một tập hợp A . Chứng minh $\emptyset \subset A$

$\emptyset$ là một tập hợp không chứa một phần tử nào

Cho x trong $\emptyset$ chứng minh x trong A.

Vì $\emptyset$ không chứa phần tử nào, ta không sữ dụng được giả thiết "x trong $\emptyset$". Ta dùng phản chứng, với giả thiết phản chứng : "$\emptyset \subset A$" sai . Theo QTGT 1, ta làm rõ giả thiết phản chứng .

$\emptyset \subset A \ : \ \forall x \in \emptyset \ : \ x \in A$"

"$\emptyset \subset A$" sai : $\exists x \in \emptyset \ : \ x \notin A$

Việc $x \in \emptyset$ mâu thuẫn với định nghĩa của tập trống

Vậy giả thiết phản chứng không thể đúng, nó phải sai, do đó $\emptyset \subset A$

85

QUI TẮC GIẢI TOÁN 9

Chứng minh bằng đảo đề

Khi chứng minh "$P \Rightarrow Q$" khó quá, ta có thể chứng minh "$\sim Q \Rightarrow \sim P$"

Cho a và b là hai số thực dương sao cho $a < b$.

Chứng minh $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

P là "$a < b$" và Q là "$\sqrt{a} < \sqrt{b}$"

"$P \Rightarrow Q$ $\quad \sim Q \Rightarrow \sim P$

$\sqrt{a} \ge \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad a \ge b$

86

$\sqrt{a} \ge \sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad a \ge b$

Đặt $c = \sqrt{a}$ và $d = \sqrt{b}$.

$a = c^2$ và $b = d^2$

$c \ge d \quad \Rightarrow \quad c^2 \ge d^2$

$c^2 \ge cd \qquad cd \ge d^2$

87

CHƯƠNG HAI

ÁNH XẠ

Trong nhiều mô hình các vấn đề thực tiễn, chúng ta thường thấy có các đại lượng thay đổi theo một hoặc nhiều đại lượng khác. Chúng ta hãy xem cách mô hình của toán cho việc này.

Nếu trong kỹ thuật chúng ta phải có một hình tròn có diện tích định trước, chúng ta mô hình bài toán bằng công thức sau :

Diện tích một hình tròn có bán kính r $= \pi r^2$

Như vậy đại lượng "diện tích" thay đổi tùy theo đại lượng "bán kính"

Chúng ta đầu tư xây dựng một công trình với số vốn là a, ước lượng mỗi năm tốn chi phí bảo quản là b, dự kiến sẽ cho thuê hàng năm là với giá c (sau khi trừ thuế). Vậy nên định c bao nhiêu để sau 10 năm chúng ta thu hồi vốn.

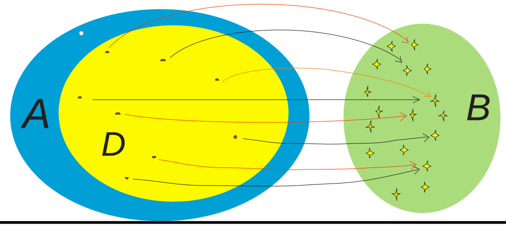
Dùng mô hình bài toán như sau : xét công thức sau :
"Tiền thu được đến cuối năm thứ t" $= (c - b)t$

Trong hai thí dụ trên, chúng ta mới mô hình toán học nửa vời. Chúng ta thấy "diện tích một hình tròn có bán kính r" và "Tiền thu được cuối năm thứ t" có chung một tính cơ bản là các lượng thay đổi theo một lượng khác , và ta sẽ ký hiệu chung là $f(r)$ hoặc $f(t)$.

Theo cách này chúng ta mô hình được sự thay đổi của một lượng nào đó theo một lượng khác.

A. Xác định một ánh xạ

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp khác trống và D là một tập con khác trống trong A. Giả sử với mọi x trong D ta định nghĩa được một phần tử $f(x)$ trong B, ta nói ta xác định được một ánh xạ f từ D vào B.



Thí dụ**.** Diện tích một hình tròn có bán kính r là πr^2. Ta thấy $r \to f(r) = \pi r^2$ là một ánh xạ từ tập hợp các số thực dương $(0,\infty)$ vào chính nó.

Thí dụ. Nhiệt độ tại một vị trí nào đó trong giảng đường này tại thời điểm t trong buổi sáng hôm nay, là một ánh xạ từ $[6,12]$ vào $[20, 50]$.

Thí dụ. Cố định một thời điểm t trong buổi sáng hôm nay, nhiệt độ tại mỗi vị trí trong giảng đường này là một ánh xạ từ tập hợp A vào $[20, 50]$, với A là tập hợp các vị trí trong giảng đường này.

Thí dụ. Để khảo sát thiết kế hệ thống máy lạnh trong giảng đường này, chúng ta đo nhiệt độ tại một số vị trí trong giãng đường này (gọi B là tập hợp các vị trí đó) từ 7.00 giờ sáng đến 6.00 giờ chiều trong một ngày nào đó . Gọi $f(x,t)$ là nhiệt độ tại vị trí x ở thời điểm t. Lúc đó f là một ánh xạ từ $B\times[7,18]$ vào tập $[20,50]$.

Thí dụ. Tổng trị giá xuất khẩu của Việt Nam trong từng tháng của năm 2007 là một ánh xạ từ tập $\{1,2, \ldots, 12\}$ vào tập $[1,20]$ nếu chúng ta lấy đơn vị là tỉ USD. Nhưng ánh xạ này được coi là từ $\{1,2, \ldots, 12\}$ vào $[16, 340]$ nếu đơn vị tính tiền là một ngàn tỉ đồng Việt Nam.

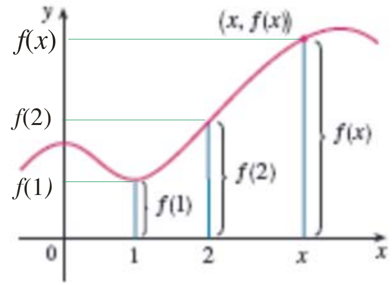
92

Ta có thể mô hình các ánh xạ qua đồ thị của chúng.

Định nghĩa. Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp A vào một tập hợp B. Ta đặt

$$\Gamma = \{(x,y) \in A\times B : \ y = f(x) \}.$$

Ta gọi Γ là đồ thị của f.

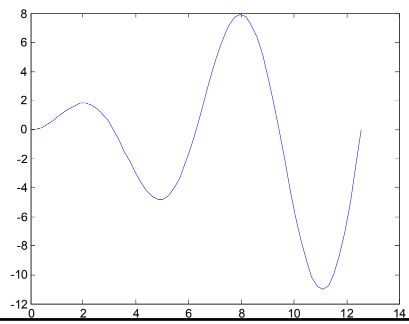


93

Để vẽ đồ thị của một ánh xạ f từ một khoảng $[a,b]$ vào $\mathbb{R}$, ta cĩ thể dùng Matlab với lệnh

>> fplot('f(x)',[a,b]); (enter)

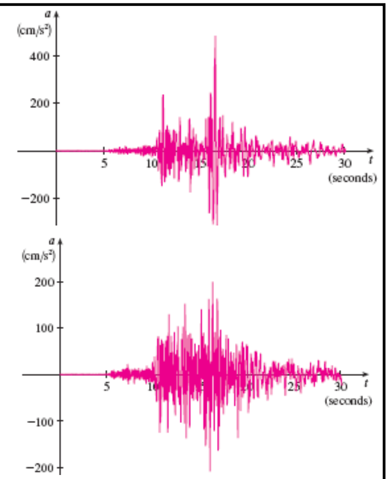
Thí dụ. Dùng lệnh >> fplot('x.*sin(x)',[0,4*pi]); ta cĩ đồ thị của ánh xạ $f(x) = x\sin x$ trên khoảng $[0, 4\pi]$ như bên dưới.



94

Tuy nhiên chúng ta cũng có các đồ thị của ánh xạ do các thiết bị ghi chứ không phải vẽ từ định nghĩa của ánh xạ đó.

Hai đồ thị bên cạnh do địa chấn kế ghi lại các gia tốc chuyển động mặt đất của một vị trí theo các hướng bắc-nam và đông-tây trong một trận động đất ở Northridge.



Theo tư liệu của Calif. Dept. of Mines and Geology (“Stewart, Calculus- concepts and contexts” tr.15)

95

Khi đi xe taxi , chúng ta phải trả một số tiền khởi đầu là a và một khoảng tiền theo giá mỗi km chúng ta đi. Như vậy giá tiền trung bình mỗi km trong một chuyến đi là bao nhiêu.

Chúng ta mô hình bài toán như sau : goi x là số km của chuyến đi và b là giá tiền mỗi km, và t là số tiền đi chuyến xe đó, và y là giá tiền trung bình mỗi km trong chuyến đi đó; ta có các công thức sau

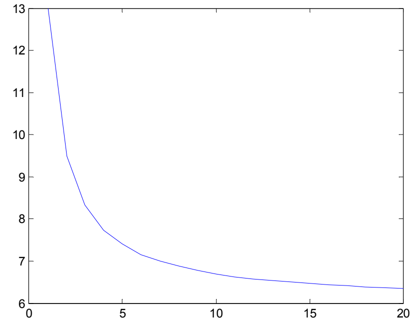
$$t = a + bx \quad \text{và} \quad y = \frac{t}{x} = \frac{a+bx}{x} = \frac{a}{x} + b$$

96

Như vậy giá tiền trung bình y mỗi km làm một ánh xạ tùy thuộc vào khoảng đường đi. Dùng Matlab ta có đồ thị của y như sau

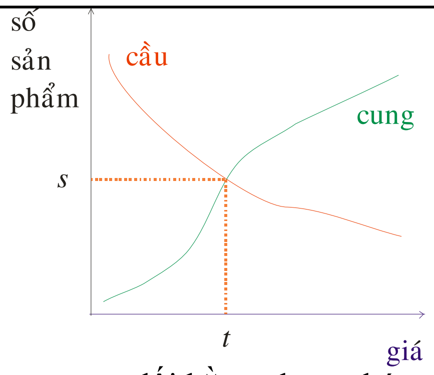
```
>> fplot('(x.^-1)*7+6',[1,10]);
```

Theo đồ thị này, giá tiền trung bình mỗi km trong một chuyến đi giãm dần theo độ xa của chuyến đi



97

Trong việc điều chỉnh giá một mặt hàng nào đó sẽ dẫn theo hệ quả số người mua và số lượng sản xuất mặt hàng đó sẽ thay đổi.

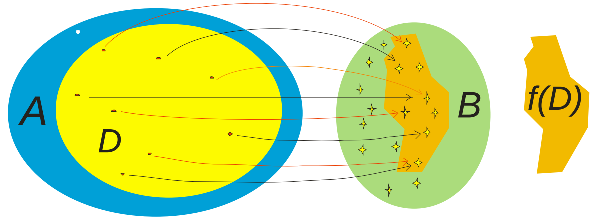


Nếu cầu và cung không tương đối bằng nhau, chúng ta sẽ có hai tình hình kinh tế bất ổn : hoặc hàng tồn kho quá lớn, hoặc thiếu hụt hàng hóa.

Dùng đồ thị bên trên chúng ta có thể thấy định giá mặt hàng là t làm cho kinh tế ổn định.

98

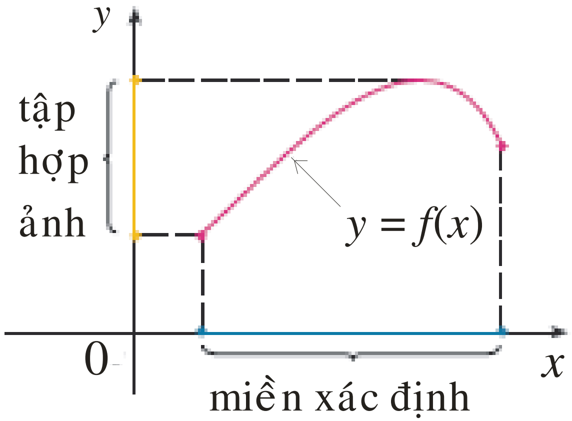
Cho D là một tập con khác trống trong một tập A và f là một ánh xạ từ D vài một tập B. Lúc đó D được gọi là miền xác định của ánh xạ f và tập hợp $f(D) = \{y = f(x) : x \in D\}$ được gọi là tập hợp ảnh của f.



Thí dụ. Cho D là một khoảng mở (a,b) trong $\mathbb{R}$, với x trong D ta đặt $f(x) = \dfrac{b-x}{x-a}$. Lúc đó f là một ánh xạ có miền xác định là D và tập hợp ảnh là $(0, \infty)$

99

Đôi khi chúng ta dùng đồ thị để có hình ảnh của miền xác định và tập ảnh của một ánh xạ.



100

Nhiều khi chúng ta định nghĩa một ánh xạ bằng một mệnh đề toán học, lúc đó chúng ta phải tìm miền xác định của f.

Bài toán 4. Với mọi số thực x ta đặt $f(x) = y$ sao cho $y(x - 1) = 1$. Chứng minh miền xác định của f là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Theo QTGT 3, ta viết rõ bài toán

Đặt $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x)$ xác định duy nhất $\}$. Ta chứng minh $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vậy ta phải chứng minh

$\mathbb{R} \setminus \{1\} \subset D \qquad D \subset \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Cho t trong $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, chứng minh t trong D (1)

Cho s trong D, chứng minh s trong $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (2)

101

Cho t trong $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, chứng minh t trong D (1)

Cho s trong D, chứng minh s trong $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (2)

Theo QTGT 1, ta viết (1) và (2) rõ hơn

Cho $t \in \mathbb{R}$ sao cho $t \neq 1$, chứng minh $t \in D$

Cho $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$, tìm $y \in \mathbb{R}$: $y(t - 1) = 1$ (1')

Cho $s \in \mathbb{R}$, có $z \in \mathbb{R} : z(s - 1) = 1$, chứng minh $s \neq 1$ (2')

Vì t rõ hơn s, nên có lẽ (1') dễ chứng minh hơn (2'). Ta chứng minh (1') trước. Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong (1') cùng một dạng

Cho $t \in \mathbb{R}$, $t - 1 \neq 0$, tìm $y \in \mathbb{R}$: $y(t - 1) = 1$ (1')

Để tìm y, ta để y đứng một mình.

Cho $t \in \mathbb{R}$, $t - 1 \neq 0$, tìm $y \in \mathbb{R}$: $y = (t - 1)^{-1}$ xong

102

Cho $s \in \mathbb{R}$, có $z \in \mathbb{R} : z(s - 1) = 1$, chứng minh $s \neq 1$ (2')

Vì giả thiết không rõ ràng bằng kết luận, theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng

$s = 1$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong giả thiết của (2') và giả thiết phản chứng (3) cùng dạng

$s - 1 = 0$ (3)

Cho $s \in \mathbb{R}$, có $z \in \mathbb{R} : z .0 = 1$ (2")

Vì $z .0 = 0$, ta có mâu thuẫn

103

QUI TẮC GIẢI TOÁN 19

Khi phải chứng minh nhiều phần nhỏ của bài toán, ta nên chứng minh phần dễ trước.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 20

Để tìm một ẩn số ($x, y, \delta \ldots$), ta cố gắng để ẩn số đó đứng một mình ở một vế trong một đẳng thức hay bất đẳng thức.

104

Trong một kỳ tuyển sinh, chúng ta chọn các thí sinh có tổng số điểm thi ≥ 18. Ta mô hình việc tuyển chọn như sau: xác định tập hợp

{ thí sinh : có điểm thi ≥ 18}.

Mô hình "toán học hơn" như sau : đặt X là tập hợp các thí sinh, $f(x)$ là điểm thi của thí sinh x , lúc đó tập hợp các thí sinh được tuyển là $\{x \in X : f(x) \geq 18\}$.

Với giá hiện nay của một sản phẩm nào đó chúng ta có n khách hàng. Nay chúng ta muốn tăng giá đó lên thêm một mức là T, vấn đề nên chọn T sao cho số khách hàng tuy giãm nhưng cũng còn hơn 90% số khách hàng hiện nay.

105

Chúng ta mô hình vấn đề này như sau : gọi c là hệ số giảm số lượng khách hàng nếu tăng giá một đơn vị tiền tệ và $F(T)$ là số lượng khách hàng khi chúng ta tăng giá sản phẩm thêm T. Lúc đó

$$F(T) = -cT + n$$

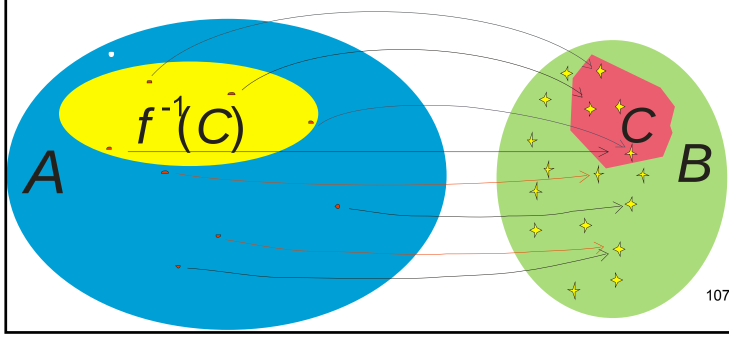
Vậy các mức tăng giá có thể chấp nhận được là

$\{T : F(T) \geq 0{,}9n\}$

Mô hình chung cho các vấn đề này có thể làm như sau.

106

Định nghĩa. Cho A và B là hai tập hợp khác trống và C là một tập con khác trống trong B. Cho một ánh xạ f từ A vào B. Ta đặt $f^{1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ và gọi $f^{-1}(C)$ *là ảnh ngược của* C qua f

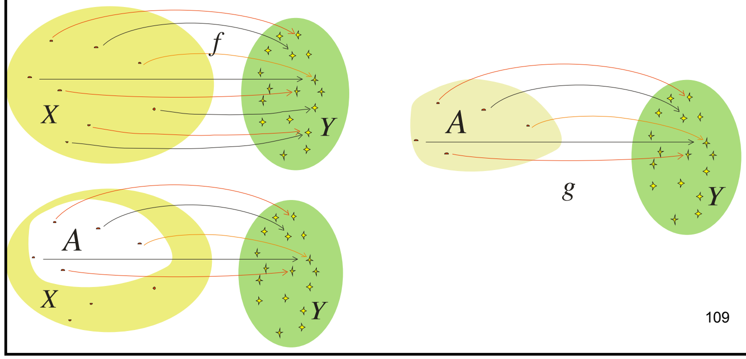


107

Nhiều lúc chúng ta muốn thu hẹp vấn đề, lúc đó chúng ta phải có các cách mô hình việc thu hẹp này. Trong một số vấn đề việc thu hẹp này còn giúp chúng ta bớt số tính toán và có kết quả nhanh hơn trước.

Vì các sự vật phải quan sát được bớt đi, một số mô hình cũng được "thu nhỏ" lại. Chúng ta dùng ngôn ngữ toán học diễn đạt sự việc này như sau.

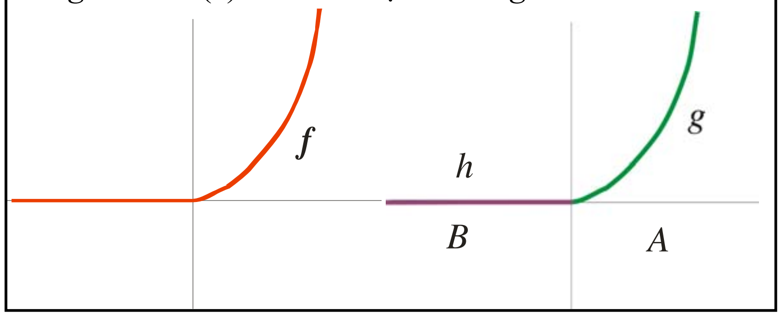
Định nghĩa. Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào một tập hợp Y, và A là một tập hợp con của X. Với mọi $x \in A$ ta đặt $g(x) = f(x)$, lúc đó g là một ánh xạ từ A vào Y và ta nói g là ánh xạ thu hẹp của ánh xạ f trên A và ký hiệu g là $f_{|A}$.



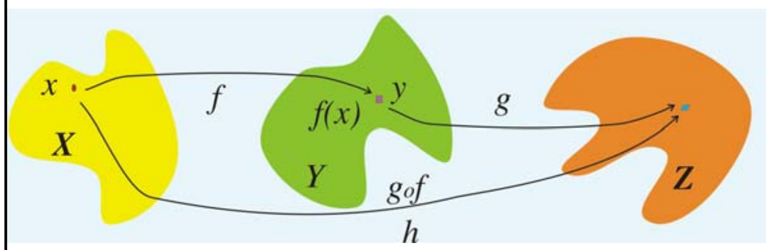
Thí dụ. *Cho* $A = (0, \infty)$, $B = (-\infty, 0)$ *và* f *là một ánh xạ từ* $\mathbb{R}$ *vào* $\mathbb{R}$ *xác định như sau*

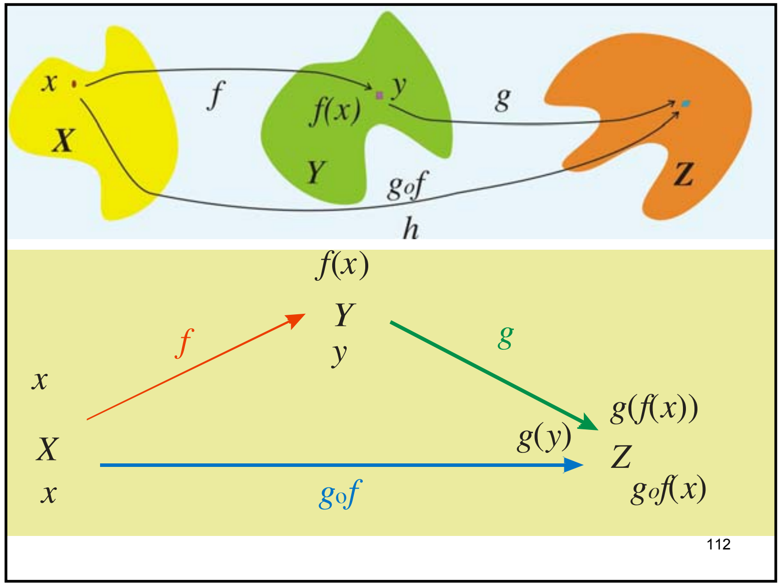
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & khi\ x > 0, \\ 0 & khi\ x \le 0. \end{cases}$$

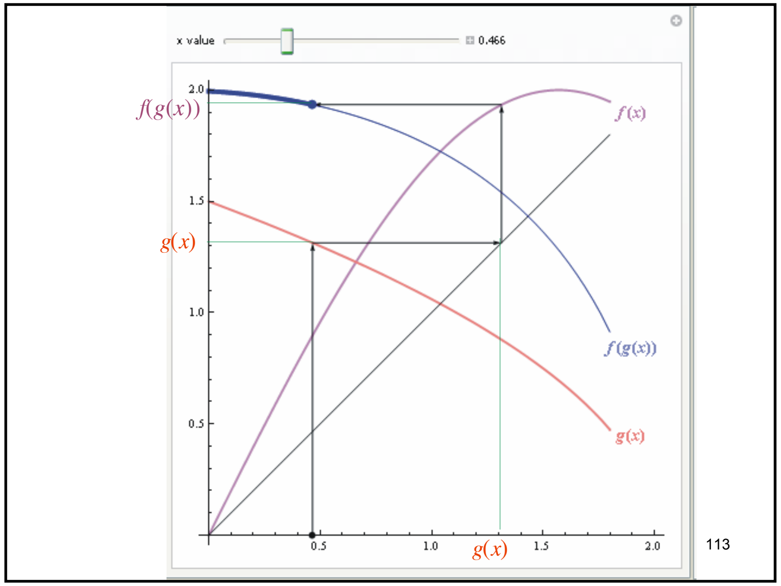
Đặt $g = f|_A$ *và* $h = f|_B$. *Ta có* $g(x) = x$ *với mọi* x *trong* A *và* $h(x) = 0$ *với mọi* x *trong* B.

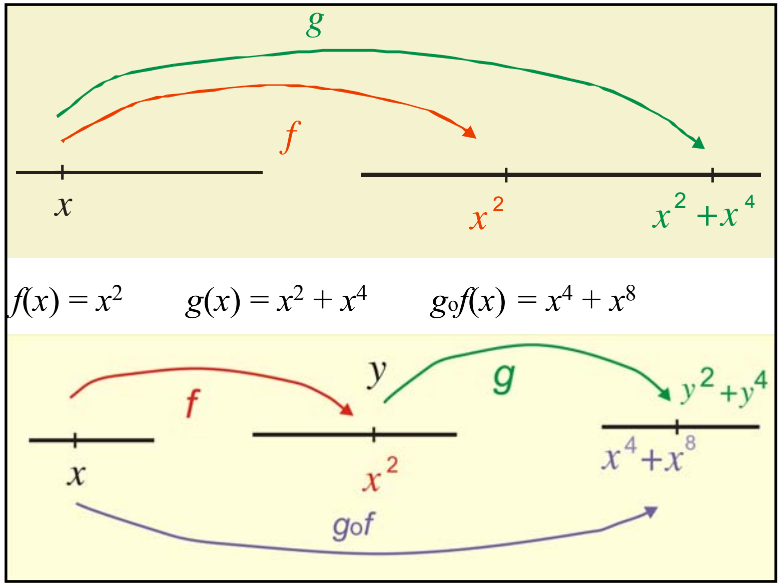


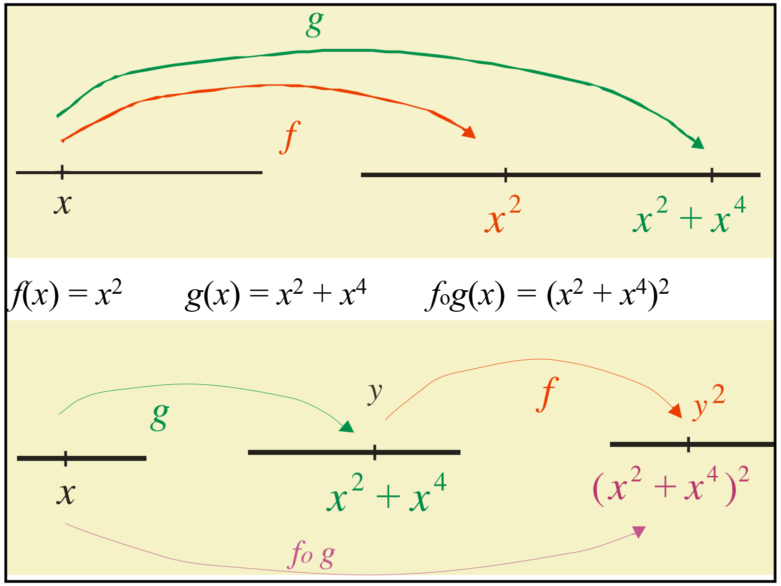
Định nghĩa. Cho X, Y và Z là ba tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y, và g là một ánh xạ từ Y vào Z. Ta đặt $h(x) = g(f(x))$ với mọi x trong X. Lúc đó h là một ánh xạ từ X vào Z và được gọi là *ánh xạ hợp* của f và g và được ký hiệu là gof.

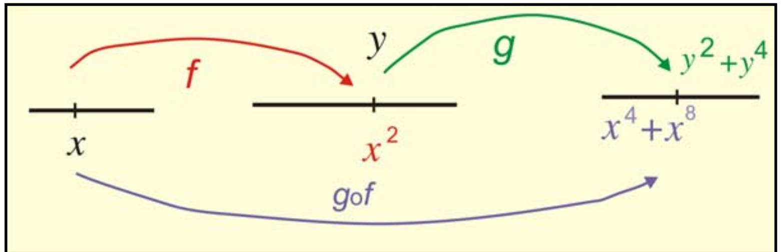



x
f
f(x)
y
g
X
Y
g∘f
Z
h
f(x)
Y
y
f
g
x
X
x
g(f(x))
g(y)
Z
g∘f
g∘f(x)
112

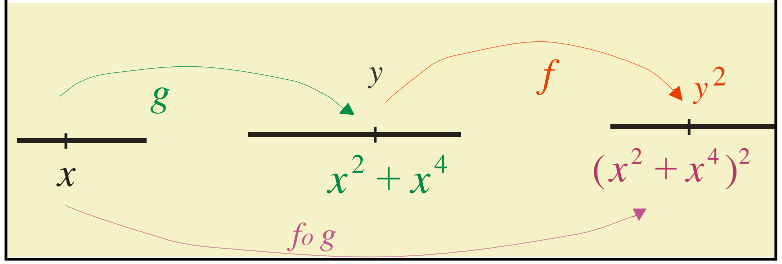

x value
0.466
f(g(x))
g(x)
f(x)
f(g(x))
g(x)
g(x)
113


g
f
x
x^2
x^2+x^4
$f(x) = x^2$
$g(x) = x^2 + x^4$
$g{\circ}f(x) = x^4 + x^8$
y
f
g
y^2+y^4
x
x^2
x^4+x^8
g∘f


g
f
x
x^2
x^2+x^4
$f(x) = x^2$
$g(x) = x^2 + x^4$
$f{\circ}g(x) = (x^2 + x^4)^2$
g
y
f
y^2
x
x^2+x^4
$(x^2+x^4)^2$
f∘g



$f(x) = x^2$ $g(x) = x^2+x^4$ $g{\circ}f(x) = x^4+x^8$ $f{\circ}g(x) = (x^2+x^4)^2$



B. Xác định ánh xạ hợp

Để xác định ánh xạ hợp *gof* ta làm như sau : với mọi x trong X tính $y = f(x)$, rồi thay y bằng giá trị đó vào công thức $z = g(y)$, từ đó xác định được giá trị $gof(x)$ theo x.

Thí dụ. *Cho* $X = \mathbb{R}$, $Y = [-3, \infty)$ *và* $Z = [-5, 4]$, *cho* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *với mọi x trong X và* $g(y) = \dfrac{1-y^2}{1+y^4}$ *với mọi y trong Y. Xác định gof.*

Với mọi x trong X ta đặt $y = f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Ta có

$$gof(x) = g[f(x)] = g(y) = \frac{1-y^2}{1+y^4} \quad \frac{1-(\sqrt{1+x^2})^2}{1+(\sqrt{1+x^2})^4}$$

Vậy $gof\ (x) = \dfrac{-x^2}{x^4+2x^2+2}$ với mọi x trong X.

117

Việc đặt $y = f(x) = \sqrt{1+x^2}$ mới xem rất tầm thường, nhưng nó giúp ta làm nhanh và ít sai trong tính toán về sau : nó tránh cho chúng ta khỏi lầm lẫn các x trong $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ và $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^4}$ (thường người ta viết g như một hàm số theo x chứ không theo y)

Có thể dùng Matlab để giải thí dụ trên như sau

```
>> f=@(x)sqrt(1+x.^2)
f =
@(x)sqrt(1+x.^2)
>> g=@(x)(1-x.^2)/(1+x.^4)
g =
@(x)(1-x.^2)/(1+x.^4)
```

118

```
>> f=@(x)sqrt(1+x.^2)
f =
   @(x)sqrt(1+x.^2)
>> g=@(x)(1-x.^2)/(1+x.^4)
g =
   @(x)(1-x.^2)/(1+x.^4)
>> h=@(x)f(g(x))
h =
   @(x)f(g(x))
>> k=@(x)g(f(x))
k =
   @(x)g(f(x))
```

119

```
>> h=@(x)f(g(x))
h =
   @(x)f(g(x))
>> k=@(x)g(f(x))
k =
   @(x)g(f(x))
>> syms x
>> h(x)
 ans =
 (1+(1-x^2)^2/(1+x^4)^2)^(1/2)
 >> k(x)
 ans =
 -x^2/(1+(x^2+1)^2)
```

120

Thí dụ. *Cho* $X = Y = Z = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 6x^3 - 15x + 8$ *và* $g(x) = \dfrac{x^3 + 4x + 5}{x^2 + 7}$ *với mọi x trong* $\mathbb{R}$. *Tính fog*

Bài này có số lượng tính toán khá lớn ta nên dùng máy tính, ở đây ta dùng Matlab

121

```
>> f=@(x)(x.^4 + 6*x.^3 -15*x +8)
f =
   @(x)(x.^4+6*x.^3-15*x+8)
>> g=@(x)(x.^3 + 4*x +5)/(x.^2 +7)
g =
   @(x)(x.^3+4*x+5)/(x.^2+7)
>> h=@(x)f(g(x))
h =
   @(x)f(g(x))
>> syms x
```

122

```
>> h(x)
ans =
 (x^3+4*x+5)^4/(x^2+7)^4
+6*(x^3+4*x+5)^3/(x^2+7)^3-
15*(x^3+4*x+5)/(x^2+7)+8
>> simplify(h(x))
ans =
 (-642-5980*x-4547*x^3+13181*x^2+1905*x^6
+8713*x^4+119*x^9+657*x^7+345*x^5+x^12
+16*x^10+194*x^8+6*x^11)/(x^2+7)^4
```

$$h(x) = \frac{x^{12} + 6x^{11} + 16x^{10} + 119x^9 + 194x^8 + 657x^7 + 1905x^6}{(x^2+7)^4}$$
$$+ \frac{345x^5 + 8713x^4 - 4547x^3 + 13181x^2 - 5980x - 642}{(x^2+7)^4}$$

123

C. Phân tích ánh xạ thành các ánh xạ đơn giản

Cho tập hợp con A trong $\mathbb{R}$ và một ánh xạ f từ A vào $\mathbb{R}$. Với mỗi x trong A ta tính cẩn thận $f(x)$, từ đó suy ra cách phân tích f thành các ánh xạ đơn giản.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$*. Phân tích* f *thành các ánh xạ đơn giản.*

Với mỗi x trong $\mathbb{R}$ quá trình tính $f(x)$ như sau :

- với x ta tính được x^2 đặt $g(x) = x^2$,
- với $z = x^2$ ta tính được $1+x^2 = 1+z$: đặt $h(z) = 1 + z$,
- với $w = 1 + x^2$ ta tính được $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{w}$: đặt $u(w) = \sqrt{w}$.

$f(x) = u(h(g(x)))$ với mọi x trong $\mathbb{R}$ hay $f = u_o h_o g$.

124

Thí dụ. *Cho* $f(x) = \sin(3x + \cos x)$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$*. Phân tích* f *thành các ánh xạ đơn giản.*

Với mỗi x trong $\mathbb{R}$ quá trình tính $f(x)$ như sau :

- với x ta tính được $3x$ và $\cos x$: đặt
  $g(x) = 3x$ và $h(x) = \cos x$,
- với $z = 3x + \cos x$ ta tính được $\sin(3x + \cos x) = \sin z$: đặt
  $u(z) = \sin z$.

Vậy $f(x) = u((h + g)(x))$ $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $f = u_o(h+g)$

Khi đặt các z và w, ta thấy hình như là ta đang làm việc vô ích, nhưng việc này sẽ giúp ta làm toán nhanh và tránh các sai lầm không đáng có về sau.

125

Việc phân tích f thành hợp của các ánh xạ đơn giản rất hữu ích khi ta đưa các bài toán phức tạp về các bài toán đơn giản, nhất là khi ta gặp các vấn đề về liên tục và khả vi của một ánh xa phức tạp.

126

Trong một túi có 10 viên bi có kính cở như nhau nhưng có các màu sắc khác nhau. Chúng ta chọn ba viên bi trong túi này theo hai cách sau :

* Lấy một lần ba viên bi.

** Lấy một viên bi, ghi màu sắc của nó rồi bỏ lại vào túi; lấy một viên bi, ghi màu sắc của nó rồi bỏ lại vào túi; và lấy thêm một viên bi nữa.

Chúng ta thấy sự khác biệt giữa hai cách chọn trên : ta có ba viên bi khác nhau trong cách thứ nhất, còn trong cách thứ hai chúng ta có thể có cùng một viên bi trong nhiều lần lấy bi từ túi.

127

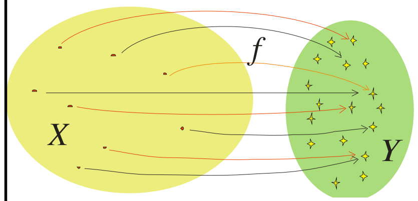
Ta thử mô hình toán học hai cách chọn trên. Mô hình các lần chọn như tập hợp $A = \{1,2,3\}$ và các viên bi như tập hợp $B = \{1,2,3, . . .,10\}$.

Cách chọn thứ hai tương ứng với mọi ánh xạ f từ A vào B. Cách chọn thứ nhất tương ứng với các ánh xạ f từ A vào B có tính chất sau : $f(x) \neq f(y)$ nếu $x \neq y$.

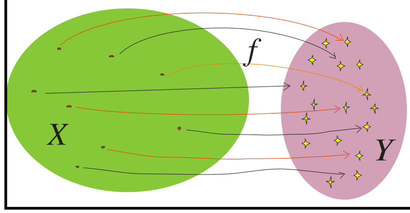
Nếu xem một con người như là một phức hợp thể chất, tinh thần và các yếu tố khác biến đổi theo thời gian t ký hiệu là $f(t)$, thì mỗi con người là một ánh xạ từ một khoảng $[a, b]$ vào tập hợp B những "con người tức thời" (một con người ở đúng một thời điểm nào đó). Ánh xạ này cũng có tính chất $f(x) \neq f(y)$ nếu $x \neq y$.

128

Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một đơn ánh nếu và chỉ nếu $f(a) \neq f(b)$ khi $a \neq b$,



f không là đơn ánh



f là đơn ánh

129

D. Chứng minh f là một đơn ánh

Cho f là một ánh xạ từ một tập hợp X vào tập hợp Y, để chứng minh f đơn ánh ta dùng các phương pháp sau

- Dùng định nghĩa : *cho x và y trong X sao cho $x \neq y$, chứng minh $f(x) \neq f(y)$.*

Thí dụ. *Cho $f(x) = x^3$ với mọi x trong $\mathbb{R}$. Chứng minh f là một đơn ánh.*

Theo QTGT 3, ta đánh số giả thiết và kết luận

$x \neq y$ (1) $\quad f(x) \neq f(y)$ (2)

Theo QTGT 1, ta diễn tả sự "khác nhau của hai số" thực bằng "hiệu của chúng khác không.

$x - y \neq 0$ (1) $\quad f(x) - f(y) \neq 0$ (2)

130

$x - y \neq 0$ (1) $\quad f(x) - f(y) \neq 0$ (2)

$x - y \neq 0$ (1) $\quad x^3 - y^3 \neq 0$ (2)

Theo QTGT 5, ta viết theo cùng một dạng

$x - y \neq 0$ (1) $\quad (x - y)(x^2 + xy + y^2) \neq 0$ (2')

Theo QTGT 6, ta xét yếu khác nhau giữa (1) và (2) : $(x^2 + xy + y^2)$. Theo QTGT 7, ta chia bài toán thành nhiều trường hợp

$0 \leq x < y$: $\quad x^2 + xy + y^2 > 0$

$x < y \leq 0$: $\quad x^2 + xy + y^2 > 0$

$x < 0 < y$: $\quad x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy > 0$

131

• Dùng đảo đề : *cho x và y trong X sao cho* $f(x) = f(y)$, *chứng minh* $x = y$.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^5 - x^4 + 2x$ *với x trong* $[1, \infty)$. *Khảo sát sự đơn ánh của f.*

Cho x và y trong $[1, \infty)$: $f(x) - f(y) = 0$. (1)

$x - y = 0$? (2)

Theo QTGT 5, viết "$f(x) - f(y)$" ra dạng có "$x - y$". Ta dùng Matlab

132

```
>> syms x
>> syms y
>> factor(x^5 -x^4 +2*x^2 - x^5 +y^4 -2*y^2)
ans =
(x-y)*(x^4-x^3+y*x^3-x^2*y+y^2*x^2+2*x-
x*y^2+x*y^3+2*y-y^3+y^4)
```

$x^5 - x^4 + 2x - y^5 + y^4 - 2y =$

$=(x-y)\,(x^4-x^3+yx^3-x^2y+y^2x^2+2x-xy^2+xy^3+2y-y^3+y^4)$

Ta viết lại bài toán

$x \geq 1$, $y \geq 1$

$(x-y)(x^4-x^3+yx^3-x^2y+y^2x^2+2x-xy^2+xy^3+2y-y^3+y^4)=0$ (1')

$x - y = 0$? (2)

133

$x \geq 1$, $y \geq 1$,

$(x-y)(x^4-x^3+yx^3-x^2y+y^2x^2+2x-xy^2+xy^3+2y-y^3+y^4)=0$ (1')

$x - y = 0$? (2)

Theo QTGT 5, ta viết (1') ra dạng

$x - 1 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$,

$(x-y)[(x-1)x^3+(x-1)x^2y+y^2x^2+2x+(y-1)xy^2+2y+$
$+ (y-1)y^3]= 0$ (1')

Vì $x - 1 \geq 0$, $y - 1 \geq 0$,

$(x-1)x^3+(x-1)x^2y+y^2x^2+2x+(y-1)xy^2+2y+ (y-1)y^3 \geq 4$.

Vậy $x - y = 0$.

134

Chứng minh *f* không là đơn ánh

Để chứng minh f không là một đơn ánh ta phải tìm x và y trong A sao cho $x \neq y$ và $f(x) = f(y)$. Thông thường ta đoán ra x và y.

Nếu không thấy ngay, ta nên giải phương trình $f(x) - f(y) = 0$ và nên lưu ý : phương trình này có một nghiệm là $x = y$, nên ta để ý là $f(x) - f(y)$ có thể phân tách thành thừa số trong đó có $(x - y)$.

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^2 + 2x + 3$ *với mọi x trong* $\mathbb{R}$. *Khảo sát sự đơn ánh của f .*

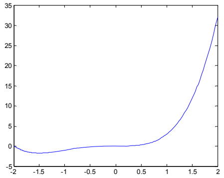
$f(x) - f(y) = x^2+ 2x - y^2 - 2y = (x^2 - y^2) + 2(x - y)$
$= (x - y)(x + y + 2)$.

Từ đó ta thấy $f(0) = f(-2)$ và f không đơn ánh.

135

Thí dụ. *Cho* $f(x) = x^4 + 2x^3$ *với mọi* x *trong* $\mathbb{R}$. *Khảo sát sự đơn ánh của* f.

Ta dùng Matlab để đoán hướng giải bài toán như sau
>> fplot('x.^4 + 2*x.^3',[-2,2]);
từ đây ta thấy f không là một đơn ánh.Tuy nhiên, ta không thể chỉ nhìn trên đồ thị mà nói được. Ta tiếp tục dùng Matlab như sau

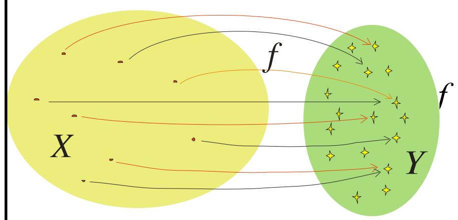


>> solve('x^4 + 2*x^3','x')
ans = -2 0 0 0
Vậy phương trình $x^4+2x^3= 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x =-2$, do đó $f(0)= f(-2)= 0$ và f không đơn ánh.

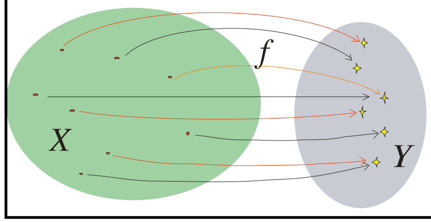
Một công ty du lịch định hướng tìm các tours du lịch thích hợp với một số đối tượng có khả năng chi cho du lịch những mức khác nhau.

Các mức chi tiêu có thể có của các đối tượng mà công ty lưu tâm được mô hình là một con B của tập hợp các số nguyên dương. Đặt X là tập hợp các tours du lịch có giá tiền được liệt kê trong B. Vì khả năng có hạn, công ty cần lựa chọn một tập con A như sau: nếu $f(x)$ là giá của một tour x, thì ta phải tìm tập A sao cho với mọi y trong B đều có một x trong A sao cho $f(x) = y$.

Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một toàn ánh nếu và chỉ nếu $f(X) = Y$,



f không là toàn ánh

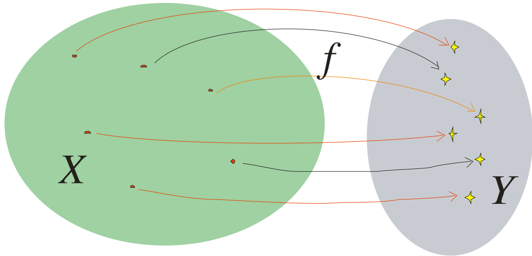


f là toàn ánh

Trong một thử nghiệm người ta quan sát số virus trong một môi trường theo thời từng thời gian định trước. Mặt khác chúng ta cũng muốn xác định các thời điểm để số lượng virus trong môi trường đó đạt đến các số lượng định trước.

Chúng ta mô hình các việc trên như sau, mô hình thời gian quan sát như một khoảng $A = [c, d]$, và số virus được quan sát là một tập hợp B các số nguyên dương $\{n_0, n_0 +1, \ldots , N\}$. Việc quan sát số virus trong một môi trường theo thời từng thời gian được mô hình như một ánh xạ f từ A vào B. Việc quan sát thời điểm có một số nào đó lượng virus trong môi trường được mô hình như một ánh xạ g từ B vào A.

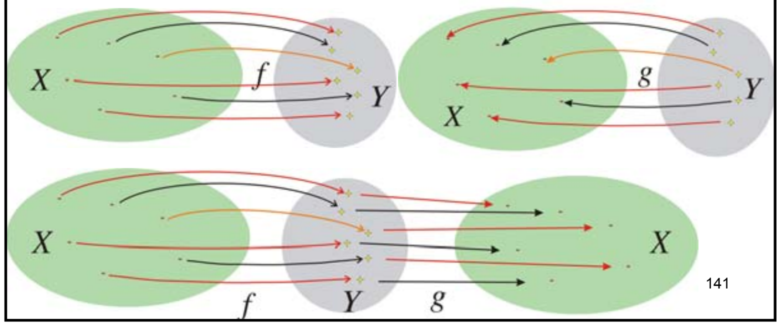
Định nghĩa . Cho X và Y là hai tập hợp khác trống, f là một ánh xạ từ X vào Y. Ta nói f là một song ánh nếu và chỉ nếu f đơn ánh và toàn ánh.



f là song ánh

140

Định nghĩa. Cho f là một song ánh từ X vào Y. Với mọi $y \in Y$ ta có duy nhất một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, đặt $g(y) = x$. Ta thấy g là một ánh xạ từ Y vào X có tính chất sau : $gof(x) = x$ và $fog(y) = y$ với mọi $x \in X$ và với mọi $y \in Y$. Ta nói g là ánh xạ ngược của f và thường ký hiệu là f^{-1}.



141

CHƯƠNG BA

SỐ NGUYÊN VÀ SỐ HỮU TỈ

A. Số nguyên - phép cộng

Ta xét các bài toán sau: tạo ra lịch cho năm sau (danh sách các ngày và các thứ tương ứng, liên kết ngày dương lịch và ngày âm lịch), tính số cửa sổ để xây một căn nhà, số ngày học sinh đến trường hằng năm, số cá có thể nuôi trong một diện tích nào đó, chỉ tiêu tuyển sinh của một đại học. . .

Để mô hình các bài toán bên trên, chúng ta cần một tập hợp con số. Ta không thể có khái niệm : nửa con cá, nửa sinh viên, ta cần khái niệm "nguyên".

142

Tập hợp các con số nguyên này gồm có các phần tử nào đó. Tùy theo địa phương nó có nhiều tên, thí dụ có một phần tử được gọi bằng nhiều cách : hai, nhi, dzì, deux, two, ni, ... Chúng còn được ký hiệu theo nhiều cách còn được ký hiệu bằng nhiều cách, thí dụ một phần tử trong tập đó có các ký sau : 12, XII, 1100 (cơ sở nhị phân) . . .

Có thể đồng nhất tập số nguyên với các số đếm hay không? Nếu chúng ta đếm tất cả các sự vật mà chúng ta biết, gọi số đó là M, thì số M+1 tuy không là số chúng ta đã dùng để đếm, nhưng nó rõ ràng là một số nguyên! Như vậy khó mà để tìm tập hợp tất cả số nguyên trong thiên nhiên.

143

Chúng ta chạm đến một hình ảnh diễn tả rất khéo câu sau đây của Lảo tử :

" Đạo khả đạo, phi thường đạo; danh khả danh, phi thường danh"

"Đạo mà diễn giải được thì không phải đạo vĩnh cửu bất biến, tên mà có thể đặt ra để gọi nó [đạo] thì không phải tên vĩnh cửu bất biến ".

(Nguyễn Hiến Lê dịch)

Ở đây chúng ta thấy sức mạnh trí tuệ loài người, đặt ra một cái gì đó (tập hợp các số nguyên) không có sẵn trong tự nhiên, dùng cái đó để giải quyết các vấn đề có thực trong tự nhiên : dùng các tiền đề để định nghĩa tập các số nguyên.

144

Ông Peano định nghĩa tập số nguyên dựa vào tính thực tiển của các số (cách đếm sự vật, phải có một số đầu tiên, sự nối tiếp các số đếm) và "một tính chất không dể chấp nhận lắm" (tiên đề IV).

Các tiên đề Peano về tập các số nguyên dương :

Có một tập hợp $\mathbb{N}$ cùng với các tính chất sau

I. Với mỗi phần tử x trong $\mathbb{N}$ có một phần tử đươc ký hiệu là $S(x)$ trong $\mathbb{N}$, được gọi là phần tử kế tiếp của x.

II. Cho x và y là hai phần tử trong $\mathbb{N}$ sao cho

$S(x) = S(y)$ thì $x = y$.

III. Có một phần tử trong $\mathbb{N}$ đươc ký hiệu là 1 sao cho 1 không là phần tử kế tiếp của một phần tử nào trong $\mathbb{N}$.

IV. Cho U là một tập hợp con của $\mathbb{N}$ sao cho $1 \in U$ và $S(x) \in U$ với mọi $x \in U$. Lúc đó $U = \mathbb{N}$.

145

Tập hợp $\mathbb{N}$ *duy nhất theo nghĩa sau : nếu có tập* $\mathbb{N}'$ *thỏa bốn tiên đề Peano với phần tử đầu tiên là* $1'$*, thì có một song ánh* f *từ* $\mathbb{N}$ *vào* $\mathbb{N}'$ sao cho $f(1) = f(1')$ *và* $S(f(n)) = f(S(n))$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa. Với bốn tiên đề này ta xác định số 2 như là $S(1)$, số 3 như là $S(2)$, số 4 như là $S(3)$,... ta sẽ có mọi số thường dùng để đếm

Định nghĩa. Ta có phép cộng trên $\mathbb{N}$ như sau :

$n+1 = S(n)$, $n+2 = S(n+1)$, $n+3 = S(n+2)$,....$\forall\, n \in \mathbb{N}$

Định nghĩa. Ta xác định phép nhân trên $\mathbb{N}$ như sau :

$1.n = n$, $2.n = n+n$, $3.n = 2.n+n$,..... $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ông Peano đã đóng góp một ý toán rất quan trọng : $\mathbb{N}$ không chỉ là một tập hợp chứa các số nguyên dương, mà trong $\mathbb{N}$ còn có một cấu trúc logic *"phần tử kế tiếp"*. Chính cấu trúc logic này xác định các phép toán cộng và nhân trên $\mathbb{N}$ và quan hệ thứ tự sau đây trên $\mathbb{N}$.

Định nghĩa. Ta có một quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}$ như sau : cho m và n trong $\mathbb{N}$, ta nói

- $n > m$ (hay $m < n$) nếu và chỉ nếu $n = m + r$ với một r nào đó trong $\mathbb{N}$,
- $n \geq m$ (hay $m \leq n$) nếu và chỉ nếu $n = m$ hoặc $n > m$.

Định lý. *Định nghĩa các phép + và* **.** *và quan hệ* $\geq$ *trong* $\mathbb{N}$ *như trên. Ta có với mọi* m, n, p *và* q *trong* $\mathbb{N}$

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n+p) = m.n + m.p$,

(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{N}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$ *và* $p \geq q$, *thì*

$$m+p \geq n+q \quad \text{và} \quad mp \geq np.$$

(iv) *Cho* A *là một tập con khác trống trong* $\mathbb{N}$, *lúc đó có* z *trong* A *sao cho* $n \geq z$ *với mọi* n *trong* A (*ta nói* A *có cực tiểu*).

Các tiên đề của Peano (tương đối khá tự nhiên) giúp chúng ta sẽ làm toán cộng và toán nhân có lý luận chặc chẽ hơn! Ngoài ra các tiên đề này còn cho ta một cách chứng minh đặc biệt : *qui nạp toán học*.

Định lý. *Cho* $A \subset \mathbb{N}$ *và* $p \in A$. *Giả sử* $S(n) \in A$ *nếu* $n \in A$. *Lúc đó* $\{m \in \mathbb{N} : m \geq p\} \subset A$.

B. Phép qui nạp toán học

Khi ta quan sát không phải một hiện tượng, một tính chất mà cả một dãy hiện tượng hoặc một dãy tính chất $\{P_n\}$ với n là các số nguyên dương, ta có thể dùng phép qui nạp toán học để chứng minh P_n đúng với mọi $n \geq N$ chỉ cần hai bước như sau :

- Chứng minh P_n đúng với $n = N$,
- Cho k là một số nguyên dương $k \geq N$. Giả sử P_k đúng, chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Nếu làm được hai điều trên, ta kết luận P_n đúng với mọi $n \geq N$.

Bài toán 5. *Cho n* $\in \mathbb{N}$. *Đặt* $X_n = 1 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Chứng minh $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Đặt $P(n)$ là " $X_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ". Ta thấy $P(1)$ đúng

Giả sử $P(k)$ đúng với một $k \geq 1$

$$X_k = 1 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$X_{k+1} = 1 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3 = 1 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

$$X_{k+1} = X_k + (k+1)^3$$

150

$$X_k = 1 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$X_{k+1} = X_k + (k+1)^3$$

$$X_{k+1} = X_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)^2[k^2 + 4k + 4] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Vậy theo qui nạp toán học $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$.

151

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 1

Để chứng minh P_n đúng với mọi $n \geq N$ chỉ cần hai bước như sau :

- Chứng minh P_n đúng với $n = N$,
- Cho k là một số nguyên dương $k \geq N$. Giả sử P_k đúng, chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Các kỹ thuật quan trọng trong phép qui nạp :

- Không dùng cùng một ký hiệu cho hai sự việc có thể khác nhau (QTGT 4).
- Đưa các dữ kiện của P_{n+1} về dạng các dữ kiện của P_n

152

Bài toán 6. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một đơn ánh f từ* $\{1, \ldots, m\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$. *Chứng minh* $m \leq n$.

Ta có thể dùng phép qui nạp toán học theo *m* hoặc theo *n*. Ta lựa chọn phương hướng như sau.

Qui nạp theo *m* :

Giả sử kết quả đúng khi $m = k$: *Nếu có một đơn ánh f từ* $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$. *Thì* $k \leq n$

Cho một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k+1 \leq p$.

153

1. Qui nạp theo m :

Giả sử kết quả đúng khi $m = k$: *Nếu có một đơn ánh f từ* $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$. *Thì* $k \le n$

Cho một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k+1 \le p$.

2. Qui nạp theo n :

Giả sử kết quả đúng khi $n = q$: *Nếu có một đơn ánh f từ* $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, q\}$. *Thì* $k \le q$

Cho một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, r\}$ *vào* $\{1, \ldots, q+1\}$. *Chứng minh* $r \le q+1$.

154

Trong cách 1, thu hẹp của g trên tập $\{1, \ldots, k\}$ cho ta một liên quan đến trường hợp $m = k$. Trong cách 2, ta không thấy có cách nào nối hai trường hợp $n = q$ và $n = q + 1$. Vậy ta chọn cách 1.

Qui nạp theo m : hiển nhiên kết quả đúng khi $m = 1$.

Giả sử kết quả đúng khi $m = k$: *Nếu có một đơn ánh f từ* $\{1, \ldots, k\}$ *vào* $\{1, \ldots, n\}$. *Thì* $k \le n$

Cho một đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k+1 \le p$.

155

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,\ldots, k\}$ *vào* $\{1,\ldots,n\}$. *Thì* $k \le n$

Cho đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k+1 \le p$.

Theo QTGT 6, ta tập trung vào các khác biệt giữa giả thiết và kết luận. Ta để ý các khác biệt hình như có liên hệ với nhau: k và $k+1$. Xét cặp khác biệt dễ làm giống nhau trước : $k \le n$ *và* $k+1 \le p$. Ta viết lại bài toán.

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,\ldots, k\}$ *vào* $\{1,\ldots,n\}$. *Thì* $k \le n$

Cho đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k \le p - 1$.

156

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,\ldots, k\}$ *vào* $\{1,\ldots,n\}$. *Thì* $k \le n$

Cho đơn ánh g từ $\{1, \ldots, k+1\}$ *vào* $\{1, \ldots, p\}$. *Chứng minh* $k \le p - 1$.

Theo QTGT 6, ta tập trung vào các khác biệt giữa giả thiết và kết luận. Ta để ý các khác biệt hình như có liên hệ với nhau: k và $k+1$. Để khắc phục sự khác biệt này, ta dùng ánh xạ thu hẹp của g trên $\{1,\ldots, k\}$. Ta có các trường hợp sau:

• $g(\{1,\ldots,k\}) \subset \{1,\ldots, p-1\}$

•• $g(\{1, \ldots, k\})$ không chứa trong $\{1, \ldots, p - 1\}$.

Trường hợp 1, có k và $p-1$, nên hi vọng giải được. Ta xét trường hợp 1 trước.

157

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,..., k\}$ vào $\{1,...,n\}$. Thì $k \le n$

Cho đơn ánh g từ $\{1,. . . , k+1\}$ vào $\{1, . . . , p\}$.
Chứng minh $k \le p - 1$.

• $g(\{1,...,k\}) \subset \{1,..., p\text{-}1\}$

Nối kết trường hợp $k+1$ với trường hợp k : xét h là ánh xạ thu hẹp của g trên $\{1,..., k\}$.

h là một đơn ánh từ $\{1,..., k\}$ vào $\{1,..., p\text{-}1\}$

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,..., k\}$ vào $\{1,...,n\}$. Thì $k \le n$

$k \le p - 1$

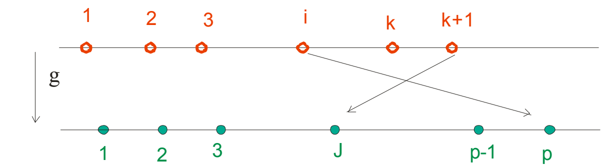
158

Nếu có đơn ánh f từ $\{1,..., k\}$ vào $\{1,...,n\}$. Thì $k \le n$

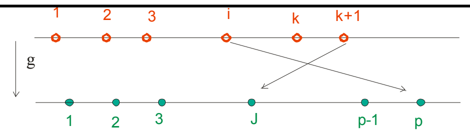
Cho đơn ánh g từ $\{1,. . . , k+1\}$ vào $\{1, . . . , p\}$.
Chứng minh $k \le p - 1$.

•• $g(\{1, . . . , k\})$ không chứa trong $\{1, . . . , p - 1\}$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ g : có i trong $\{1, . . . , k\}$ sao cho $g(i) = p$. Vì g đơn ánh, $g(k+1) \neq p$. Vậy có j trong $\{1, . . . , p - 1\}$ sao cho $g(k+1) = j$.

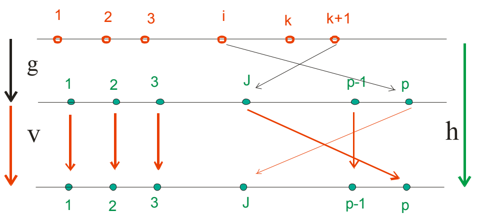


159



có i trong $\{1, . . . , k\}$ sao cho $g(i) = p$
$g(k+1) = j$ trong $\{1, . . . , p - 1\}$.

Đặt v như trong hình vẽ. Đặt $h = v \circ g$



$h(i) = j$,
$h(k+1) = p$
$h(s) = g(s)$
$\forall\ s \neq i , k+1$

$h(\{1,...,k\}) \subset \{1,..., p\text{-}1\}$, h đơn ánh $\quad k \le p - 1$ 160

Bài toán 7. *Cho m và n là hai số nguyên dương. Giả sử có một song ánh f từ $\{1, . . . ,m\}$ vào $\{1, . . . ,n\}$. Chứng minh $m = n$.*

f là một đơn ánh từ $\{1, . . . ,m\}$ vào $\{1, . . . , n\}$. Do đó $m \le n$

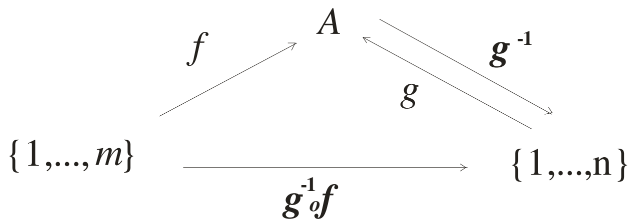
f^{-1} là một đơn ánh từ $\{1, . . . , n\}$ vào $\{1, . . . , m\}$. Do đó $n \le m$

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa “hữu hạn”

161

Dùng kết quả này, ta có thể định nghĩa "hữu hạn"

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói A có *m phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp *A có hữu hạn phần tử*



162

Định nghĩa. Cho A là một tập hợp khác trống, ta nói

• *A có n phần tử* nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ tập hợp $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ vào A. Lúc đó ta nói tập hợp *A có* hữu hạn phần tử.

• A là một tập hợp vô hạn đếm được (hoặc vắn tắt là đếm được) nếu và chỉ nếu có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A.

•A là một tập hợp quá lắm đếm được nếu và chỉ nếu *A có* hữu hạn phần tử hoặc vô hạn đếm được .

• A là một tập hợp vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được .

163

Bài toán 8. Đặt P($\mathbb{N}$) là họ tất cả các tập con của $\mathbb{N}$. Chứng minh P($\mathbb{N}$) là một tập vô hạn không đếm được.

Theo QTGT 1, ta làm rõ "tập vô hạn không đếm được": A là vô hạn không đếm được nếu và chỉ nếu A không hữu hạn và không vô hạn đếm được . Theo QTGT 7, ta chia bài toán thành hai phần:

A không hữu hạn (1)

A không vô hạn đếm được (2)

Ta thấy "hữu hạn" dễ hơn "vô hạn đếm được", nên ta chứng minh (1) trước.

A không hữu hạn (1)

P ($\mathbb{N}$) $\supset \{ \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \ldots\}$: không hữu hạn

164

A = P ($\mathbb{N}$) không vô hạn đếm được (2)

Vì định nghĩa "không vô hạn đếm được" không rõ ràng về "vô hạn đếm được", theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng :

Giả sử có một song ánh f từ $\mathbb{N}$ vào A. (3)

Theo QTGT 1, ta làm rõ (3). Đặt $B_k = f(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

P($\mathbb{N}$) = $\{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots\}$ (3')

Theo QTGT 1, ta làm rõ (3') : vì $\{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$ luôn luôn chứa trong P($\mathbb{N}$). Nên thực chất (3') chính là

P($\mathbb{N}$) $\subset \{B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k, \ldots\}$

Cho $E \subset \mathbb{N}$, có i sao cho $E = B_i$ (3")

165

Cho $E \subset \mathbb{N}$, có i sao cho $E = B_i$ (3")

Theo QTGT 8, ta tìm một $D \subset \mathbb{N}$ mà $D \neq B_i$ với mọi i trong $\mathbb{N}$. Đặt tập con D của $\mathbb{N}$ như sau : cho i trong $\mathbb{N}$

$i \in D$ nếu $i \notin B_i$

$i \notin D$ nếu $i \in B_i$

$D \neq B_i$ với mọi $i \in \mathbb{N}$: mâu thuẫn với (3")

166

C. Các tập hợp $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{Q}$

Cho m và n trong $\mathbb{N}$, xét phương trình $n = x + m$.

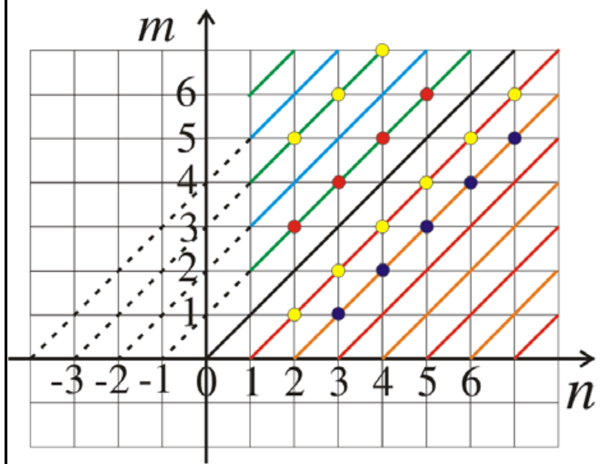
• $n > m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên r sao cho $n = m + r$. Vậy ta chọn $x = r$.

• $n < m$: theo định nghĩa ta có một số nguyên s sao cho $m = n + s$. Vậy "m bớt đi s" $= n$. Trong toán học ta ký hiệu "bớt đi s" là $-s$.

Phương trình này làm nảy sinh tập hợp các số nguyên âm $\{-q : q \in \mathbb{N}\}$

Đặt $\mathbb{Z} = \{-q : q \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ và gọi $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên.

167



$3 = x + 1$

$4 = x + 2$

$5 = x + 3$

$6 = x + 4$

$7 = x + 5$

$2 = z + 5$ $3 = z + 6$ $4 = z + 7$

168

Nếu $m \in \{-q : q \in \mathbb{N}\}$ ta nói m là *một số nguyên âm* và viết $m < 0$, nếu $m \in \mathbb{N}$ ta nói m là *một số nguyên dương* và viết $m > 0$.

Với số nguyên m ta đặt sign(m) như sau và gọi đó là dấu của m

$$\text{sign}(m) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } m > 0 \ , \\ 0 & \text{nếu } m = 0 \ , \\ -1 & \text{nếu } m < 0 \ . \end{cases}$$

Đặt $0.m = m.0 = 0$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$

Mọi số nguyên m có thể viết thành sign(m) m' với một m' trong $\mathbb{N}$.

169

Trên $\mathbb{Z}$ ta có các định nghĩa sau đây : với mọi m, n, p và q trong $\mathbb{Z}$

- $-m = -\text{sign}(m)|m|$, $m + (-m) = 0$, $0 + m = m$
- $m+n = \text{sign}(m)[|m| + |n|]$ nếu $\text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
- $m+n = \text{sign}(m)[|m|-|n|]$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $|m| \geq |n|$
- $m+n = \text{sign}(n)[|n|-|m|]$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$, $|n| \geq |m|$
- $0.m = 0$
- $n.m = |m|.|n|$ nếu $\text{sign}(m) = \text{sign}(n)$
- $n.m = -|m|.|n|$ nếu $\text{sign}(m) \neq \text{sign}(n)$
- $m > n$ nếu và chỉ nếu $m - n \in \mathbb{N}$
- $m \geq n$ nếu và chỉ nếu $m = n$ hoặc $m > n$.

Định lý. *Định nghĩa các phép cộng* + và nhân. và quan hệ $\geq$ trong $\mathbb{Z}$ *như trên*. Ta có với mọi m, n, p, *và* q *trong* $\mathbb{Z}$.

(i) $m+n = n+m$, $n.m = m.n$ *và* $m.(n + p) = m.n + m.p$,

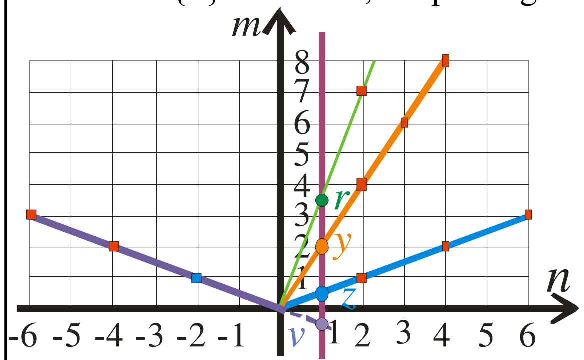
(ii) $\geq$ *là một quan hệ thứ tự toàn phần trên* $\mathbb{Z}$.

(iii) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ và $r \geq 0$, thì

$$m + p \geq n + q \text{ và } mr \geq nr.$$

(iv) $|m| \geq m$

Cho $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và $m \in \mathbb{Z}$, xét phương trình $nx = m$.



$-6.p = 3$

$-4.p = 2$

$1.q = 2$

$2q = 4$

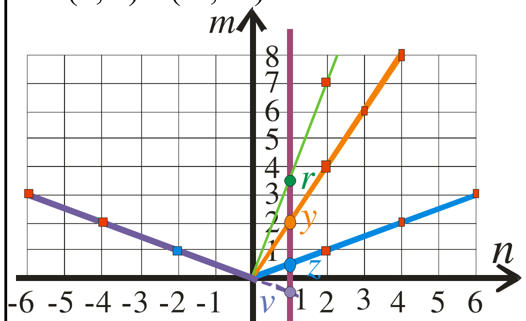
$4.r = 2$

$6.r = 3$

Phương trình này có thể không có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ (thí dụ $4x = 2$). Nhưng ta có thể coi (n,m) như là một nghiệm của nó và xét tập hợp $\mathbb{Q}$ xác định như sau

Xét $X = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z} = \{(n,m) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ và } m \in \mathbb{Z}\}$

Trên X ta định nghĩa quan hệ R như sau $(n,m)R\,(n',m') \Leftrightarrow n.m' = n'.m$

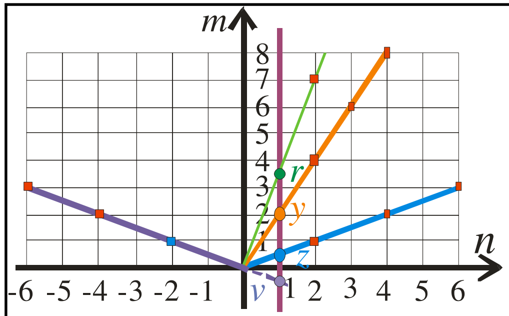


$-6.x = 3$ $\quad 2.y = 2$ $\quad 4.z = 2$

$-4.x = 2$ $\quad 4.y = 4$ $\quad 6.z = 3$

Ta chứng minh được R là quan hệtương đương. Ta đặt $\mathcal{Q}$ là tập thương X/R.

Ta ký hiệu lớp tương đương của (n,m) là $\frac{m}{n}$ và ta gọi đó là một số hữu tỉ.



Vì 2.6 =3.4 nên $(4,2)R(6,3)$. Do đó $\frac{2}{4}$ và $\frac{3}{6}$ chỉ là một số hữu tỉ z.

$r = \frac{3}{2}$, $y = 2$, $z = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$

Như vậy một số hữu tỉ có thể được viết ra nhiều dạng khác nhau, mỗi dạng của nó là một *phân số* $\frac{m}{n}$, trong đó m được gọi là tử số và n được gọi là mẫu số.

174

- $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$ với mọi số hữu tỉ và với mọi $k \in \mathbb{N}$.
- đồng nhất m với $\frac{m}{1}$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$, ta có $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- nếu $p = \frac{m}{n} \neq 0$ thì $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ và ta có thể xét số hữu tỉ $\frac{n}{m}$, ta ký hiệu $\frac{n}{m}$ là p^{-1}.
- vì $(n,m)\ R\ (|n|, \text{sign}(n)\ m)$, ta có thể viết các số hữu tỉ ở dạng $\frac{r}{s}$ với $s \in \mathbb{N}$ và $r \in \mathbb{Z}$.

175

Định nghĩa . Cho các số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ và $\frac{r}{s}$ với n và $s \in \mathbb{N}$ và m và $r \in \mathbb{Z}$. Ta định nghĩa

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{ns} \quad , \quad \frac{m}{n} . \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}$$

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \frac{|m|}{|n|}$$

$\frac{m}{n} > \frac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms > nr$

$\frac{m}{n} \geq \frac{r}{s}$ nếu và chỉ nếu $ms \geq nr$

176

Định lý . *Định nghĩa các phép cộng + và nhân. và quan hệ $\geq$ trong Q như trên. Ta có với mọi m, n, p và q trong Q và $p \neq 0$*

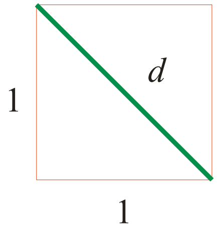
(i) $m + n = n + m$ *và* $m.(n + p) = m.n + m.p$,
(ii) $n.m = m.n$ *và* $p.p^{-1} = 1$,
(iii) *nếu* $m \geq n$ *và* $n \geq m$, *thì* $m = n$,
(iv) *nếu* $m \geq n$, $p \geq q$ *và* $r \geq 0$, thì $m + p \geq n + q$ và $mr \geq nr$. Nếu $m > n$ *và* $r > 0$, thì $mr > nr$.
(v) $|m| \geq m$.

177

CHƯƠNG BỐN

SỐ THỰC

Nếu chúng ta qui hoạch một con đường màu xanh trên một khu đất hình vuông có chiều dài mỗi cạnh là 1 km. Hỏi chúng ta nên ghi chiều dài d của con đường này là bao nhiêu trong dự án ?



Theo định lý Pythagore $d^2 = 2$. Trong các chương trước, chúng ta đã thấy không có số hữu tỉ nào bằng d cả. Con số d này có thực ngoài đời nhưng không thể tiếp cận bằng các lý luận bình thường ngoài đời như đếm số, chia phần (số nguyên và số hữu tỉ).

Trong Phụ lục A của quyển "Giáo Trình Toán Giải Tích 1", NXB Thống Kê, dùng khái niệm dãy Cauchy, chúng ta xây dựng được tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực d dựa vào tập các số nguyên như sau.

Định nghĩa. $\mathbb{R}$ *là một tập hợp trên đó ta xác định được: phép cộng* $(x,y) \to x + y$ *và phép nhân* $(x,y) \to xy$ *(đây là các ánh xạ từ* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *vào* $\mathbb{R}$*) và một quan hệ thứ tự toàn phần có các tính chất sau : với mọi* x, y, z và u trong $\mathbb{R}$

(R1) $x + y = y + x$,
(R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(R3) có một phần tử 0 trong $\mathbb{R}$ sao cho $0 + x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$,
(R4) có một phần tử $-x$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $x + (-x) = 0$,

(R1) $x + y = y + x$,
(R2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(R3) có một phần tử 0 trong $\mathbb{R}$ sao cho $0 + x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$,
(R4) có một phần tử $-x$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $x + (-x) = 0$,

(R5) $xy = yx$,

(R6) $x(yz) = (xy)z$,

(R7) có một phần tử 1 trong $\mathbb{R}$ sao cho $1x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

(R8) nếu $x \neq 0$ có một phần tử x^{-1} trong $\mathbb{R}$ sao cho $x^{-1}.x = 1$,

(R9) $x(y + z) = xy + xz$,

Bài toán 1 . Cho δ và η là hai số thực sao cho

$$x + \delta = x \quad \text{và} \quad x + \eta = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh $\delta = \eta$.

Theo QTGT 3, ta viết rõ và đánh số các giả thiết và kết luận.

$x + \delta = x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ (1)

$s + \eta = s$ $\quad \forall s \in \mathbb{R}$ $\quad$ (2)

$\delta = \eta$ $\quad$? (3)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1) và (2): $x + \delta$ và $s + \delta$. Ta làm chúng giống nhau : chọn: $x = \eta$ và $s = \delta$. Viết lại (1) và (2)

$x + \delta = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

$s + \eta = s \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \qquad (2)$

$\delta = \eta \qquad ? \qquad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1) và (2): $x + \delta$ và $s + \eta$. Ta làm chúng giống nhau : chọn: $x = \eta$ và $s = \delta$. Viết lại (1) và (2)

$\eta + \delta = \eta \qquad (1')$

$\delta + \eta = \delta \qquad (2')$

$\delta = \delta + \eta = \eta + \delta = \eta$

Vậy phần tử 0 duy nhất

182

Bài toán 2 . Cho δ và η là hai số thực sao cho

$\delta.x = x$ và $\eta.x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh $\delta = \eta$.

$x\,\delta = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

$s\eta = s \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \qquad (2)$

$\delta = \eta \qquad ? \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1) và (2): $x\delta$ và $s\eta$. Ta làm chúng giống nhau : chọn $x = \eta$ và $s = \delta$. Viết lại (1) và (2)

$\eta\delta = \eta \qquad (1')$

$\delta\eta = \delta \qquad (2')$

$\delta = \delta\eta = \eta\delta = \eta$ Vậy phần tử 1 duy nhất

Bài toán 1' . Cho x, u và v là ba số thực sao cho

$x + u = 0$ và $x + v = 0$.

Chứng minh $u = v$.

$x + u = 0 \qquad (1)$

$x + v = 0 \qquad (2)$

$? \qquad u = v \qquad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác": "$x + u$" và "u", và làm cho chúng giống nhau: cộng hai vế của (1) với $-x$.

$-x + (x + u) = -x \qquad [-x + x] + u = -x \qquad u = -x \qquad (1')$

Tương tự : $v = -x \qquad u = v \qquad (3)$

Vậy phần tử $-x$ duy nhất

184

Bài toán 2' . Cho x, s và t là ba số thực sao cho $x \neq 0$,

$x.s = 1$ và $x.t = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh $s = t$.

Vậy phần tử x^{-1} duy nhất

Định nghĩa . Cho hai số thực x và y . Ta đặt

$$y - x = y + (-x)$$

185

QUI TẮC GIẢI TOÁN 18

Nếu trong giả thiết "với mọi x trong . . .", ta có thể chọn x cho phù hợp với các yếu tố trong phần kết luận.

186

BÀI TOÁN 3. Cho hai số thực x và y . Giả sử $x + y = x$. Chứng minh $y = 0$.

Có $x \in \mathbb{R}$: $x + y = x$ (1)

$z + y = z \quad \forall z \in \mathbb{R}$? (2)

Theo QTGT 8, giả thiết (1) yếu hơn kết luận (2), nên phải dùng phản chứng, với giải thiết phản chứng

Có $t \in \mathbb{R}$: $t + y \neq t$ (3)

187

Có $x \in \mathbb{R}$: $x + y = x$ (1)

Có $t \in \mathbb{R}$: $t + y \neq t$ (3)

Theo QTGT 8, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" nhưng chống đối nhau: x và t. Ta làm chúng càng giống nhau : đặt $s = t - x$, ta có $s+x = t$. Ta viết lại (1)

$s+x + y = s+x \quad t + y = t$ (1')

Ta thấy (1') mâu thuẩn với (3).

188

BÀI TOÁN 4. Cho một số thực x . Chứng minh $0.x = 0$

$z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (1)

? $t + 0.x = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (2)

Theo QTGT 8, ta thấy không liên hệ rõ ràng giữa giả thiết (1) và kết luận (2), nên phải dùng phản chứng, với giải thiết phản chứng

Có t : $t + 0.x \neq t$ (3)

Ta viết lại bài toán

$z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (1)

Có t : $t + 0.x \neq t$ (3)

189

$z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (1)

Có t : $t + 0.x \neq t$ (3)

Theo QTGT 8, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" nhưng chống đối nhau: z và t. Ta làm chúng càng giống nhau : đặt $s = z - t$, ta có $s+t = z$. Ta viết lại (1) và (3)

$z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (1)

$z + 0.x \neq z \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (3')

Theo QTGT 18, ta nên thử (3') với vài trị giá z đặc biệt: 0 , $0.x$ . .. Ta thấy $z = 0.x$ cho ta

$0.x + 0.x \neq 0.x$ (4)

Theo QTGT 5, ta viết hai vế trong (4) cùng dạng

$(0 + 0).x \neq 0.x \quad 0 + 0 = 0 \quad 0.x \neq 0.x$ Vô lý

190

BÀI TOÁN 5. Cho hai số thực x và y. Giả sử $x \neq 0$ và $x.y = 0$. Chứng minh $y = 0$.

$x \neq 0$ (1)

$x.y = 0$ (2)

$y = 0$? (3)

Dùng QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác": "$x.y = 0$" và "$y = 0$". Ta làm cho chúng thật giống nhau: nhân hai vế của (2) cho x^{-1} , ta được

$x^{-1}.(x.y) = x^{-1}.0$

$(x^{-1}.x)y = 0.x^{-1}$

$1.y = 0 \quad y = 0$

191

BÀI TOÁN 6. Cho một số thực x . Chứng minh

$$(-1).x = -x$$

(R4) $x + (-x) = 0$ (1)

$x + (-1).x = 0$? (2)

Theo QTGT 5, ta viết x theo dạng của $(-1).x$: $x = 1.x$.
Viết lại (2)

$1.x + (-1).x = 0$?

$[1 + (-1)].x = 0$?

$0.x = 0$?

192

(R10) "$x \le y$ và $y \le z$" $\Rightarrow$ "$x \le z$",

(R11) "$x \le y$ và $y \le x$" $\Rightarrow$ "$x = y$",

(R12) $x \le y$ hoặc $y \le x$,

(R13) "$x \le y$ và $z \le u$" $\Rightarrow$ "$x + z \le y + u$",

(R14) "$x \le y$ và $0 \le u$" $\Rightarrow$ "$xu \le yu$".

BÀI TOÁN 7 . Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$x \le y \iff 0 \le y - x$$

$x \le y$ (1) $\quad$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\quad$ (1) $\Rightarrow$ (2)

$0 \le y - x$ (2) $\quad$ (2) $\Rightarrow$ (3)

193

$x \le y$ (1)

$0 \le y - x$ (2)

(1) $\Leftrightarrow$ (2)

(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3)

Đây là bài toán bất đẳng thức, ta chỉ để ý đến một vế của (1) và (2), ta nên xét vế nào có các yếu tố "giống giống khác khác" dễ làm thật giống: ta xét các vế phải. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong hai vế này: y và y-x. Vì ta đưa y về y-x rất dễ : y +(-x) . Ta chứng minh "(1) $\Rightarrow$ (2)" trước.

$x \le y$ (1) $x+(-x) \le y+(-x)$ (1)

$0 \le y - x$? (2)

Chứng minh "(2) $\Rightarrow$ (3)"

$0 \le y - x$ (2) $x \le y$? (1)

4

$0 \le y - x$ (2)

$x \le y$? (1)

Đây là bài toán bất đẳng thức, ta chỉ để ý đến một vế của (1) và (2), ta nên xét vế nào có các yếu tố "giống giống khác khác" dễ làm thật giống: ta xét các vế trái. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong hai vế này: 0 và x. Ta làm chúng giống nhau : $0 + x = x$. Ta viết lại (2).

$0 + x \le (y - x) + x$ $x \le y + [(-x) + x]$ $x \le y + 0$

$x \le y$

195

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 2

Khi làm việc các bất đẳng thức, ta nên tập trung một vế của bất đẳng thức. Chỉ để tâm đến vế còn lại nếu thật cần thiết.

196

BÀI TOÁN 8 . Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$x \le y \Rightarrow -y \le -x$$

$x \le y$ (1)

$-y \le -x$? (2)

Đây là bài toán bất đẳng thức, ta chỉ để ý đến một vế của (1) và (2: ta xét các vế trái. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong hai vế này: x và -y. Ta làm chúng giống nhau : $x + [(-x) -y]= -y$. Ta viết lại (1).

$x+[(-x) -y] \le y + [(-x) -y]$ $[x+(-x)] -y \le y +[(-y)+(-x)]$

$0 -y \le [y + (-y)]+(-x)$ $-y \le 0 +(-x)$ $-y \le -x$

197

Cho một số thực a ta đặt

$$|a| = \begin{cases} a & khi\ a \geq 0 , \\ -a & khi\ a < 0 . \end{cases}$$

Ta gọi $|a|$ là trị giá tuyệt đối của a.

BÀI TOÁN 9 . Cho một số thực x . Chứng minh

$$x \leq |x| \qquad (1)$$

Bài toán có yếu tố "$|x|$", yếu tố này được xác định trong hai trường hợp. Vậy ta phải xét bài toán trong hai trường hợp tương ứng: "$x \geq 0$ " và "$x \leq 0$ ". Trường hợp "$x \geq 0$ ", đơn giản, ta xét trước. Lúc đó $|x| = x$. Ta viết lại (1)

$x \leq x$

Xét bài toán trong trường hợp "$x \leq 0$ ".

$x \leq 0$ (2)

$x \leq |x|$? (1) $x \leq -x$? (1')

Đây là bài toán bất đẳng thức, ta chỉ để ý đến một vế của (1') và (2), ta nên xét vế nào có các yếu tố "giống giống khác khác" dễ làm thật giống: ta xét các vế phải. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong hai vế này: 0 và $-x$. Ta làm chúng giống nhau : $0 + (-x) = -x$. Ta viết lại (2).

$x + (-x) \leq 0 + (-x)$ $0 \leq (-x)$ $0 \leq -x$ (3)

Ta viết lại bài toán

$x \leq 0$ (2) $0 \leq -x$ (3) $x \leq -x$? (1')

Dùng tính chuyền của $\leq$.

199

QUI TẮC GIẢI TOÁN 10

Khi bài toán có yếu tố được xác định trong nhiều trường hợp. Vậy ta phải xét bài toán trong nhiều trường hợp tương ứng.

200

BÀI TOÁN 10 . Cho một số thực x . Chứng minh

$$-|x| \leq x$$

Bài toán có yếu tố "$|x|$", yếu tố này được xác định trong hai trường hợp. Vậy ta phải xét bài toán trong hai trường hợp tương ứng: "$x \geq 0$ " và "$x \leq 0$ ". Trường hợp "$x \geq 0$ ", đơn giản, ta xét trước. Lúc đó $|x| = x$. Ta viết lại (1)

$x \geq 0$ (1) $-x \leq x$? (2)

$x \leq 0$ (3) $-(-x) \leq x$? (4) $x \leq x$? (4)

Vậy ta chỉ cần xét trường hợp "$x \geq 0$"

$x \geq 0$ (1)

$-x \leq x$? (2)

201

$x \geq 0$ (1)

$-x \leq x$? (2)

Theo QTGT 5, ta viết bài toán thành

$0 \leq x$ (1)

$-x \leq x$? (2)

Đây là bài toán bất đẳng thức, ta chỉ để ý đến một vế của (1) và (2), ta nên xét vế nào có các yếu tố "giống giống khác khác": các vế trái. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong hai vế này: 0 và $-x$. Ta làm chúng giống nhau : $0 + (-x) = -x$. Ta viết lại (1).

$0 + (-x) \leq x + (-x)$ $\quad -x \leq 0$ (3)

$0 \leq x$ (1) $\quad -x \leq 0$ (3) $\quad -x \leq x$? (2)

202

BÀI TOÁN 11 . Cho một số thực x . Chứng minh

$$\pm x \leq |x|$$

Khi bài toán viết theo dạng tích hợp các trường hợp. Ta tách bài toán ra từng trường hợp

$x \leq |x|$ (1) $\quad -x \leq |x|$ (2)

QUI TẮC GIẢI TOÁN 11

Khi bài toán viết theo dạng tích hợp các trường hợp. Ta tách bài toán ra từng trường hợp.

203

BÀI TOÁN 12. Cho hai số thực x và y . Chứng minh

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Theo KTGT 2, ta chỉ để tâm đến một vế . Nếu ta để tâm đến vế trái, theo QTGT 10, ta xét hai trường hợp. Nếu ta để tâm đến vế phải của, theo QTGT 10, ta xét bốn trường hợp. Đầu tiên, ta phải thử cách chọn tương ứng với ít trường hợp nhất. Nếu không được ta mới chọn còn lại.

$0 \leq x+y$ (1) $\quad |x+y| = x+y$ $\quad x+y \leq |x|+|y|$? (2)

$x+y \leq 0$ (3) $\quad |x+y| = -(x + y) = -x-y$ $\quad -x-y \leq |x|+|y|$? (4)

Ta xét "(1) $\Rightarrow$ (2)" trước, vì trường hợp này có vẽ dễ hơn

$0 \leq x+y$ (1)

$x+y \leq |x|+|y|$? (2)

204

$0 \leq x+y$ (1)

$x+y \leq |x|+|y|$? (2)

Ta xét trường hợp đơn giản nhất: "$x = 0$" và "$y = 0$" .

$0 \leq y$ (1') $\quad y \leq |y|$? (2')

$0 \leq x$ (1') $\quad x \leq |x|$? (2")

Do BT 9, ta có

$s \leq |s| \quad \forall s \in \mathbb{R}$ (5)

$x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (5')

$y \leq |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (5")

Cộng vế với vế của (5') và (5") ta có (2). Tương tự ta chứng minh được (4).

QUI TẮC GIẢI TOÁN 2

Nên xét bài toán trong trường hợp đơn giản nhất. Sau đó xét bài toán dạng phức tạp hơn một chút, dựa vào cách giải trường hợp trước. Lặp qui trình này cho đến khi giải xong bài toán

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 3

Khi bài toán có nhiều biến số, ta nên giữ nguyên một biến số và cho các biến số còn lại nhận các trị giá đặc biệt. Lúc đó ta đưa bài toán về một biến số.

206

(R15) $\mathbb{R}$ chứa tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}$ và các số nguyên dương n chính là $1 + \cdots + 1$ (n lần).

(R16) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} \equiv \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ chứa trong $\mathbb{R}$.

(R17) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q} \equiv \{n^{-1}m : n \in \mathbb{N}$ và $m \in \mathbb{Z}\}$ chứa trong $\mathbb{R}$.

207

(R18) (*Tính chất Archimède*) Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương n sao cho

$$y < nx \quad . \quad (\text{hay } n^{-1}y < x)$$

(R19) (Tính trù mật của $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$) với mọi số thực x và mọi số thực dương ε ta tìm được p và q trong $\mathbb{Q}$ và r và s trong $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho

$$x - \varepsilon < p < x < q < x + \varepsilon \quad \text{và}$$

$$x - \varepsilon < r < x < s < x + \varepsilon.$$

208

Định nghĩa . Cho A là một tập con khác trống trong $\mathbb{R}$. Ta nói

- A là một tập *bị chặn trên nếu có một số thực* α sao cho
$$x \leq \alpha \qquad \forall x \in A,$$
lúc đó α được gọi là một *chặn trên* của A .

- A là một tập *bị chặn dưới nếu có một số thực* β sao cho
$$\beta \leq x \qquad \forall x \in A,$$
lúc đó β được gọi là một *chặn dưới* của A

- A là một tập *bị chặn* *nếu* A là một tập *bị chặn trên* và *bị chặn dưới*

209

Thí dụ 1 . Cho hai số thực a và b, sao cho $a < b$. Ta thấy

$(-\infty, b)$ là một tập bị chặn trên ,

(a, ∞) là một tập bị chặn dưới ,

$[a, \infty)$ là một tập bị chặn dưới

$(-\infty, b]$ là một tập bị chặn trên ,

(a, b) là một tập bị chặn ,

$[a, b)$ là một tập bị chặn ,

$(a, b]$ là một tập bị chặn .

210

Cho A là một tập con của $\mathbb{R}$ sao cho có α trong A: $x \leq \alpha$ với mọi x trong A. Lúc đó A bị chặn trên và ta gọi α là cực đại của A và ký hiệu α là max A.

Cho B là một tập con của $\mathbb{R}$ sao cho có β trong A: $\beta \leq t$ với mọi t trong B. Lúc đó B bị chặn dưới và ta gọi β là cực tiểu của B và ký hiệu β là min A.

211

(R20) Nếu A là một tập con khác trống và *bị chặn trên* trong $\mathbb{R}$, lúc đó có một số thực m_0 sao cho

(i) $x \leq m_0 \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì

$$m_0 \leq b$$

Lúc đó ta gọi m_0 là chặn trên nhỏ nhất của A và ký hiệu m_0 là sup A .

212

(R21) Nếu A là một tập con khác trống và *bị chặn dưới* trong $\mathbb{R}$, lúc đó có một số thực k_0 sao cho

(i) $k_0 \leq x \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \leq x$ với mọi $x \in A$, thì

$$b \leq k_0$$

Lúc đó ta gọi k_0 là chặn dưới lớn nhất của A và ký hiệu k_0 là inf A .

213

Bài toán 13 . Cho A là khoảng (0,1). Chứng minh

$$\sup A = 1$$

(i) $x \leq m_0 \quad \forall\ x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $m_0 \leq b$

Lúc đó ta gọi m_0 là chận trên nhỏ nhất của A và ký hiệu m_0 là $\sup A$.

(i) $x \leq 1 \quad \forall\ x \in (0, 1)$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in (0, 1)$, thì $1 \leq b$

214

Ta thấy (i) hiển nhiên đúng. Ta chứng minh (ii)

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in (0, 1)$, thì $1 \leq b$

$x \leq b \quad \forall\, x,\ 0 < x < 1$ (1)

$1 \leq b$? (2)

Ta thấy giả thiết yếu hơn kết luận. Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng, với giả thiết phản chứng

$b < 1$ (2')

Theo QTGT 5, ta viết lại bài toán

$x \leq b \quad \forall\, x,\ 0 < x < 1$ (1)

$b < 1$ (2')

215

$x \leq b \quad \forall\, x,\ 0 < x < 1$ (1)

$b < 1$ (2')

Ta làm mạnh "$b < 1$" và làm các yếu tố có cùng dạng: có một số thực $\varepsilon > 0$ sao cho $b < 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon = (1 - b)/2$). Viết lại bài toán.

$x \leq b \quad \forall\, x,\ 0 < x < 1$ (1)

$1 - \varepsilon > b$ (2")

Theo QTGT 6, ta tìm các yếu tố tố "giống giống khác khác" nhưng chống nhau : x và $1 - \varepsilon$. Ta làm chúng giống nhau hẵn Chọn $x = 1 - \varepsilon$, tuy nhiên có thể $1 - \varepsilon \leq 0$. Ta xét trường hợp "$1 - \varepsilon \leq 0$ "rắc rối này trước.

$0 \geq 1 - \varepsilon > b$ Mâu thuẩn với (1)

6

$x \leq b \quad \forall\, x,\ 0 < x < 1$ (1)

$1 - \varepsilon > b$ (2")

Nếu $1 - \varepsilon > 0$, chọn $x = 1 - \varepsilon$. Ta có $0 < x < 1$ và $x > b$ (2"')

Mâu thuẩn với (1)

217

QUI TẮC GIẢI TOÁN 12

Nếu định nghĩa của một yếu tố trong bài toán khá phức tạp (sup , sự hội tụ, sự liên tục . . .). Ta phải chép định nghĩa dưới dạng tổng quát, sau đó mới thay vào các ký hiệu tương ứng của bài toán. Cách này giúp ta tránh sai sót, và giúp có một kho kiến thức toán có chọn lọc : dùng nhiều được ghi ra nhiều lần.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 4

Làm mạnh các bất đẳng thức $a < b$ bằng cách: có một số $\varepsilon > 0$ sao cho $a + \varepsilon < b$ và $a < b - \varepsilon$.

218

Bài toán 14 . Cho A là tập hợp $\{ n^{-1} : n \in \mathbb{N} \}$. Chứng minh

$$\inf A = 0$$

Theo QTGT 12, ta làm rõ yếu tố inf A như sau

(i) $k_0 \leq x \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq k_0$

Lúc đó ta gọi k_0 là chặn dưới lớn nhất của A và ký hiệu k_0 là inf A .

(i) $0 \leq x \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \leq x$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq 0$

Vì (i) hiển nhiên đúng ta xét (ii)

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $b \leq x$ với mọi $x \in A$, thì $b \leq 0$

$b \leq n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

$b \leq 0$? (2)

Ta thấy giả thiết yếu hơn kết luận, theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng là "$b > 0$" .

$b > 0$ (3)

Ta viết lại bài toán

$b \leq n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

$b > 0$ (3)

220

$b \leq n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

$b > 0$ (3)

Khi có bất đẳng thức liên quan đến một số dương và các số nguyên dương, ta phải nhớ tính chất Archimède sau "Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương m sao cho $y < mx$ (hay $m^{-1}y < x$)."

Nhìn vào (1) và (3), ta chọn $y = 1$ và $x = b$.

$\exists\, m \in \mathbb{N} \quad m^{-1} < b$ (4)

$0 < b \leq n^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1) và (3)

Theo QTGT 8, ta thấy hai yếu tố "$m^{-1} < b$" và "$b \leq n^{-1}$" giống giống nhau nhưng chống đối nhau : đặt $n = m$.

$m^{-1} < b \leq m^{-1}$ Mâu thuẫn

221

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 5

Khi có bất đẳng thức liên quan đến một số dương và các số nguyên dương, ta phải nhớ tính chất Archimède sau

Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương m sao cho $y < mx$. (hay $m^{-1}y < x$).

222

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6

Cho A là một tập bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ và $M \in \mathbb{R}$. Để chứng minh $\sup A \le M$, ta có thể làm như sau : Chứng minh $x \le M \quad \forall x \in A$.

Cho B là một tập bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$ và $S \in \mathbb{R}$. Để chứng minh $S \le \inf B$, ta có thể làm như sau : Chứng minh $S \le y \quad \forall y \in B$.

223

Bài toán 15 . Cho c là một số thực dương và B là một tập con bị chặn trên và khác trống trong $\mathbb{R}$. Đặt $cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh $\sup cB = c \sup B$

Ta chứng minh: "$\sup cB \le c \sup B$" và "$\sup cB \ge c \sup B$ ". Ta chứng minh "$\sup cB \le c \sup B$" trước.

? $\sup cB \le c \sup B$

Theo KTGT 6, Đặt $\beta = c.\sup B$. Bài toán trở thành

? $z \le \beta \quad \forall z \in cB = \{cy : y \in B\}$

? $z \le c.\sup B \quad \forall z \in cB = \{cy : y \in B\}$

Theo QTGT 5, ta viết bài toán về một dạng

? $c.y \le c.\sup B \quad \forall y \in B$? $y \le \sup B \quad \forall y \in B$

? $c \sup B \le \sup cB$? $\sup B \le c^{-1}\sup cB$

Theo KTGT 6, Đặt $\alpha = c^{-1}\sup cB$. Bài toán trở thành

? $t \le \alpha \quad \forall t \in B$? $t \le c^{-1}\sup cB \quad \forall t \in B$

? $ct \le \sup cB \quad \forall t \in B$

Theo QTGT 5, ta viết bài toán về một dạng

? $ct \le \sup cB \quad \forall ct \in cB$? $x \le \sup cB \quad \forall x \in cB$

225

Bài toán 15b. Cho c là một số thực dương và B là một tập con bị chặn dưới và khác trống trong ℝ. Đặt $cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh $\inf cB = c \inf B$

Sinh viên tự làm

Bài toán 15c. Cho c là một số thực âm và B là một tập con bị chặn trên khác trống của ℝ. Đặt $cB = \{cy : y \in B\}$. Chứng minh cB bị chặn dưới và $\inf cB = c.\sup B$.

Ta chứng minh: "$\inf cB \le c.\sup B$" và "$\inf cB \ge c \sup B$ ". Ta chứng minh "$\inf cB \ge c \sup B$" trước. Đặt $\alpha = c.\sup B$.

$\inf cB \ge c \sup B$ $\quad c \sup B \le \inf cB$ $\quad \alpha \le \inf cB$

$\alpha \le z \quad \forall z \in cB$ $\quad c.\sup B \le z \quad \forall z \in cB$

$c.\sup B \le cy \quad \forall y \in B$ $\quad \sup B \ge y \quad \forall y \in B$

$\inf cB \le c \sup B$ $\quad \sup B \le c^{-1} \inf cB$

Đặt $\beta = c^{-1} \inf cB$. Theo KTGT 6, ta viết bài toán như sau

$\sup B \le \beta$ $\quad t \le \beta \quad \forall t \in B$ $\quad t \le c^{-1} \inf cB \quad \forall t \in B$

$ct \ge \inf cB \quad \forall t \in B$

Theo QTGT 5, ta viết bài toán về một dạng

$x \ge \inf cB \quad \forall x \in cB$

Bài toán 16. Cho A là một tập khác trống và bị chặn trên trong ℝ và $c = \sup A$. Cho ε là một số thực dương. Chứng minh $c - \varepsilon$ không là một chặn trên của A.

Theo QTGT 1, ta làm rõ $\sup A$ và $c - \varepsilon$ không là một chặn trên của A

(i) $x \le m_0 \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong ℝ sao cho $x \le b$ với mọi $x \in A$, thì $m_0 \le b$

Lúc đó $m_0 = \sup A$.

(i) $x \le c \quad \forall x \in A$,

(ii) Nếu có một b trong ℝ sao cho $x \le b$ với mọi $x \in A$, thì $c \le b$

(i) $x \le c \quad \forall x \in A$

(ii) Nếu có một b trong ℝ sao cho $x \le b$ với mọi $x \in A$, thì $c \le b$

m là một chặn trên của A : $y \le m \quad \forall y \in A$

m không là một chặn trên của A: $\exists y \in A$ sao cho $m \le y$

$\exists y \in A$ sao cho $c - \varepsilon < y$?

Theo QTGT 3, ta viết lại bài toán

$x \le c \quad \forall x \in A$ (1)

"$t \le b \quad \forall t \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le b$" (2)

? Tìm $y \in A$ sao cho $c - \varepsilon < y$ (3)

$x \le c \quad \forall\ x \in A$ (1)

"$t \le b \quad \forall\ t \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le b$" (2)

? Tìm $y \in A$ sao cho $c - \varepsilon < y$ (3)

Ta thấy không có gì rõ ràng từ các giả thiết (1) và (2) có thể chứng minh (3). Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng

$y \le c - \varepsilon \qquad \forall y \in A$

Theo QTGT 3, ta viết lại bài toán

$x \le c \quad \forall\ x \in A$ (1)

"$t \le b \quad \forall\ t \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le b$" (2)

$y \le c - \varepsilon \qquad \forall y \in A$ (3')

230

$x \le c \quad \forall\ x \in A$ (1)

"$t \le b \quad \forall\ t \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le b$" (2)

$y \le c - \varepsilon \qquad \forall y \in A$ (3')

Vì c là một số đã định sẵn và b và $c - \varepsilon$ là hai số chưa biết rõ, nên ta có hai yếu tố giống giống khác khác" là "$t \le b$" và "$y \le c - \varepsilon$". Làm chúng giống nhau : chọn $b = c - \varepsilon$, viết lại (2)

$x \le c \quad \forall\ x \in A$ (1)

"$y \le c - \varepsilon \quad \forall y \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le c - \varepsilon$" (2')

$y \le c - \varepsilon \qquad \forall y \in A$ (3')

$c \le c - \varepsilon$ Vô lý

231

Bài toán 16b. Cho A là một tập khác trống và bị chặn trên bởi c trong $\mathbb{R}$. Giả sử với mọi số thực dương ε, $c - \varepsilon$ không là một chặn trên của A. Chứng minh $c = \sup A$.

$x \le c \qquad \forall x \in A$ (1)

Cho $\varepsilon > 0$, có $s_\varepsilon \in A$: $c - \varepsilon < s_\varepsilon$ (2)

"$t \le b \quad \forall\ t \in A$" $\Rightarrow$ "$c \le b$" ? (3)

Ta thấy không có gì rõ ràng từ các giả thiết (1) và (2) có thể chứng minh (3). Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng. Viết (3) ra dạng cơ bản : $\forall\, b \in \{s : t \le s\ \forall t \in A\} : c \le b$. Vậy giả thiết phản chứng như sau

Có b, $t \le b \quad \forall\ t \in A$ và $b < c$ (4)

232

$x \le c \qquad \forall x \in A$ (1)

Cho $\varepsilon > 0$, có $s_\varepsilon \in A$: $c - \varepsilon < s_\varepsilon$ (2)

Có b, $t \le b \quad \forall\ t \in A$ và $b < c$ (4)

Theo KTGT 4 và QTGT 5, ta viết "$b < c$" mạnh lên và cùng dạng với "$c - \varepsilon < s_\varepsilon$"

Có b, $\alpha > 0$, $t \le b \quad \forall\ t \in A$ và $b < c - \alpha$ (4')

Theo QTGT 8, ta làm hai yếu tố : "$c - \varepsilon < s_\varepsilon$" và "$b < c-\alpha$" giống nhau hơn: chọn $\varepsilon = \alpha$. Ta viết lại bài toán

$x \le c \qquad \forall x \in A$ (1)

Cho $\varepsilon = \alpha > 0$, có $s_\alpha \in A$: $c - \alpha < s_\alpha$ (2')

Có b, $\alpha > 0$, $t \le b \quad \forall\ t \in A$ và $b < c - \alpha$ (4')

$x \le c \qquad \forall x \in A \qquad (1)$

Cho $\varepsilon = \alpha > 0$, có $s_\alpha \in A$: $c - \alpha < s_\alpha$ (2')

Có b , $\alpha > 0$, $t \le b \quad \forall t \in A$ và $b < c - \alpha$ (4')

Theo QTGT 6, ta xét hai yếu tô "giống giống khác khác" : $s_\alpha \in A$ và $t \in A$. Ta làm chúng giống nhau : đặt $t = s_\alpha$. Ta viết lại bài toán.

$x \le c \qquad \forall x \in A \qquad (1)$

Cho $\varepsilon = \alpha > 0$, có $s_\alpha \in A$: $c - \alpha < s_\alpha$ (2')

Có b , $\alpha > 0$, $s_\alpha \le b$ và $b < c - \alpha$ (4")

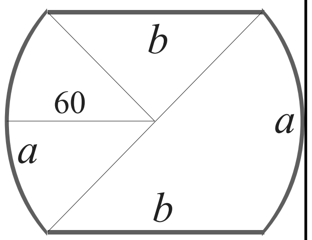
Ta thấy có vô lý : $c - \alpha < s_\alpha \le b$ và $b < c - \alpha$

234

CHƯƠNG NĂM

DÃY VÀ CHUỖI SỐ THỰC

Để xây dựng một rào ngăn khán giả tràn vào sân thi đấu bóng đá, ta cần tính chu vi p của một hình như bên cạnh. Hình này gồm hai cung tròn và hai đoạn thẳng, mỗi cung là một phần tư của một đường tròn có bán kính 60 mét.



Dùng các công thức đơn giản ta tính được

$$p = (60\pi + 120\sqrt{2}) \text{ mét}$$

Công thức trên quá tốt về mặt lý thuyết. Nhưng khi đưa vào các đề án thi công thực tế, chúng ta phải dùng một trong các giá trị của p như sau

$$p = 60\times 3{,}14 + 120 \times 1{,}41 ;$$
$$p = 60\times 3{,}141 + 120 \times 1{,}414 ;$$
$$p = 60\times 3{,}1416 + 120 \times 1{,}4142 .$$

Như vậy trong thực tế, một số số thực thường được thay thế bằng các giá trị xấp xĩ của chúng.

Thí dụ , người thường đồng nhất π với một trong các số {3,14; 3,141; 3,1416}, và $\sqrt{2}$ với một trong các số {1,41; 1,414; 1,4142}

Nay ta xem cách mô hình ý tưởng trên của các nhà toán học .

Định nghĩa . Cho f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, đặt $a_n = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta nói $\{a_n\}$ là một dãy số thực.

Thí dụ 1. $\{sin(n^3 + 2n)\}$ là một dãy số thực

Thí dụ 2. Đặt $a_1 = 3{,}14$, $a_2 = 3{,}141$, $a_3 = 3{,}1415$,

$a_4 = 3{,}14159$, $a_5 = 3{,}141592$, $a_6 = 3{,}1415926$,

$a_7 = 3{,}14159265$, $a_8 = 3{,}141592653$, $a_9 = 3{,}1415926535$, ... Đây là dãy số giúp chúng ta chọn các giá trị gần đúng của số π theo các sai số cho phép trong các tính toán cụ thể .

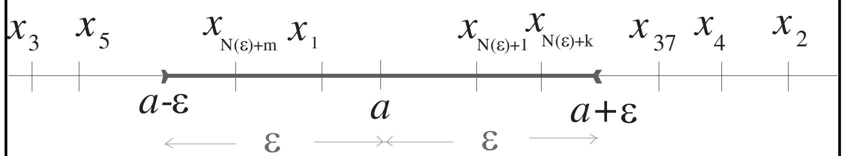
Ta xem mô hình toán học của ý tưởng đồng nhất một số thực a với một dãy các giá tri xấp xĩ của nó như sau

Định nghĩa . Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a.

Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{sao cho}$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$$



Bài toán 18. Chứng minh $\{n^{-1}\}$ hội tụ về 0 .

Theo QTGT 12, ta làm rõ yếu tố hội tụ .

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| n^{-1} - 0 | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Theo QTGT 1, ta viết lại phần chứng minh như sau

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Theo KTGT 5, ta dùng tính chất Archimède sau

Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương m sao cho $y < mx$. (hay $m^{-1}y < x$).

Ở đây $y = 1$ và $x = 1$

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ sao cho $\varepsilon^{-1} < m$ (2)

Theo QTGT 6, so sánh các khác biệt giữa (1) và (2), ta thấy đó là "$\exists\, N(\varepsilon)$ " và "$\exists\, m$". Ta làm chúng giống nhau: đặt $N(\varepsilon) = m$. Theo QTGT 5, ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $N(\varepsilon)^{-1} < \varepsilon$ (2')

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$n^{-1} < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $N(\varepsilon)^{-1} < \varepsilon$ (2')

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" của (1) và (2'): "$n^{-1} < \varepsilon$ " và "$N(\varepsilon)^{-1} < \varepsilon$". Để làm các yếu tố này giống nhau hơn, ta viết "$n > N(\varepsilon)$ " ra dạng của chúng : "$n^{-1} < N(\varepsilon)^{-1}$" . Từ đó ta có : $n^{-1} < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon)$.

Bài toán 19. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực sao cho có một số thực dương C để cho

$$| x_n | \le n^{-1}C \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về 0 .

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n - 0 | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$$

Theo QTGT 3, ta viết lại bài toán như sau

$$| x_n | \le n^{-1}C \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} . \qquad (1)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$| x_n | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (2)$$

$|x_n| \leq n^{-1}C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (2)

Nếu một số bị bé hơn một số cụ thể hơn, thay vì chặn trên trực tiếp số đó, ta cò thể chặn trên số cụ thể tương ứng. Ở đây thay vì xét "$|x_n| < \varepsilon$" ta xét "$n^{-1}C < \varepsilon$".

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$n^{-1}C < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong (3) cùng dạng.

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (4)

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (4)

Theo KTGT 5, ta dùng tính chất Archimède : Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có số nguyên dương m sao cho $y < mx$. (hay $m^{-1}y < x$). Ở đây $y = \varepsilon^{-1}C$ và $x = 1$

$\exists m \in \mathbb{N}$ sao cho $\varepsilon^{-1}C < m$ (5)

Theo QTGT 6, so sánh các khác biệt giữa (4) và (5), ta thấy đó là "$\exists N(\varepsilon)$" và "$\exists m$". Ta làm chúng giống nhau: đặt $N(\varepsilon) = m$. Theo QTGT 5, ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (4)

"$n > N(\varepsilon) = m$" $\Rightarrow$ "$n > \varepsilon^{-1}C$"

Có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\varepsilon^{-1}C < N(\varepsilon)$ (5)

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (4)

Có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $\varepsilon^{-1}C < N(\varepsilon)$ (5)

"$n > N(\varepsilon) = m$" $\Rightarrow$ "$n > \varepsilon^{-1}C$"

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" của (4) và (5): "$\varepsilon^{-1}C < n$" và "$\varepsilon^{-1}C < N(\varepsilon)$". Để làm các yếu tố này giống nhau hơn, ta dùng "$n > N(\varepsilon)$". Từ đó ta có : $\varepsilon^{-1}C < n \quad \forall n > N(\varepsilon)$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6b

Nếu một số bị bé hơn một số cụ thể hơn, thay vì chặn trên trực tiếp số đó, ta cò thể chặn trên số cụ thể tương ứng.

Bài toán 20. Chứng minh $\{2^{-n}\}$ hội tụ về 0 .

Theo QTGT 12, ta làm rõ yếu tố hội tụ .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|2^{-n} - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$

Theo QTGT 3, ta viết lại phần chứng minh như sau

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$2^{-n} < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\varepsilon^{-1} < 2^n \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán cùng dạng.

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\log_2 \varepsilon^{-1} < \log_2 2^n = n \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$-\log_2 \varepsilon < n \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (2)$$

Theo QTGT 7, ta chia bài toán thành hai trường hợp: $-\log_2 \varepsilon \le 0$ và $-\log_2 \varepsilon > 0$. Nếu $-\log_2 \varepsilon \le 0$, ta chọn $N(\varepsilon) = 1$. Xét trường hợp $-\log_2 \varepsilon > 0$.

Cho $\varepsilon > 0$ sao cho $-\log_2 \varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$-\log_2 \varepsilon < n \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

Theo KTGT 5, ta dùng tính chất Archimède sau

Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương m sao cho $y < mx$ (hay $m^{-1}y < x$). Ở đây $y = -\log_2 \varepsilon$ và $x = 1$.

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ sao cho } -\log_2 \varepsilon < m \quad (2)$$

Theo QTGT 6, xét các khác biệt giữa (1) và (2): "$\exists N(\varepsilon)$" và "$\exists m$". Để chúng giống nhau hơn: đặt $N(\varepsilon) = m$. Theo QTGT 5, ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$ sao cho $-\log_2 \varepsilon > 0$, tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$-\log_2 \varepsilon < n \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sao cho } -\log_2 \varepsilon < N(\varepsilon) \quad (2')$$

Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương với nhau

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| \le \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (2)$$

Theo QTGT 4, ta viết lại bài toán tránh cùng ký hiệu

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$$

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |x_m - a| \le \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon') \quad (2)$$

Ta chứng minh "(1) $\Rightarrow$ (2)" và "(2) $\Rightarrow$ (1)".

Xét "(1) $\Rightarrow$ (2)"

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|x_m - a| \le \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|x_m - a| \le \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "$|x_n - a| < \varepsilon$" và "$|x_m - a| \le \varepsilon'$". Ta làm chúng giống nhau: Cho $\varepsilon' > 0$, chọn $\varepsilon = \varepsilon'$. Ta viết lại (1)

Cho $\varepsilon' = \varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - a| < \varepsilon = \varepsilon' \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1')$$

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (2) và (1') : "$m > M(\varepsilon')$" và "$n > N(\varepsilon)$". Ta làm chúng giống nhau: chọn $M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$.

Xét "(2) ⇒ (1)"

Cho ε'> 0, có M(ε')∈ℕ : $|x_m - a| \le \varepsilon'$ ∀ m > M(ε') (2)

Cho ε > 0, tìm N(ε)∈ℕ: $|x_n - a| < \varepsilon$ ∀ n > N(ε) (1)

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "$| x_n- a | \le \varepsilon'$ " và "$|x_m - a | < \varepsilon$ ". Ta làm chúng giống nhau: Cho ε'> 0, chọn ε = 2ε'. Ta viết lại (1)

Cho ε = ε' > 0, có M(ε') ∈ℕ:

$$| x_n - a | < 2\varepsilon' = \varepsilon \quad \forall\, n > M(\varepsilon') \qquad (1')$$

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (2) và (1') : "m > M(ε') " và "n > N(ε) ". Ta làm chúng giống nhau: chọn N(ε) = M(ε').

Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương với nhau

∀ε > 0 ∃ N(ε)∈ℕ : $| x_n - a | < \varepsilon$ ∀ n > N(ε) (1)

∀ε > 0 ∃ N(ε)∈ℕ : $| x_n- a| < \varepsilon$ ∀ n ≥ N(ε) (2)

Theo QTGT 4, ta viết lại bài toán tránh cùng ký hiệu

Cho ε > 0, có N(ε)∈ℕ : $| x_n - a | < \varepsilon$ ∀ n > N(ε) (1)

Cho ε'> 0, tìm M(ε')∈ℕ : $|x_m - a| < \varepsilon'$ ∀ m ≥ M(ε') (2)

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "n > N(ε)" và "m ≥ M(ε')". Ta làm chúng giống nhau: để ý "n > N(ε)" tương đương với "n ≥ N(ε)+1"

Ta viết lại (1) và (2)

Cho ε > 0, có N(ε)∈ℕ : $| x_n - a | < \varepsilon$ ∀ n ≥ N(ε) +1 (1)

Cho ε'> 0, tìm M(ε')∈ℕ : $|x_m - a| < \varepsilon'$ ∀ m ≥ M(ε') (2)

Cho ε > 0, có N(ε)∈ℕ : $| x_n - a | < \varepsilon$ ∀ n ≥ N(ε) +1 (1)

Cho ε'> 0, tìm M(ε')∈ℕ : $|x_m - a| < \varepsilon'$ ∀ m ≥ M(ε') (2)

Theo QTGT 6, xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (2) và (1') : "n ≥ N(ε) +1 " và "m ≥ M(ε') ". Ta làm chúng giống nhau: chọn M(ε') = N(ε) +1 .

Bài tập tự làm

Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương với nhau

∀ε > 0 ∃ N(ε)∈ℕ : $| x_n - a | < \varepsilon$ ∀ n > N(ε) (1)

∀ε > 0 ∃ N(ε)∈ℕ : $| x_n- a| \le \varepsilon$ ∀ n ≥ N(ε) (2)

Định nghĩa . Cho g là một ánh xạ từ tập hợp các số nguyên dương ℕ vào ℕ . Đặt

$$n_k = g(k) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

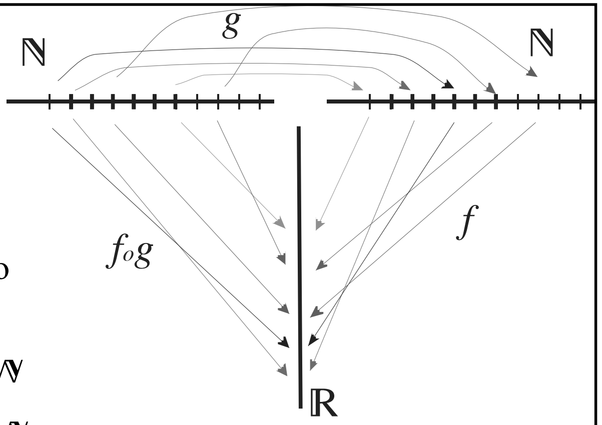
Ta dùng $\{n_k\}$ thay cho $\{x_n\}$ vì ta thường ký hiệu các số nguyên dương là n

$g(k) = 12$ ∀ k ∈ ℕ $\quad n_k = 12$ ∀ k ∈ ℕ

$g(k) = k$ ∀ k ∈ ℕ $\quad n_k = k$ ∀ k ∈ ℕ

$g(k) = 3k$ ∀ k ∈ ℕ $\quad n_k = 3k$ ∀ k ∈ ℕ

$g(k) = k^2 - 8k+100$ ∀ k ∈ ℕ $\quad n_k = k^2 -8k + 100$ ∀ k ∈ ℕ



Cho g là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ và f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt

$x_n = f(n)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b_k = fog(k)\ \forall k \in \mathbb{N}$

Ta thấy fog cũng là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$.

Vậy $\{x_n\}$ và $\{b_k\}$ là các dãy số thực.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực và một số thực a. Ta nói dãy $\{x_n\}$ hội tụ về a nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$$

Cho g là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{N}$ và f là một ánh xạ từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$. Đặt

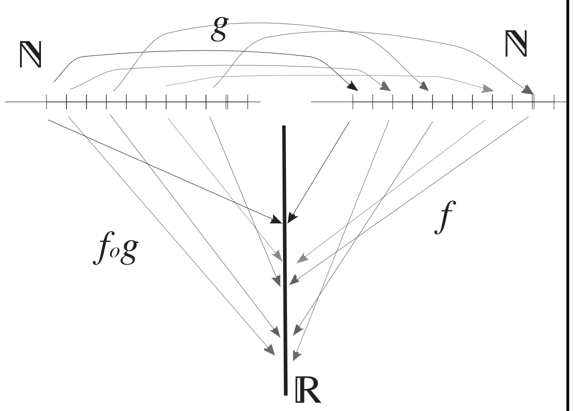
$$x_n = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = fog(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$b_k = x_{g(k)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$k \leq g(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nếu g tăng nghiêm cách thì $k \leq g(k)\ \ \forall k \in \mathbb{N}$



Ta nói $\{b_k\}$ là một dãy con của $\{x_n\}$ nếu g tăng nghiêm cách. Lúc đó ta ký hiệu

$$b_k = x_{n_k}$$

$$(b_n = fog(n) = b_n = f(g(n)) = f(n_k))$$

Nếu $g(n) = 2n$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{2n}

Nếu $g(n) = 2n+1$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{2n+1}

Nếu $g(n) = 5n+3$ ta ký hiệu x_{n_k} là x_{5n+3}

Bài toán 21. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Chứng minh ba điều sau đây tương đương

$\{a_n\}$ hội tụ về a trong $\mathbb{R}$. (1)

$\{a_n - a\}$ hội tụ về 0 trong $\mathbb{R}$. (2)

$\{|a_n - a|\}$ hội tụ về 0 trong $\mathbb{R}$. (3)

Theo QTGT 1, ta làm rõ các yếu tố bài toán

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|(x_m - a) - 0| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$ (2)

$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$||x_k - a| - 0| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$ (3)

Theo QTGT 1, ta làm rõ các yếu tố của bài toán

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |(x_m - a) - 0| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$ (2)

$\forall \varepsilon'' > 0, \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N} : ||x_k - a| - 0| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$ (3)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0, \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N} : |x_m - a| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon')$ (2)

$\forall \varepsilon'' > 0, \exists K(\varepsilon'') \in \mathbb{N} : |x_k - a| < \varepsilon'' \quad \forall k > K(\varepsilon'')$ (3)

Để tính $s = \pi + \sqrt{2}$ chúng ta thường làm như sau

$s = 3{,}14 + 1{,}41$ hoặc

$s = 3{,}141 + 1{,}414$ hoặc

$s = 3{,}1416 + 1{,}4142$ . . .

Ta thử mô hình toán học cho việc làm thông thường này như sau.

Đặt $a_1 = 3{,}14$, $a_2 = 3{,}141$, $a_3 = 3{,}1415$, $a_4 = 3{,}14159$, $a_5 = 3{,}141592$, $a_6 = 3{,}1415926$, $a_7 = 3{,}14159265$, $a_8 = 3{,}141592653$, $a_9 = 3{,}1415926535$, ...,
$b_1 = 1.41$, $b_2 = 1.414$, $b_3 = 1.4142$, $b_4 = 1.41421$, $b_5 = 1.414213$, $b_6 = 1.4142135$, $b_7 = 1.41421356$, $b_8 = 1.414213562$, $b_9 = 1.4142135623$, ...,

Ta thấy các dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt là các dãy các số xấp xỉ π và $\sqrt{2}$, hay $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ lần lượt hội tụ về π và $\sqrt{2}$

Nay ta đặt

$s_1 = a_1 + b_1$,
$s_2 = a_2 + b_2$,
$s_3 = a_3 + b_3$,
$s_4 = a_4 + b_4$,
$s_5 = a_5 + b_5$,
. . .

Theo cách làm thông thường, chúng ta chấp nhận $\{s_n\}$ là dãy số thực xấp xỉ cho số $s = \pi + \sqrt{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh việc chấp nhận này là đúng theo bài toán sau.

Bài toán 22. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b . Đặt $c = a + b$ và $c_n = a_n + b_n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c .

Theo QTGT 3, ta viết lại bài toán

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho ε' > 0, có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$| b_m - b | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho ε" > 0, tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| c_k - c | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (3)

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho ε' > 0, có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$| b_m - b | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho ε" > 0, tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| c_k - c | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng.

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| (a_k + b_k) - (a + b) | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (4)

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho ε' > 0, có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$| b_m - b | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| (a_k + b_k) - (a + b) | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (4)

Theo QTGT 5, ta viết $| (a_k + b_k) - (a + b)|$ cùng dạng với $|a_n - a|$ và $| b_m - a |$.

$(a_k + b_k) - (a + b) = (a_k - a) + (b_k - b)$

$|(a_k + b_k) - (a + b)| \le | a_k - a | + | b_k - b |$

Theo KTGT 6B, ta viết (4) thành

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| a_k - a | + |b_k - b | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (4)

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho ε' > 0, có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$| b_m - a | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$| a_k - a | + |b_k - b | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (4)

Theo QTGT 5, ta viết (2) và (3) cùng dạng với (4)

Cho ε > 0 và ε' > 0, có N(ε) và M(ε') ∈ ℕ sao cho

$| a_k - a | + |b_k - b | < \varepsilon \qquad \forall\, k > N(\varepsilon)$ và $k > M(\varepsilon')$ (5)

Ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$ và $\varepsilon' > 0$, có $N(\varepsilon)$ và $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_k - a | + |b_k - b| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall\, k > \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$ (5)

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_k - a | + |b_k - b| < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (4)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán: "$< \varepsilon''$ " và "$< \varepsilon + \varepsilon'$ ". Để làm chúng giống nhau hơn: Cho $\varepsilon'' > 0$, ta chọn $\varepsilon = \varepsilon' = ½\, \varepsilon''$, và viết lại (4)

Cho $\varepsilon'' > 0$:

$| (a_k + b_k) - (a + b)| < \varepsilon'' \quad \forall\, k > \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$ (6)

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6c

Nếu $\{a_n\}$ hội tụ về a. Ta có thể ước lượng $|a_n|$ theo $|a|$ như sau.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

$|a_n| \le | a_n - a| + |a| \le |a| + 1 \qquad \forall\, n > N(1)$ (2)

Nếu $a \neq 0$:

$2^{-1}|a| \le |a| - | a_n - a| \le | a_n| \qquad \forall\, n > N(2^{-1}|a|)$ (3)

Bài toán 22. Cho hai số thực a và b và hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$. Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a và $\{b_n\}$ hội tụ về b . Đặt $c = a.b$ và $c_n = a_n b_n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về c .

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| b_m - a | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_k . b_k - a.b | < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (3)

Theo QTGT 5 và KTGT 6c, ta viết (1), (2),(3) cùng dạng.

$a_k . b_k - a.b = (a_k - a)b_k + a(b_k - b)$

$|a_k . b_k - a.b| = |(ak - a)b_k + a(b_k - b)| \le |a_k - a||b_k| + |a||b_k - b|$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| a_n - a | < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| b_m - a | < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_k . b_k - a.b| \le |a_k - a||b_k| + |a||b_k - b| < \varepsilon'' \quad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (3')

Theo QTGT 5 và KTGT 6c, ta viết (1), (2),(3) cùng dạng.

$|a_k - a||b_k| + |a||b_k - b| < \varepsilon|b_k| + |a|\varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon), k > M(\varepsilon')$ (4)

Theo KTGT 6c, ta viết (4) thành

$\varepsilon|b_k| + |a|\varepsilon \le \varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' \;\forall\, k > N(\varepsilon), k > M(\varepsilon'), k > M(1)$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_m - b| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon') \quad (2)$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$\varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' < \varepsilon'' \ \forall k > M(\varepsilon')\ k > N(\varepsilon), k > M(\varepsilon'), k > M(1)$

Theo KTGT 6b, ta viết lại (4)

Cho một $\varepsilon, \varepsilon'$ và $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_k - a|(|b|+1) + |a||b_k - b| < \varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' < \varepsilon''$

$\forall k > K(\varepsilon''), k > M(1), k > N(\varepsilon)$ và $k > M(\varepsilon')$

Cho một $\varepsilon, \varepsilon'$ và $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_k b_k - ab| < \varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' < \varepsilon''$

$\forall k > K(\varepsilon''), k > \max\{M(1), N(\varepsilon), M(\varepsilon')\} \quad (5)$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_m - b| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon') \quad (2)$

Cho một $\varepsilon, \varepsilon'$ và $\varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_k b_k - ab| < \varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' \le \varepsilon''$

$\forall k > K(\varepsilon''), k > \max\{M(1), N(\varepsilon), M(\varepsilon')\} \quad (5)$

Theo QTGT 6, ta tập trung vào các khác biệt trong (5) và (3) , làm chúng giống nhau hơn : cho ε'' , tìm ε và ε' sao cho $\varepsilon(|b|+1) + |a|\varepsilon' \le \varepsilon''$ $\forall k > \max\{M(1), N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$. Đặt $X = \varepsilon = \varepsilon'$, xét phương trình $[X(|b|+1) + |a|X]\varepsilon \le \varepsilon''$. Ta có nghiệm $X = (|b|+1+|a|)^{-1}\varepsilon''$. Vậy ta đặt

$\varepsilon = \varepsilon' = (|b|+1+|a|)^{-1}\varepsilon''$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 7

Khi giải bất phương trình có "≤" với nhiều ẩn số. Chúng ta thử giải phương trình có "=" và các ẩn số đều bằng nhau .

Bài toán 23b. Cho số thực a khác không và dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho a_n khác không với mọi n . Giả sử $\{a_n\}$ hội tụ về a. Đặt $c_n = a_n^{-1}$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh $\{c_n\}$ hội tụ về a^{-1} .

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (1)$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|c_m - a^{-1}| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon') \quad (2)$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng.

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n^{-1} - a^{-1}| < \varepsilon' \quad \forall m > M(\varepsilon') \quad (2)$

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho ε' > 0, tìm M(ε') ∈ ℕ sao cho

$|a_m^{-1} - a^{-1}| < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon') \qquad (2)$

Theo QTGT 5 và KTGT 6c, ta viết (2) cùng dạng với (1).

$$|a_m^{-1} - a^{-1}| = \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_m - a|}{|a_m a|} \le \frac{2|a_m - a|}{a^2} \qquad \forall m > N(\frac{|a|}{2}).$$

Theo KTGT 6c, ta viết (4) thành

Cho ε' > 0, tìm M(ε') ∈ ℕ sao cho

$$|a_m^{-1} - a^{-1}| \le \frac{2|a_m - a|}{a^2} < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon'), m > N(\frac{|a|}{2})$$

Cho ε' > 0, tìm M(ε') ∈ ℕ sao cho

$$|a_m^{-1} - a| \le \frac{2\varepsilon}{a^2} < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon'), m > N(\frac{|a|}{2}), m > N(\varepsilon) \qquad (3)$$

Cho ε > 0, có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho ε > 0 và ε' > 0, tìm M(ε') ∈ ℕ sao cho

$$|a_m^{-1} - a^{-1}| \le \frac{2\varepsilon}{a^2} < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon'), m > N(\frac{|a|}{2}), m > N(\varepsilon) \qquad (3)$$

Theo QTGT 6, ta tập trung vào các khác biệt trong (1) và (3), làm chúng giống nhau hơn : cho ε', tìm ε sao cho $\varepsilon < 2^{-1}a^2\varepsilon'$. Chọn $\varepsilon = 4^{-1}a^2\varepsilon'$. Ta có

$$|a_m^{-1} - a^{-1}| < \varepsilon' \qquad \forall m > M(\varepsilon') = \max\{N(\frac{|a|}{2}), N(\varepsilon)\} \qquad (4)$$

Bài toán 24. Cho một số thực a và ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$. Giả sử

(i) $a_n \le x_n \le b_n$ với mọi số nguyên dương n .

(ii) $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ về a .

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a .

Cho một ε > 0 ta có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho một ε' > 0 ta có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$|b_m - a| < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon') \qquad (2)$

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'') \qquad (3)$

Cho một ε > 0 ta có N(ε) ∈ ℕ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n > N(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho một ε' > 0 ta có M(ε') ∈ ℕ sao cho

$|b_m - a| < \varepsilon' \qquad \forall\, m > M(\varepsilon') \qquad (2)$

Cho một ε" > 0 tìm K(ε") ∈ ℕ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon'' \qquad \forall\, k > K(\varepsilon'') \qquad (3)$

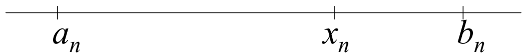
Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán cùng một dạng

$|x_k - a| \le |x_k - a_k| + |a_k - a| < |x_k - a_k| + \varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon) \quad (4)$

Nếu ta xen a vào $x_k - a_k$, ta lại gặp $x_k - a$. Khi bế tắc ta xem còn có giả thiết nào không: $a_n \le x_n \le b_n$. Khi gặp bất đẳng thức , ta nên vẽ hình.

$|x_k - a| \le |x_k - a_k| + |a_k - a| < |x_k - a_k| + \varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon)$ (4)

Nếu ta xen a vào $x_k - a_k$, ta lại gặp $x_k - a$. Khi bế tắc ta xem còn có giả thiết nào không: $a_n \le x_n \le b_n$. Khi gặp bất đẳng thức , ta nên vẽ hình.



$|x_k - a_k| \le |b_k - a_k| \le |b_k - a| + |a_k - a|$ (5)

Từ (4) và (5) ta thấy

$|x_k - a| < \varepsilon' + 2\varepsilon \quad \forall\, k > N(\varepsilon)$ và $k > M(\varepsilon')$

Theo KTGT 6b, ta viết (3) thành

Cho $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon' + 2\varepsilon < \varepsilon'' \;\forall\, k > K(\varepsilon''),\ k > \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$ (6)

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N(\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|b_m - a| < \varepsilon' \quad \forall\, m > M(\varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' > 0$ tìm $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - a| < \varepsilon' + 2\varepsilon < \varepsilon'' \;\forall\, k > K(\varepsilon''),\ k > \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$ (6)

Theo QTGT 6, ta để ý đến các khác biệt giữa (3) và (6) : "$\varepsilon' + 2\varepsilon$" và "$\varepsilon''$ ". Ta làm chúng giống nhau: cho ε'' , ta đặt $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''/3$, và đặt $K(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), M(\varepsilon')\}$.

Cho một $\varepsilon'' > 0$ có $K(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_k - a| < \varepsilon'' \quad \forall\, k > K(\varepsilon'')$ (3)

Bài toán 24b. Cho A là một tập bị chặn trên trong $\mathbb{R}$. Chứng minh có một dãy $\{x_n\}$ hội tụ trong A sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về $\alpha = \sup A$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ các yếu tố của bài toán.

$\alpha = \sup A$:

(i) $x \le \alpha \quad \forall\, x \in A$, (1)

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \le b$ với mọi $x \in A$, thì $\alpha \le b$. (2)

Tìm $x_n \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$: $|x_n - \alpha| \le \varepsilon \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng.

Tìm $x_n \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$: $0 \le \alpha - x_n \le \varepsilon \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$

Tìm $x_n \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \le x_n \le \alpha \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$

$x \le \alpha \quad \forall\, x \in A$ (1)

"$x \le b \;\; \forall\, x \in A$" $\Rightarrow$ "$\alpha \le b$" (2)

Tìm $x_n \in A$, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \le x_n \le \alpha \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$ (3)

Theo QTGT 3, ta chia bài toán làm hai : "tìm" và "hội tụ". "tìm" dễ hơn, ta làm trước. Vì $\alpha - \varepsilon$ không là chặn trên của A, ta tìm được s sao cho

$\forall\, \varepsilon > 0$, có $s \in A$: $\alpha - \varepsilon \le s \le \alpha$ (4)

Theo QTGT 6, ta xét hai yếu "giống khác khác": "$\alpha - \varepsilon \le x_n \le \alpha$" và "$\alpha - \varepsilon \le s \le \alpha$". Ta làm chúng giống nhau : viết s thành s_ε . Viết (4) thành

$\forall\, \varepsilon > 0$, có $s_\varepsilon \in A$: $\alpha - \varepsilon \le s_\varepsilon \le \alpha$ (5)

$x \leq \alpha \qquad \forall\ x \in A \qquad (1)$

"$x \leq b \quad \forall\ x \in A$" $\Rightarrow$ "$\alpha \leq b$" $\qquad (2)$

$\forall\ \varepsilon > 0$, có $s_\varepsilon \in A$: $\alpha - \varepsilon \leq s_\varepsilon \leq \alpha \qquad (5)$

Tìm $x_n \in A$, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \leq x_n \leq \alpha \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon)$ (3)

Theo QTGT 1, ta xét các yếu tố còn khác biệt giữa (1) và (2): "x_n" với "s_ε". Theo KTGT 21, ta đặt $y_m = s_\varepsilon$ với $\varepsilon = m^{-1}$. Viết lại bài toán

Có $y_m \in A$ sao cho $\alpha - m^{-1} \leq y_m \leq \alpha \qquad$ (5')

Tìm $x_n \in A$, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \leq x_n \leq \alpha \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon)$ (3)

Có $y_m \in A$ sao cho $\alpha - m^{-1} \leq y_m \leq \alpha \qquad$ (5')

Tìm $x_n \in A$, $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \leq x_n \leq \alpha \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon)$ (3)

Theo QTGT 1, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (5') và (3): "$\alpha - m^{-1}$" với "$\alpha - \varepsilon$" và "$n \geq N(\varepsilon)$". Ta thấy bài toán giải được nếu ta giải được bài toán sau bài toán

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\alpha - \varepsilon \leq \alpha - m^{-1} \leq \forall\ m \geq N(\varepsilon) \qquad (6)$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\quad m^{-1} \leq \varepsilon \qquad \forall\ m \geq N(\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon)$: $\quad \varepsilon^{-1} \leq m \qquad \forall\ m \geq N(\varepsilon) \qquad (7)$

Theo KTGT 5, ta tìm được $N(\varepsilon)$ sao cho: $\varepsilon^{-1} \leq N(\varepsilon)$. Từ đó ta có (7)

Bài toán 25. Cho hai tập con khác trống A và B trong $\mathbb{R}$. Giả sử $\quad x \leq y \qquad \forall\, x \in A, \forall\, y \in B$.

Chứng minh $\quad \sup A \leq \inf B$

Theo KTGT 11, ta phải chứng minh

$$x \leq \inf B \qquad \forall\, x \in A$$

Theo KTGT 11, ta phải chứng minh

$\forall\, x \in A$, chứng minh $\qquad x \leq y \qquad \forall\, y \in B$.

Bài toán 26. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n.$$

Chứng minh $\sup \{a_i : i \in \mathbb{N}\} \leq \inf \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Theo KTGT 11 hoặc bài toán 25, ta phải chứng minh

? $\qquad a_i \leq b_j \qquad \forall\, i, j \in \mathbb{N} \qquad (1)$

$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n. \qquad (2)$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố về cùng dạng

$a_m \leq b_n \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n \qquad (3)$

$a_n \leq b_m \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n \qquad (4)$

Theo QTGT 3, xét hai trường hợp: $i \leq j$ và $j \leq i$.

$a_m \le b_n \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n \quad (3)$

$a_n \le b_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n \quad (4)$

? $\quad a_i \le b_j \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N} \quad (1)$

Xét hai trường hợp: $i \le j$. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" : "$a_m \le b_n$" và "$a_i \le b_j$", "$m \le n$" và "$i \le j$". Làm cho chúng thật giống nhau : đặt $m = i$ và $n = j$. Từ (3) ta có (1)

Xét hai trường hợp: $j \le i$. Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" : "$a_n \le b_m$" và "$a_i \le b_j$", "$n \le m$" và "$j \le i$". Làm cho chúng thật giống nhau : đặt $n = i$ và $m = j$. Từ (4) ta có (1)

Bài toán 27. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

$$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n.$$

Chứng minh $\left[\sup_{m \in N} a_m,\ \inf_{n \in N} b_n\right] \subset \bigcap_{k \in N} [a_k, b_k]$

$[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n \quad (1)$

$\left[\sup_{m \in N} a_m,\ \inf_{n \in N} b_n\right] \subset \bigcap_{k \in N} [a_k, b_k] \quad (2)$

Theo QTGT 3, ta viết bài toán rõ ràng hơn

$a_m \le b_n,\ a_n \le b_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n \quad (3)$

$[\sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}] \subset [a_k, b_k] \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad (4)$

$a_m \le b_n,\ a_n \le b_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n \quad (3)$

$[\sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}] \subset [a_k, b_k] \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad (4)$

Theo QTGT 3, ta viết bài toán rõ ràng hơn

$a_m \le b_n \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \quad (5)$

$\sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\} \le x \le \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow a_k \le x \le b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

? "$a_m \le x \le b_n \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$" $\Rightarrow a_k \le x \le b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad (4)$

Bài toán 28. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

(i) $\quad [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ m \le n.$

(ii) $\quad \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0.$

Chứng minh $\quad \sup_{i \in N} a_i = \inf_{j \in N} b_j \quad (1)$

Theo QTGT 1, ta tìm các liên quan giữa (i), (ii) và (1).

$0 \le \inf_{j \in N} b_j - \sup_{i \in N} a_i \le b_k - a_k \quad \forall k \in N \quad (2)$

$$0 \le \inf_{j \in \mathbb{N}} b_j - \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i \le b_k - a_k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Nếu $\alpha \le \beta \le t_n$ và $\lim_{n\to\infty} t_n = \alpha$. Ta đặt $s_n = \alpha$ và $x_n = \beta$. Ta thấy $\lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$. Dùng định lý kẹp của ba dãy số, ta có $\alpha = \beta$.

Đặt $\alpha = 0$, $\beta = \inf_{j \in \mathbb{N}} b_j - \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i$ và $t_n = b_n - a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} b_j - \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i = 0$$

Bài toán 29. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \le n$.

(ii) $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$

Chứng minh $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_n - a_n - 0| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n| < \varepsilon' \qquad \forall n > M(\varepsilon')$

$|a_n - \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n| \le |b_n - a_n| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon)$

Bài toán 30. Cho ba dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ và $\{x_n\}$ sao cho

(i) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \quad \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \le n$,

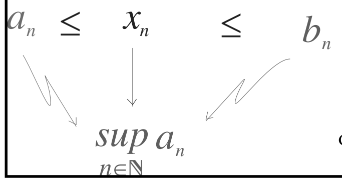
(ii) $\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = 0$,

(iii) $x_n \in [a_n, b_n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ.

$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ (bài toán 29)

$a_n \le x_n \le b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.



Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho J là một tập con trong $\mathbb{N}$ và J có vô hạn phần tử.

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$n_1 = \min J$

$n_2 = \min J \setminus [0, n_1]$

$n_3 = \min J \setminus [0, n_2]$

$n_{k+1} = \min J \setminus [0, n_k] \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong $\mathbb{N}$

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

KIẾN THỨC CƠ BẢN 5

Để tìm một dãy con của một dãy số thực $\{x_n\}$. Ta có thể tìm J là một tập con có vô hạn phần tử trong $\mathbb{N}$.

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$n_1 = \min J$

$n_2 = \min J \setminus [0, n_1]$

$n_3 = \min J \setminus [0, n_2]$

$n_{k+1} = \min J \setminus [0, n_k] \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

Lúc đó $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Lưu ý $n_k \in J$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Bài toán 31. Cho một ánh xạ f từ $\mathbb{N}$ vào tập $\{1,2, . . , 9\}$ Đặt $x_n = f(n)$ với mọi số nguyên dương n. Tìm một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ .

Bài toán gồm hai phần: tìm một dãy con, chứng minh dãy con hội tụ.

tìm một dãy con

Theo KTCB 5, ta tìm một tập con J có vô hạn phần tử trong $\mathbb{N}$. Lúc đó $n_k \in J$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vậy để $\{x_{n_k}\}$ hội tụ, ta nên chọn J sao cho $\{x_{n_k}\}$ là dãy hằng.

Đặt $I_m = \{n \in \mathbb{N} : x_n = m\}$ với mọi $m \in \{1,2, . . , 9\}$.

Đặt $I_m = \{n \in \mathbb{N} : x_n = m\}$ với mọi $m \in \{1,2, . . , 9\}$.

Ta sẽ chọn J là một trong các I_m . Một điều kiện cho J : J có vô hạn phần tử. Tìm m sao cho I_m có vô hạn phần tử.

$i \in \mathbb{N} \Rightarrow\ x_i = f(i) \in \{1,2, . . , 9\}$

$i \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ m \in \{1,2, . . , 9\} : i \in I_m$

$N \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_9$

Có $r \in \{1,2, . . , 9\}$ sao cho I_r là tập có vô hạn phần tử

Đặt $J = I_r$ và lập dãy $\{x_{n_k}\}$ tương ứng với J .

Vì $n_k \in J = I_r$, $x_{n_k} = r$ với mọi số nguyên dương k .

Cho $\varepsilon > 0$, ta thấy : $|x_{n_k} - r| = 0 < \varepsilon \quad \forall\ k \geq 1.$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = r$

KIẾN THỨC CƠ BẢN 6

Cách thứ hai để tìm dãy con

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho $\{J_n\}$ là một họ đếm được các tập con trong $\mathbb{N}$. Giả sử J_n có vô hạn phần tử và $J_{n+1} \subset J_n$ với mọi số nguyên dương n .

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$n_1 = \min J_1$

$n_2 = \min J_2 \setminus [0, n_1]$

$n_3 = \min J_3 \setminus [0, n_2]$

$n_{k+1} = \min J_{k+1} \setminus [0, n_k] \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

Ta thấy $\{n_k\}$ là một dãy đơn điệu tăng trong $\mathbb{N}$

Vậy $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$

Định lý (Bolzano- Weierstrass) *Cho a và b là hai số thực và* $\{x_n\}$ *là một dãy số thực. Giả sử* $a < b$ *và* $x_n \in [a, b]$ *với mọi số nguyên* $n \in \mathbb{N}$. *Lúc đó có một dãy con* $\{x_{n_k}\}$ *của dãy* $\{x_n\}$ *sao cho* $\{x_{n_k}\}$ *hội tụ về x* trong $[a, b]$.

$J'_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \}$ $J''_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \}$

Vì $J'_1 \cup J''_1 = \mathbb{N}$. Nên một trong hai tập J'_1 và J''_1 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_1 có vô hạn phần tử .

Đặt $[a_1,b_1] =$, ta có $[a_1,b_1] \subset [a,b]$ và $(b_1 - a_1) = 2^{-1}(b - a)$

$J'_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \}$ $J''_1 = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in \}$

$J'_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \}$ $J''_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \}$

Vì $J'_2 \cup J''_2 = J''_1$. Nên một trong hai tập J'_2 và J''_2 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_2 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_2 = J''_2$.

Đặt $[a_2,b_2] =$

Ta có : $J_2 \subset J_1$, $[a_2 ,b_2] \subset [a_1 ,b_1]$, và $(b_2 - a_2) = 2^{-2}(b - a)$

$J'_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \}$ $J''_2 = \{ n \in J'_1 : x_n \in \}$

$J'_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \}$ $J''_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \}$

Vì $J'_3 \cup J''_3 = J''_2$. Nên một trong hai tập J'_3 và J''_3 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J''_3 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_3 = J''_3$.

Đặt $[a_3,b_3] =$

Ta có : $J_3 \subset J_2 \subset J_1$, $[a_3 ,b_3] \subset [a_2 ,b_2] \subset [a_1 ,b_1]$, và

$$(b_3 - a_3) = 2^{-3}(b - a)$$

$J'_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \}$ $J''_3 = \{ n \in J''_2 : x_n \in \}$

$J'_4 = \{ n \in J''_3 : x_n \in \}$ $J''_4 = \{ n \in J''_3 : x_n \in \}$

Vì $J'_4 \cup J''_4 = J''_3$. Nên một trong hai tập J'_4 và J''_4 phải có vô hạn phần tử. Ta giả sử J'_4 có vô hạn phần tử . Và đặt $J_4 = J'_4$.

Đặt $[a_4,b_4] =$

Ta có : $J_4 \subset J_3 \subset J_2 \subset J_1$,

$[a_4 ,b_4] \subset [a_3 ,b_3] \subset [a_2 ,b_2] \subset [a_1 ,b_1]$, và

$(b_4 - a_4) = 2^{-4}(b - a)$

$x_n \in [a, b]$ *với mọi số nguyên* $n \in \mathbb{N}$ *. Lúc đó có một dãy con* $\{x_{n_k}\}$ *của dãy* $\{x_n\}$ *sao cho* $\{x_{n_k}\}$ *hội tụ về* x trong $[a, b]$.

Dùng qui nạp toán học, ta tìm được các số thực $a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ sao cho $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ và

- $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$
- $(b_n - a_n) = 2^{-n}(b - a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- Nếu đặt $J_n = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a_n, b_n]\}$, thì J_n có vô hạn phần tử và $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \supset J_n \supset \ldots$

Lúc đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x = \sup\{a_n : n \in N\}$

Chọn dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $n_k \in J_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ta có $a_k \le x_{n_k} \le b_k$. Vậy $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 14

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Để tìm một dãy con hội tụ của $\{x_n\}$, ta có thể dùng định lý Bolzano- Weierstrass : chứng minh có hai số thực a và b sao cho $x_n \in [a, b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa . Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực . Ta nói dãy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall n > m > N(\varepsilon)$$

Bài toán 32. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực hội tụ về a. Chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (1) và (2): "$x_n - a$" và "$x_k - x_m$", "$n >$" và "$m > k >$", và làm chúng giống nhau. Ta thấy dễ làm "$x_n - a$" và "$x_k - x_m$" giống nhau, nên ta làm việc này trước.

$$\boxed{|x_k - x_m| \leq |x_k - a + a - x_m| \leq |x_k - a| + |a - x_m|}$$

$$\boxed{|x_k - x_m| \leq 2\varepsilon \qquad \forall m > k > N(\varepsilon) \qquad (3)}$$

$$\boxed{|x_k - x_m| \leq 2\varepsilon \qquad \forall m > k > N(\varepsilon) \qquad (3)}$$

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (2) và (3): "ε'" và "2ε", "$M(\varepsilon')$" và "$N(\varepsilon)$", và làm chúng giống nhau như sau. Cho ε', đặt $\varepsilon = \varepsilon'/2$, đặt $M(\varepsilon') = N(\varepsilon)$. Từ (3) ta có

Cho một $\varepsilon' > 0$ tìm được $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_k - x_m| < \varepsilon' \qquad \forall m > k > M(\varepsilon') \qquad (2)$$

Bài toán 33. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy. Tìm một số thực M sao cho $|x_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq N(\varepsilon) \qquad (1)$$

Tìm một số thực M sao cho $|x_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (2)

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (1) và (2): "$|x_n - x_m|$" và "$|x_k|$", "ε" và "M", "$n > m \geq N(\varepsilon)$" và "$k \in \mathbb{N}$". Ta làm các khác biệt này giống nhau

$$|x_k| \leq |x_k - x_m| + |x_m| < \varepsilon + |x_m| \qquad \forall k > m \geq N(\varepsilon) \quad (3)$$

Tìm một số thực M sao cho $|x_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (2)

$$|x_k| < \varepsilon + |x_m| \qquad \forall k > m \geq N(\varepsilon) \quad (3)$$

Tìm một số thực M sao cho $|x_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (2)

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (3) và (2) : "$\varepsilon + |x_m|$" và "M", "$k > m \geq N(\varepsilon)$" và "$k \in \mathbb{N}$". Ta làm các khác biệt này giống nhau. Để $\varepsilon + |x_m|$ gần một hằng số hơn, ta chọn $\varepsilon = 1$ và $m = N(1)$.

$$|x_k| < 1 + |x_{N(1)}| \qquad \forall k > N(1) \qquad (4)$$

Tìm một số thực M sao cho $|x_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (2)

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (4) và (2) : "$k > N(1)$" và "$k \in \mathbb{N}$". Sự khác biệt này ở các $k \in \{1, \ldots, N(1)\}$. Ta khắc phục sự khác biệt này.

$$|x_k| < |x_1| + \ldots + |x_{N(1)}| \qquad \forall k \in \{1, \ldots, N(1)\} \quad (5)$$

$| x_k | < 1 + | x_{N(1)}| \quad \forall\, k > N(1) \quad (4)$

$| x_k | < |x_1| + \ldots + | x_{N(1)} | \quad \forall\, k \in \{1, \ldots, N(1)\} \quad (5)$

Tìm một số thực M sao cho $| x_k | \le M \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad (2)$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (4), (5) và (2) : "$1 + |x_{N(1)}|$" và "$|x_1| + \ldots + | x_{N(1)}|$" và "$M$", "$k > N(1)$" và "$k \in \{1, \ldots, N(1)\}$" và "$k \in \mathbb{N}$". Ta làm các khác biệt này giống nhau. Đặt

$M = 1 + |x_1| + \ldots + | x_{N(1)}|$. Ta có (2)

Có một số thực M sao cho $| x_k | \le M \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Bài toán 34. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Giả sử $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x_m | < \varepsilon \quad \forall\, n > m > N(\varepsilon) \quad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_{n_k} - a | < \varepsilon' \quad \forall\, k > K(\varepsilon') \quad (2)$

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_m - a | < \varepsilon'' \quad \forall\, m > M(\varepsilon'') \quad (3)$

$| x_n - x_m | < \varepsilon \quad \forall\, n > m > N(\varepsilon) \quad (1)$

$| x_{n_k} - a | < \varepsilon' \quad \forall\, k > K(\varepsilon') \quad (2)$

$| x_m - a | < \varepsilon'' \quad \forall\, m > M(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (1), (2) và (3): "$x_n - x_m$" và "$x_{n_k} - a$" và "$x_m - a$", "$n > m \ge N(\varepsilon)$" và "$k > K(\varepsilon')$" và "$m > M(\varepsilon'')$". Ta làm các khác biệt này giống nhau

$| x_m - a | \le | x_m - x_n | + | x_n - a| < \varepsilon + | x_n - a | \quad \forall\, n \ge m \ge N(\varepsilon)$

$| x_m - a | < \varepsilon + | x_n - a | \quad \forall\, n \ge m \ge N(\varepsilon) \quad (4)$

$| x_{n_k} - a | < \varepsilon' \quad \forall\, k > K(\varepsilon') \quad (2)$

$| x_m - a | < \varepsilon + | x_n - a | \quad \forall\, n \ge m \ge N(\varepsilon) \quad (4)$

$| x_m - a | < \varepsilon'' \quad \forall\, m > M(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (2), (4) và (3): "$x_{n_k} - a$" và "$x_n - a$" và "$x_m - a$", "$n > m \ge N(\varepsilon)$" và "$k > K(\varepsilon')$" và "$m > M(\varepsilon'')$". Ta làm các khác biệt này giống nhau. Ta cố gắng làm n và n_k giống nhau, lúc đó ta cần $n_k \ge m$. Việc này gợi ta chọn $n = n_m$.

$| x_m - a | < \varepsilon + |x_{n_m} - a | \quad \forall\, m \ge N(\varepsilon) , \quad (4)$

$| x_m - a | < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall\, m \ge N(\varepsilon) , m > K(\varepsilon') \quad (5)$

$| x_m - a | < \varepsilon + \varepsilon' \quad \forall\, m \geq N(\varepsilon)\,,\, m > K(\varepsilon')$ (5)

$| x_m - a | < \varepsilon'' \quad \forall\, m > M(\varepsilon'')$ (3)

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (5) và (3): "$\varepsilon + \varepsilon'$" và "$\varepsilon''$", "$m > N(\varepsilon)$, $n > K(\varepsilon')$" và "$m > M(\varepsilon'')$". Ta làm các khác biệt này giống nhau. Cho ε'', đặt $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''/2$, và $M(\varepsilon'') = \max\{N(\varepsilon), K(\varepsilon')\}$. Ta có

Cho một $\varepsilon'' > 0$ tìm được $M(\varepsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_m - a | < \varepsilon'' \quad \forall\, m > M(\varepsilon'')$ (3)

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 15

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Để chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a, ta chỉ cần tìm một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a.

Bài toán 35. Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ.

Theo KTGT 15, ta chỉ cần chứng minh $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ.

Theo KTGT 14, để chứng minh $\{x_n\}$ có một dãy con hội tụ, ta phải tìm hai số thực a và b sao cho $x_n \in [a, b]$ với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$. Dùng bài toán 33, ta chọn $a = -M$ và $b = M$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 16

Để chứng minh một dãy $\{x_n\}$ hội tụ, nhưng chưa biết giới hạn của nó. Ta chỉ cần chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

Bài toán 36. Cho n là một số nguyên dương . Đặt

$x_n = 1^{-1} + 2^{-2} + 3^{-3} + \ldots + n^{-n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ .

Theo KTGT 16, ta chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n > m > N(\varepsilon)$

$$x_n - x_m = [1^{-1} + \ldots + m^{-m} + (m+1)^{-m-1} + \ldots + n^{-n}]$$
$$- [1^{-1} + \ldots + m^{-m}] = (m+1)^{-m-1} + \ldots + n^{-n}$$

Các $(k+1)^{-k-1}$ khó tính toán và sữ lý, theo KTGT 12, ta ước lượng chúng bằng 2^{-k-1}.

$|x_n - x_m| \leq 2^{-m-1} + \ldots + 2^{-n} + \ldots + \leq 2^{-m} \quad \forall\ n > m$

$|x_n - x_m| \leq 2^{-m} \qquad \forall\ n > m$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad \forall\ n > m > N(\varepsilon)$

Theo QTGT 1 và KTGT 12, ta viết bài toán thành

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $2^{-m} < \varepsilon\ \forall\ n > m > N(\varepsilon)$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $2^{-m} < \varepsilon\ \forall\ m > N(\varepsilon)$

Xem bài toán 20

Dùng Matlab ta có thể tính gần đúng giới hạn của dãy số trên.

```
>> syms n

>> symsum(1/n^n,1,inf)

ans =

sum(1/(n^n),n = 1 .. Inf)

>> vpa(ans,17)

ans =

1.2912859970626635
```


Bài toán 37. *Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực đơn điệu tăng và bị chặn trên . Đặt $A = \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$.*

Lúc đó $\{a_n\}$ sẽ hội tụ về $a = \sup A$

$a_m \leq a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \quad (1) \qquad a = \sup A \quad (2)$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\ n > N(\varepsilon)$

Trong bài toán có giới hạn và có sup hoặc inf, ta nên viết dưới dạng

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \qquad (3)$

$a_m \le a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, m \le n \quad (1) \qquad a = \sup A \quad (2)$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| \le \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon) \qquad (3)$$

Theo QTGT 6, ta để ý các "giống giống khác khác" giữa (1) và (2) với (3). Ta thấy trong (2) và (3) có a và a_n

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 \le a - a_n < \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon < a_n \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon) \qquad (4)$$

$a_m \le a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, m \le n \quad (1) \qquad a = \sup A \quad (2)$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 \le a - a_n \le \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon) \qquad (4)$$

Theo QTGT 1, ta xét các khác biệt và các quan hệ giữa (1) và (2) với (4). Ta thấy trong (1) và (4) có a_n. Ta viết cho giống nhau

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon \le a_n \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon) \qquad (4')$$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon \le a_{N(\varepsilon)} \le a_n \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon) \qquad (4'')$$

$a_m \le a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, m \le n \quad (1) \qquad a = \sup A \quad (2)$

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a - \varepsilon \le a_{N(\varepsilon)} \qquad (5)$$

Theo QTGT 8, vì không có liên hệ nào giữa hai giả thiết (1) và (2) với kết luận (5). Ta dùng phản chứng. Giả thiết phản chứng như sau

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ sao cho } a - \varepsilon \ge a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$a_m \le a_n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, m \le n \quad (1) \qquad a = \sup A \quad (2)$

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ sao cho } a - \varepsilon \ge a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad (6)$$

Theo QTGT 8, ta tìm mâu thuẫn giữa hai giả thiết (1) và (2) với giả thiết phản chứng (6) : $a - \varepsilon$ là một chặn trên của A và bé hơn a, mâu thuẫn với (6).

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 11

Trong bài toán có giới hạn và có sup hoặc inf, ta nên viết "$\{x_n\}$ hội về a" dưới dạng

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - a| \le \varepsilon \qquad \forall\ n \ge N(\varepsilon)$$

Bài toán 38. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu tăng và không bị chặn trên . Lúc đó* $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* ∞

$$a_m \le a_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ m \le n \quad (1)$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ ta có một $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a_k \ge c$ (2)

Cho một $M > 0$, ta tìm một $N(M) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_r \ge M \qquad \forall\ r \ge N(M)\ . \quad (3)$$

Theo QTGT 6, ta xét các khác biệt và các quan hệ giữa (1) và (2) với (3). Ta làm chúng càng giống nhau.

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists\ k \in \mathbb{N}\ :\ a_s \ge a_k \ge c\ \ \forall\ s \in \mathbb{N}, k \le s$ (2')

Cho một $M > 0$, ta tìm một $N(M) \in \mathbb{N}$ sao cho $a_r \ge a_{N(M)} \ge M \quad \forall\ r \ge N(M)$. (3')

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists\ k \in \mathbb{N}\ :\ a_s \ge a_k \ge c\ \ \forall\ s \in \mathbb{N}, k \le s$ (2')

Cho một $M > 0$, ta tìm một $N(M) \in \mathbb{N}$ sao cho $a_r \ge a_{N(M)} \ge M \quad \forall\ r \ge N(M)$. (3')

Theo QTGT 6, ta xét các khác biệt và các quan hệ giữa (2') với (3'): c và M , k và $N(M)$. Ta làm cho chúng giống nhau. Cho M , chọn $c = M$, ta có k. Đặt $N(M) = k$.

Bài toán 39. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu giãm và bị chặn dưới* . Đặt $A = \{\ a_n : n \in \mathbb{N}\ \}$.

Lúc đó $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* $a = \inf A$

Bài toán 40. *Cho* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực đơn điệu giãm và không bị chặn dưới . Lúc đó* $\{a_n\}$ *sẽ hội tụ về* $-\infty$.

limsup

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \ge n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \le m$$

- Nếu A_1 không bị chặn trên . Đặt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_m : k \ge n\}$$

$$A_1 \supset A_n \supset A_m \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \le m$$

- Nếu A_1 bị chặn trên . Đặt

$$b_r = \sup A_r$$

$$b_1 \ge b_m \ge b_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ m \le n$$

- Nếu $\{b_n\}$ không bị chặn dưới , đặt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n$$

- Nếu A_1 bị chặn trên . Đặt

$$b_r = \sup A_r$$

$$b_1 \geq b_m \geq b_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n$$

- Nếu $\{b_n\}$ bị chặn dưới , đặt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \left(= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right)\right)$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_k : k \geq n\} = \{(-1)^k k : k \geq n\}$$

$$A_n = \{(-1)^k k : k \geq n\} \supset \{2k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$$

A_1 không bị chặn trên $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$

Cho $a_n = -n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_k : k \geq n\} = \{-k : k \geq n\} \subset (-\infty, 0]$$

A_1 bị chặn trên

$$b_n = \sup A_n = \sup\{-k : k \geq n\} = -n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$\{b_n\} = \{-m\}$ không bị chặn dưới

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_k : k \geq n\} = \{(-1)^k : k \geq n\} = \{1, -1\}$$

A_1 bị chặn trên

$$b_m = \sup A_m = \sup\{1, -1\} = 1$$

$\{b_n\}$ bị chặn dưới $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

liminf

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N},\ n \geq m$$

ª Nếu A_1 không bị chặn dưới . Đặt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq m$$

- Nếu A_1 bị chặn dưới . Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq m$$

- Nếu $\{c_n\}$ không bị chặn trên , đặt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}$$

$$A_1 \supset A_m \supset A_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ m \leq n$$

- Nếu A_1 bị chặn dưới . Đặt

$$c_m = \inf A_m$$

$$c_1 \leq c_m \leq c_n \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}\ ,\ m \leq n$$

- Nếu $\{c_n\}$ bị chặn trên , đặt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \qquad \left(= \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right) \right)$$

Cho $a_n = (-1)^n n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_k : k \geq n\} = \{(-1)^k k : k \geq n\}$$

$$A_1 = \{(-1)^k k : k \geq 1\} \supset \{-2k-1 : k \geq 1\}$$

A_1 không bị chặn dưới $\Rightarrow \quad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Cho $a_n = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_k : k \geq n\} = \{k : k \geq n\} \subset [n, \infty]$$

A_1 bị chặn dưới

$$c_n = \inf A_n = \inf\{k : k \geq n\} = n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$\{c_n\} = \mathbb{N}$ không bị chặn trên

$\Rightarrow \quad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Cho $a_n = (-1)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

$$A_n = \{a_m : k \geq n\} = \{(-1)^k : k \geq n\} = \{-1, 1\}$$

A_1 bị chặn dưới

$$c_m = \inf A_m = \inf\{-1, 1\} = -1$$

$\{c_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow \quad \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = -1$

Ta thấy $\{a_m\}$ không hội tụ nhưng vẫn có

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$. Mặt khác $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Trong trường hợp này $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \neq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Bài toán 40b. Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ về a và b. Giả sử $a_n \le b_n$ với mọi n. Chứng minh $a \le b$.

$$a_n \le b_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon) \qquad (2)$$

Cho một $\varepsilon' > 0$ có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|b_k - b| < \varepsilon' \qquad \forall\ k > K(\varepsilon') \qquad (3)$$

$$a \le b \quad ? \qquad (4)$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong bài toán về cùng một dạng.

$0 \le b_n - a_n \qquad \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad (1)$

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon) \qquad (2)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_k - b| < \varepsilon' \qquad \forall\ k > K(\varepsilon') \qquad (3)$

$0 \le b - a \quad ? \qquad (4)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1), (2) và (3) với (4). Ta làm chúng càng giống nhau.

$b - a = b - b_n + b_n - a_n + a_n - a \qquad (5)$

Ta cần chứng minh $0 \le a - b$, nên ta viết (5) như sau

$b - a \ge b - b_n + a_n - a \qquad (5')$

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon) \qquad (2)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|b_k - b| < \varepsilon' \qquad \forall\ k > K(\varepsilon') \qquad (3)$

$b - a \ge b - b_n + a_n - a \qquad (5')$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (2) và (3) với (5'). Ta làm chúng càng giống nhau.

Cho một $\varepsilon > 0$ có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$-\varepsilon < a_m - a < \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon) \qquad (2)$

Cho một $\varepsilon' > 0$ có $K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$-\varepsilon' < b - b_k < \varepsilon' \qquad \forall\ k > K(\varepsilon') \qquad (3)$

$b - a \ge -\varepsilon' - \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon),\ k > K(\varepsilon') \qquad (6)$

$b - a \ge -\varepsilon' - \varepsilon \qquad \forall\ m > N(\varepsilon),\ k > K(\varepsilon') \qquad (6)$

$b - a \ge -\varepsilon' - \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon' > 0 \qquad (6')$

$0 \le b - a \quad ? \qquad (4)$

Theo QTGT 4, ta thấy giả thiết (6') yếu hơn kết luận (4). Vậy ta dùng phản chứng, với giả thiết phản chứng.

$0 > b - a \qquad (7)$

$b - a \ge -\varepsilon' - \varepsilon \qquad \forall\ \varepsilon > 0,\ \varepsilon' > 0 \qquad (6')$

Chọn $\varepsilon' = \varepsilon = -(b - a)/4 > 0$. Ta có

$b - a \ge (b - a)/2 \qquad (b - a)/2 \ge 0$

$b - a \ge 0$ Mâu thuẫn với (7)

Bài toán 41. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ đều là các số thực . Chứng minh

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Theo QTGT 1, ta làm rõ limsup và liminf

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \quad \text{và} \quad c_m = \inf A_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Vậy ta phải chứng minh

$$\lim_{m\to\infty} b_m \geq \lim_{m\to\infty} c_m$$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \quad \text{và} \quad c_m = \inf A_m$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m \geq \lim_{m\to\infty} c_m \quad ?$$

Theo QTGT 1, ta làm rõ liên hệ giữa b_m và c_m

$$b_m \geq a_m \geq c_m$$

Theo bài toán 40b, ta có

$$\lim_{m\to\infty} b_m \geq \lim_{m\to\infty} c_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Bài toán 42. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Giả sử : $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ đều là các số thực và bằng nhau. Chứng minh $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Theo QTGT 1, ta làm rõ limsup và liminf

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \quad \text{và} \quad c_m = \inf A_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} c_m$$

$$A_m = \{a_k : k \geq m\}$$

$$b_m = \sup A_m \quad \text{và} \quad c_m = \inf A_m$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} c_m$$

Theo QTGT 2, ta xét các khác biệt và các quan hệ giữa các giả thiết và kết luận.

$$c_m \leq a_m \leq b_m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

$$c_n \leq a_n \leq b_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$

Bài toán 43. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ về a. Chứng minh $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$

Theo QTGT 2, ta làm rõ limsup và liminf

$b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$ và $c_m = \inf\{a_k : k \geq m\}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad (1)$

$\forall \varepsilon' > 0, \exists\ M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho $|b_m - a| \leq \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad (2)$

$b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$ và $c_m = \inf\{a_k : k \geq m\}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad (1)$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|b_m - a| \leq \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad (2)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1) với (2) : "a_n-a" và "$b_n - a$". Ta thấy $a_n \leq b_n$, vậy ta phải bỏ các dấu giá trị tuyệt đối

$-\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (1)$

$-\varepsilon' \leq b_m - a \leq \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (2)$

$b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$ và $c_m = \inf\{a_k : k \geq m\}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

$-\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (1')$

$-\varepsilon' \leq b_m - a \leq \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (2')$

Vì $b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$, ta viết bài toán ra dạng

$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (1")$

$a - \varepsilon' \leq b_m \leq a + \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (2")$

Theo QTGT 7, ta chia (2") làm hai bài toán

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon')$: $a - \varepsilon' \leq b_m \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (3)$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon')$: $b_m \leq a + \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (4)$

$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (1")$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon')$: $a - \varepsilon' \leq b_m \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1") với (3) : "$a - \varepsilon \leq a_n$" và "$a - \varepsilon' \leq b_m$". Để ý $b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$, nên $a_m \leq b_m$. Vậy từ (1), ta có

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon)$: $a - \varepsilon \leq a_m \leq b_m\ \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (5)$

Ta xét phần còn lại của bài toán

$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall\ n \geq N(\varepsilon) \quad (1")$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm $M(\varepsilon')$: $b_m \leq a + \varepsilon' \quad \forall m \geq M(\varepsilon') \quad ? \quad (4)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1") với (4) : "$a - \varepsilon \leq a_n$" và "$a - \varepsilon' \leq b_m$". Để ý $b_m = \sup\{a_k : k \geq m\}$, nên $a_m \leq b_m$. Vậy từ (1), ta có

$a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon) \quad (1'')$

Cho ε' >0, tìm M(ε'): $b_m \le a + \varepsilon' \quad \forall m \ge M(\varepsilon')$? (4)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1") với (4) : "$a_n \le a - \varepsilon$" và "$b_m \le a - \varepsilon'$". Để ý b_m = sup $\{a_k : k \ge m\}$, nên ta viết lại (1") theo dạng sup

$\sup\{a_k : k \ge n\} \le a + \varepsilon \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$

Cho ε > 0, có N(ε) : $b_n \le a + \varepsilon \quad \forall\, n \ge N(\varepsilon)$ (6)

Chọn ε = ε', và M(ε') = N(ε)

Bài toán 44. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn trên trong ℝ. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn dưới và sup A = - inf B

Bài toán 45. Cho A là một tập khác rỗng bị chặn dưới trong ℝ. Đặt $B = \{-x : x \in A\}$. Chứng minh B bị chặn trên và inf A = - sup B

Xem bài toán 15c

Bài toán 46 . Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\liminf\limits_{n\to\infty} b_n$

Theo QTGT 1, ta làm rõ limsup và liminf

$A_m = \{a_n : n \ge m\} \qquad B_m = \{b_n = -a_n : n \ge m\}$

$d_m = \sup A_m \qquad t_m = \inf B_m$

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} d_m \qquad \liminf\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{m\to\infty} t_m$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = -\lim_{m\to\infty} t_m \quad ?$$

Theo QTGT 1, ta làm rõ liên hệ giữa d_m với t_m . Theo bài toán 44

$d_m = \sup A_m = -\inf B = -t_m \qquad \lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{m\to\infty} -t_m$

Bài toán 47. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Đặt $b_n = -a_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

Cho $\{x_m\}$ là một dãy số thực. Với mọi số nguyên $n \in \mathbb{N}$ ta đặt

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad .$$

Ta gọi s_n là tổng riêng phần thứ n của dãy $\{x_m\}$.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ hội tụ về một số thực s ta có thể coi s như là "tổng số" của các số trong dãy $\{x_m\}$.

Lúc đó ta gọi s là *chuỗi số* của các số trong dãy $\{x_m\}$ và ký hiệu s là $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ và nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

■ Nếu dãy số thực $\{s_n\}$ phân kỳ, ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ phân kỳ.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 12

Bản chất của chuỗi số hội tụ là một số thực α, hơn nữa, α là giới hạn của một dãy số.

Để khảo sát một chuỗi số, ta phải xét dãy $\{s_n\}$ các tổng riêng phần của nó. Sau đó mới khảo sát giới hạn của $\{s_n\}$, giới hạn của $\{s_n\}$ chính là α.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 13

Để khảo sát một dãy số $\{x_n\}$, ta có thể xét chuỗi số $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, với $a_1 = x_1$, $a_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ với số nguyên dương k.
Dãy số $\{x_n\}$ chính là dãy tổng riêng phần $\{s_n\}$ của chuỗi đó.

Cho chuỗi số $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$. Để khảo sát dãy số $\{a_n\}$, ta để ý $a_n = s_n - s_{n-1}$ với mọi số nguyên dương k, ở đây $\{s_n\}$ chính là dãy tổng riêng phần của chuỗi đó.

Bài toán 48. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}$ hội tụ và $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$

Theo KHGT 12, xét $x_m = 2^{-m}$ và $s_n = 2^{-1} + \ldots + 2^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$s_n = 2^{-1}(1 + \ldots + 2^{-n+1}) = 1 - 2^{-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (qui nạp toán học)

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Bài toán 49. Cho $c \in (0, 1)$. Chứng minh chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} c^m$ hội tụ và $\sum_{m=1}^{\infty} c^m = \frac{c}{1-c}$

Theo KHGT 12, xét $x_m = c^m$ và $s_n = c + \ldots + c^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$s_n = c + \cdots + c^n = c(1 + \cdots + c^{n-1}) = c\frac{1-c^{n+1}}{1-c} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{c}{1-c}$$

Bài toán 49. Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m$ phân kỳ .

Theo KHGT 12, xét $x_m = (-1)^m$ và

$s_n = (-1)^1 + \ldots + (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$s_n = -1$ nếu n lẻ và $s_n = 0$ nếu n chẵn .

$\{s_n\}$ không là một dãy Cauchy

$\{s_n\}$ không hội tụ

Chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m$ phân kỳ .

Định lý (Tiêu chuẩn Cauchy). *Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực. Lúc đó chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ nếu và chỉ nếu với mọi số thực $\varepsilon > 0$, có một số nguyên dương $N(\varepsilon)$ sao cho*

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Theo KHGT 12, xét $s_n = a_1 + \ldots + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ta phải chứng minh $\{s_n\}$ hội tụ, nhưng không biết giới hạn của nó, nên phải chứng minh $\{s_n\}$ là dãy Cauchy.

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon)$: $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon')$: $|s_r - s_t| < \varepsilon' \quad \forall r > t \geq M(\varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon)$: $|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N(\varepsilon)$ (1')

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon')$: $|s_r - s_t| < \varepsilon' \quad \forall r > t \geq M(\varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon)$: $|s_n - s_{m-1}| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N(\varepsilon)$ (1')

Ta viết (2) và (1') cùng dạng : đặt $m' = m-1$, ta có $m = m'+1$ và

Cho $\varepsilon' > 0$, có $M(\varepsilon')$: $|s_r - s_t| < \varepsilon' \quad \forall r > t \geq M(\varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon > 0$, có $N(\varepsilon)$: $|s_n - s_{m'}| < \varepsilon \quad \forall n > m' \geq N(\varepsilon) - 1$ (1")

Định lý . *Cho $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ là hai chuỗi số thực hội tụ. Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ hội tụ và*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Theo KHGT 12, xét

$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad \lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\qquad$? $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$

$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ $\qquad s_n = u_n + v_n \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n$

Bài toán 50. Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực. Giả sử chuỗi hội tụ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ về 0.

Cho ε > 0, có $M(\varepsilon)$: $|s_m - \alpha| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq M(\varepsilon)$ (1)

Cho ε' > 0, tìm $K(\varepsilon')$: $|a_k - 0| \leq \varepsilon' \quad \forall k \geq K(\varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 1, ta thấy $|a_k - 0| = |a_k| = |s_k - s_{k-1}|$

Cho ε' > 0, tìm $K(\varepsilon')$: $|s_k - s_{k-1}| \leq \varepsilon' \quad \forall k \geq K(\varepsilon')$ (2')

Viết (1) cùng dạng với (2')

$\forall \varepsilon'' > 0$, có $N(\varepsilon'')$:$|s_m - s_n| \leq \varepsilon'' \quad \forall m > n \geq N(\varepsilon'')$ (1')

Làm (1') và (2') giống nhau : chọn ε" = ε', $m = k$, $n=k-1$

$\forall \varepsilon'' > 0$, có $N(\varepsilon'')$:$|s_k - s_{k-1}| \leq \varepsilon' \quad \forall k > k-1 \geq N(\varepsilon'')$ (1")

Định lý (Tiêu chuẩn so sánh) *Cho một dãy số thực không âm* $\{a_n\}$. *Giả sử chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hội tụ. Cho một dãy số thực* $\{b_n\}$ *sao cho có* $N \in \mathbb{N}$ *để cho*

$$|b_n| \leq a_n \qquad \forall n \geq N.$$

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hội tụ.*

Theo KTGT 12, ta xét $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có $\{s_n\}$ hội tụ và phải chứng minh $\{t_n\}$ hội tụ . Theo KTGT 10, ta phải chứng minh $\{t_n\}$ Cauchy. Theo KTGT 3, ta viết $\{s_n\}$ Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall m>n \geq N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|t_k - t_r| < \varepsilon' \quad \forall k>r \geq K(\varepsilon')$? (2)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall m>n \geq N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|t_k - t_r| < \varepsilon' \quad \forall k>r \geq K(\varepsilon')$? (2)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (1) với (2) : "s_n-s_m" và "$t_k - t_r$". Việc này dẫn đến xét quan hệ giữa a_n và b_n : $|b_n| \leq a_n$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |b_k| \leq \sum_{k=n}^{m} a_k \qquad |t_k - t_r| \leq |s_k - s_r|$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall m>n \geq N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|t_n - t_m| < \varepsilon \quad \forall m>n \geq N(\varepsilon)$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists K(\varepsilon') \in \mathbb{N}$: $|t_k - t_r| < \varepsilon' \quad \forall k>r \geq K(\varepsilon')$? (2)

Cho ε' > 0 , chọn ε = ε', ta có N(ε). Đặt $K(\varepsilon')$ = N(ε).

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 20

Khi có số nguyên N sao cho $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq N$. Để chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, ta nên xét sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ và dùng tiêu chuẩn so sánh.

Định lý (Tiêu chuẩn căn số) *Cho một dãy số thực $\{b_n\}$. Giả sử có một số thực dương $c \in (0, 1)$ và một số nguyên N sao cho $|b_n|^{1/n} \le c \quad \forall n \ge N$.*

Lúc đó $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hội tụ.*

Theo KTGT 18, ta xét $s_n = b_1 + \ldots + b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Theo KTGT 10, ta phải chứng minh $\{s_n\}$ Cauchy. Theo QTGT 5, ta viết giả thiết về cùng dạng với s_n

$| b_k | \le c^k \quad \forall k \ge N$

Theo KTGT 14, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$

Xem bài toán 49

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) *Cho một dãy số thực khác không $\{a_n\}$, một số thực dương $c \in (0, 1)$ và một số nguyên N. Giả sử* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < c \quad \forall n \ge N$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

Theo KTGT 12, ta xét $s_n = a_1 + \ldots + a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Theo KTGT 10, ta phải chứng minh $\{s_n\}$ Cauchy. Theo QTGT 5, ta viết giả thiết về cùng dạng với s_n

$|a_{n+1}| < ca_n \quad \forall n \ge N$

Qui nạp toán học : $| a_m| < c^{m-N} \, | a_N | \quad \forall \; n \ge N$

Theo KTGT 14, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-N} a_N$

Định lý (Tiêu chuẩn tỉ số) *Cho một dãy số thực $\{a_n\}$và một số nguyên N. Giả sử*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 \quad \forall \; n \ge N$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ*

Theo KTGT 12, ta xét $s_n = a_1 + \ldots + a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Theo KTGT 10, ta phải chứng minh $\{s_n\}$ Cauchy. Theo QTGT 5, ta viết giả thiết về cùng dạng với s_n

Qui nạp toán học : $| a_n | \ge | a_N | > 0 \quad \forall \; n \ge N$

Suy ra ta không có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Xem bài toán 50

Định lý (Tiêu chuẩn Leibnitz) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho $\{| a_n| \}$ là một dãy đơn điệu giảm hội tụ về 0 và

$$a_m \, . \, a_{m+1} \le 0 \qquad \forall \text{ m} \in \mathbb{N}.$$

Lúc đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Định lý (Tiêu chuẩn tích phân) Cho một dãy số thực $\{a_n\}$ sao cho có một số nguyên N và một hàm số f đơn điệu giảm từ $[N, \infty)$ vào $[0,\infty)$ sao cho

$$a_n = f(n) \qquad \forall \ n \ \geq N.$$

Lúc đó chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu

$$\int_N^{\infty} f(t)dt < \infty$$

CHƯƠNG SÁU

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chúng ta đã biết nếu $\{a_n\}$ là một dãy hội tụ về a , theo lý thuyết về dãy số chúng ta có thể dùng $\{a_n^2\}$ để xấp xỉ a^2 . Nay chúng ta đặt $f(t) = t^2$ với mọi số thực t . Ta có thể diễn tả việc trên như là "có thể dùng dãy số thực $\{f(a_n)\}$ để xấp xỉ $f(a)$".

Chúng ta sẽ xét một mô hình toán học về các ánh xạ f có tính chất sau: nếu $\{a_n\}$ là một dãy hội tụ về a , thì $\{f(a_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(a)$. Đó là khái niệm hàm số liên tục.

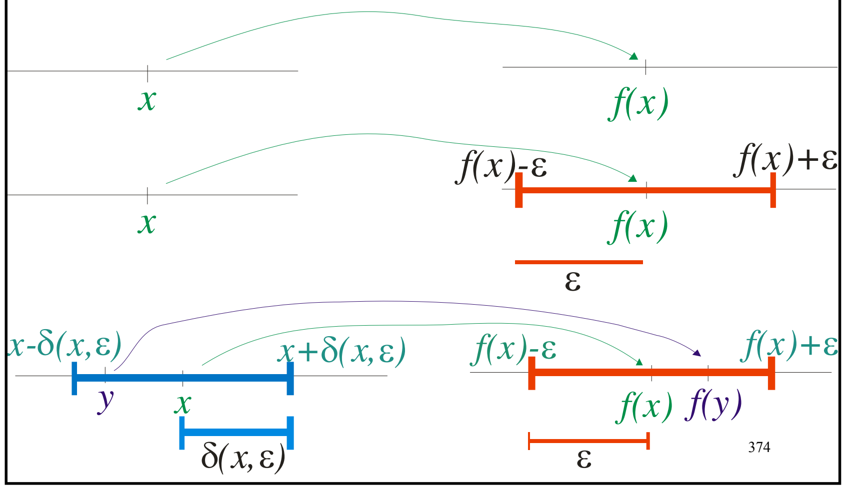
Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực trên A.

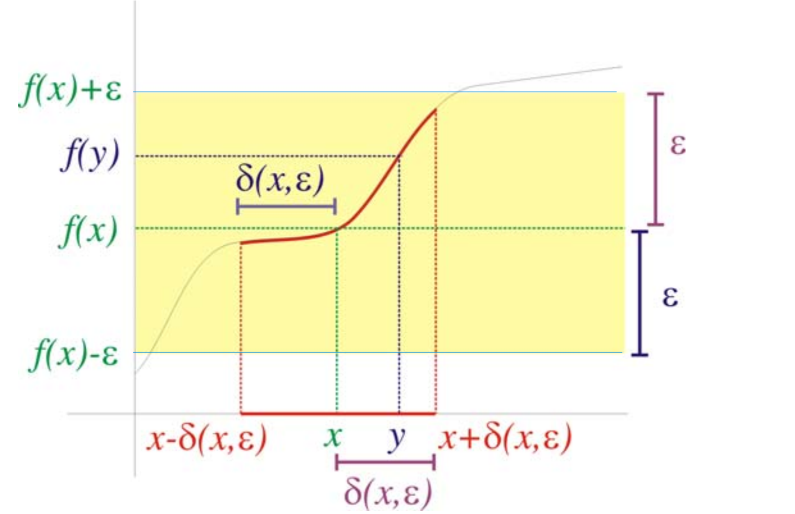
Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con khác trống A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$, ta nói f liên tục tại x nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương $\delta(x, \varepsilon)$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A \text{ với } |y - x| < \delta(x, \varepsilon).$$

Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in A$ ta nói f liên tục trên A

Với mọi số dương ε ta tìm được một số dương $\delta(x,\varepsilon)$ sao cho $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall\, y \in A$ với $|y - x| < \delta(x,\varepsilon)$.





Bài toán 51. Cho c là một số thực và đặt $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ "f liên tục trên $\mathbb{R}$"

Chứng minh f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 12, ta làm rõ "f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$"

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Theo QTGT 1, ta làm rõ "$f(y) - f(x)$"

376

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Theo QTGT 1, ta làm rõ "$f(y) - f(x)$"

$|f(y) - f(x)| = |c - c| = 0$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$0 < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

$\delta(x, \epsilon) = 1$

377

Bài toán 52. Cho c là một số thực dương, đặt $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ "f liên tục trên $\mathbb{R}$"

Chứng minh f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 10, ta làm rõ "f liên tục tại mọi x trong $\mathbb{R}$"

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

Theo QTGT 1, ta làm rõ "$f(y) - f(x)$"

$|f(y) - f(x)| = |cy - cx| = c|y - x|$

378

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\exists \delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon)$

$|f(y) - f(x)| = |cy - cx| = c|y - x|$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$c|y - x| < \epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon) \quad (1)$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố có "$|y - x|$" cùng dạng

Cho $x \in \mathbb{R}$ và cho $\epsilon > 0$, tìm $\delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$c|y - x| < c^{-1}\epsilon \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta(x, \epsilon) \quad (1')$

Theo QTGT 6, để các khác biệt "$c^{-1}\epsilon$" với "$\delta(x, \epsilon)$". Làm mất khác biệt này: đặt $\delta(x, \epsilon)$ bằng $c^{-1}\epsilon$

ta có (1')

379

2

Bài toán 53. Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$. Giả sử f liên tục tại x. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong A *(nghĩa là* $x_n \in A$ *với mọi* n *)* và $\{x_n\}$ hội tụ về x. Chứng minh dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$

Cho $\epsilon > 0$, có $\delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall y \in A, |y - x| < \delta(x, \epsilon) \quad (1)$

Cho $\epsilon' > 0$, có $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon' \qquad \forall n \geq N(\epsilon'). \qquad (2)$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon''). \qquad (3)$

380

Cho $\epsilon > 0$, có $\delta(x, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall y \in A, |y - x| < \delta(x, \epsilon) \quad (1)$

Cho $\epsilon' > 0$, có $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon' \qquad \forall n \geq N(\epsilon'). \qquad (2)$

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon''). \qquad (3)$

Xuất phát từ (3), theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giửa (1), (2) và (3) : "$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon''$" và "$|f(y) - f(x)| < \epsilon$". Ta làm cho chúng giống nhau: đặt $y = x_m$ và $\epsilon = \epsilon''$. Ta có $\delta(x, \epsilon'')$ và kết quả mới

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \quad \forall x_m \in A, |x_m - x| < \delta(x, \epsilon'') \quad (1')$

381

Cho $\epsilon'' > 0$, có $\delta(x, \epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \quad \forall x_m \in A, |x_m - x| < \delta(x, \epsilon'') \quad (1')$

Cho $\epsilon' > 0$ ta có $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon' \qquad \forall n \geq N(\epsilon'). (2)$

Cho $\epsilon'' > 0$ tìm $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon''). \quad (3)$

Xuất phát từ "$|x_m - x| < \delta(x, \epsilon'')$", theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giửa (1'), (2) và (3): "$|x_m - x| < \delta(x, \epsilon'')$" với "$|x_n - x| < \epsilon'$". Ta làm cho chúng giống nhau: đặt $\epsilon' = \delta(x, \epsilon'')$, ta có $N(\epsilon')$ hay $N(\delta(x,\epsilon''))$ và một kết quả mới

Cho $\epsilon' = \delta(x, \epsilon'')$, ta có $N(\delta(x, \epsilon'')) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \delta(x, \epsilon'') \qquad \forall n \geq N(\delta(x, \epsilon'')). \quad (2')$

382

Cho $\epsilon'' > 0$, có $\delta(x, \epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \quad \forall y \in A, |x_m - x| < \delta(x, \epsilon'') \quad (1')$

Cho $\epsilon' = \delta(x, \epsilon'')$, ta có $N(\delta(x, \epsilon'')) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \delta(x, \epsilon'') \qquad \forall n \geq N(\delta(x, \epsilon'')). \quad (2')$

Cho $\epsilon'' > 0$ tìm $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'' \qquad \forall m \geq M(\epsilon''). \quad (3)$

Xuất phát từ "$n \geq N(\delta(x, \epsilon''))$", theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giửa (1'), (2) và (3): "$n \geq N(\delta(x, \epsilon''))$" với "$m \geq M(\epsilon'')$". Ta làm cho chúng giống nhau: đặt $M(\epsilon'') = N(\delta(x,\epsilon''))$ và một kết quả mới : đó là (3) (dùng lần lượt (2') rồi (1')).

$m \geq M(\epsilon'') = N(\delta(x,\epsilon'')) \underset{(2')}{\Longrightarrow} |x_n - x| < \delta(x,\epsilon'') \underset{(1')}{\Longrightarrow} |f(x_m) - f(x)| < \epsilon''$

383

3

Bài toán 54. Cho một hàm số thực f trên một tập hợp con A của $\mathbb{R}$ và $x \in A$. Giả sử với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A (nghĩa là $x_n \in A$ với mọi $n \in \mathbb{N}$) và $\{x_n\}$ hội tụ về x, thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$. Lúc đó f liên tục tại x.

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x | < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$.

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\delta(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$| f(y) - f(x) | < \epsilon'' \qquad \forall y \in A$ với $| y - x | < \delta(x,\epsilon'')$

384

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x | < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\delta(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$| f(y) - f(x) | < \epsilon'' \qquad \forall y \in A$ với $| y - x | < \delta(x,\epsilon'')$ (3)

Ta thấy kết quả trong giả thiết cho tập đếm được $\{f(x_n)\}$ yếu hơn kết quả trong kết luận cho tập không đếm được $\{f(y) : | y - x | < \delta(x,\epsilon'')\}$. Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $| y_\delta - x | < \delta$ sao cho $| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$ (4)

385

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x | < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $| y_\delta - x | < \delta$ sao cho $| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$ (4)

Theo QTGT 8, ta xét các "giống nhưng chống nhau": "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" và "$| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$". Để làm chúng càng giống nhau, ta đặt $x_n = y_\delta$.

Với mỗi n ta phải chọn δ. Thường ta chọn $\delta = n$ hoặc $\delta = n^{-1}$. Ta chọn δ sao cho gia tăng sự mâu thuẫn : ở đây ta có "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" khi x_n gần x, vậy y_δ gần x. Vậy δ phải nhỏ và ta chọn $\delta = n^{-1}$.

386

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$| x_n - x | < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$| f(x_n) - f(x) | < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $| y_\delta - x | < \delta$ sao cho $| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$ (4)

Theo KTGT 8, ta xét các "giống nhưng chống nhau": "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" và "$| f(y_\delta) - f(x) | \geq \epsilon''$". Để làm chúng càng giống nhau, ta đặt $x_n = y_\delta$. Chọn $\delta = n^{-1}$. ta viết lại (4)

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta có một $x_m \in A$ với $| x_m - x | < \delta = m^{-1}$ sao cho $| f(x_m) - f(x) | \geq \epsilon''$ (4')

387

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta có một $x_m \in A$ với $|x_m - x| < m^{-1}$ sao cho $|f(x_m) - f(x)| \geq \epsilon''$ (4')

Theo QTGT 1, ta để ý các khác biệt: "$|x_n - x| < \epsilon$" với "$|x_m - x| < m^{-1}$", "$< \epsilon'$" với "$\geq \epsilon$". Ta sữ lý các khác biệt này, "$|x_m - x| < m^{-1}$" cho thấy $\{x_m\}$ hội tụ và không còn khác biệt với "$|x_n - x| < \epsilon$". Ta viết lại kết quả này.

388

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Có $\epsilon'' > 0$: $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon' \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (4")

Theo QTGT 8, ta để ý các yếu tố "giống nhau nhưng mâu thuẩn" : "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" và "$|f(x_m) - f(x)| < \epsilon'$", ta làm cho chúng càng giống nhau: chọn $n = m$. Ta có "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" và "$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon'$" Đây là mâu thuẩn cần tìm.

389

QUI TẮC GIẢI TOÁN 14

Khi dùng phản chứng có dãy số và những số có chỉ số (như y_δ, z_M, . . .), đôi khi ta phải đặt $x_n = y_\delta$. Với mỗi n ta phải chọn δ. Thường ta chọn $\delta = n$ hoặc $\delta = n^{-1}$. Ta chọn δ sao cho sao cho gia tăng thuận lợi giả bài toán, thí dụ gia tăng sự mâu thuẩn trong phản chứng : nếu δ càng nhỏ thì mâu thuẩn càng tăng, ta chọn $\delta = n^{-1}$. Nếu δ càng lớn thì mâu thuẩn càng tăng, ta chọn $\delta = n$.

390

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 15

Yếu tố "f liên tục tại x" có thể viết thành hai dạng tương đương :

Cho một $\epsilon > 0$ ta có một $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$|x_n - x| < \epsilon \qquad \forall n \geq N(\epsilon) \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon' \qquad \forall n \geq M(\epsilon')$. (2)

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm $\delta(x,\epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \epsilon'' \quad \forall y \in A$ với $|y - x| < \delta(x,\epsilon'')$ (3)

Thường ta dùng dạng dãy số

391

Bài toán 55. *Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và hai hàm số thực f và g trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f(z) + g(z)$ $\forall z \in A$.*

Chứng minh h liên tục tại x.

Theo KTGT 15, ta dùng dạng dãy số

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(x)$

$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$ $\qquad f(x_n) + g(x_n) = h(x_n)$

$h(x) = f(x) + g(x)$ $\qquad f(x) \quad g(x) \quad f(x) + g(x)$

Bài toán 56. *Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và hai hàm số thực f và g trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f(z)g(z)$ $\forall z \in A$.*

Chứng minh h liên tục tại x.

Theo KTGT 15, ta dùng dạng dãy số

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(x)$

$h(x_n) = f(x_n)g(x_n)$ $\qquad f(x_n) \,.\, g(x_n) = h(x_n)$

$h(x) = f(x)g(x)$ $\qquad f(x) \quad g(x) \quad f(x).g(x)$

Bài toán 57. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và $f_1, \ldots, f_n$ là các hàm số thực trên A liên tục tại x. Đặt $h(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ và $k(z) = f_1(z) \ldots f_n(z)$ với mọi $z \in A$. Chứng minh h và k liên tục tại x.

Chứng minh h liên tục tại x $\qquad$ Dùng qui nạp toán học

$n = 1$: đúng

Giả sử kết quả đúng với $n = m$. Xét trường hợp $n = m+1$

$h(z) = f_1(z) + \ldots + f_{n+1}(z) = [f_1 + \ldots + f_m](z) + f_{m+1}(z)$

$f_1 + \ldots + f_m$: liên tục tại x theo giả thiết qui nạp

$h = [f_1 + \ldots + f_m] + f_{m+1}$: liên tục tại x

Tương tự k liên tục tại x

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 16

Để chứng minh một hàm số liên tục, ta nên xét nó có phải là tổng hoặc tích các hàm số liên tục.

Bài toán 53. Đặt $f(x) = x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Dùng KTGT 16, ta để ý $f = g.g$ với $g(x) = x$. Dùng bài toán 52.

396

Bài toán 57b. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A$ và f là một hàm số thực trên A liên tục tại x. Giả sử $f(z) \neq 0$ với mọi z trong A. Đặt $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ với mọi $z \in A$. Chứng minh g liên tục tại x.

Theo KTGT 15, ta dùng dạng dãy số

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Chứng minh $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$.

Đặt $a_n = f(x_n)$, $b_n = g(x_n)$, $a = f(x)$ và $b = g(x)$,

$b_n = g(x_n) = \dfrac{1}{f(x_n)} = \dfrac{1}{a_n}$ và $b = g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a}$

397

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

Chứng minh $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $g(x)$.

Đặt $a_n = f(x_n)$, $b_n = g(x_n)$, $a = f(x)$ và $b = g(x)$

$b_n = g(x_n) = \dfrac{1}{f(x_n)} = \dfrac{1}{a_n}$ và $b = g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a}$

Cho $\{x_n\}$ hội tụ về x trong A

Ta có $\{a_n\}$ hội tụ về a $\quad a_n \neq 0$ và $a \neq 0$

Theo bài toán 23b $\quad \{b_n\}$ hội tụ về b

398

Bài toán 58. Cho A và B là hai tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, f là một hàm số thực liên tục trên A và g là một hàm số thực liên tục trên B sao cho $f(A) \subset B$. Chứng minh $h = gof$ liên tục trên A.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h = g \circ f"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$

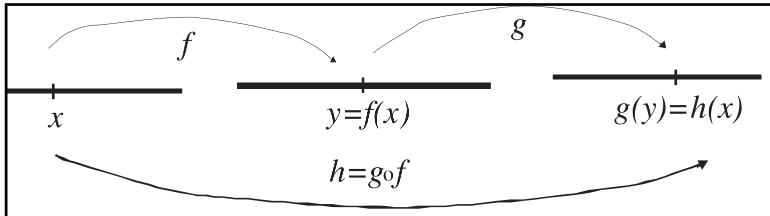
Cho $\{y_m\}$ là một dãy hội tụ về y trong B.

Ta có $\{g(y_m)\}$ là một dãy hội tụ về $g(y)$

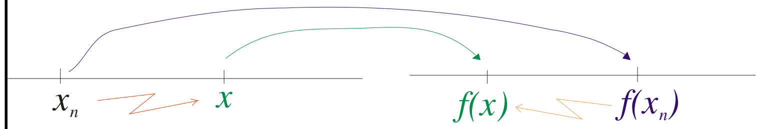
Cho $\{z_n\}$ là một dãy hội tụ về z trong A.

Chứng minh $\{h(z_n)\}$ là một dãy hội tụ về $h(z)$

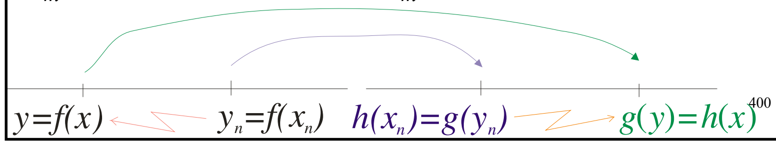
399



$\{x_n\}$ hội tụ về x $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$



$\{y_m\}$ hội tụ về y $\Rightarrow$ $\{g(y_m)\}$ hội tụ về $g(y)$



400

Bài toán 59. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ là một tập bị chặn trên trong $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 2, ta làm rõ các dữ kiện

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$.

Tìm một số thực M sao cho $y \le M \quad \forall y \in f([a, b])$

Theo QTGT 5, ta viết lại kết luận

Tìm một số thực M sao cho $f(s) \le M \quad \forall s \in [a, b]$

401

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

Tìm số thực M sao cho $f(s) \le M \quad \forall s \in [a, b]$ (2)

Vì (1) và (2) hình như không liên quan với nhau, theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng sau

$\forall$ số thực M , $\exists s \in [a, b]$ sao cho $f(s) > M$

$\forall$ số thực M , $\exists s_M \in [a, b]$ sao cho $f(s_M) > M$

Theo QTGT 8, ta viết lại bài toán

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$\forall$ số thực M , $\exists s_M \in [a, b]$ sao cho $f(s_M) > M$ (3)

402

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$\forall$ số thực M , $\exists s_M \in [a, b]$ sao cho $f(s_M) > M$ (3)

Theo KTGT 14, ta đặt $x_n = s_M$. Khi M càng lớn, thì giả thiết phản chứng "$f([a,b])$ không bị chặn" càng mạnh, nên ta chọn $M = n$. Ta viết lại bài toán .

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$\forall$ số nguyên m, $\exists s_m \in [a, b]$ sao cho $f(s_m) > m$ (4)

Theo QTGT 8, ta để ý đến các yếu tố giống giống nhau: "$\{x_n\}$ " với "$\{s_m\}$ ", "$\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ " với "$f(s_m) > m$ ".

403

8

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$\forall$ số nguyên m, $\exists\, s_m \in [a, b]$ sao cho $f(s_m) > m$ (4)

Theo QTGT 8, ta để ý đến các yếu tố giống giống nhau: "$\{x_n\}$" với "$\{s_n\}$", "$\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ" với "$f(s_n) > n$". Ta thấy "$\{x_n\}$" và "$\{s_n\}$" có thể khác nhau nếu $\{s_n\}$ không hội tụ. Dùng Định lý Bolzano-Weierstrass để xoá khác biệt này: có một dãy con $\{s_{m_k}\}$ của $\{s_n\}$ hội tụ về s trong $[a, b]$. Đặt $x_n = s_{m_n}$. Ta viết lại bài toán.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$f(x_n) > n$ $\forall$ số nguyên n (5)

404

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong $[a, b]$. Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $f(x)$ trong $\mathbb{R}$. (1)

$f(x_n) > n$ $\forall$ số nguyên n (5)

Theo QTGT 4, ta để ý đến các yếu tố giống giống nhau: "$\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ" với "$f(x_n) > n\ \forall n$".

Cho $\{a_n\}$ là một dãy số thực Cauchy . Lúc đó $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$

Vô lý

405

Bài toán 60. Cho f là một hàm số liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$, cho $\{y_n\}$ là một dãy hội tụ về y trong $f([a,b])$. Chứng minh $y \in f([a,b])$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ các yếu tố trong bài toán

Với mọi dãy $\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$, $\{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $x_n \in [a,b]$ sao cho $\{y_n = f(x_n)\}$ hội tụ về y. Tìm $x \in [a,b]$ sao cho $y = f(x)$.

Theo QTGT 1, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán: "x_n" và "s_m", "x" và "s". Ta làm các yếu tố này càng giống nhau hơn : $\{x_n\}$ chưa chắc hội tụ nhưng $\{s_m\}$ hội tụ. Ta dùng định lý Bolzano-Weierstrass.

406

Nếu dãy $\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$, $\{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $x_n \in [a,b]$ sao cho $y_n = f(x_n)$, $\{y_n\}$ hội tụ về y. Tìm $x \in [a,b]$ sao cho $y = f(x)$.

Theo QTGT 1, ta để ý các yếu tố giống giống trong bài toán: "x_n" với "s_n", "x" với "s". Ta làm các yếu tố này càng giống nhau hơn : $\{x_n\}$ chưa chắc hội tụ nhưng $\{s_m\}$ hội tụ. Ta dùng định lý Bolzano-Weierstrass. Có một dãy con $\{s_m = x_{n_m}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ về x trong $[a,b]$. Đặt

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $s_m \in [a,b]$, $y_{n_m} = f(s_m)$, $\{y_n\}$ hội tụ về y. Tìm $x \in [a,b]$, $y = f(x)$.

407

9

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $s_m \in [a,b]$, $y_{n_m} = f(s_m)$, $\{y_n\}$ hội tụ về y. Tìm $x \in [a,b]$, $y = f(x)$.

Dùng QTGT 5, ta đặt $x = s$ và để ý $\{y_{n_m}\}$ hội tụ về y.

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $s_m \in [a,b]$, $y_{n_m} = f(s_m)$, $\{y_{n_m}\}$ hội tụ về y. Tìm $s \in [a,b]$, $y = f(s)$.

408

Bài toán 61. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Lúc đó có c trong $[a, b]$ sao cho $f(c) = \max f([a, b])$

Theo QTGT 1, ta làm rõ giả thiết liên tục :

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ yếu tố "$f(c) = \max f([a, b])$" :

Vì $f([a, b]) = \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ là một tập bị chặn trên. Đặt $d = \sup f([a,b])$. Bài toán trở thành

Tìm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = d = \sup f([a,b])$.

Tìm $c \in [a, b]$ sao cho $f(t) \le f(c)$ $\forall t \in [a, b]$ (2)

Theo QTGT 1, ta làm rõ yếu tố "$\sup f([a, b])$" :

Có $\{y_n\} \subset f([a,b])$ sao cho $\{y_n\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$ (3)

409

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$.

Có $\{y_n\} \subset f([a,b])$ sao cho $\{y_n\}$ hội tụ về $d = \sup f([a,b])$

Tìm $c \in [a, b]$ sao cho $f(t) \le f(c)$ $\forall t \in [a, b]$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố theo cùng một dạng

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$. (1)

Có $\{t_n\} \subset [a,b]$ sao cho $\{y_n = f(t_n)\}$ hội tụ về d (2)

Tìm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = d$ (3)

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác: "$\{t_n\}$ có thể không hội tụ" và "$\{s_m\}$ hội tụ ". Ta làm chúng giống nhau, dùng định lý Bolzano-Weierstrass, ta có một dãy con $\{t_{n_k}\}$ của $\{t_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$. Đặt $s_m = \{t_{n_m}\}$. Ta viết lại bài toán.

410

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác: "$\{t_n\}$ có thể không hội tụ" và "$\{s_m\}$ hội tụ ". Ta làm chúng giống nhau, dùng định lý Bolzano-Weierstrass, ta có một dãy con $\{t_{n_k}\}$ của $\{t_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$. Đặt $s_m = \{t_{n_m}\}$. Ta viết lại bài toán.

$\{s_m\}$ hội tụ về t trong $[a,b] \Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(t)$. (1)

Có $\{s_n\} \subset [a,b]$ sao cho $\{y_n = f(s_n)\}$ hội tụ về d (2')

Tìm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = d$ (3)

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác: "$f(t)$ và d " và "t và c". Ta có $f(t) = d$. Đặt $c = t$.

Bài toán 62. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Lúc đó có d trong $[a, b]$ sao cho $f(d) = \min f([a, b])$

411

Bài toán 63. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a\ ,\ b]$. Cho c và d trong $[a\ ,\ b]$ sao cho $f(c) = \alpha = \min f([a\ ,\ b])$ và $f(d) = \beta = \max f([a\ ,\ b])$. Giả sử $c \le d$. Chứng minh $f([a\ ,\ b]) = [\alpha\ ,\ \beta]$.

Theo QTGT 1, ta làm rõ bài toán : $\alpha \le f(t) \le \beta$ với mọi t trong $[\alpha\ ,\ \beta]$. Từ đó $f([c,\ d]) \subset f([a\ ,\ b]) \subset [\alpha\ ,\ \beta]$. Vậy chỉ cần chứng minh $[\alpha\ ,\ \beta] \subset f([c\ ,\ d])$.

$[\alpha\ ,\ \beta] \subset f([c\ ,\ d])$

Cho $y \in [\alpha, \beta]$, tìm $x \in (c,d)$ để cho $f(x) = y$

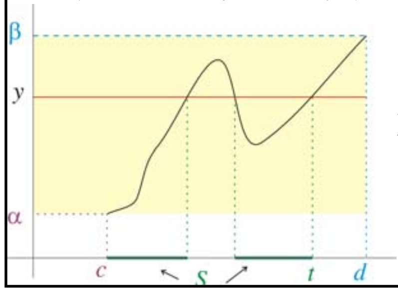
Theo QTGT 7, ta ta xét từng trường hợp của bài toán

$y = \alpha\ :\ y = f(c) \qquad y = \beta:\ y = f(d)$

Cho $y \in (\alpha, \beta)$ chứng minh có $x \in (c,d)$ để cho $f(x) = y$

412

Theo QTGT 1, ta làm rõ bài toán: cho $y \in (\alpha, \beta)$ chứng minh có $x \in (c,d)$ để cho $f(x) = y$. Bản chất bài toán này là giải phương trình $f(x) = y$. Không có dạng đặc biệt nào của phương trình này ngoài yếu tố "$f(c) = \alpha < y < f(d)$". Như vậy hai tập sau đây khác trống: $\{x \in [c,d] : f(x) < y\}$ và $\{x \in [c,d] : f(x) > y\}$. Theo QTGT 1, ta làm rõ tập hợp $S = \{x \in [c,d] : f(x) < y\}$ bằng đồ họa sau



Theo hình vẽ, nghiệm của phương trình $f(x) = y$ có thể là sup S . Đặt t = sup S . Ta chứng minh $f(t) = y$.

413

Đặt $S = \{x \in [c\ ,\ d] : f(x) < y\}$

$c \in S \subset [c\ ,\ d]$ Có $t \in [c\ ,\ d]$ để cho $t = \sup S$

Ta chứng minh $f(t) = y$ $\quad f(t) \le y$ (1) $\quad f(t) \ge y$ (2)

Theo QTGT 2, ta để ý t liên hệ với S, và $f(x) < y$ với mọi x trong S. Vì thế ta chọn (1) để chứng minh trước

Ta chứng minh (1)

Theo QTGT 1, làm rõ các yếu tố: "f liên tục trên $[c,d]$" và "$t = \sup S$". Theo KTGT 15, ta viết chúng ra dạng dãy số.

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$ $\Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$ (3)

Có $\{x_n\}$ trong $S = \{x \in [c\ ,\ d] : f(x) < y\}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t (4)

$f(t) \le y$? (1)

414

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$ $\Rightarrow \{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$ (3)

Có $\{x_n\}$ trong S, $\{x \in [c\ ,\ d] : f(x) < y\}$, sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$ (4)

$f(t) \le y$? (1)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác: "s_m" và "x_m", "s" và "t". Ta làm cho chúng giống nhau: đặt $s_m = x_m$ và $s = t$. Ta viết lại bài toán

$\{x_m\}$ hội tụ về x trong $[a,b] \Rightarrow \{f(x_m)\}$ hội tụ về $f(t)$ (3')

Có $\{x_n\}$ trong S, $f(x_n) < y$, sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$ (4)

Từ đó ta có : $f(t) = f(x) \le y$ (1)

415

$f(t) \geq y$?   (2)

Theo QTGT 3, ta viết lại bài toán

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$ (3)

Có $\{x_n\}$ trong $S = \{ x \in [c, d] : f(x) < y \}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$ (4)

$f(t) \geq y$?   (2)

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác" : "$f(x) < y$" và "$f(t) \geq y$". Ta thấy việc này hình như chống lại (2). Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng, với giả thiết phản chứng

$f(t) < y$ (5)

416

$\{s_m\}$ hội tụ về s trong $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\{f(s_m)\}$ hội tụ về $f(s)$ (3)

Có $\{x_n\}$ trong $S = \{ x \in [c, d] : f(x) < y \}$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về t trong $[a,b]$ (4)

$f(t) < y$ (5)

Theo QTGT 5, ta viết (3) và (4) cùng dạng với (5) : từ bỏ các dãy, trở về bất đẳng thức.

Cho $s \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$, có $\delta(s, \varepsilon) > 0$:

$|f(z) - f(s)| < \varepsilon \quad \forall z \in [a,b], |z - s| < \delta(s, \varepsilon)$ (3')

(i) $x \leq t \quad \forall x \in \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$.   (4')

$f(t) < y$ (5)

417

Cho $s \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$, có $\delta(s, \varepsilon) > 0$:

$|f(z) - f(s)| < \varepsilon \quad \forall z \in [a,b], |z - s| < \delta(s, \varepsilon)$ (3')

(i) $x \leq t \quad \forall x \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$.   (4')

$f(t) < y$ (5)

Theo QTGT 5 và KTGT 4, và tập trung vào t, ta chọn $s = t$. Ta viết (3') và bài toán thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0$:

$-\varepsilon < f(z) - f(t) < \varepsilon \quad \forall z \in [a,b], |z - t| < \delta(t, \varepsilon)$ (3'')

418

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0$:

$-\varepsilon < f(z) - f(t) < \varepsilon \quad \forall z \in [a,b], |z - t| < \delta(t, \varepsilon)$ (3'')

(i) $x \leq t \quad \forall x \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$.   (4')

$f(t) < y$ (5')

Theo QTGT 6, ta làm các yếu tố "giống giống khác khác" càng giống nhau hơn

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0$: $\forall z \in [a,b], |z - t| < \delta(t, \varepsilon)$

$f(t) < f(z) + \varepsilon$ và $f(z) < \varepsilon + f(t)$ (3'')

QTGT 5 và KTGT 4, ta viết lại (5')

$\exists \varepsilon' > 0 \quad f(t) < y - \varepsilon'$ (5')

419

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0 : \forall\ z \in [a,b]$, $|z - t| < \delta(t, \varepsilon)$

$f(t) < f(z) + \varepsilon$ và $f(z) < \varepsilon + f(t)$ (3")

(i) $x \leq t \quad \forall\ x \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$. (4')

$\exists\ \varepsilon' > 0\quad f(t) < y - \varepsilon'$ (5')

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "$z \in [a,b]$" và "$u \in [a,b]$". Ta làm cho chúng giống nhau: chọn $\varepsilon = \varepsilon'$, từ (3") và (5'), ta có $f(z) < y$. Theo QTGT 5, ta viết lại (3").

Cho $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0 : \forall\ z \in [a,b]$, $|z - t| < \delta(t, \varepsilon)$

$z \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$ (3"')

420

Cho $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(t, \varepsilon) > 0 : \forall\ z \in [a,b]$, $|z - t| < \delta(t, \varepsilon)$

$z \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$ (3"')

(i) $x \leq t \quad \forall\ x \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$. (4')

$\exists\ \varepsilon' > 0\quad f(t) < y - \varepsilon'$ (5')

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán về cùng dạng : "$|z - t| < \delta(t, \varepsilon)$" thành "$- \delta(t, \varepsilon) < z-t < \delta(t, \varepsilon)$" , và thành "$z < \delta(t, \varepsilon) + t$ và $t - \delta(t, \varepsilon) < z$ ". Và viết (3"') thành

Cho $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(t,\varepsilon) > 0$: $\forall\ z \in [a,b]$, $z \in (t-\delta(t,\varepsilon), \delta(t,\varepsilon)+t)$:

$z \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$ (3"")

421

Cho $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(t,\varepsilon) > 0$: $\forall\ z \in [a,b]$, $z \in (t-\delta(t,\varepsilon), \delta(t,\varepsilon)+t)$:

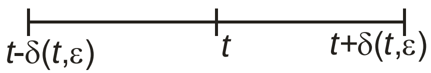
$z \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$ (3"")

(i) $x \leq t \quad \forall\ x \in S = \{ u \in [c, d] : f(u) < y \}$,

(ii) Nếu có một b trong $\mathbb{R}$ sao cho $x \leq b$ với mọi $x \in S$, thì $t \leq b$. (4')

$\exists\ \varepsilon' > 0\quad f(t) < y - \varepsilon'$ (5')

Theo QTGT 6, ta để ý các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "$z \in S$ " và "$x \in S$ ", chúng khác nhau ở các điểm: "$z \in (t-\delta(t,\varepsilon), \delta(t,\varepsilon)+t)$ " và "$x \leq t$ " . Dùng (4), ta làm chúng giống nhau: "$z \in (t-\delta(t,\varepsilon), \delta(t,\varepsilon)+t)$ " và "$z \leq t$" . Chọn $z = t + 2^{-1}\,\delta(t,\varepsilon)$, ta có mâu thuẩn.



422

Bài toán 63b. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Cho c và d trong $[a , b]$ sao cho $f(c) = \alpha = \min f([a , b])$ và $f(d) = \beta = \max f([a , b])$. Giả sử $d \leq c$. Chứng minh $f([a , b]) = [\alpha , \beta]$.

Bài toán 63c. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh có hai số thực α và β sao cho $f([a , b]) = [\alpha , \beta]$.

Bài toán 64. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a , b]$. Đặt $\alpha = \min f([a , b])$ và $\beta = \max f([a , b])$. Chứng minh $f([a , b]) = [\alpha , \beta]$.

423

Bài toán 64a. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho f là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Chứng minh $f(a) < f(x)$ với mọi x trong $(a,b]$.

f liên tục trên $[a,b]$ (1)

$y, z \in [a,b]$ và $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$ (2)

$f(a) < f(b)$ (3)

$x \in (a,b) \Rightarrow f(a) < f(x)$? (4)

Ta thấy (2) yếu hơn (4). Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng

Có $x \in (a,b)$, sao cho $f(x) < f(a)$ (4')

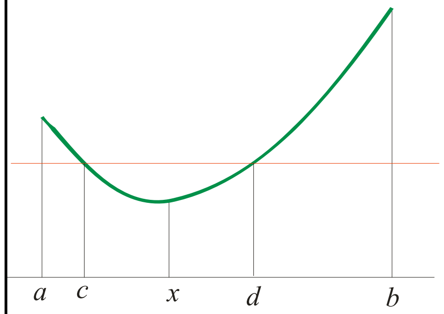
424

f liên tục trên $[a,b]$ (1)

$y, z \in [a,b]$ và $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$ (2)

$f(a) < f(b)$ (3)

Có $x \in (a,b)$, sao cho $f(x) < f(a)$ (4')



Theo hình vẽ ta có $c < d$ và $f(c) = f(d)$: mâu thuẩn với (2)

425

f liên tục trên $[a,b]$ (1)

$y, z \in [a,b]$ và $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$ (2)

$f(a) < f(b)$ (3)

Có $x \in (a,b)$, sao cho $f(x) < f(a)$ (4')

Theo QTGT 6, ta làm rõ hai yếu tố "giống giống khác khác "$f(a) < f(b)$" và "$f(x) < f(a)$": $(f(x), f(a)) \cap (f(x), f(b)) = (f(x), f(a))$. Do (1), $[f(x), f(a)] \subset f([a, x]) = [\alpha, \beta]$ và $[f(x), f(b)] \subset f([x, b]) = [\gamma, \delta]$. Vậy

$\exists\, \lambda \in (f(x), f(a)) \subset f([a, x]) \cap f([x, b])$

$\lambda \in f((a, x)) \cap f((x, b))$

$\exists\, c, d$ sao cho $a < c < x < d < b$ và $f(c) = f(d) = \lambda$: mâu thuẩn với (2)

426

Bài toán 64a. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho f là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Chứng minh $f(a) < f(x)$ với mọi x trong $(a,b]$.

Bài toán 64b. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho f là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Chứng minh $f(z) < f(b)$ với mọi z trong $(a,b]$.

427

Bài toán 64c. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho f là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Chứng minh $f(x) < f(y)$ với mọi x, y trong $[a,b]$, $x < y$.

f liên tục trên $[a,b]$ (1)

$y, z \in [a,b]$ và $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$ (2)

$f(a) < f(b)$ (3)

$x, y \in (a,b), x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$? (4)

Theo bài toán 64a

$y \in (a,b) \Rightarrow f(a) < f(y)$ (5)

Theo bài toán 64b

$x \in (a,y) \Rightarrow f(x) < f(y)$ (6)

428

Bài toán 64c. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho f là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $f(a) < f(b)$. Chứng minh $f(x) < f(y)$ với mọi x, y trong $[a,b]$, $x < y$.

Bài toán 64d. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho g là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $g(b) < g(a)$. Chứng minh $g(y) < g(x)$ với mọi x, y trong $[a,b]$, $x < y$.

Hướng dẫn. Đặt $f(z) = - g(z)$ với mọi z trong $[a,b]$.

Bài toán 64. Cho a và b sao cho $a < b$. Cho h là một đơn ánh từ $[a,b]$ và liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh g là một ánh xạ đơn điệu trên $[a,b]$.

429

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$. Ta nói A là một khoảng nếu với mọi x và y trong A sao cho $x < y$, ta có $[a,b] \subset A$.

Các tập sau đây là là các khoảng:

1. $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}$.
2. $(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}$.
3. $[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \}$.
4. $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$.
5. $[a,\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \}$.
6. $(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \}$.
7. $(- \infty,b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \le b \}$.
8. $(- \infty,b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$.
9. $\mathbb{R}$.

• Trong các trường hợp 1, 2, 3, 4, 5, 6 : a được gọi là một đầu mút của khoảng.

• Trong các trường hợp 1, 2, 3, 4, 7, 8 : b được gọi là một đầu mút của khoảng.

430

Bài toán 65. Cho A và B là hai khoảng trong $\mathbb{R}$ và f là một song ánh và đơn điệu tăng từ A vào B. Chứng minh f là một hàm số liên tục trên A.

Theo QTGT 3, ta làm rõ các yếu tố trong bài toán.

$u, v \in A, u < v \Rightarrow f(u) \le f(v)$

$u, v \in A, u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$. (1)

$t \in B \Rightarrow$ có $s \in A : t = f(s)$ (2)

Theo QTGT 1 và QTGT 5, ta viết sự liên tục của f theo dạng.

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(x,\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A, |y - x| < \delta(\varepsilon)$. (3)

431

$f(u) < f(v) \qquad \forall\, y \in A,\ u < v\ .$ (1)

$\forall\, t \in B$, có $s \in A$: $\quad t = f(s)$ (2)

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(x,\varepsilon) > 0$ sao cho

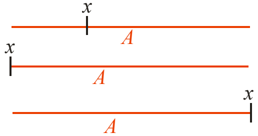
$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |y - x| < \delta(\varepsilon)\ .$ (3)

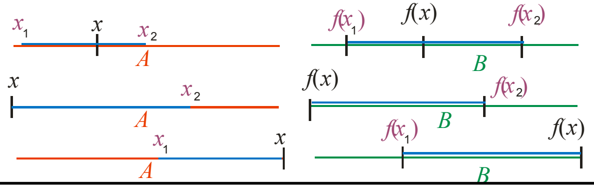
Theo QTGT 7, ta xét bài toán trong ba trường hợp.

(i) x không là đầu mút của A.

(ii) x là đầu mút phía tay trái của A.

(iii) x là đầu mút phía tay mặt của A.





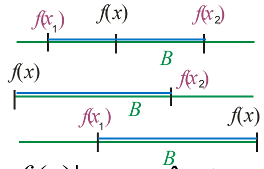
432

Theo QTGT 7, khi cho $\varepsilon > 0$, ta để ý trước hết đến yếu tố $|f(y) - f(x)|$, vậy ta chia bài toán thành ba trường hợp

(i) $f(x)$ không là đầu mút của B.

(ii) $f(x)$ là đầu mút phía tay trái của B.

(iii) $f(x)$ là đầu mút phía tay mặt của B.



Theo QTGT 7, ta để ý đến yếu tố $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, vậy ta viết ba trường hợp trên thành : có một $r > 0$ sao cho với mọi $\eta \in (0,r]$.

(i) $f(x)$ không là đầu mút của B, $[f(x)-\eta, f(x)+\eta] \subset B$.

(ii) $f(x)$ là đầu mút phía tay trái của B, $[f(x), f(x)+\eta] \subset B$.

(iii) $f(x)$ là đầu mút phía tay mặt của B, $[f(x)-\eta, f(x)] \subset B$.

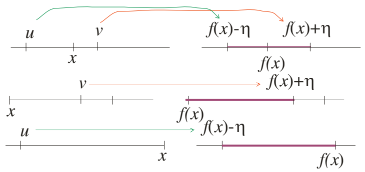
433

(i) $f(x)$ không là đầu mút của B, $[f(x)-\eta, f(x)+\eta] \subset B$.

(ii) $f(x)$ là đầu mút phía tay trái của B, $[f(x), f(x)+\eta] \subset B$.

(iii) $f(x)$ là đầu mút phía tay mặt của B, $[f(x)-\eta, f(x)] \subset B$.

Theo QTGT 6, để ý đến $|\, y - x \,| < \delta(\varepsilon)$, dùng tính song ánh đơn điệu của f, ta tìm được u và v :

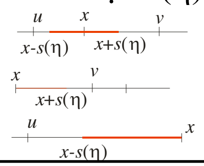


Theo QTGT 6, ta để ý đến yếu tố $|\, y - x \,| < \delta(\varepsilon)$, vậy ta viết ba trường hợp trên thành : có một $s(\eta) > 0$.

(i) $[x-\eta,\ x+ s(\eta)] \subset (u,v)$.

(ii) $[x,\ x+ s(\eta)] \subset [x,v)$.

(iii) $[x- s(\eta),\ x] \subset (u,x]$.

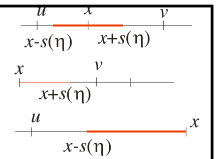


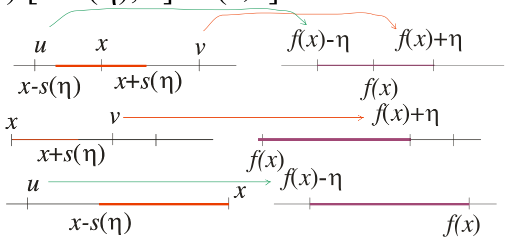
434

(i) $[x-\eta,\ x+ s(\eta)] \subset (u,v)$.

(ii) $[x,\ x+ s(\eta)] \subset [x,v)$.

(iii) $[x- s(\eta),\ x] \subset (u,x]$.





Có một $r > 0$ sao cho với mọi $\eta \in (0,r]$, có một $s(\eta) > 0$:

$|f(y) - f(x)| < \eta \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x \,| < s(\eta)$ (4)

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(x,\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, y \in A,\ |\, y - x \,| < \delta(\varepsilon)\ .$ (3)

435

Có một $r > 0$ sao cho với mọi $\eta \in (0,r]$, có một $s(\eta) > 0$:
$|f(y) - f(x)| < \eta \quad \forall\, y \in A, |y - x| < s(\eta)$ (4)

Cho $x \in A$, cho $\varepsilon > 0$, tìm một $\delta(x,\varepsilon) > 0$ sao cho
$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in A, |y - x| < \delta(\varepsilon)$. (3)

Cho $\varepsilon > 0$, đặt $\eta = \min\{\varepsilon, r\}$, ta có $s(\eta)$. Đặt $\delta(x,\varepsilon) = s(\eta)$

436

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 20

Cho f là một song ánh từ một khoảng I vào một khoảng J. Lúc đó

(1) Để chứng minh f liên tục trên I , ta chỉ cần chứng minh f đơn điệu trên I .

(2) Để chứng minh f đơn điệu trên I , ta chỉ cần chứng minh f liên tục trên I .

437

Bài toán 66a. Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x)=x^n$ với mọi $x \in [0,\infty)$. Chứng minh f liên tục từ $[0,\infty)$ vào $[0,\infty)$.

Dùng các bài toán 52 và 57 ta thấy f liên tục

Bài toán 66b. Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Chứng minh f là một song ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

f là một đơn ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

$x, y \in [0, \infty), x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$

$0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$ Dùng qui nạp toán học n=1: đúng

Giả sử trường hợp $n = m$ đúng, xét trường hợp $n = m + 1$

$x^{m+1} = x^m x < y^m x < y^m y = y^{m+1}$

438

f là một toàn ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

Cho $y \in [0, \infty)$, tìm $x \in [0, \infty)$ sao cho $f(x) = y$.

- Nếu $y = 0$, chọn $x = 0$. Ta có $f(0) = 0$.
- Nếu $y > 0$, theo tính chất Archimède, có một số nguyên dương N sao cho : theo tính chất Archimède, có một số nguyên dương N sao cho : $0 < y < N.1 = N$

Dùng qui nạp toán học, ta có : $N \leq N^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$f(0) = 0 < y < N \leq N^n = f(N) \quad y \in [f(0), f(N)] \subset f([0,N])$

$\exists\, x \in [0,N] \subset [0, \infty)$ sao cho $f(x) = y$ (bài tập 64)

Vậy cho $y \in [0, \infty)$, ta tìm được $x \in [0,\infty)$ sao cho $f(x) = y$

439

Bài toán 66c. Cho một số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Đặt $h = f^{-1}$. Chứng minh h đơn điệu tăng trên $[0, \infty)$.

Cho u và v trong $[0, \infty)$ sao cho $u < v$. Chứng minh

$$x = h(u) < h(v) = y$$

$u = x^n$, $v = y^n$ $\quad x^n < y^n \Rightarrow x < y$?

" $P \Rightarrow Q$ " $\Leftrightarrow$ " $\sim Q \Rightarrow \sim P$ "

$x \geq y \Rightarrow x^n \geq y^n$? : dùng qui nạp toán học như trong bài tập 66b

(iv) Dùng bài toán trước

Bài tập 66 . Cho số nguyên $n \geq 1$. Đặt $f(x) = x^n$ với mọi $x \in [0, \infty)$. Chứng minh

(i) f liên tục từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

(ii) f là một song ánh từ $[0, \infty)$ vào $[0, \infty)$.

(iii) Đặt $h = f^{-1}$, thì h đơn điệu tăng trên $[0, \infty)$.

(iv) f^{-1} là một hàm số thực liên tục trên $[0, \infty)$. Ta ký hiệu $f^{-1}(x)$ là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$ với mọi $x \in [0, \infty)$.

(i), (ii) và (iii) : các bài tập 66a, 66b và 66c.

(iv) : dùng bài toán 65

Bài toán 67. Cho một số nguyên $k \geq 1$. Đặt $n = 2k+1$, $f(x) = x^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Lúc đó :

(i) f liên tục t ừ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

(ii) f là một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$.

(iii) Đặt $h = f^{-1}$, thì h đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

(iv) f^{-1} là một hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta ký hiệu $f^{-1}(x)$ là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Phần chứng minh tương tự như trong định lý trước, chỉ khác phần (ii).

(iia) Cho x và y trong $\mathbb{R}$ sao cho $x < y$. Chứng minh

$$x^n = f(x) < f(y) = y^n$$

(iia) Cho x và y trong $\mathbb{R}$ sao cho $x < y$. Chứng minh

$$x^n = f(x) < f(y) = y^n$$

Chia làm ba trường hợp :

- $0 \leq x < y$.
- • • $x < 0 < y$.
- • • • $x < y \leq 0$.

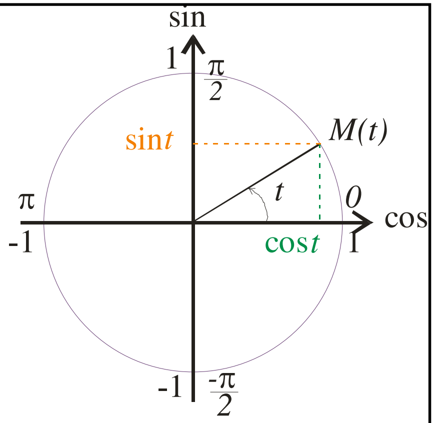
- Như trong phần chứng minh định lý trước
- • • Để ý $x^{2k+1} < 0 < y^{2k+1}$.
- • • • Đặt $u = -y$ và $v = -x$. Ta có $0 \leq u < v$ và $u^n = -y^n$ và $v^n = -x^n$. Áp dụng • .

Cho $t \in \mathbb{R}$ ta tương ứng một góc và một điểm $M(t)$ như trong hình vẽ. Ta đặt

- sin t = hoành độ của $M(t)$
- cos t = tung độ của $M(t)$

Xét hàm số g từ [-1,1] vào $\mathbb{R}$ như sau

$$g(x)=\sqrt{1-x^2} \quad \forall x\in[-1,1]$$

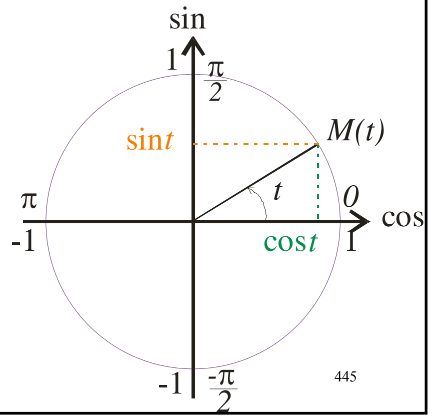


Ta thấy với mọi $x \in$ [-1,1] có duy nhất một $t \in$[0,π] sao cho $(x,g(x)) = M(t)$, và ngược lại. Và x chính là cos$t$. Vậy hàm cos là một song ánh từ [0,π] vào [-1,1] .

444

Ta thấy với mọi $x \in$ [-1,1] có duy nhất một $t \in$[0,π] sao cho $(x,g(x)) = M(t)$, và ngược lại. Và x chính là cos$t$. Vậy hàm cos là một song ánh từ [0,π] vào [-1,1] . Theo hình vẽ, hàm cos đơn điệu giãm.

Do tính song ánh đơn điệu giảm , hàm cos liên tục từ [0 , π] vào [-1,1], và hàm ngược của nó cũng liên tục từ [-1,1] vào [0,π]. Ta ký hiệu hàm này là arccos t với mọi $t \in$ [-1,1] .

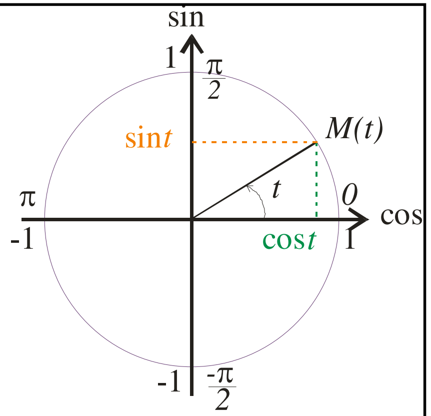


445

Theo hình vẽ ta thấy :

- cos $-t$ = cos t ,
- cos $(t+\pi)$ = - cos t .
- cos $(t + k2\pi)$ = cos t ,

với mọi t trong $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.



Theo phần trên : ∀ $\{x_n\}$ trong [0 , π] và hội tụ về x trong [0 , π], thì $\{\cos x_n\}$ hội tụ về cos$x$.

Nay cho một dãy $\{t_n\}$ trong [0 , 2π] và hội tụ về π . Ta sẽ chứng minh $\{\cos t_n\}$ hội tụ về cosπ .

446

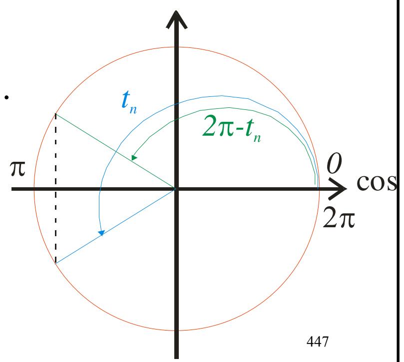
Bài toán 68. Chứng minh hàm cos liên tục tại π .

Cho một dãy $\{t_n\}$ trong [0 , 2π] và hội tụ về π . Ta sẽ chứng minh $\{\cos t_n\}$ hội tụ về cosπ .

Hàm cos liên tục trên [0 , π]

$$x_n=\begin{cases} t_n & \text{nếu } t_n\in[0,\pi],\\ 2\pi-t_n & \text{nếu } t_n\in[\pi,2\pi].\end{cases}$$

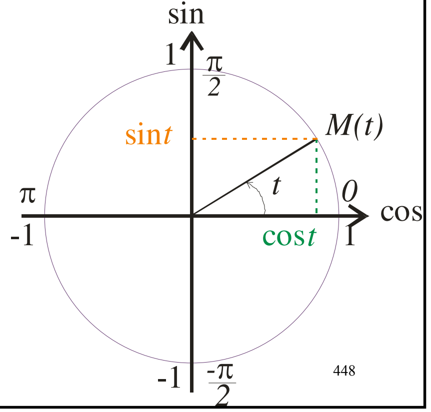
- $|(2\pi - t_n) - \pi| = |\pi - t_n|$: $\{x_n\}$ trong [0 , π] và hội tụ về π
- $\{\cos x_n\}$ hội tụ về cosπ
- $\cos x_n = \cos - t_n = \cos t_n$
- $\{\cos t_n\}$ hội tụ về cosπ



447

Lý luận tương tự, ta thấy hàm sin là một song ánh đơn điệu tăng liên tục từ $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ vào [-1,1]. Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ [-1,1] vào $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ Ta ký hiệu hàm này là arcsin *t với* mọi $t \in [-1,1]$.

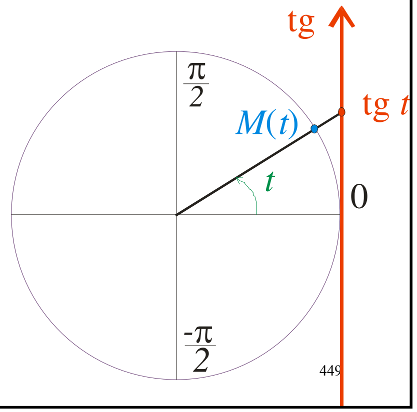
Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm sin trên ℝ như trong trường hợp hàm cos



448

Lý luận tương tự, ta thấy hàm tg là một song ánh đơn điệu tăng liên tục từ $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ vào (- ∞, ∞). Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ (- ∞, ∞) vào $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$. Ta ký hiệu hàm này là arctg *t với* mọi $t \in (-\infty, \infty)$.

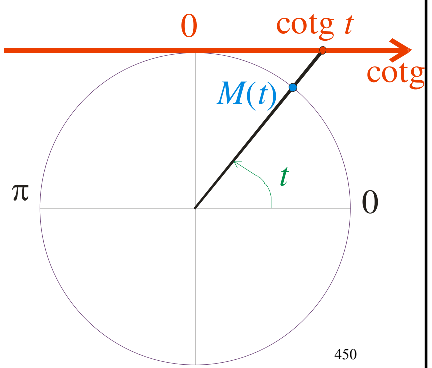
Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm tg trên $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi-\frac{1}{2}\pi,k\pi+\frac{1}{2}\pi)$ như trong trường hợp hàm cos



449

Lý luận tương tự, ta thấy hàm cotg là một song ánh đơn điệu giãm liên tục từ $(0,\pi)$ vào (- ∞, ∞). Vậy hàm ngược của nó cũng liên tục từ (- ∞, ∞) vào $(0,\pi)$. Ta ký hiệu hàm này là arccotg *t* với mọi $t \in (-\infty, \infty)$.

Từ đây ta chứng minh được sự liên tục của hàm cotg trên $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,k\pi+\pi)$ như trong trường hợp hàm cos



450

Đặt $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad \forall\ x \in (0,\infty)$

Ta chứng minh được ln là một song ánh đơn điệu tăng từ (0,∞) vào ℝ . Do đó ln liên tục trên (0,∞) và nó có ánh xạ ngược ký hiệu là e^x là một hàm số liên tục từ ℝ vào (0,∞).

Cho số thực dương *a*, ta đặt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall\ x \in (0,\infty)$$

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

ln *x* : logarit Neper của *x*

$\ln_a x$: logarit cơ hệ *a* của *x*

e^x : hàm mũ của *x*

Các hàm này liên tục trên tập chúng xác định

451

Định nghĩa . Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in A$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Bài toán 69. Cho một số thực dương c và đặt $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x)-f(y)| = c|x - y| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$

Đặt $\delta(\varepsilon) = c^{-1}\varepsilon$

452

Bài toán 70 . Cho $f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f không liên tục đều trên $\mathbb{R}$.

Theo QTGT 2, Ta làm rõ "không liên tục đều trên $\mathbb{R}$".

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in \mathbb{R}$ sao cho $|y - x| < \delta(\varepsilon)$.

$\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \delta > 0$ có $x(\delta)$ và $y(\delta) \in \mathbb{R}$ sao cho

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ và $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$.

Tìm một số $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$, ta tìm được $x(\delta)$ và $y(\delta) \in \mathbb{R}$: $|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ và $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$

$$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta \qquad (1)$$

$$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon \qquad (2)$$

453

$$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta \qquad (1)$$

$$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon \qquad (2)$$

Dùng QTGT1. Đây là hệ bất phương trình theo tham số δ và có ba ẩn số : ε, $x(\delta)$ và $y(\delta)$. Để đơn giản hoá hệ phương trình này ta đổi biến: đặt $h(\delta) = y(\delta) - x(\delta)$. Vì vai trò $x(\delta)$ và $y(\delta)$ như nhau và hàm f là hàm chẳn, ta có thể giả sử $0 < x(\delta) < y(\delta)$ hay $h(\delta) > 0$. Hệ bất phương trình trở thành

$$0 < h(\delta) < \delta \qquad (1')$$

$$f(x(\delta) + h(\delta)) - f(x(\delta)) \geq \varepsilon \qquad (2')$$

454

$$0 < h(\delta) < \delta \qquad (1')$$

$$|f(x(\delta)) - f(x(\delta) + h(\delta))| \geq \varepsilon \qquad (2')$$

Theo QTGT 1, ta viết lại bài toán

$$0 < h(\delta) < \delta \qquad (1')$$

$$2x(\delta)\, h(\delta) + h(\delta)^2 \geq \varepsilon \qquad (2')$$

Vì ta chỉ cần tìm một trị giá cho mỗi ẩn số ta đưa các bất phương trình thành phương trình. Để dễ giải, ta hạ bậc phương trình. Bài toán trở thành

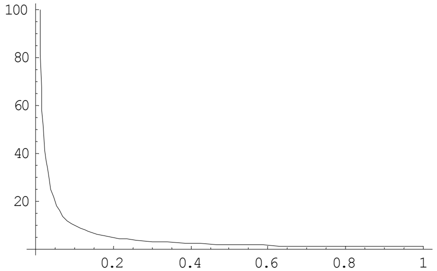
$$h(\delta) = \delta/2 \qquad (1'')$$

$$2x(\delta)\, h(\delta) = \varepsilon \qquad (2'')$$

Ta có các nghiệm $x(\delta) = \delta^{-1}\varepsilon$ và $y(\delta) = \delta^{-1}\varepsilon + \delta/2$. Vậy ta có thể chọn $\varepsilon = 1$, $x(\delta) = \delta^{-1}$ và $y(\delta) = \delta^{-1} + \delta/2$.

455

Bài toán 71 . Cho $A = (0,1)$ và $f(x) = x^{-1} \quad \forall x \in A$. Chứng minh f không liên tục đều trên A.



Tìm một số $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$, ta tìm được $x(\delta)$ và $y(\delta) \in \mathbb{R}$ sao cho

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ (1)

$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$ (2)

456

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ (1)

$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$ (2)

Dùng QTGT1. Đây là hệ bất phương trình theo tham số δ và có ba ẩn số : ε, $x(\delta)$ và $y(\delta)$. Để đơn giản hoá hệ phương trình này ta đổi biến: đặt $h(\delta) = y(\delta) - x(\delta)$. Vì vai trò $x(\delta)$ và $y(\delta)$ như nhau và hàm f là hàm chẳn, ta có thể giả sử $0 < x(\delta) < y(\delta)$ hay $h(\delta) > 0$. Hệ bất phương trình trở thành

$0 < h(\delta) < \delta$ (1')

$f(x(\delta) + h(\delta)) - f(x(\delta)) \geq \varepsilon$ (2')

457

$|y(\delta) - x(\delta)| < \delta$ (1)

$|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$ (2)

Dùng QTGT1. Đây là hệ bất phương trình theo tham số δ và có ba ẩn số : ε, $x(\delta)$ và $y(\delta)$. Để đơn giản hoá hệ phương trình này ta đổi biến: đặt $h(\delta) = y(\delta) - x(\delta)$. Vì vai trò $x(\delta)$ và $y(\delta)$ như nhau, ta có thể giả sử $0 < x(\delta) < y(\delta)$ hay $h(\delta) > 0$. Hệ bất phương trình trở thành

$0 < h(\delta) < \delta$ (1')

$f(x(\delta)) - f(x(\delta) + h(\delta)) \geq \varepsilon$ (2')

458

$0 < h(\delta) < \delta$ (1')

$f(x(\delta)) - f(x(\delta) + h(\delta)) \geq \varepsilon$ (2')

Theo QTGT 1, ta viết lại bài toán

$0 < h(\delta) < \delta$ (1')

$[x(\delta)(x(\delta) + h(\delta))]^{-1} h(\delta) \geq \varepsilon$ (2')

Vì ta chỉ cần tìm một trị giá cho mỗi ẩn số ta đưa các bất phương trình thành phương trình. Để dễ giải, ta đổi dạng phương trình. Bài toán trở thành

$h(\delta) = \delta/2$ (1'')

$[x(\delta)(x(\delta) + h(\delta))]^{-1} h(\delta) \geq x(\delta)^{-2} h(\delta) = \varepsilon$ (2'')

Ta có các nghiệm $x(\delta) = [\varepsilon^{-1}\delta]^{-1/2}$ và $y(\delta) = [\varepsilon^{-1}\delta]^{-1/2} + \delta/2$. Vậy ta có thể chọn $\varepsilon = 1$, $x(\delta) = \delta^{-1/2}$ và $y(\delta) = \delta^{-1/2} + \delta/2$.

459

$h(\delta) = \delta/2$ (1”)

$[x(\delta)(x(\delta) + h(\delta))]^{-1} h(\delta) \geq x(\delta)^{-2} h(\delta) = \varepsilon$ (2”)

Ta có các nghiệm $x(\delta) = [\varepsilon^{-1}\delta]^{-1/2}$ và $y(\delta) = [\varepsilon^{-1}\delta]^{-1/2} + \delta/2$. Vậy ta có thể chọn $\varepsilon = 1$, $x(\delta) = \delta^{-1/2}$ và $y(\delta) = \delta^{-1/2} + \delta/2$.

Tuy nhiên ta phải có: $x(\delta)$ và $y(\delta)$ thuộc $(0,1)$. Theo QTGT 7, ta xét các trường hợp sau:

Nếu $\delta < ¼$: chọn $x(\delta) = \delta^{-1/2}$ và $y(\delta) = \delta^{-1/2} + \delta/2$.

Nếu $¼ \leq \delta$: chọn $h(\delta) = ¼$, $x(\delta) = ¼$, và $y(\delta) = ¼ + ¼$

460

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 16

Nếu bài toán phức tạp vì có những trường hợp không giải được. Ta giải trước các trường hợp có thể giải được. Sau đó cố gắng đưa các trường hợp còn lại về các trường hợp đã giải.

461

Bài toán 72 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$. Lúc đó f liên tục đều trên $[a,b]$

$\forall s \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, có $\delta(x,\varepsilon) > 0$:

$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a,b], |t-s| < \delta(x,\varepsilon).$ (1)

$\forall \varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$

$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon' \quad \forall t \in [a,b], |x-y| < \eta(\varepsilon')$. (2)

Vì kết luận (2) mạnh hơn hẳn giả thiết (1), theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng sau:

Giả sử có một số thực dương ε' sao cho với mọi số thực dương η ta có hai số $x(\eta)$ và $y(\eta)$ trong $[a, b]$ sao cho

$|x(\eta) - y(\eta)| < \eta$ và $|f(x(\eta)) - f(y(\eta))| \geq \varepsilon'$. (3)

462

$\forall s \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, có $\delta(x,\varepsilon) > 0$:

$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a,b], |t-s| < \delta(x,\varepsilon).$ (1)

Giả sử có một số thực dương ε' sao cho với mọi số thực dương η ta có hai số $x(\eta)$ và $y(\eta)$ trong $[a, b]$ sao cho

$|x(\eta) - y(\eta)| < \eta$ và $|f(x(\eta)) - f(y(\eta))| \geq \varepsilon'$. (3)

Theo QTGT 14, ta viết (1) và (3) ra dạng dãy số. Ở đây ta thấy nên xét các η nhỏ, nên ta đặt $\eta = m^{-1}$.

Nếu $\{s_n\}$ là một dãy hội tụ về s trong $[a,b]$, thì $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$. (4)

Giả sử có một số thực dương ε' sao cho với mọi số nguyên dương m ta có hai số $u_m = x(m^{-1})$ và $v_m = y(m^{-1})$ trong $[a, b]$ sao cho

$|u_m - v_m| < m^{-1}$ và $|f(u_m) - f(v_m)| \geq \varepsilon'$. (5)

463

Nếu $\{s_n\}$ là một dãy hội tụ về s trong $[a,b]$, thì $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$. (4)

Giả sử có một số thực dương ε' sao cho với mọi số nguyên dương m ta có hai số $u_m=x(m^{-1})$ và $v_m=y(m^{-1})$ trong $[a, b]$ sao cho : $|u_m - v_m| < m^{-1}$ và $|f(u_m) - f(v_m)| \geq \varepsilon'$. (5)

Theo QTGT 6, ta Xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (4) và (5): $\{s_n\}$ hội tụ nhưng $\{u_m\}$ và $\{v_m\}$ có thể không hội tụ, $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$ nhưng $|f(u_m) - f(v_m)| \geq \varepsilon'$. Dùng định lý Bolzano-Weierstrass ta khắc phục sự khác biệt đầu : có một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ hội tụ về u trong $[a,b]$. Dựa vào cách giải quyết $\{u_m\}$, ta giải quyết $\{v_m\}$: đặt $z_m = v_m - u_m$. Ta thấy $v_m = u_m + z_m$ và $\{z_m\}$ hội tụ về 0. Vậy $\{v_{m_k}\}$ hội tụ về u.

464

Nếu $\{s_n\}$ là một dãy hội tụ về s trong $[a,b]$, thì $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$. (4)

Giả sử có một số thực dương ε' sao cho với mọi số nguyên dương m ta có hai số $u_m=x(m^{-1})$ và $v_m=y(m^{-1})$ trong $[a, b]$ sao cho : $|u_m - v_m| < m^{-1}$ và $|f(u_m) - f(v_m)| \geq \varepsilon'$. (5)

Có một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ hội tụ về u trong $[a,b]$, và $\{v_{m_k}\}$ hội tụ về u.

Ta viết lại bài toán

Nếu $\{s_n\}$ là một dãy hội tụ về s trong $[a,b]$, thì $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$. (4)

Có ε' >0 và một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ hội tụ về u trong $[a,b]$, và $\{v_{m_k}\}$ hội tụ về u, $|f(u_{m_k}) - f(v_{m_k})| > \varepsilon'$ (6)

465

Nếu $\{s_n\}$ là một dãy hội tụ về s trong $[a,b]$, thì $\{f(s_n)\}$ hội tụ về $f(s)$. (4)

Có ε' >0 và một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ hội tụ về u trong $[a,b]$, và $\{v_{m_k}\}$ hội tụ về u, $|f(u_{m_k}) - f(v_{m_k})| > \varepsilon'$ (6)

Đặt $s_n = u_{m_n}$ và $t_n = v_{m_n}$. Ta viết lại bài toán

Vì $\{s_n\}$ và $\{t_n\}$ là các dãy hội tụ về u trong $[a,b]$, $\{f(s_n)\}$ và $\{f(t_n)\}$ hội tụ về $f(u)$. (7)

Có ε' >0 và một dãy con $\{u_{m_k}\}$ của $\{u_m\}$ hội tụ về u trong $[a,b]$, và $\{v_{m_k}\}$ hội tụ về u, $|f(u_{m_k}) - f(v_{m_k})| > \varepsilon'$ (6)

$|f(s_n) - f(t_n)| > \varepsilon'$ (8)

Ta thấy (7) và (8) mâu thuẩn với nhau.

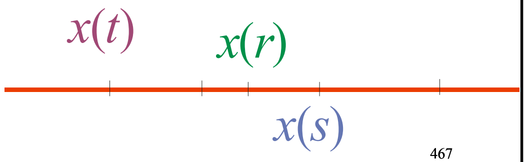
466

CHƯƠNG BẢY

PHÉP TÍNH VI PHÂN

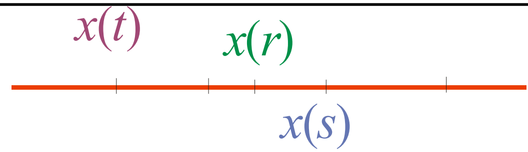
Quan sát một chiếc xe chạy trên đường thẳng, chúng ta muốn xét việc chạy nhanh hoặc chậm của nó tại một thời điểm t . Ta mô hình toán học việc này như sau: ghi vị trí chiếc xe tại thời điểm s là $x(s)$. Với một thời điểm s khá gần nhưng khác t, ta tính được vận tốc trung bình của chiếc xe trong khoảng thời gian từ t đến s như sau

$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$



467

$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$



Vận tốc trung bình $v_{t,s}$ cho chúng ta các thông tin về việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t. Nếu s càng gần t hơn, thì $v_{t,s}$ càng cho chúng ta các thông tin chính xác hơn về việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t.

Vậy để biết việc chạy nhanh hoặc chậm của chiếc xe tại thời điểm t, ta phải xét vị trí $x(r)$ của chiếc xe tại các thời điểm r trong một tập hợp A. Tập hợp A này phải có tính chất : luôn luôn có các phần tử khác t nhưng rất gần t.

468

Ta mô hình toán học ý tưởng bên trên như sau

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và $x \in \mathbb{R}$. Ta nói x là một điểm tụ của A nếu với mọi số thực dương δ ta tìm được $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$. Tập hợp tất cả các điểm tụ của A được ký hiệu là A^* .

Định nghĩa x là điểm tụ của A có thể được viết như sau

$\exists\ y \in A \cap \{(x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}\}$ (1)

$\exists\ y \in \{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta)$ (2)

$\{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \emptyset$ (3)

469

Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương với nhau

$x \in A^*$ (1)

$x \in (A \setminus \{x\})^*$ (2)

Theo QTGT 1, ta làm rõ (1) và (2)

Cho $\delta > 0$, có $y \in A$: $0 < |y-x| < \delta$ (1')

Cho $\eta > 0$, có $t \in A \setminus \{x\}$: $0 < |t-x| < \eta$ (2)

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$, $t \notin \{x\}$: $0 < |t-x| < \eta$

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$, $t \neq x$: $0 < |t-x| < \eta$ (2')

Ta viết lại bài toán : chứng minh sự tương đương của

Cho $\delta > 0$, có $y \in A$: $0 < |y-x| < \delta$ (1')

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$, $t \neq x$: $0 < |t-x| < \eta$ (2')

470

Cho $\delta > 0$, có $y \in A$: $0 < |y-x| < \delta$ (1')

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$, $t \neq x$: $0 < |t-x| < \eta$ (2')

Ta thấy (1') và (2') rất giống nhau, ta phải tập trung xét các yếu tố khác nhau của chúng: "$t \neq x$". Ta viết yếu tố này theo dạng các yếu tố còn lại : $0 < |t-x|$. Vậy (2') có dạng

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$, $0 < |t-x|$: $0 < |t-x| < \eta$ (2'')

Cho $\eta > 0$, có $t \in A$: $0 < |t-x| < \eta$ (2''')

Vậy (1) và (2) tương đương

471

Bài toán 73. Cho $A = (0,1)$ và $x = 0$. Chứng minh x là một điểm tụ của A

Theo QTGT 12, ta viết bài toán như sau

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < |0 - y| < \delta$ (1)

Theo QTGT 1, ta làm rõ bài toán: $|0 - y| = |y| = y$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in (0,1)$ sao cho $0 < y < \delta$ (1')

Theo QTGT 5, ta viết $y \in (0,1)$ thành $0 < y < 1$

Cho $\delta > 0$, tìm y sao cho: $0 < y < 1$ và $0 < y < \delta$ (1'')

Cho $\delta > 0$, tìm y sao cho: $0 < y < \min\{1, \delta\}$

$y = 2^{-1}\min\{1, \delta\}$

472

Bài toán 74. Cho $A = [0,1]$ và $x = 0$. Chứng minh x là một điểm tụ của A

Theo QTGT 12, ta viết bài toán như sau

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in A$ sao cho $0 < |x - y| < \delta$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in [0,1)$ sao cho $0 < |0 - y| < \delta$ (1)

Theo QTGT 1, ta làm rõ bài toán: $|0 - y| = |y| = y$

Cho $\delta > 0$, tìm $y \in [0,1)$ sao cho $0 < y < \delta$ (1')

Theo QTGT 5, ta viết $y \in [0,1)$ thành $0 \leq y < 1$

Cho $\delta > 0$, tìm y sao cho: $0 \leq y \leq 1$ và $0 < y < \delta$ (1'')

Cho $\delta > 0$, tìm y sao cho: $0 < y < \min\{1, \delta\}$

$y = 2^{-1}\min\{1, \delta\}$

473

Bài toán 75. Cho $A = \{0\} \cup [2^{-1}, 1]$ và $x = 0$. Chứng minh x không là một điểm tụ của A

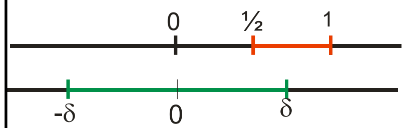
Theo QTGT 1, ta viết bài toán như sau

$\forall \delta > 0$, $\{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \emptyset$

$\exists \delta > 0$, $\{A \setminus \{x\}\} \cap (x - \delta, x + \delta) = \emptyset$

Theo QTGT 1, ta viết $A \setminus \{x\} = \{\{0\} \cup [2^{-1},1]\} \setminus \{0\} = [2^{-1},1]$ và $(x - \delta, x + \delta) = (-\delta, \delta)$. Và bài toán có dạng

Tìm $\delta > 0$ sao cho $[2^{-1},1] \cap (-\delta, \delta) = \emptyset$



Chọn $\delta = ¼$.

474

Bài toán 76. Cho B là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in B^*$. Đặt $A = B \cup \{a\}$. Chứng minh $a \in A^*$.

Cho $\delta > 0$, có $y \in B$: $0 < |y - a| < \delta$ (1)

Cho $\eta > 0$, tìm $t \in B \cup \{a\}: 0 < |t - a| < \eta$ (2)

Ta thấy (1) và (2) rất giống nhau, ta phải tập trung xét các yếu tố khác nhau của chúng: B và $B \cup \{a\}$. Hai yếu tố này khác nhau khi $t = a$, nhưng $0 < |t-a|$. Vậy (2) có dạng

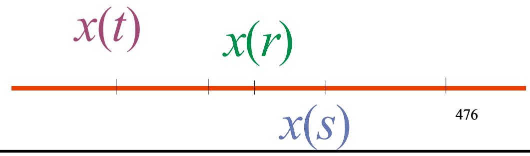
Cho $\eta > 0$, tìm $t \in B : 0 < |t - a| < \eta$ (2')

475

Quan sát một chiếc xe chạy trên đường thẳng, chúng ta muốn xét việc chạy nhanh hoặc chậm của nó tại một thời điểm t. Ta mô hình toán học việc này như sau

- chọn một tập hợp các thời điểm A sao cho t là một điểm tụ của A,
- với một thời điểm $s \in A \setminus \{t\}$, ta tính vận tốc trung bình $v_{t,s}$ của chiếc xe trong khoảng thời gian từ t đến s.
- nếu s càng gần t thì $v_{t,s}$ càng gần một số thực v. Ta nói v là vận tốc tức thời của chiếc xe tại thời điểm t.

$$v_{t,s} = \frac{x(s) - x(t)}{s - t}$$



476

Ta thử xem mô hình toán học ý tưởng bên trên như sau.

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói

- f *có giới hạn là c* tại a nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$|f(x) - c| < \varepsilon \quad \forall\ x \in A$ với $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$,

và ký hiệu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

477

Bài toán 77. Cho $A = [0,1]$, $a = 0$ và

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \forall\ x \in [0,1), \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

$\forall\ \varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in A$ với $0 < |x - 0| < \delta(\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in (0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$ (1)

478

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall\ x \in (0,1]$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$ (1)

Theo QTGT 1, ta làm rõ $|f(x) - 1|$. Theo KTGT 7, ta xét hai trường hợp $x \in (0,1)$ và $x = 1$. Xét trường hợp $x = 1$, vì nó dễ, ta có $|f(x) - 1| = 0$. Xét trường hợp $x \in (0,1)$

$$f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 1 = \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} \quad \forall\ x \in (0,1).$$

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-x}{x-1}\right| = \frac{\sqrt{x}-x}{1-x} \quad \forall\ x \in (0,1).$$

Ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$\frac{\sqrt{x}-x}{1-x} < \varepsilon \quad \forall\ x \in (0,1)$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$ (2)

479

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$\frac{\sqrt{x}-x}{1-x} < \varepsilon \quad \forall\ x \in (0,1)$ với $0 < x < \delta(\varepsilon)$ (2)

Theo QTGT 6, ta xét sự khác biệt giữa $0 < x < \delta(\varepsilon)$ và $\frac{\sqrt{x}-x}{1-x} < \varepsilon$. Ta làm chúng giống nhau: $x = (\sqrt{x})^2$ và

$$\frac{\sqrt{x}-x}{1-x} = \sqrt{x}\,\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \sqrt{x}\,\frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} < \sqrt{x}$$

Ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$\sqrt{x} < \varepsilon \quad \forall\ x \in (0,1)$ với $0 < \sqrt{x} < \sqrt{\delta(\varepsilon)}$ (3)

Chọn $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$

480

Bài toán 78. Cho $A = [0,1]$, $a = 1$ và

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \forall\ x \in [0,1), \\ 1 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \quad \forall\ x \in A$ với $0 < |x - 1| < \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1]$ với $0 < 1 - x < \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1)$ với $0 < 1 - x < \delta(\varepsilon)$ (1)

481

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon \quad \forall\ x \in [0,1)$ với $0 < 1 - x < \delta(\varepsilon)$ (1)

Theo QTGT 2, ta làm rõ $|f(x) - 2^{-1}|$. Theo KTGT 6, ta xét hai trường hợp $x \in (0,1)$ và $x = 0$. Xét trường hợp $x = 0$, vì nó dễ, ta có $|f(x) - 2^{-1}| = 2^{-1}$. Xét trường hợp $x \in (0,1)$

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2(x-1)} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2(x-1)} = -\frac{(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}+1)}$$

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = \frac{1-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+1)} < 1 - \sqrt{x} \quad \forall x \in (0,1)$$

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| \begin{cases} = \frac{1}{2} & x = 0, \\ < 1 - \sqrt{x} & x \in (0,1). \end{cases}$$

482

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| \begin{cases} = \tfrac{1}{2} < \varepsilon & x = 0, 0 < 1 - x < \delta(\varepsilon), \\ < 1 - \sqrt{x} < \varepsilon & x \in (0,1), 0 < 1 - x < \delta(\varepsilon). \end{cases} \quad (1')$$

Ta thấy khi $\varepsilon < 2^{-1}$, trường hợp $x = 0$ không thể đúng. Ta phải loại trường hợp này: chỉ tìm $0 < \delta(\varepsilon) \le 1$. Ta viết lại bài toán như sau

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ sao cho

$$|f(x) - \tfrac{1}{2}| < 1 - \sqrt{x} < \varepsilon \qquad x \in (0,1), 0 < 1 - x < \delta(\varepsilon)$$

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ sao cho

$$1 - \sqrt{x} < \varepsilon \qquad \forall\ x \in (0,1), 0 < 1 - x < \delta(\varepsilon) \qquad (1'')$$

483

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ sao cho

$$1 - \sqrt{x} < \varepsilon \qquad \forall\ x \in (0,1), 0 < 1 - x < \delta(\varepsilon) \qquad (1'')$$

Theo QTGT 1, ta xét sự khác biệt giữa $0 < 1\text{-}x < \delta(\varepsilon)$ và $1 - \sqrt{x} < \varepsilon$. Ta làm chúng giống nhau như sau

$$1 - x = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) > (1 - \sqrt{x})$$

Theo QTGT 13, ta viết lại bài toán

Cho $\varepsilon > 0$, tìm $\delta(\varepsilon)$ sao cho $0 < \delta(\varepsilon) \le 1$

$$1\text{-}\ x < \varepsilon \qquad \forall\ x \in (0,1) \quad \text{với } 0 < 1\text{-}\ x < \delta(\varepsilon) \qquad (2)$$

Theo QTGT 1, ta xét sự khác biệt nhưng giống giống nhau: $1\text{-}\ x < \varepsilon$ và $1\text{-}\ x < \delta(\varepsilon)$. Ta làm chúng giống nhau: chọn $\delta(\varepsilon) = \min\{1/2, \varepsilon\}$.

484

QUI TẮC GIẢI TOÁN 17

Nếu bài toán phức tạp vì có nhiều trường hợp khác nhau. Ta có thể loại các trường hợp không cần thiết và viết lại bài toán.

485

Dùng lệnh lim($f(x),x,a$) để tính $\lim_{x\to a} f(x)$

```
>> syms x
>> limit((sqrt(x)-1)/(x-1),x,0)
ans =
1
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 1$$

```
>> syms x
>> limit((sqrt(x)-1)/(x-1),x,1)
ans =
1/2
```

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

486

```
>> limit(x^((x^x)-1),x,0)
 ans =
1
```

$$\lim_{x\to 0} x^{x^x-1} = 1$$

487

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói f *có giới hạn bên phải là c tại a* nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương δ(ε) sao cho

$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \text{ với } 0 < x - a < \delta(\varepsilon),$$

và ký hiệu

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = c$$

488

Dùng lệnh limit(f(x),x,a,'right') để tính $\lim_{x\to a^+} f(x)$


```
>> limit((x+1)^(x^(-1)),x,0,'right')
ans =
exp(1)
```

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

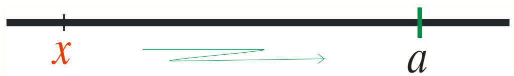
489

Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, f là một hàm số thực trên A và $a \in A^*$. Ta nói f *có giới hạn bên trái là c tại a* nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε có một số thực dương δ(ε) sao cho

$$|f(x) - c| < \varepsilon \qquad \forall\ x \in A \quad \text{với } 0 < a - x < \delta(\varepsilon),$$

và ký hiệu

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = c$$



490

Dùng lệnh limit(f(x),x,a, 'left') để tính $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$


```
>> limit(log(cos(x))/(-x^(2)),x,0,'left')

ans =

1/2
```

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{Log(\cos x)}{x\,|\,x\,|} = \frac{1}{2}$

491

Bài toán 79. Cho A là một tập hợp con khác trống của ℝ, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử f liên tục tại a. Lúc đó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Cho một $\varepsilon > 0$, có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ với $|x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho
$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall t \in A$ với $0 < |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "khác" giữa (1) và (2): $0 \le |x-a|$ và $0 < |t - a|$. Ta xét riêng trường hợp này: $t = a$, lúc đó $|f(t) - f(a)| = 0 < \varepsilon' \quad \forall \varepsilon' > 0$. Ta viết lại (2)

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho
$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall t \in A$ với $0 \le |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2')

492

Cho một $\varepsilon > 0$, có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ với $|x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)u

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho
$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall t \in A$ với $0 \le |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2')

Theo QTGT 6, ta xét các dữ kiện giống giống nhưng khác nhau giữa (1) và (3'): ε và ε', $\delta(a,\varepsilon)$ và $\eta(a, \varepsilon')$. Ta làm chúng giống nhau như sau.

Cho $\varepsilon' > 0$ Đặt $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(a,\varepsilon)$ Đặt $\eta(a, \varepsilon') = \delta(a,\varepsilon)$

$|f(z) - f(a)| < \varepsilon = \varepsilon' \ \forall z \in A,\ 0 \le |z - a| < \delta(a,\varepsilon) = \eta(a,\varepsilon')$

493

Bài toán 80. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Chứng minh f liên tục tại a

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ với $0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho
$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall t \in A$ với $|t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 6, ta xét sự khác biệt giữa (1) và (2): $0 < |x-a|$ và $0 \le |t - a|$. Ta xét riêng trường hợp này: $t = a$, lúc đó $|f(t) - f(a)| = 0 < \varepsilon' \quad \forall \varepsilon' > 0$. Ta viết lại (1)

Cho một $\varepsilon > 0$, có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ với $0 \le |x - a| < \delta(a, \varepsilon)$ (1')

494

Cho một $\varepsilon > 0$, có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ với $0 \le |x - a| < \delta(a, \varepsilon)$ (1')

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \qquad \forall t \in A$ với $\le |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 6, ta xét các dữ kiện giống giống nhưng khác nhau giữa (1) và (3'): ε và ε', $\delta(a,\varepsilon)$ và $\eta(a, \varepsilon')$. Ta làm chúng giống nhau như sau.

Cho $\varepsilon' > 0$ Đặt $\varepsilon = \varepsilon'$, có $\delta(a,\varepsilon)$ Đặt $\eta(a, \varepsilon') = \delta(a,\varepsilon)$

$|f(z) - f(a)| < \varepsilon = \varepsilon' \; \forall z \in A,\ 0 \le |z - a| < \delta(a,\varepsilon) = \eta(a,\varepsilon')$

495

Bài toán 81. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Giả sử $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $A \setminus \{a\}$ (nghĩa là $x_n \in A \setminus \{a\}$ với mọi n) và $\{x_n\}$ hội tụ về a. Chứng minh dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về c.

Cho $\epsilon > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(t) - c| < \epsilon \quad \forall t \in A,\ 0 < |t - a| < \delta(a, \epsilon)$ (1)

Cho một $\epsilon' > 0$, có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$0 < |x_n - a| < \epsilon' \qquad \forall n \ge N(\epsilon')$ (2)

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad \forall m \ge M(\epsilon'')$ (3)

496

Cho $\epsilon > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon) > 0$ sao cho

$|f(t) - c| < \epsilon \quad \forall t \in A,\ 0 < |t - a| < \delta(a, \epsilon)$ (1)

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$0 < |x_n - a| < \epsilon' \qquad \forall n \ge N(\epsilon')$ (2)

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad \forall m \ge M(\epsilon'')$ (3)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố giống giống khác khác để tìm từng bước giải bài này. Để định hướng chọn bước đi thật đúng đến mục tiêu "kết luận", ta phải để ý trước các yếu tố trong (3): $|f(x_m) - c| < \epsilon''$ và $|f(t) - c| < \epsilon$. Ta làm chúng giống nhau: cho ϵ'', đặt $\epsilon = \epsilon''$, $t = x_m$. Viết lại (1)

Cho $\epsilon'' > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad |x_m - a| < \delta(a, \epsilon)$ (1')

497

Cho $\epsilon'' > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad |x_m - a| < \delta(a, \epsilon'')$ (1')

Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $N(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$0 < |x_n - a| < \epsilon' \qquad \forall n \ge N(\epsilon')$ (2)

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon'' \qquad \forall m \ge M(\epsilon'')$ (3)

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố giống giống khác khác để tìm bước tiếp giải toán: $|x_m - a| < \delta(a, \epsilon'')$ và $|x_n - a| < \epsilon'$. Ta làm chúng giống nhau: đặt $\epsilon' = \delta(a, \epsilon'')$. Viết lại (2)

Cho một $\delta(a, \epsilon'') > 0$ ta có một $N(\delta(a, \epsilon'')) \in \mathbb{N}$ sao cho

$0 < |x_n - a| < \delta(a, \epsilon'') \quad \forall n \ge N(\delta(a, \epsilon''))$ (2')

498

Cho $\epsilon'' > 0$, có $\exists\, \delta(a, \epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon''$ $\quad |x_m - a| < \delta(a, \epsilon'')$ (1')

Cho một $\delta(a, \epsilon'') > 0$ ta có một $N(\delta(a, \epsilon'')) \in \mathbb{N}$ sao cho

$0 < |x_n - a| < \delta(a, \epsilon'')$ $\quad \forall\, n \geq N(\delta(a, \epsilon''))$ (2')

Cho một $\epsilon'' > 0$ tìm một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_m) - c| < \epsilon''$ $\quad \forall\, m \geq M(\epsilon'')$ (3)

Theo QTGT 3, ta xét các yếu tố giống giống khác khác để tìm bước tiếp giải toán: $n \geq N(\delta(a, \epsilon''))$ và $m \geq M(\epsilon'')$. Ta làm chúng giống nhau: đặt $M(\epsilon'') = N(\delta(a, \epsilon''))$. Vậy ta đã tìm được $M(\epsilon'')$. Kiểm lại (3)

$m \geq M \geq M(\epsilon'') = N(\delta(a, \epsilon''))$ $\quad$ (2') $\quad |x_m - a| < \delta(a,\epsilon'')$

$|x_m - a| < \delta(a,\epsilon'')$ $\quad$ (1') $\quad |f(x_m) - c| < \epsilon''$

499

Bài toán 82. Cho một hàm số thực f trên một tập con A của $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ và $a \in A^*$. Giả sử với mọi dãy $\{x_n\}$ trong $A \setminus \{a\}$ (nghĩa là $x_n \in A \setminus \{a\}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$) và $\{x_n\}$ hội tụ về a, thì dãy $\{f(x_n)\}$ hội tụ về c. Chứng minh $\lim_{x \to a} f(x) = c$

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - c| < \epsilon'$ $\quad \forall\, n \geq M(\epsilon')$ (2)

Cho $\epsilon'' > 0$, tìm $\delta(a,\epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(y) - c| < \epsilon''$ $\quad \forall\, y \in A$ với $|y - a| < \delta(a,\epsilon'')$ (3)

Giả thiết chỉ xét dãy $\{f(x_n)\}$ còn kết luận xét $\{\{f(y) : y \in A$ với $|y - a| < \delta(a,\epsilon'')\}$. Tập hợp trong giả thiết quá lắm đếm được, tập hợp trong kết luận có thể không đếm được.

500

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - c| < \epsilon'$ $\quad \forall\, n \geq M(\epsilon')$ (2)

Cho $\epsilon'' > 0$, tìm $\delta(a,\epsilon'') > 0$ sao cho

$|f(y) - c| < \epsilon''$ $\quad \forall\, y \in A$ với $|y - a| < \delta(a,\epsilon'')$ (3)

Giả thiết chỉ xét dãy $\{f(x_n)\}$ còn kết luận xét $\{\{f(y) : y \in A$ với $|y - a| < \delta(a,\epsilon'')\}$. Tập hợp trong giả thiết quá lắm đếm được, tập hợp trong kết luận có thể không đếm được. Theo QTGT 8, ta dùng phản chứng với giả thiết phản chứng

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - a| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$ (3')

501

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon' > 0$ ta có một $M(\epsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - c| < \epsilon'$ $\quad \forall\, n \geq M(\epsilon')$ (2)

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - a| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$ (3')

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố giống giống nhưng đối kháng nhau để tìm từng bước giải bài này. Để định hướng chọn bước đi thật đúng đến mục tiêu "kết luận", ta phải để ý trước các yếu tố trong (3): $|f(x_m) - c| < \epsilon$ và $|f(y_\delta) - c| < \epsilon$. Ta làm chúng giống nhau: cho ϵ'' , đặt $\epsilon = \epsilon''$. Viết lại (2)

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon$ $\forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon'' > 0$ ta có một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho

$|f(x_n) - c| < \epsilon''$ $\quad \forall\, n \geq M(\epsilon'')$ (2')

502

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon'' > 0$ ta có một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho $|f(x_n) - c| < \epsilon'' \quad \forall\, n \geq M(\epsilon'')$ (2')

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $\delta > 0$ ta có một $y_\delta \in A$ với $|y_\delta - a| < \delta$ sao cho $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$ (3')

Theo QTGT 4, ta xét các yếu tố giống nhưng đối kháng để tìm bước tiếp giải toán: $|f(x_n) - c| < \epsilon''$ và $|f(y_\delta) - c| \geq \epsilon''$. Ta làm chúng giống nhau, theo KTGT 21: đặt $z_m = y_{1/m}$. Viết lại (3')

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta có một $z_m \in A$ với $|z_m - a| < 1/m$ sao cho $|f(z_m) - c| \geq \epsilon''$ (3'')

503

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon'' > 0$ ta có một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho $|f(x_n) - c| < \epsilon'' \quad \forall\, n \geq M(\epsilon'')$ (2')

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta có một $z_m \in A$ với $|z_m - a| < 1/m$ sao cho $|f(z_m) - c| \geq \epsilon''$ (3'')

Theo QTGT 1, ta xét các yếu tố giống giống khác khác để tìm bước tiếp giải toán: x_n và z_m. Ta làm chúng giống nhau: ta chứng minh được $\{z_m\}$ hội tụ về a. Đặt $x_n = z_n$ Viết lại (3'')

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho có một $\{x_n\}$ trong A sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về a và $|f(x_n) - c| \geq \epsilon'' \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (3''')

504

Cho $\epsilon > 0$, ta có $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho $|x_n - a| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N(\epsilon)$ (1)

$\Rightarrow$ Cho một $\epsilon'' > 0$ ta có một $M(\epsilon'') \in \mathbb{N}$ sao cho $|f(x_n) - c| < \epsilon'' \quad \forall\, n \geq M(\epsilon'')$ (2')

Có $\epsilon'' > 0$ sao cho có một $\{x_n\}$ trong A sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về a và $|f(x_n) - c| \geq \epsilon'' \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ (3''')

Chọn $n = M(\epsilon'')$, ta có mâu thuẩn.

505

Bài toán 83. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A^*$ và hai hàm số thực f và g trên A có giới hạn tại x là c và d. Đặt $h(z) = f(z) + g(z) \ \ \forall\, z \in A$. Chứng minh h có giới hạn tại x là $c+d$.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong $A \setminus \{x\}$ hội tụ về x.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về d

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về $c+d$

$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$

$$\begin{array}{ccccc} h(x_n) & = & f(x_n) & + & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c+d & & c & & d \end{array}$$

506

Bài toán 84. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A^*$ và hai hàm số thực f và g trên A có giới hạn tại x là c và d. Đặt $h(z) = f(z)g(z)$ $\forall z \in A$.

Chứng minh h có giới hạn tại x là cd.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về d

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về cd

$h(x_n) = f(x_n)g(x_n)$

$$\underset{\downarrow\atop cd}{h(x_n)} = \underset{\downarrow\atop c}{f(x_n)} \cdot \underset{\downarrow\atop d}{g(x_n)}$$

507

Bài toán 84b. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $x \in A^*$ và một hàm số thực f và g trên A có giới hạn tại x là $c \neq 0$. Đặt $h(z) = f(z)^{-1}$ $\forall z \in A$.

Chứng minh h có giới hạn tại x là c^{-1}.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A.

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c^{-1}

$h(x_n) = f(x_n)^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = [\lim_{n\to\infty} f(x_n)]^{-1} = c^{-1}$$

508

Định lý. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^* \cap A$ và một hàm số thực f trên A. Lúc đó ba điều sau đây tương đương

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(ii) f liên tục tại a

(iii) với mọi dãy $\{x_n\}$ trong A hội tụ về a, ta có $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(a)$.

509

Bài toán 85. Cho B là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in B^*$, $c \in \mathbb{R}$ và một hàm số thực g trên B. Đặt $A = B \cup \{a\}$. Giả sử $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Đặt

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{a\} \\ c & x = a \end{cases}$$

Chứng minh f liên tục tại a.

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$|g(x) - c| < \varepsilon$ $\forall x \in B$ với $0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(t) - f(a)| < \varepsilon'$ $\forall t \in A$ với $|t - a| < \eta(a, \varepsilon')$

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(t) - f(a)| < \varepsilon'$ $\forall t \in B \cup \{a\}$ với $|t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2) 510

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$|g(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in B$ với $0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(t) - f(a)| < \varepsilon' \quad \forall t \in B \cup \{a\}$ với $|t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2)

Theo QTGT 2, ta làm rõ $|f(t) - f(a)|$

$$|f(t) - f(a)| = |f(t) - c| = \begin{cases} |g(t) - c| & t \in B, \\ 0 & t = a. \end{cases}$$

Theo KTGT 25, ta thấy (2) đúng khi $t = a$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|f(t) - c| < \varepsilon' \quad \forall t \in B$ với $0 < |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2)

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|g(t) - c| < \varepsilon' \quad \forall t \in B$ với $0 < |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2')

511

Cho $\varepsilon > 0$ có một số thực dương $\delta(a, \varepsilon)$ sao cho

$|g(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in B$ với $0 < |x - a| < \delta(a,\varepsilon)$ (1)

Cho $\varepsilon' > 0$ tìm một số thực dương $\eta(a, \varepsilon')$ sao cho

$|g(t) - c| < \varepsilon' \quad \forall t \in B$ với $0 < |t - a| < \eta(a, \varepsilon')$ (2')

Theo QTGT 6, xét các yếu tố giống giống khác khác nhau giữa (1) và (2'): ε và ε', $\delta(a,\varepsilon)$ và $\eta(a, \varepsilon')$. Ta làm chúng giống nhau như sau: đặt $\varepsilon = \varepsilon'$, ta có $\delta(a,\varepsilon)$, đặt $\eta(a, \varepsilon') = \delta(a,\varepsilon)$. Vậy ta tìm được $\eta(a, \varepsilon')$.

512

Bài toán 86. Cho A là một tập hợp con khác trống của $\mathbb{R}$, $a \in A^*$, $c \in \mathbb{R}$ và ba hàm số thực f, g và h trên A. Giả sử $f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \forall x \in A$ và $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = c$

Chứng minh $\lim_{x\to a} h(x) = c$.

Cho $\{x_n\}$ là một dãy hội tụ về x trong A .

Ta có $\{f(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Ta có $\{g(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

Chứng minh $\{h(x_n)\}$ là một dãy hội tụ về c

$f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)$

$$\begin{matrix} f(x_n) & \le & h(x_n) & \le & g(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c & & c & & c \end{matrix}$$

513

Cho $x \in (a, b)$. Lúc đó có một số thực dương r sao cho $x + h \in (a, b) \quad \forall h \in (-r, r)$

Cho f là một hàm số thực trên (a, b) và $x \in (a, b)$. Đặt

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \forall h \in A \equiv (-r,r) \setminus \{0\}$$

$0 \in A^*$

Có thể xét $\lim_{h\to 0} u(h)$ hay $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

514

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a, b) và $x \in (a, b)$. Chọn một số thực dương r sao cho $(x - r, x + r) \subset (a, b)$. Đặt

$$u(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \forall h \in (-r,r) \setminus \{0\}$$

Ta nói f là một hàm số khả vi tại x nếu và chỉ nếu giới hạn sau đây có và là một số thực.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (= \lim_{h\to 0} u(h))$$

Lúc đó ta ký hiệu giới hạn này là $f'(x)$ và gọi nó là đạo hàm của f tại x. Nếu f khả vi tại mọi $x \in (a, b)$ ta nói f khả vi trên (a, b).

515

Bài toán 87. Cho c là một số thực và $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

516

Bài toán 88. Cho c là một số thực và $f(x) = cx \ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c(x+h)-cx}{h} = \frac{ch}{h} = c$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$$

517

Dùng lệnh **D[f(x), x]** để tính đạo hàm của hàm số f.

Thí dụ . Cho $f(x) = (7x - 3)^3 \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Tính đạo hàm của f.

In[1]:=D[(7*x* - 3)^{3}Cos[2*x*],*x*]

Out[1]:= $21(7x - 3)^2\cos 2x - 2(7x-3)^3\sin 2x$

$$f'(x) = 21(7x - 3)^2\cos 2x - 2(7x-3)^3\sin 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

518

Bài toán 89. Cho f và g là các hàm số thực khả vi trên khoảng mở (a, b). Ta có $k = f + g$ khả vi trên khoảng mở (a, b) và $k'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (2)$$

? $$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \quad (3)$$

519

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (2)$$

? $$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \quad (3)$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán cùng dạng

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = u(h) + v(h)$$

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad v(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

520

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1) \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad (2)$$

? $$k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \quad (3)$$

$$u(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad v(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán cùng dạng

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} u(h) \quad (1') \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0} v(h) \quad (2')$$

? $$k'(x) = \lim_{h\to 0} [u(h) + v(h)] \quad (3)$$

$$k'(x) = \lim_{h\to 0} u(h) + \lim_{h\to 0} v(h) = f'(x) + g'(x)$$

521

Bài toán 90. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x. Cho $M > |f'(x)|$. Chứng minh có một số thực dương r sao cho $(x-r, x+r) \subset (a, b)$ và $|f(y) - f(x)| \le M|y - x| \quad \forall y \in \mathbb{R}, |y - x| < r$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall h, |h| < \delta(\varepsilon) \quad (1)$$

$$|f'(x)| < M \quad (2)$$

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$|f(y) - f(x)| \le M|y - x| \quad \forall y \in (a,b), |y - x| < r \quad (3)$

522

Theo QTGT 5, ta viết bài toán thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$| f'(x) - \frac{f(z) - f(x)}{z - x} | < \varepsilon \quad \forall\ z \in (a,b),\ | z - x | < \delta(\varepsilon) \quad (1')$$

$| f'(x)| < M$ (2)

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết (1') thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$| f'(z)(z-x) - [f(z) - f(x)] | \le \varepsilon|z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$| | f'(x)(z-x)| - |f(z) - f(x)| | \le \varepsilon| z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$

523

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$| | f'(x)(z-x)| - |f(z) - f(x)| | \le \varepsilon| z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$

$| f'(x)| < M$ (2)

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

Theo QTGT 5, ta viết bài toán thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $\forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$

$| f'(x)(z-x)|| - \varepsilon|z-x|\ h| \le |f(z) - f(x)| \le | f'(x)h| + \varepsilon\ |h|$ (1'')

Theo QTGT 5, ta viết (1'') thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $\forall z\in (a,b)$, $|z - x|< \delta(\varepsilon)$

$|f(z) - f(x)| \le | f'(x)(z-x)| + \varepsilon\ |z-x| = [| f'(x)| + \varepsilon]\ |z-x|$ (1''')

524

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$|f(z)- f(x)| \le [| f'(x)|+ \varepsilon]| z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$ (1''')

$| f'(x)| < M$ (2)

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

Theo KTGT 4, bài toán viết thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$|f(z)- f(x)| \le [| f'(x)|+ \varepsilon]| z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$ (1''')

Có $\eta > 0$ sao cho : $| f'(x)| + \eta = M$ (2')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

525

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$|f(z)- f(x)| \le [| f'(x)|+ \varepsilon]| z-x| \ \ \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\varepsilon)$ (1''')

Có $\eta > 0$ sao cho : $| f'(x)| + \eta = M$ (2')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

Theo QTGT 6, ta chọn $\varepsilon = \eta$. Bài toán trở thành

Có $\eta > 0$ sao cho :

$| f(z)- f(x)| \le M| z-x| \quad \forall z\in (a,b)$, $| z - x|< \delta(\eta)$ (1''')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$| f(y) - f(x)| \le M| y - x | \quad \forall\ y \in (a,b)$, $| y - x| < r$ (3)

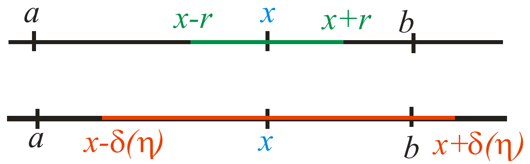
526

Có $\eta > 0$ sao cho :

$|f(z)-f(x)| \le M|z-x| \qquad \forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\eta) \qquad (1''')$

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$|f(y)-f(x)| \le M|y-x| \qquad \forall y \in (a,b), |y-x| < r \qquad (3)$



Chọn $r = \min\{\delta(\eta), x-a, b-x\}$.

527

Bài toán 91. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x và $f'(x)$ khác không. Cho c trong $(0, |f'(x)|)$. Chứng minh có một số thực dương r sao cho $(x-r, x+r) \subset (a, b)$ và

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)| \qquad \forall y \in \mathbb{R}, |y-x| < r$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}| < \varepsilon \qquad \forall h, |h| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

$0 < c < |f'(x)| \qquad (2)$

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)| \qquad \forall y \in (a,b), |y-x| < r \qquad (3)$

528

Theo QTGT 5, ta viết bài toán thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f'(x) - \frac{f(z)-f(x)}{z-x}| < \varepsilon \qquad \forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon) \qquad (1')$$

$0 < c < |f'(x)| \qquad (2)$

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)| \qquad \forall y \in (a,b), |y-x| < r \qquad (3)$

Theo QTGT 5, ta viết (1') thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f'(z)(z-x) - [f(z)-f(x)]| \le \varepsilon|z-x| \quad \forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon)$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$||f'(x)(z-x)| - |f(z)-f(x)|| \le \varepsilon|z-x| \quad \forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon)$

529

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$||f'(x)(z-x)| - |f(z)-f(x)|| \le \varepsilon|z-x| \quad \forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon)$

$0 < c < |f'(x)| \qquad (2)$

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)| \qquad \forall y \in (a,b), |y-x| < r \qquad (3)$

Theo QTGT 5, ta viết (1') thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $\forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon)$

$|f'(x)(z-x)|| - \varepsilon|z-x|\, h| \le |f(z)-f(x)| \le |f'(x)h| + \varepsilon|h| \qquad (1'')$

Theo QTGT 5, ta viết (1'') thành

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $\forall z \in (a,b), |z-x| < \delta(\varepsilon)$

$|f'(x)(z-x)| - \varepsilon|z-x| = [|f'(x)| - \varepsilon]\,|z-x| \le |f(z)-f(x)| \qquad (1''')$

530

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$[|f'(x)|+\varepsilon]|z-x| \le |f(z)-f(x)|\ \forall z\in (a,b), |z-x|< \delta(\varepsilon)$ (1''')

Có $\eta > 0$ sao cho : $|f'(x)| - \eta = c$ (2')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)|\quad \forall y \in (a,b), |y-x| < r$ (3)

Theo QTGT 6, ta chọn $\varepsilon = \eta$. Bài toán trở thành

Có $\eta > 0$ sao cho :

$c|z-x| \le |f(z)-f(x)|\quad \forall z\in (a,b), |z-x|< \delta(\eta)$ (1''')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

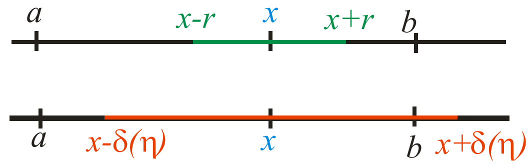
$c|y-x| \le |f(y)-f(x)|\quad \forall y \in (a,b), |y-x| < r$ (3)

Có $\eta > 0$ sao cho :

$c|z-x| \le |f(z)-f(x)|\quad \forall z\in (a,b), |z-x|< \delta(\eta)$ (1''')

Tìm $r > 0$: $(x-r, x+r) \subset (a, b)$

$c|y-x| \le |f(y)-f(x)|\ \forall y \in (a,b), |y-x| < r$ (3)



Chọn $r = \min\{\delta(\eta), x-a, b-x\}$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 17

Nếu $f'(x)$ và $|f(z) - f(x)|$ cùng xuất hiện trong bài toán, ta ta phải để ý và dùng các bất đẳng thức sau:

Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x.

(1) Có một số thực M và một $\delta > 0$ sao cho

$$|f(y) - f(x)| \le M|y-x|\quad \forall y, |y-x| < \delta$$

(2) Nếu $f'(x) = 0$: với mọi số thực dương ε và một $\mu(\varepsilon)>0$ sao cho : $|f(t) - f(x)| \le \varepsilon|t-x|\quad \forall t, |t-x| < \mu(\varepsilon)$.

(3) Nếu $f'(x) \ne 0$: với mọi số thực dương $c < |f'(x)|$ có $\eta(c) > 0$ sao cho

$$c|s-x| \le |f(s) - f(x)|\quad \forall s, |s-x| < \eta(c) .$$

Bài toán 92. Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a, b) và $x \in (a, b)$. Giả sử f khả vi tại x . Chứng minh f liên tục tại x

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| < \varepsilon \qquad \forall h, |h| < \delta(\varepsilon) \quad (1)$$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho :

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon'\quad \forall y \in (a,b), |y-x| < \eta(\varepsilon')$ (2)

Theo KTGT 17, ta viết (1) thành

Có một số thực M và một $\delta > 0$ sao cho

$$|f(t) - f(x)| \le M|t-x|\quad \forall t, |t-x| < \delta \qquad (1')$$

Có một số thực M và một $\delta > 0$ sao cho

$$|f(t) - f(x)| \le M|t-x| \quad \forall\, t,\ |t-x| < \delta \qquad (1')$$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho :

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, y \in (a,b),\ |y-x| < \eta(\varepsilon') \qquad (2)$$

Theo QTGT 3, ta chỉ cần chứng minh

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho :

$$M|y - x| < \varepsilon' \quad \forall\, y \in (a,b),\ |y-x| < \delta,\ |y-x| < \eta(\varepsilon')$$

Cho $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho :

$$|y - x| < M^{-1}\varepsilon' \quad \forall\, y \in (a,b),\ |y-x| < \delta,\ |y-x| < \eta(\varepsilon') \quad (2')$$

Đặt $\eta(\varepsilon') = \min\{\delta, M^{-1}\varepsilon'\}$.

535

Bài toán 93. Cho f và g là các hàm số thực khả vi trên khoảng mở (a,b). Ta có $k = fg$ khả vi trên khoảng mở (a,b) và $k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$?\ \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$$

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

536

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

h

$$? \qquad 0 \qquad f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$k'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

537

Bài toán 94. Cho f là một hàm số từ (a, b) vào (c,d) và g là một hàm số thực trên (c, d). Cho $x \in (a, b)$ sao cho f khả vi tại x , g khả vi tại $z = f(x)$ và $g'(x) = 0$. Đặt $u = g\circ f$. Chứng minh u khả vi tại x và $u'(x) = 0$

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall\, h, |h| < \delta(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{f(x+h))-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho $\forall\, t, |t| < \eta(\varepsilon')$:

$$\left|\frac{g(z+t)-g(x)}{t}\right| = \left|\frac{g(z+t)-g(x)}{t} - 0\right| < \varepsilon' \qquad (2)$$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\mu(\varepsilon'') > 0$ sao cho $\forall\, s, |s| < \mu(\varepsilon'')$:

$$\left|\frac{g(f(x+s))-g(f(x))}{s}\right| = \left|\frac{g(f(x+s))-g(f(x))}{s} - 0\right| < \varepsilon'' \qquad (3)$$

538

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$| f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \le \varepsilon|h| \quad \forall\ h, |h| < \delta(\varepsilon) \quad (1)$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho :

$| g(z+t) - g(z) | \le \varepsilon'|t| \quad \forall\ t, |t| < \eta(\varepsilon') \quad (2)$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\mu(\varepsilon'') > 0$ sao cho $\forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'')$

$|g(f(x+s)) - g(f(x))| \le \varepsilon''|s| \quad \forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" của (2) và (3): "$g(z+t) - g(z)$" và "$g(f(x+s)) - g(f(x))$". Ta làm chúng giống nhau : đặt $t= f(x+s)- f(x)$. Ta viết lại (2)

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: nếu $| f(x+s) - f(x+s) | < \eta(\varepsilon')$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le \varepsilon' | f(x+s) - f(x+s) | \quad (2')$

539

Cho $\varepsilon > 0$, có $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$| f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \le \varepsilon|h| \quad \forall\ h, |h| < \delta(\varepsilon) \quad (1)$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: nếu $| f(x+s) - f(x) | < \eta(\varepsilon')$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le \varepsilon' | f(x+s) - f(x) | \quad (2')$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\mu(\varepsilon'') > 0$ sao cho $\forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'')$

$|g(f(x+s)) - g(f(x))| \le \varepsilon''|s| \quad \forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo KTGT 17, viết lại (1) và (2')

Có M , có $\delta > 0$:

$| f(x+s) - f(x)| \le M|s| \quad \forall\ s, | s | < \delta \quad (1')$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: $\forall\ s, | s | < \delta$, nếu $M|s| < \eta(\varepsilon')$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le M\varepsilon'|s| \quad (2'')$

540

Có M , có $\delta > 0$:

$| f(x+s) - f(x)| \le M|s| \quad \forall\ s, | s | < \delta \quad (1')$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: $\forall\ s, | s | < \delta$, nếu $M|s| < \eta(\varepsilon')$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le M\varepsilon'|s| \quad (2'')$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\mu(\varepsilon'') > 0$ sao cho $\forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'')$

$|g(f(x+s)) - g(f(x))| \le \varepsilon''|s| \quad \forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" của (2'') và (3): $| s | < \delta$, $M|s| < \eta(\varepsilon')$ và $|s| < \mu(\varepsilon'')$, ta làm chúng giống nhau : viết lại (2'')

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: $\forall\ s, | s | < \min \{\delta, M^{-1}\eta(\varepsilon')\}$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le M\varepsilon'|s| \quad (2''')$

541

Có M , có $\delta > 0$:

$| f(x+s) - f(x)| \le M|s| \quad \forall\ s, | s | < \delta \quad (1')$

Cho $\varepsilon' > 0$, có $\eta(\varepsilon') > 0$: $\forall\ s, | s | < \min \{\delta, M^{-1}\eta(\varepsilon')\}$

$| g(f(x+s)) - g(f(x)) | \le M\varepsilon'|s| \quad (2''')$

Cho $\varepsilon'' > 0$, tìm $\mu(\varepsilon'') > 0$ sao cho $\forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'')$

$|g(f(x+s)) - g(f(x))| \le \varepsilon''|s| \quad \forall\ s, |s| < \mu(\varepsilon'') \quad (3)$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" của (2''') và (3): $M\varepsilon'$ và ε'', ta làm chúng giống nhau : đặt $\varepsilon' = M^{-1}\varepsilon''$ và $\mu(\varepsilon'') = \min \{\delta, M^{-1}\eta(\varepsilon')\}$.

542

Bài toán 95. Cho f là một hàm số từ (a, b) vào (c,d) và g là một hàm số thực trên (c, d). Cho $x \in (a, b)$ sao cho f khả vi tại x , g khả tại $z = f(x)$. Đặt $u = g o f$. Chứng minh u khả vi tại x và $u'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

° $g'(z) = 0 : u'(x) = 0$ (BT 94)

° $g'(z) = \alpha \neq 0$. Đặt $g_1(t) = g(t) - \alpha t$ và $v(s) = g_1(f(s))$ với mọi $t \in (c,d)$. Ta có

$g_1'(t) = g'(t) - \alpha \quad \forall t \in (c,d) \qquad g_1'(z) = g'(z) - \alpha = 0$

Theo BT 94, $v'(z) = 0$

$v(s) = g_1(f(s)) = g(f(s)) - \alpha f(s) = u(s) - \alpha f(s)$

$v'(s) = u'(s) - \alpha f'(s) \qquad 0 = v'(z) = u'(z) - \alpha f'(z)$

$u'(s) = \alpha f'(s) = g'(f(x))f'(x)$

543

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 18

Để đưa bài toán về trường hợp đơn giản hơn hay những trường hợp đã giải quyết, ta có thể làm như sau:

(1) Đưa về trường hợp $f(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - f(a)$.

(2) Đưa về trường hợp $f'(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - x f'(a)$.

544

Bài toán 96 (Định lý ánh xạ ngược) . Nếu f là một song ánh từ (a,b) vào (c,d), f liên tục trên (a,b). Cho một x trong (a,b) sao cho f khả tại x và $f'(x) \neq 0$. Chứng minh ánh xạ ngược $g \equiv f^{-1}$ của f khả vi tại $y = f(x)$ và

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (1)$$

$$g'(x) = \lim_{s \to y} \frac{g(s) - g(y)}{s - y} = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (2) \quad ?$$

545

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (1)$$

$$g'(x) = \lim_{s \to y} \frac{g(s) - g(y)}{s - y} = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (2) \quad ?$$

Theo QTGT 5, ta đặt $z = g(s)$, ta thấy : khi $s \neq y$ thì $z \neq x$ ta viết lại (2)

$$g'(x) = \lim_{f(z) \to f(x)} \frac{z - x}{f(z) - f(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (2) \quad ?$$

Bài toán trở thành

$$\lim_{f(z) \to f(x)} \frac{z - x}{f(z) - f(x)} = [\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}]^{-1} \qquad (3) \quad ?$$

546

$$\lim_{f(z)\to f(x)} \frac{z-x}{f(z)-f(x)} = [\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}]^{-1} \quad (3) \quad ?$$

Theo Bài toán 84b, ta chỉ cần chứng minh

$$\lim_{f(z)\to f(x)} \frac{z-x}{f(z)-f(x)} = \lim_{z\to x} \frac{z-x}{f(z)-f(x)} \quad (4) \quad ?$$

Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong (4) : $f(z) \to f(x)$ và $z \to x$. Để làm mất sự khác biệt này, ta chứng minh $f(z) \to f(x)$ đưa đến $z \to x$, hay $t \to x$ đưa đến $g(t) \to g(y)$. Điều này có được nếu g liên tục tại y. Theo KTGT 20, ta chỉ cần chứng minh g đơn điệu trên (c,d). Vậy chỉ cần chứng minh f đơn điệu trên (a,b). Theo KTGT 20, f đơn điệu trên (a,b), vậy g liên tục trên (c,d).

547

Cho

$g(y) =$ arcsin y $\quad \forall\, y \in [-1, 1]$ và

$f(x) =$ sin x $\quad \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ta thấy g là ánh xạ ngược của f và

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1-f(x)^2}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-f(g(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \forall y \in (-1,1)$$

548

Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Ta nói

- f đạt cực đại tại c nếu và chỉ nếu
  $f(c) \geq f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.
- f đạt cực tiểu tại c nếu và chỉ nếu
  $f(c) \leq f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Bài toán 97. Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Giả sử f khả vi tại c và đạt cực đại tại c. Chứng minh $f'(c) = 0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \geq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

549

Bài toán 98 . Cho f là một hàm số thực trên một khoảng mở (a, b) và c là một điểm trong (a, b). Giả sử f khả vi tại c và đạt cực tiểu tại c. Chứng minh $f'(c) = 0$.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$ (1) $\quad f(y) \geq f(x) \quad \forall\, y \in (a , b)$ (2)

$f'(c) = 0$ (3) ?

Theo QTGT 5, ta viết lại (2) và (3)

$f(x+h) \geq f(x) \quad \forall\, h,\ x+h \in (a , b)$

$f(x+h) - f(x) \geq 0 \quad \forall\, h,\ x+h \in (a , b) \quad$ (2')

$f'(c) \leq 0$ và $f'(c) \geq 0$?

$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$ (3') ?

550

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) \qquad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0 \quad , \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0 \quad (3')?$$

$$f(x+h) - f(x) \ge 0 \qquad \forall\, h,\ x+h \in (a, b) \qquad (2')$$

Theo QTGT 1, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" giữa (2') và (3'): mẫu số h. Ta làm rõ khác biệt này : xét $h < 0$ và $h > 0$.

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0 \quad \forall h \le 0 \quad , \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0 \quad \forall h \ge 0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0 \ge \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

551

Bài toán 99. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên một khoảng mở (a, b) sao cho $f(a) = f(b)$. Chứng minh có $t \in (a, b)$ sao cho $f'(t) = 0$.

Ta xét bài toán có yếu tố $f(a) = f(b)$ trong trường hợp đơn giản nhất: f là hàm hằng. Lúc đó $f'(x) = 0$ với mọi x trong (a, b) . Nay xét trường hợp f không là hàm hằng : có s trong (a, b) sao cho $f(s) \neq f(a) = f(b)$. Làm sao chọn s để $f'(x) = 0$? Theo BT 98, nên xét các cực tiểu và cực đại của f .

Có c và d trong $[a, b]$ sao cho $f(c) = \min f([a, b])$ và $f(d) = \max f([a, b])$.

$$f(c) \le f(x) \le f(d) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

552

Có c và d trong $[a, b]$ sao cho $f(c) = \min f([a, b])$ và $f(d) = \max f([a, b])$. Vì f không là hàm hằng, nên $f(c) < f(d)$ và $c \neq d$.

Nếu c hoặc d ở trong (a,b), ta giải xong bài toán. Vì $f(a) = f(b)$, nên c hoặc d ở trong (a,b).

553

QUI TRÌNH GIẢI TOÁN 16

Nên xét bài toán trong trường hợp đơn giản nhất. Sau đó xét bài toán dạng phức tạp hơn một chút, dựa vào cách giải trường hợp trước. Lặp qui trình này cho đến khi giải xong bài toán.

554

Bài toán 100 (Định lý giá trị trung bình). Nếu f là một ánh xạ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), thì có một $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Nếu $f(b) = f(a)$, do BT 99, ta tìm được c. Xét trường hợp $f(b) \neq f(a)$. Ta đưa về trường hợp đầu.

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \forall x \in [a,b]$

Ta thấy $g(a) = g(b)$ và

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall x \in (a,b)$$

Theo bài toán 99, có $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

555

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 21

Khi bài toán có f' và $f(x) - f(y)$, ta nên nhớ định lý giá trị trung bình :

Định lý giá trị trung bình. Nếu f là một ánh xạ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), thì có một $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

556

Nếu f khả vi trên (a, b), đặt $g(x) = f'(x)$ với mọi x trong (a, b). Ta thấy g là một hàm số trên (a, b).

Nếu g khả vi tại $x \in (a, b)$, ta thấy

$$g'(x) = (f')'(x).$$

Lúc đó ta nói f có đạo hàm bậc 2 tại x, đạo hàm bậc 2 của f tại x chính là $g'(x)$, và được ký hiệu là $f''(x)$ hoặc $f^{(2)}(x)$.

Ta còn ký hiệu $f^{(0)} = f$ và $f^{(1)} = f'$.

Ta có thể dùng qui nạp toán học để định nghĩa các đạo hàm bậc cao $n \geq 2$ như sau : $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

557

Định nghĩa . Cho f là một hàm số thực khả vi trên một khoảng mở (a, b). Ta thấy f' là một hàm số thực trên (a, b). Nếu f' liên tục trên (a, b), ta nói f thuộc lớp C^1 trên (a, b).

Định nghĩa . Cho f là một hàm số thực khả vi n lần trên một khoảng mở (a, b). Ta thấy $f^{(n)}$ là một hàm số thực trên (a, b). Nếu $f^{(n)}$ liên tục trên (a, b), ta nói f thuộc lớp C^n trên (a, b).

558

Dùng lệnh dii[f(x),x,n] : tính đạo hàm bậc n của hàm số f.

```
>> diff(exp(-((x)^(-2))),x,3)

ans =

24/(x^5*exp(1/x^2)) - 36/(x^7*exp(1/x^2)) +
8/(x^9*exp(1/x^2))
```

Đạo hàm bậc ba của $e^{-\frac{1}{x^2}}$ là $e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{8}{x^9}-\frac{36}{x^7}+\frac{24}{x^5}\right)$

559

Cho c và d là hai điểm trong khoảng mở (a,b), I(c,d) là khoảng đóng có các đầu mút là c và d, và f là một hàm khả vi đến cấp n -1 trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 2$. Xét đa thức Taylor bậc n tại c như sau

$$P_{n-1}(x,c) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall x \in I(c,d)$$

560

Dùng lệnh taylor($f(x)$,c,n) Ta tính đýợc $P_{n-1}(x,c)$.

```
>> syms x
>> taylor(exp(x),0,4)
ans =
x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

Vậy ta có khai triển Taylor tại 0 đến bậc 4 của hàm số e^x là

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

561

Định lý. (Taylor) . Cho c và d là hai điểm trong khoảng mở (a,b), I(c,d) là khoảng đóng có các đầu mút là c và d, và f là một hàm khả vi đến cấp n trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 2$. Lúc đó có $s \in I(c, d)$ sao cho

$$f(d) = P_{n-1}(d,c) + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

$$= f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

$$P_{n-1}(x,c) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad \forall x \in I(c,d)$$

562

Bài toán 101 . Tính $\sqrt{2}$ với sai số nhỏ hơn 10^{-8} .

Xét $f(x) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in (0, \infty)$. Dùng qui nạp chứng minh f có đạo hàm mọi bậc và với mọi $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ ,\ f^{(2)}(x) = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\cdots(n-\tfrac{3}{2})x^{-n+\frac{1}{2}} \qquad n \ge 3$$

$\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{98}}{7}$ Tính $\sqrt{98}$ Đặt $c = 100$ và $d = 98$

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n \qquad (s \in I(c,d))$$

$$\sqrt{98} = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(100)}{k!})(-2)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n \qquad (s \in I(c,d))$$

565

$$\sqrt{98} = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n \qquad (s \in (c,d))$$

Chọn n sao cho sai số $\left|\dfrac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n\right| \le 10^{-8}$ và tính

$$\sqrt{2} = \frac{1}{7}\sqrt{98} \approx \frac{1}{7}[10 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k]$$

Sai số : $\left|\dfrac{f^{(n)}(s)}{n!}(-2)^n\right| \le \dfrac{(n-1)!}{n!}(98)^{-n+\frac{1}{2}}2^{n-\frac{1}{2}} \le \dfrac{1}{n}(49)^{-n+1}$

>> (5^(-1))*(49^(-4))
ans =
3,4693×10^{-8}

>> (6^(-1))*(49^(-5))
ans =
5,9002×10^{-10}

Chọn $n \cong 6$

564

```
>> (5^(-1))*(49^(-4))
ans =
  3.4693e-008 = 3,4693×10^-8
>> (6^(-1))*(49^(-5))
ans =
  5.9002e-010 = 5,9002×10^-10
```

565

$$\sqrt{2} = \frac{1}{7}\sqrt{98} \approx \frac{1}{7}[10 + \sum_{k=1}^{5}\frac{f^{(k)}(100)}{k!}(-2)^k]$$

```
>> (1/7)*(10 + (1/2)*(100^(-1/2))*(-2) -
(1/2)*(1/2)*(1/2)*(100^(-3/2))*((-2)^2)
+(1/6)*(1/2)*(1/2)*(3/2)*(100^(-5/2))*((-2)^3) -
(1/24)*(1/2)*(1/2)*(3/2)*(5/2)*(100^(-7/2))*((-2)^4) +
(1/120)*(1/2)*(1/2)*(3/2)*(5/2)*(7/2)*(100^(-9/2))*((-
2)^5))
ans =
  1.414213562375000
```

Với sai số nhỏ hơn 10^{-8} , ta có thể chọn giá trị xấp xỉ của là $\sqrt{2}$ 1,414213562

566

Định lý. (Maclaurin) Cho f là một hàm số có đạo hàm $f^{(n)}$ cấp n trên (a,b) với mọi số nguyên dương n. Giả sử có $r > 0$ sao cho $[-r, r] \subset (a,b)$ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| = 0$$

Lúc đó $$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-r,r)$$

Định lý Taylor cho ta : có $s \in I(c,d)$ sao cho

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

567

Định lý Taylor cho ta : có $s \in I(c,d)$ sao cho

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(d-c)^n$$

với $c = 0$ và $d = t$: có $s \in I(0,t)$ sao cho

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{f^{(n)}(s)}{n!} t^n$$

$$\left|\frac{f^{(n)}(s)}{n!} t^n\right| \leq \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(s)}{n!} t^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = \lim_{n\to\infty} [f(t) - f(0) - \frac{f^{(n)}(s)}{n!} t^n]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = f(t) - f(0)$$

568

Cho $f(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy f khả vi mọi bậc trên $\mathbb{R}$ và $f^{(n)}(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f^{(n)}(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{r^n}{n!} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{r^n e^r}{n!} \qquad \forall x \in [-r,r], \forall r > 0$$

$$\frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{r^n e^r}{n!}$$

$$\frac{r^{2k} e^r}{2k!} = \frac{r^{2k} e^r}{1.2....2k} \leq \frac{r^{2k} e^r}{k...2k} \leq e^r \frac{(r^2)^k}{k^k}$$

$$= e^r (\frac{r^2}{k})^k \leq e^r (\tfrac{1}{2})^k \qquad \forall k > 2r^2$$

569

$$\frac{r^{2k} e^r}{2k!} = \frac{r^{2k} e^r}{1.2....2k} \leq \frac{r^{2k} e^r}{k...2k} \leq e^r \frac{(r^2)^k}{k^k}$$

$$= e^r (\frac{r^2}{k})^k \leq e^r (\tfrac{1}{2})^k \qquad \forall k > 2r^2$$

$$\lim_{m\to\infty} (\tfrac{1}{2})^m = 0 \quad \lim_{m\to\infty} e^r (\tfrac{1}{2})^m = 0 \quad \lim_{m\to\infty} re^r (\tfrac{1}{2})^m = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n e^r}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{r^n e^r}{n!} = 0$$

570

Cho $f(x) = e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy f khả vi mọi bậc trên $\mathbb{R}$ và $f^{(n)}(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f^{(n)}(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} \sup_{x\in[-r,r]} |f^{(n)}(x)| = 0$$

Định lý (Maclaurin)

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \qquad \forall t \in (-r,r),\ r > 0$$

$$e^t = f(t) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \qquad \forall t \in [-r,r]$$

$$e^t = f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \qquad \forall t \in (-\infty,\infty)$$

571

Định lý (L' Hôpital). Cho f và g là hai hàm số khả vi trên khoảng mở (a,b) sao cho $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$, ở đây $-\infty \le a < b \le \infty$. Giả sử giới hạn $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ xác định .

Ta có $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ trong các trường hợp sau :

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

572

Tính $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$

Đặt $u(x) = \ln(1+3x)$ và $v(x) = x$ $\forall x \in (0,\infty)$

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} v(x) = 0$$

$$u'(x) = \frac{3}{1+3x} \qquad v'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{1+3x} = 3$$

573

TÍNH GIỚI HẠN CÁC HÀM SỐ

I ■ Dùng tính liên tục của các hàm số

Cho f là một hàm số thực trên khoảng $[a, b]$ và liên tục tại $c \in (a, b)$. Lúc đó $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$(**Bài toán 79)**

Bài toán 102 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2}$

Đặt $g(x) = x^6 - 4x^2 + 5$ và $h(x) = x^4 + x^2$

$$f(x) = \frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2} = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \forall x \in [0,3] \quad \forall x \in [1,3]$$

f liên tục trên $[1 , 3]$, $\sqrt{3} \in (1,3)$ $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^6 - 4x^2 + 5}{x^4 + x^2} = f(\sqrt{3}) = \frac{5}{6}$

II ■ Dùng các kết quả của bài tập 7.7.3.1

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^{2n} = \infty$$

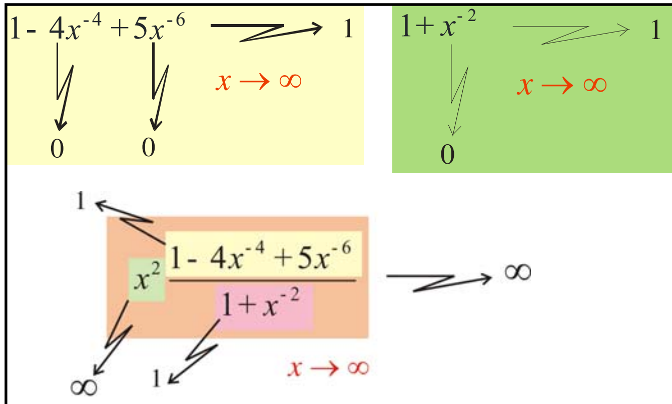
$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty$$

Bài toán 103 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6-4x^2+5}{x^4+x^2}$

$$\frac{x^6-4x^2+5}{x^4+x^2} = \frac{x^6(1-4x^{-4}+5x^{-6})}{x^4(1+x^{-2})} = x^2\,\frac{1-4x^{-4}+5x^{-6}}{1+x^{-2}}$$

575



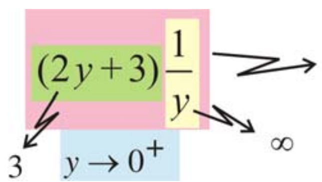
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6-4x^2+5}{x^4+x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2\,\frac{1-4x^{-4}+5x^{-6}}{1+x^{-2}} = \infty$$

576

Bài toán 104 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$

Đặt $y = x - 1 \quad x = y+1 \quad 2x+1 = 2y+3$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{y\to 0^+} \frac{2y+3}{y} = \lim_{y\to 0^+} (2y+3)\frac{1}{y}$$



$$\lim_{y\to 0^+} (2y+3)\frac{1}{y} = \infty$$

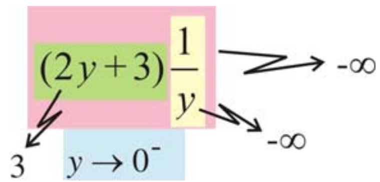
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = \infty$$

577

Bài toán 105 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+1}{x-1}$

Đặt $y = x - 1 \quad x = y+1 \quad 2x+1 = 2y+3$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{y\to 0^-} \frac{2y+3}{y} = \lim_{y\to 0^-} (2y+3)\frac{1}{y}$$



$$\lim_{y\to 0^-} (2y+3)\frac{1}{y} = -\infty$$

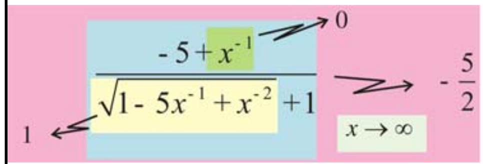
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$$

578

Bài toán 106 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+1}-x)$

$$\sqrt{x^2-5x+1}-x=(\sqrt{x^2-5x+1}-x)\frac{\sqrt{x^2-5x+1}+x}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}$$

$$\frac{x^2-5x+1-x^2}{\sqrt{x^2-5x+1}+x}=\frac{x(-5+x^{-1})}{x(\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1)}=\frac{-5+x^{-1}}{\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1}$$



$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+x^{-1}}{\sqrt{1-5x^{-1}+x^{-2}}+1}=-\frac{5}{2}$$

III ■ Dùng các kết quả của các bài tập 7.7.3.1 và 7.7.2.3 .

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty.\quad \lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$

Cho v là một hàm số thực dương trên (a, b). Đặt $f(x) = \ln(v(x))$ với mọi x trong (a,b). Ta có

(i) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=d \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}v(x)=e^d$,

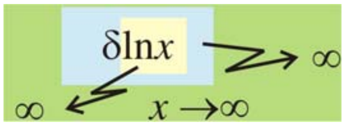
(ii) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}v(x)=\infty$,

(iii) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}v(x)=0$.

Bài tập này giúp ta tính các giới hạn của các hàm số v có dạng tích hoặc luỹ thừa

Bài toán 107 . Cho $\delta > 0$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}x^\delta$

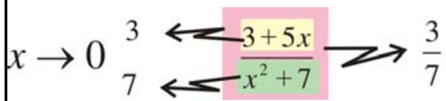
Đặt $f(x) = \ln x^\delta = \delta \ln x$

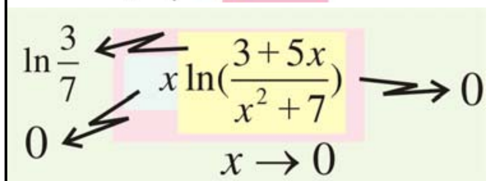


$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty}x^\delta=\infty$

Bài toán 108 . Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right)^x$

Đặt $f(x)=\ln\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right)^x=x\ln\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right)$





$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3+5x}{x^2+7}\right)^x=1$

IV ■ Dùng bài tập 7.7.3.5

$(i)\ \lim_{x\to\infty} x^{-n}e^{x} = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x} = 0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

$(ii)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Bài toán 109 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Đặt $f(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{x}$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

Bài toán 110 . Tính giới hạn $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$

Đặt $f(x) = \ln x^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{x^2}$ $\quad$ Đặt $y = x^2$ $\quad x \to \infty \quad y \to \infty$

$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln y^{1/2}}{y} = \frac{1}{2}\frac{\ln y}{y}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y^{1/2}}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln y}{y} = \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x^2}} = 1$

V ■ Dùng nguyên tắc Hôpital

Bài toán 111 . Tính giới hạn $\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}}$

Đặt $f(x) = \ln(1+6x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+6x)}{x}$

$0 \leftarrow \ln(1+6x) \rightarrow 1$, $x \to 0$ $\qquad \frac{\ln(1+6x) \to 0}{x \to 0}$

Đặt $u(x) = \ln(1+6x)$, $v(x) = x$ $\qquad u'(x) = 6$, $v'(x) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{1} = 6$

$\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}} = e^6$

Bài toán 112 . Tính giới hạn $\lim_{y\to\infty}(1+\frac{6}{y})^y$

Đặt $x = y^{-1}$ $\quad y \to \infty \quad x \to 0$

Đặt $f(x) = \ln(1+6x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+6x)}{x}$

$0 \leftarrow \ln(1+6x) \rightarrow 1$, $x \to 0$ $\qquad \frac{\ln(1+6x) \to 0}{x \to 0}$

Đặt $u(x) = 1+6x$, $v(x) = x$ $\quad u'(x) = 6$, $v'(x) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{1} = 6$

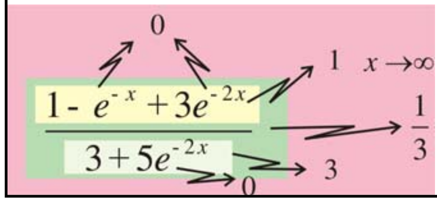
$\lim_{y\to\infty}(1+\frac{6}{y})^y = \lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{x}} = e^6$

VI ■ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài toán 113 . Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2n}-e^{n}+3}{3e^{2n}+5}$

Đặt $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{x}+3}{3e^{2x}+5}$

$$\frac{e^{2x}-e^{x}+3}{3e^{2x}+5}=\frac{e^{2x}(1-e^{-x}+3e^{-2x})}{e^{2x}(3+5e^{-2x})}=\frac{1-e^{-x}+3e^{-2x}}{3+5e^{-2x}}$$

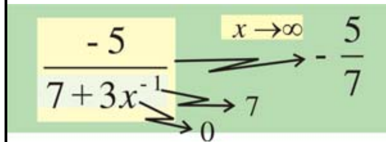


$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}-e^{n}+3}{3e^{2n}+5}=\frac{1}{3}$$

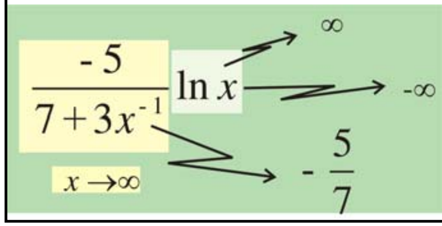
587

Bài toán 114 . Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{-5n}{7n+3}}$

Đặt $f(x)=x^{\frac{-5x}{7x+3}}$ Đặt $g(x)=\dfrac{-5x}{7x+3}\ln x=\dfrac{-5}{7+3x^{-1}}\ln x$



$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5}{7+3x^{-1}}\ln x=-\infty$$

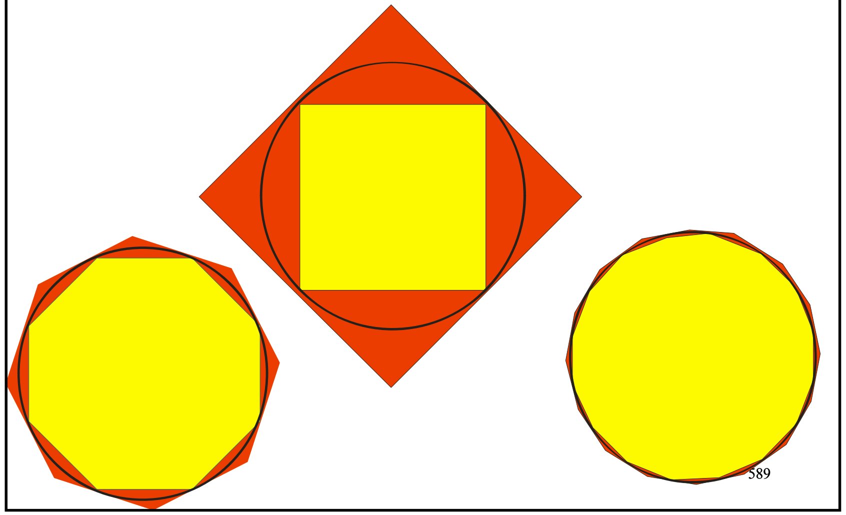


$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

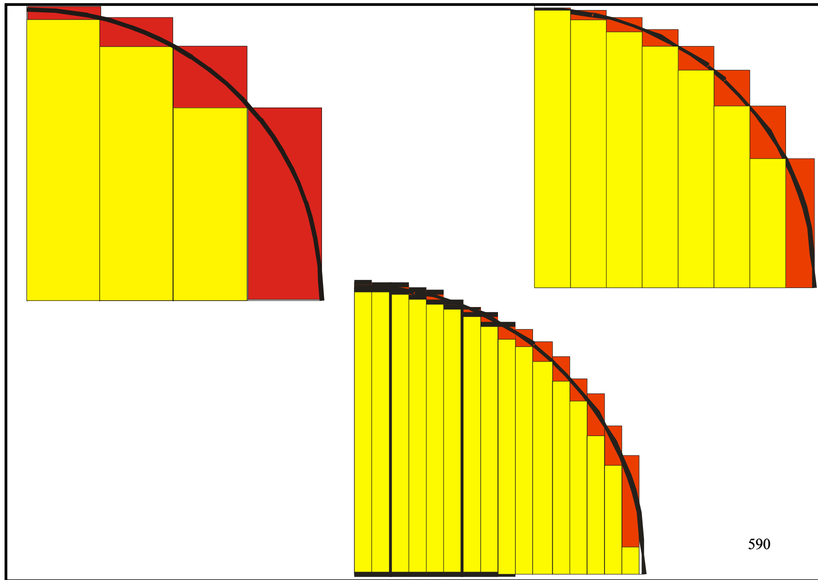
$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{-5n}{7n+3}}=0$$

588

TÍCH PHÂN



589



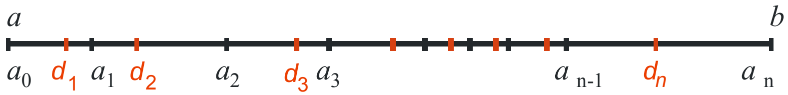
590

Định nghĩa. Cho một khoảng đóng $[a, b]$. Cho $2n+1$ số thực $a_0, a_1, \cdots, a_n, d_1, \cdots, d_n$ sao cho $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ và $d_k \in [a_{k-1}, a_k]$ với mọi $k = 1, \cdots, n$.

Lúc đó ta nói $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; d_1, \cdots, d_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$ và đặt

$$|P| = \max\{a_1 - a_0, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1}\}.$$

Đặt $\mathcal{P}([a,b])$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của $[a, b]$.



591

Định nghĩa. Cho một hàm số thực f trên một khoảng đóng $[a, b]$ và $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n; c_1, \cdots, c_n\}$ là một phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Ta đặt

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([a_k, a_{k+1}])(a_{k+1} - a_k),$$

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([a_k, a_{k+1}])(a_{k+1} - a_k),$$

$$S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(d_k)(a_{k+1} - a_k)$$

và lần lượt gọi các tổng số này là tổng Riemann trên, tổng Riemann dưới và tổng Riemann của f tương ứng với phân hoạch P.

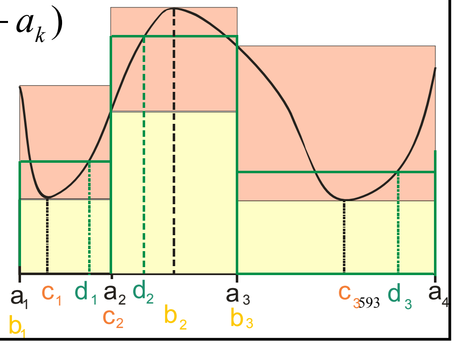
592

$$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k),$$

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\inf f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k),$$

$$S(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}f(d_k)(a_{k+1}-a_k)$$

L(*f*,*P*) và *U*(*f*,*P*) lần lượt là tổng diện tích các hình chữ nhật nội tiếp và ngoại tiếp với hình cần tính diện tích. *S*(*f*,*P*) dùng để tính toán.



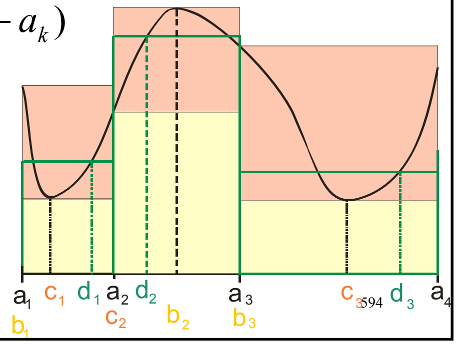
$$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(b_k)(a_{k+1}-a_k),$$

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\inf f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)(a_{k+1}-a_k),$$

$$S(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}f(d_k)(a_{k+1}-a_k)$$

$f(b_k)=\sup f([a_k\,,\,a_{k+1}])$

$f(c_k)=\inf f([a_k\,,\,a_{k+1}])$



Định nghĩa. Cho A là một tập con khác trống của $\mathbb{R}$ và f là một ánh xạ từ A vào $\mathbb{R}$, ta nói f là một hàm số thực liên tục đều trên A nếu và chỉ nếu

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

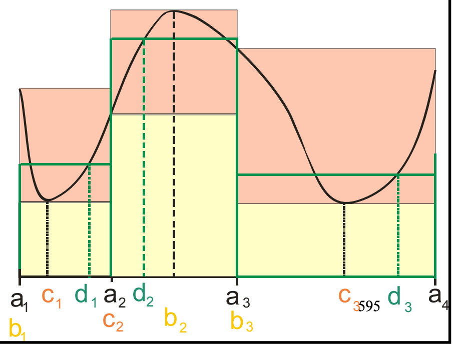
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x$ và $y \in A$ sao cho $|y - x| \le \delta(\varepsilon)$.

Giả sử f liên tục đều trên $[a,b]$, và phân hoạch P có $|P| < \delta(\varepsilon)$. Ta thấy

$|a_{k+1} - a_k| \le \delta(\varepsilon)$, vậy

$|b_k - c_k| \le \delta(\varepsilon)$ và

$|f(b_k) - f(c_k)| < \varepsilon$



$|P| < \delta(\varepsilon) \qquad |a_{k+1} - a_k| \le \delta(\varepsilon) \qquad |f(b_k) - f(c_k)| < \varepsilon$

$$U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}f(b_k)(a_{k+1}-a_k) \quad L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)(a_{k+1}-a_k)$$

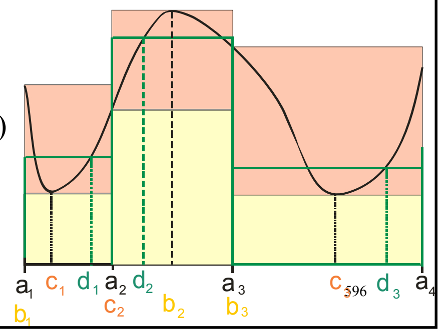
$$|U(f,P)-L(f,P)| = |\sum_{k=0}^{n-1}f(b_k)(a_{k+1}-a_k)-\sum_{k=0}^{n-1}f(c_k)(a_{k+1}-a_k)|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}|f(b_k)-f(c_k)|(a_{k+1}-a_k)$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon(a_{k+1}-a_k)=\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

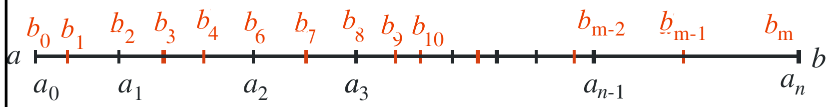
$$=\varepsilon(b-a)$$

596596



Bài toán 115 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, $P=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n; s_1,\cdots,s_n\}$ và $Q=\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m; t_1,\cdots,t_m\}$ là hai phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Giả sử $\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\}\subset\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m\}$. Chứng minh $U(f,Q)\le U(f,P)$.

$\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\}\subset\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m\}$



Đặt $I_k=\{p:\ a_{k-1}\le b_p < a_k\}$, ta có

$\{0,1,\cdots,m\text{-}1\} = I_1\cup\ldots\cup I_{n-1}$ (1)

597

$\{0,1,\cdots,m\text{-}1\} = I_1\cup\ldots\cup I_{n-1}$ (1)

? $\sum_{r=0}^{m-1}\sup f([b_r,b_{r+1}])(b_{r+1}-b_r)\le\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{r+1}-a_r)$ (2)

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong (2) cùng dạng

$$\sum_{r=0}^{m-1}\sup f([b_r,b_{r+1}])(b_{r+1}-b_r)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}\sup f([b_r,b_{r+1}])(b_{r+1}-b_r)$$

? $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}\sup f([b_r,b_{r+1}])(b_{r+1}-b_r)\le\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)$ (3)

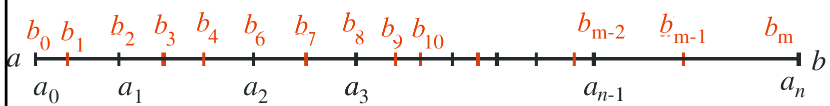
Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong : "sup $f([b_r,b_{r+1}])$" và "sup $f([a_k,a_{k+1}])$" . Ta làm chúng giống nhau: sup $f([b_r,b_{r+1}])\ \le$ sup $f([a_k,a_{k+1}])$ khi $[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]$. Ta viết lại (3)

598

? $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}\sup f([b_r,b_{r+1}])(b_{r+1}-b_r)\le\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)$ (3)

? $\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}\sup f([a_k,a_{k+1}])(b_{r+1}-b_r)\le\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)$ (4)

? $\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}(b_{r+1}-b_r)\le\sum_{k=0}^{n-1}\sup f([a_k,a_{k+1}])(a_{k+1}-a_k)$



Theo QTGT 6, ta xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán .

$$\sum_{[b_r,b_{r+1}]\subset[a_k,a_{k+1}]}(b_{r+1}-b_r)\ =\ (a_{k+1}-a_k)$$

599

Bài toán 116 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, $P=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n; s_1,\cdots,s_n\}$ và $Q=\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m; t_1,\cdots,t_m\}$ là hai phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Giả sử $\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\}\subset\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m\}$. Chứng minh $L(f,P)\le L(f,Q)$.

Bài toán 117 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, $P=\{a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n; s_1,\cdots,s_n\}$ và $R=\{u_0,u_1,\cdots,u_{i-1},u_i; t_1,\cdots,t_m\}$ là hai phân hoạch của khoảng $[a, b]$. Chứng minh $L(f,P)\le U(f,R)$.

Ta viết $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}\cup\{u_0,u_1,\cdots,u_i\}=\{b_0,b_1,\cdots,b_m\}$ với $a\ =\ b_0<b_1<\cdots<b_m=b$. Xét phân hoạch $Q=\{b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},bm; b_1,\cdots,b_m\}$. Ta có

$L(f,P)\le L(f,Q)\le U(f,Q)\le U(f,R)$.

600

Bài toán 118 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, ta đặt

$\alpha = \sup \{ L(f,P) : P$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$,

$\beta = \inf \{ U(f,Q) : Q$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$

Chứng minh $\alpha \le \beta$.

Dùng các bài toán 25 và 117

601

Bài toán 119 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, ta đặt

$\alpha = \sup \{ L(f,P) : P$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$,

$\beta = \inf \{ U(f,Q) : Q$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$.

Chứng minh $\alpha = \beta$.

Ta đặt : $a_{n,k} = a + n^{-1}k(b-a)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $k = 0,1, \ldots, n.$

$P_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, b;\ a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n-1}\}$

Ta gọi P_n là *phân hoạch đều thứ n* của đoạn $[a,b]$. Ta có

$L(f,P_n) \le \alpha \le \beta \le U(f,P_n)$ (1)

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, x$ và $y \in [a,b]$ sao cho $|y - x| \le \delta(\varepsilon)$

Nếu $n^{-1}(b-a) < \delta(\varepsilon)$, ta có $|U(f,P_n) - L(f,P_n)| \le \varepsilon(b - a)$

và $|\beta - \alpha| \le \varepsilon(b - a)$.

602

Bài toán 119 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, ta đặt

$\alpha = \sup \{ L(f,P) : P$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$,

$\beta = \inf \{ U(f,Q) : Q$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$.

Chứng minh $\alpha = \beta$.

Định nghĩa. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$, ta đặt

$\alpha = \sup \{ L(f,P) : P$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$,

$\beta = \inf \{ U(f,Q) : Q$ là một phân hoạch của $[a,b]\}$.

Ta có $\alpha = \beta$. Ta gọi α là tích phân Riemann của f trên $[a,b]$ và ký hiệu α như sau

$$\int_a^b f(x)dx$$

603

Ta ký hiệu $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Định lý. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó f khả tích .

Integrate[f(x),{x,a,b}] : tính tích phân Riemann

NIntegrate[f(x),{x,a,b}] : tính xấp xỉ tích phân

```
In[1]:= Integrate[x^3 * ArcTan[x], {x, 0, 1}]

Out[1]= 1/6
```

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx = \frac{1}{6}$$

604

```
>> int((x^3)*atan(x),0,6)

ans =

(1295*atan(6))/4 - 33/2

>> (1295*atan(6))/4 - 33/2

ans =

 4.385784264868624e+002 = 438,5784264868624
```

$$\int_0^6 x^3 arctgx dx = \frac{-198+3885arctg6}{12} \approx 438{,}578$$

605

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 22

Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó f khả tích. Để giải các bài toán lý thuyết về tích phân của f, chúng ta làm những bước sau

- Với mọi số nguyên n, chọn phân hoạch P_n của $[a,b]$ $\{a, a + n\text{-}1(b - a), \cdot\cdot\cdot, a + (n\text{-}1)n\text{-}1(b - a), b;$ $a + n\text{-}1(b - a), \cdot\cdot\cdot, a + (n\text{-}1)n\text{-}1(b - a), b\}$
- Xử lý bài toán dựa trên tổng Riemann $S(f,P_n)$

$$S(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\text{đd}([a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}])$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

Dùng tính chất $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx$

606

606

Bài toán 120. Cho f và g là các hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$, α và β là các số thực. Chứng minh $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Cho $P_n = \{a, a + n^{-1}(b - a), \cdot\cdot\cdot, a + (n\text{-}1)n^{-1}(b - a), b;$ $a + n^{-1}(b - a), \cdot\cdot\cdot, a + (n\text{-}1)n^{-1}(b - a), b\}$ là phân hoạch của khoảng đóng $[a, b]$.

$$S(\alpha f+\beta g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f+\beta g)(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha f(a+k\frac{b-a}{n}) + \beta g(a+k\frac{b-a}{n})]\frac{b-a}{n}$$

607

$$S(\alpha f+\beta g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f+\beta g)(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha f(a+k\frac{b-a}{n}) + \beta g(a+k\frac{b-a}{n})]\frac{b-a}{n}$$

$$S(\alpha f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \alpha S(f, P_n)$$

$$S(\beta g, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta g(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \alpha S(g, P_n)$$

$$\begin{array}{ccccc} S(\alpha f+\beta g,P_n) & = & \alpha S(f,P_n) & + & \beta S(g,P_n) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)dx & & \alpha\int_a^b f(x)dx & & \beta\int_a^b g(x)dx \end{array}$$

608

$$S(\alpha f+\beta g,P_n) \;=\; \alpha S(f,P_n) \;+\; \beta S(g,P_n)$$

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\mathrm{d}x \qquad \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)dx \;=\; \alpha\int_a^b f(x)dx \;+\; \beta\int_a^b g(x)dx$$

Bài toán 121. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a,b]$ và $c\in(a,b)$. Ta có

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$$

$$Q_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\,;a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\}$$

$$R_n=\{c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\,;c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$

$$P_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\,;$$

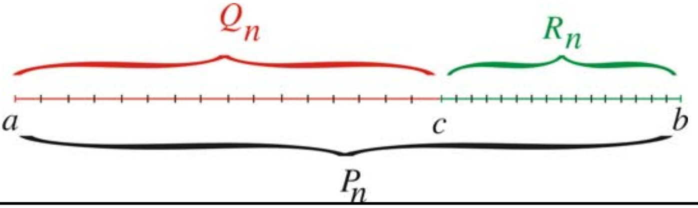
$$a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$

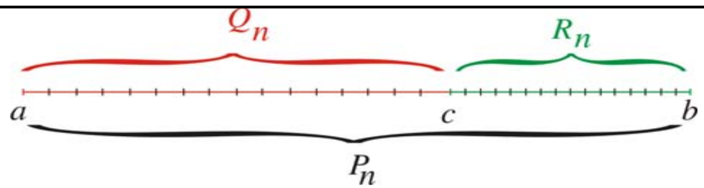
$$Q_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\,;a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c\}$$

$$R_n=\{c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\,;c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$

$$P_n=\{a,a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\,;$$

$$a+\frac{c-a}{n},\cdots,a+(n-1)\frac{c-a}{n},c,c+\frac{b-c}{n},\cdots,c+(n-1)\frac{b-c}{n},b\}$$





$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{c-a}{n})\frac{c-a}{n}\;+\;\sum_{k=1}^{n}f(c+k\frac{b-c}{n})\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,Q_n)=\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{c-a}{n})\frac{c-a}{n} \qquad S(f,R_n)=\sum_{k=1}^{n}f(c+k\frac{b-c}{n})\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,P_n) \;=\; S(f,R_n) \;+\; S(f,Q_n)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \qquad \beta\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{c-a}{n})\frac{c-a}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(c+k\frac{b-c}{n})\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,Q_n)=\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{c-a}{n})\frac{c-a}{n} \quad S(f,R_n)=\sum_{k=1}^{n} f(c+k\frac{b-c}{n})\frac{b-c}{n}$$

$$S(f,P_n) = S(f,R_n) + S(f,Q_n)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^c f(x)dx \qquad \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

613

Bài toán 122. Cho f và g là hai hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Giả sử $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Chứng minh

$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} \qquad S(f,P_n) \le S(g,P_n)$$

$$S(g,P_n)=\sum_{k=1}^{n} g(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} \qquad \int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$$

614

Bài toán 123. Cho f là một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$. Chứng minh

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

$$S(|f|,P_n)=\sum_{k=1}^{n} |f(a+k\frac{b-a}{n})|\frac{b-a}{n}$$

$$|S(f,P_n)| \le S(|f|,P_n)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad \int_a^b |f(x)|dx \qquad \left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

615

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 23

Khi ước lượng một tích phân, ta nên ước lượng tích phân của giá trị tuyệt đối hàm số trong tích phân :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$$

616

Bài toán 124. Cho c là một số thực và $f(x) = c$ với mọi $x \in [a, b]$. Chứng minh $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{n} c\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

$$S(f, P_n) \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

617

Bài toán 125. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a, b]$. Đặt

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$$

Chứng minh G là một hàm số liên tục trên $[a, b]$

Vì một hàm số thực liên tục trên $[a,b]$ thì liên tục đều trên $[a,b]$, nên ta có thể viết bài toán thành

Cho một $\varepsilon > 0$, có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(s) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall\, s, t \in [a, b], \quad |s - t| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$|G(x) - G(y)| < \varepsilon' \quad \forall\, x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2)$

618

Cho một $\varepsilon > 0$, có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(s) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall\, s, z \in [a, b], \quad |s - z| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$|G(x) - G(y)| < \varepsilon' \quad \forall\, x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2)$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu của (1) và (2) cùng dạng

$$G(x) - G(y) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \quad \forall\; y > x$$

Theo KTGT 23, ta có ước lượng sau và viết lại (2)

$$|G(x) - G(y)| = |\int_x^y f(t)dt| \le \int_x^y |f(t)|dt \qquad \forall\; y > x$$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$\int_x^y |f(t)|dt < \varepsilon' \qquad \forall x, y \in [a,b],\ |x - y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2')$$

619

Cho một $\varepsilon > 0$, có một $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$|f(s) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall\, s, z \in [a, b], \quad |s - z| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$

Cho một $\varepsilon' > 0$, tìm một $\eta(\varepsilon') > 0$ sao cho

$$\int_x^y |f(t)|dt < \varepsilon' \qquad \forall x, y \in [a,b],\ |x - y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2')$$

Theo QTGT 6, ta các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán : "$|f(s) - f(z)|$" và "$|f(t)|$". Ta làm chúng giống nhau : dùng bài toán 59, ta viết lại (1)

Có một số thực M sao cho

$|f(t)| \le M \qquad \forall\, t \in [a, b] \qquad (1')$

620

Có một số thực M sao cho

$$|f(t)| \le M \qquad \forall\, t \in [a, b] \qquad (1')$$

Cho một ε’ > 0 , tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$\int_x^y |f(t)|\,dt < \varepsilon' \qquad \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2')$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng

$$\int_x^y |f(t)|\,dt \le \int_x^y M\,dt = M\,|y-x|$$

Theo KTGT 6b, ta viết (2) thành

Cho một ε’ > 0 , tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$M|x-y| < \varepsilon' \qquad \forall\, x, y \in [a, b],\ |x-y| < \eta(\varepsilon') \qquad (2)$$

Đặt $\eta(\varepsilon') = (M+1)^{-1}\varepsilon'$.

621

Bài toán 126. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a, b]$. Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$.

Chứng minh G khả vi trên (a,b) và $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$$|f(u)-f(v)| < \varepsilon \qquad \forall u, v \in [a,b],\ |u-v| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon' \qquad \forall h, |h| < \eta(\varepsilon') \qquad (2)$$

Theo QTGT 1 và QTGT 7, ta làm rõ (2), phân hai trường hợp : $h > 0$ và $h < 0$.

$$h > 0 \qquad \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

622

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$$|f(u)-f(v)| < \varepsilon \qquad \forall u, v \in [a,b],\ |u-v| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\right| < \varepsilon' \qquad \forall h, 0 < h < \eta(\varepsilon') \qquad (2')$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố trong (2’) cùng dạng

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dt = f(x)h \qquad f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right| < \varepsilon' \qquad \forall h, 0 < h < \eta(\varepsilon')$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]\,dt\right| < \varepsilon' \qquad \forall h, 0 < h < \eta(\varepsilon') \qquad (2'')$$

623

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$$|f(u)-f(v)| < \varepsilon \qquad \forall u, v \in [a,b],\ |u-v| < \delta(\varepsilon) \qquad (1)$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]\,dt\right| < \varepsilon' \qquad \forall h, 0 < h < \eta(\varepsilon') \qquad (2'')$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán về cùng dạng

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b],\ |t-x| < \delta(\varepsilon) \qquad (3)$$

Cho một ε’ > 0, tìm một η(ε’) > 0 sao cho

$$?\quad \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt < \varepsilon' \qquad \forall h, 0 < h < \eta(\varepsilon') \qquad (4)$$

624

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$|f(t)-f(x)| < \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b], \ |t-x| < \delta(\varepsilon) \qquad (3)$

Cho một ε' > 0, tìm một η(ε') > 0 sao cho

$$? \quad \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \ < \ \varepsilon' \qquad \forall h, 0<h<\eta(\varepsilon') \quad (4)$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố bài toán về cùng dạng

Cho một ε > 0, có một δ(ε) > 0 sao cho

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \ \le \ \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon \qquad \forall h, 0<h<\delta(\varepsilon) \quad (3')$$

Cho một ε' > 0, tìm một η(ε') > 0 sao cho

$$? \quad \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \ < \ \varepsilon' \qquad \forall h, 0<h<\eta(\varepsilon') \quad (4)$$

625

Bài toán 127. Cho *f* là một hàm số thực liên tục trên [*a*,*b*]. Giả sử có hàm số *v* liên tục trên [*a*,*b*] và khả vi trên (*a*,*b*) và *v*'(*x*) = *f*(*x*) với mọi *x* ∈ (*a*, *b*) . Lúc đó

$$\int_a^x f(t)dt \ = \ v(x)-v(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng

Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$ Viết lại bài toán

$G(x) = v(x) - v(a) \qquad \forall x \in [a,b].$

? $\quad u(x) = v(x) - v(a) - G(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b].$

Ta thấy *u*(*x*) = *u*(*x*) - *u*(*a*), theo KTGT 21, ta xét *u*'.

$u'(x) = v'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

626

Bài toán 128. Cho *f* là một hàm số thực liên tục trên [*a*,*b*]. Giả sử có hàm số *v* liên tục trên [*a*,*b*] và khả vi trên (*a*,*b*) và *v*'(*x*) = *f*(*x*) với mọi *x* ∈ (*a*, *b*) . Lúc đó

$$v(x) \ = \ \int_a^x f(t)dt + v(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Định nghĩa. Cho *f* là một hàm số thực liên tục trên [*a*,*b*]. Cho hàm số *v* liên tục trên [*a*,*b*] và khả vi trên (*a*,*b*) và *v*'(*x*) = *f*(*x*) với mọi *x* ∈ (*a*, *b*). Lúc đó ta nói

- *v* là một nguyên hàm của *f* trên (*a*,*b*), có một hằng số *c*

$$v(x) \ = \ \int_a^x f(t)dt + c \qquad \forall x \in [a,b]$$

- $\int_a^x f(t)dt$ là tích phân xác định của *f* trên [*a*,*x*]

627

Bài toán 127 giúp ta tính tích phân của một hàm số *f* liên tục trên một khoảng [*a*,*b*] như sau : tìm một hàm số *v* liên tục trên [*a*,*b*] và khả vi trên (*a*,*b*) với *v*'(*x*) = *f*(*x*) với mọi *x* ∈ (*a*,*b*) . Lúc đó

$$\int_a^b f(t)dt \ = \ v(b)-v(a)$$

Bài toán 129 . Tính $\int_0^3 (x^7 - x^3 + 5)dx$

Đặt $v(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{4}x^4 + 5x$ với mọi $x \in [0,3]$

Dùng nhận xét bên trên ta có

$$\int_0^3 (x^7 - x^3 + 5)dx \ = \ v(3)-v(0) = \left(\tfrac{1}{8}x^8 - \tfrac{1}{4}x^4 + 5x\right)\Big]_0^3 = \frac{6519}{8}$$

628

Bài toán 130. Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó có $c \in (a, b)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng

Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall\ x \in [a,b]$ $\qquad \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = G(b) - G(a)$$

? $\exists\, c \in (a, b)$ sao cho $G(b) - G(a) = f(c)(b-a)$

Theo KTGT 21, ta để ý $G'(x) = f(x)$ với mọi x trong (a, b). Dùng Định lý giá trị trung bình, ta có

Có $c \in (a, b)$: $G(b) - G(a) = G'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$

629

Bài toán 131. Cho u và v là các hàm số thực khả vi liên tục trên (c, d), và cho một khoảng $[a, b]$ chứa trong (c, d). Ta có $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

Theo QTGT 5, ta viết các yếu tố của bài toán cùng dạng

? $\int_a^b [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) \qquad (1)$

Đặt $G(s) = u(s)v(s)$ với mọi $s \in (c, d)$. Ta có $G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

Ta viết lại bài toán

? $\int_a^b G'(t)dt = G(b) - G(a) \qquad (1')$

630

Bài toán 131 cho ta phương pháp tính tích phân từng phần cho các hàm số có dạng tích:

- (đa thức).(biểu thức lượng giác)
- ($\ln x$, arctg x, arcsin x, arccos x). (đa thức)

Bài toán 132 . Tính $\int_0^\pi x\cos x dx$

Đặt $u(x) = x$ và $v(x) = \sin x$ $\qquad u'(x) =$ và $v'(x) = \cos x$

$$\int_0^\pi x\cos x dx = \int_0^\pi u(x)v'(x)dx$$

$$= u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0) - \int_0^\pi u'(x)v(x)dx$$

$$= -\int_0^\pi \sin(x)dx = \cos\pi - \cos 0 = -2$$

631

Định lý (Taylor) . Cho a, b, c và d là các số thực sao cho $[c,d] \subset (a,b)$, và f là một hàm khả vi đến cấp n trên khoảng mở (a,b), với $n \geq 1$. Đặt $g(x) = f(x) - P_{n-1}(x,c)$ với mọi x trong (c,d) . Lúc đó

$$f(d) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k + \int_c^d \frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

$g(x) = f(x) - P_{n-1}(x,c) \quad \forall\ x \in (c,d)$. Lúc đó

$$g(d) = \int_c^d \frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

632

$$f(d)=f(c)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k+\int_c^d\frac{(d-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)dx$$

• $n=1$: $\quad f(d)-f(c)=\int_c^d f^{(1)}(x)dx$

• Giả sử n = $m\geq 1$ đúng :

$$f(d)=f(c)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k+\int_c^d\frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x)dx$$

• Xét n = $m+1$

$$f(d)=f(c)+\sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k+\int_c^d\frac{(d-x)^{m}}{m!}f^{(m+1)}(x)dx \ ?$$

633

$$f(d)=f(c)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k+\int_c^d\frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x)dx$$

• Xét n = $m+1$

$$f(d)=f(c)+\sum_{k=1}^{m}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(d-c)^k+\int_c^d\frac{(d-x)^{m}}{m!}f^{(m+1)}(x)dx \ ?$$

$$\int_c^d\frac{(d-x)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(x)dx=-\frac{(d-x)^m}{m!}f^{(m)}(x)\Big]_c^d+$$

$$+\int_c^d\frac{(d-x)^{m}}{m!}f^{(m+1)}(x)dx=$$

$$=\frac{(d-c)^m}{m!}f^{(m)}(c)+\int_c^d\frac{(d-x)^{m}}{m!}f^{(m+1)}(x)dx$$

634

Bài toán 133 . Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng $[a,b]$, h là một hàm số thực khả liên tục trên khoảng (p,q), và khoảng $[c,d]\subset(p,q)$. Giả sử $h([c,d])$ chứa trong $[a, b]$. Chứng minh

$$\int_c^d f(h(s))h'(s)ds=\int_{h(c)}^{h(d)}f(x)dx$$

Ta đưa tích phân về số thực : chọn u sao cho $u'=f$.

$$?\quad \int_c^d f(h(s))h'(s)ds=\int_{h(c)}^{h(d)}u'(x)dx=u(h(d))-u(h(c))$$

Ta đưa tích phân về số thực : đặt $v=u\circ h$. Ta có $v'(s)=f(h(s))h'(s)$. Bài toán trở thành

$$?\quad \int_c^d v'(s)ds=v(d)-v(c)$$

635

Định nghĩa. Cho một hàm số thực f trên một khoảng mở (a, b) . Giả sử

• $\int_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d]\subset(a, b)$.

• Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương δ để cho

$$|\,\alpha-\int_c^d f(t)dt\,|<\varepsilon \quad \text{khi } |a-c|\leq\delta \text{ và } |d-b|\leq\delta.$$

Lúc đó ta nói α là *tích phân suy rộng* của f trên (a,b) và vẫn ký hiệu nó là

$$\int_a^b f(t)dt$$

Ở đây ta có thể xét a bằng $-\infty$ hoặc b có thể bằng ∞ .

636

Bài toán 134. Cho $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với mọi $x \in (0,1)$.

Chứng minh f khả tích trên $(0,1)$ và tính $\int_0^1 f(x)dx$.

- $\int_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d] \subset (0, 1)$.
- Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương δ để cho

$$|\alpha - \int_c^d f(t)dt| < \varepsilon \quad \text{khi } |0 - c| \leq \delta \text{ và } |1 - d| \leq \delta.$$

$$\int_c^d \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big]_c^d = 2(\sqrt{d} - \sqrt{c}) \quad \to 2 \text{ khi d} \to 1 \text{ và } c \to 0$$

637

Bài toán 135. Cho $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh f khả tích trên $\mathbb{R}$ và tính $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

- $\int_c^d f(t)dt$ xác định với mọi $[c, d] \subset (-\infty,\infty)$
- Có một số thực α sao cho với mọi số thực dương ε ta tìm được một số thực dương M để cho

$$|\alpha - \int_c^d f(t)dt| < \varepsilon \quad \text{khi } c \leq -M \text{ và } M \leq d.$$

$$\int_c^d \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg}\Big]_c^d = \text{arctg}d - \text{arctg}c \quad \to \pi \quad \text{khi } d \to \infty \text{ và } c \to -\infty$$

638

Cho $a, b, a_1, \ldots, a_n$ trong $\mathbb{R}$ sao cho $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$. Cho f là một hàm số liên tục trên $A = \bigcup_{i=1}^{n-1}(a_i, a_{i+1})$ Lúc đó f được gọi là một hàm số liên tục từng đoạn trên (a, b).

639

DANH SÁCH BÀI TẬP LÀM TRONG GIỜ BÀI TẬP

Môn Giải tích A1 – Giải tích cơ sở

1	1.5.2.6	13	4.2.2.1	25	6.3.2.2
2	1.5.3.9	14	bt14 - ch4	26	6.3.2.2
3	1.5.3.14	15	bt15 - ch4	27	6.3.2.4
4	2.5.2.1	16	4.2.3.3	28	6.3.2.5
5	2.5.2.2	17	Bt17 - ch4	29	6.3.4.7
6	2.5.3.2	18	4.2.3.4	30	Bt54 - ch6
7	2.5.3.4	19	Bt23b - ch5	31	Bt59 - ch6
8	3.7.1.2	20	5.6.2.4	32	Bt61 - ch6
9	3.7.2.4	21	5.6.2.9	33	Bt62 - ch6
10	3.7.3.1	22	Bt34 - ch5	34	Bt65 - ch6
11	3.7.3.2	23	5.6.4.4		
12	3.7.5.2	24	Bt37 - ch5		

Môn Giải tích A1 – Vi tích phân

1	Bt75 - ch7	13	Bt96 - ch7	25	Bt114 - ch7
2	Bt78 - ch7	14	Bt99 - ch7	26	Bt114 - ch8
3	Bt79 - ch7	15	Bt100 - ch7	27	Bt116 - ch8
4	Bt80 - ch7	16	7.7.4.7	28	Bt117 - ch8
5	Bt81 - ch7	17	7.7.4.8	29	Bt119 - ch8
6	Bt82 - ch7	18	7.7.6.1	30	Bt120 - ch8
7	Bt85 - ch7	19	7.7.6.9	31	Bt125 - ch8
8	Bt86 - ch7	20	Bt101 - ch7	32	9.5.4.3
9	Bt90 - ch7	21	Bt103 - ch7	33	9.5.4.7
10	Bt91 - ch7	22	Bt106 - ch7	34	9.5.5.3
11	Bt92 - ch7	23	Bt108 - ch7		
12	Bt95 - ch7	24	Bt112 - ch7		

Các bài tập này trích trong quyển “ Giáo trình toán giải tích 1” và các slides bài giảng của GS Dương Minh Đức.

PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI TOÁN

I. NHẬN ĐỊNH TỔNG QUÁT

A. Một bài toán thường gồm có :

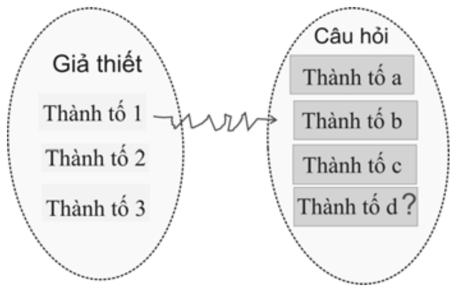
1. Một hoặc nhiều giả thiết.
2. Một hoặc nhiều kết luận

B. Một giả thiết thường có cấu trúc : một "yếu tố cho sẵn" đưa đến một "yếu tố mới".

C. Một kết luận thường có cấu trúc : dùng một "yếu tố cho sẵn" chứng minh một "yếu tố phải chứng minh".

1

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

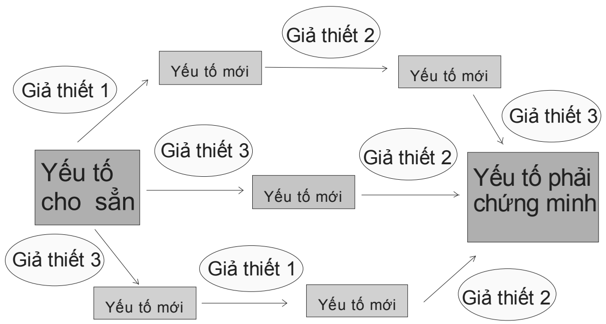


A. Chọn một thành tố trong giả thiết có thể có liên hệ với một thành tố không có liên quan trực tiếp đến dấu hỏi.

B. Làm rỏ mối quan hệ đó, từ đó giải bài toán.

2

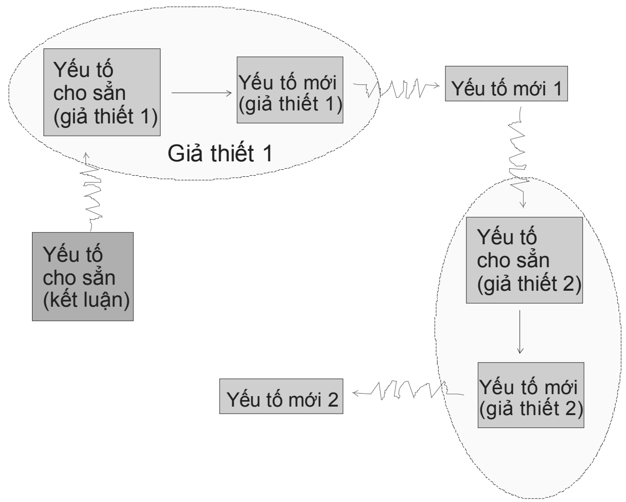
III. SƠ ĐỒ GIẢI TOÁN



1. Từ một "yếu tố cho sẵn" trong một kết luận, chúng ta dùng một giả thiết để tìm ra một "yếu tố mới".
2. Tiếp theo đó, từ "yếu tố mới" này, chúng ta dùng một giả thiết khác để tìm ra một "yếu tố mới" khác.

3

IV. SƠ ĐỒ TÌM YẾU TỐ MỚI



4

1. Trong mỗi giả thiết ta có một "yếu tố cho sẳn", và từ "yếu tố cho sẳn" đó ta có một "yếu tố mới" trong giả thiết đó.

2. Ta tìm một giả thiết có "yếu tố cho sẳn" cùng dạng với "yếu tố cho sẳn" trong kết luận. Tuy hai "yếu tố cho sẳn" này có cùng một dạng, nhưng thường không giống nhau hoàn toàn.

3. Phương pháp "giống giống khác khác" :

a. Trong các "yếu tố cho sẳn" của các giả thiết của bài toán, chọn một yếu tố có dạng giống giống nhất với "yếu tố cho sẳn" của kết luận của bài toán.

b. Làm hai "yếu tố cho sẳn" giống giống nhưng còn khác đó thật giống nhau : viết lại giải thiết tương ứng theo đúng ký hiệu của "yếu tố cho sẳn" trong kết luận.

c. Trong dạng mới của giải thiết tương ứng, ta lại có "yếu tố mới" trong dạng mới. Đó chính là "yếu tố mới 1"

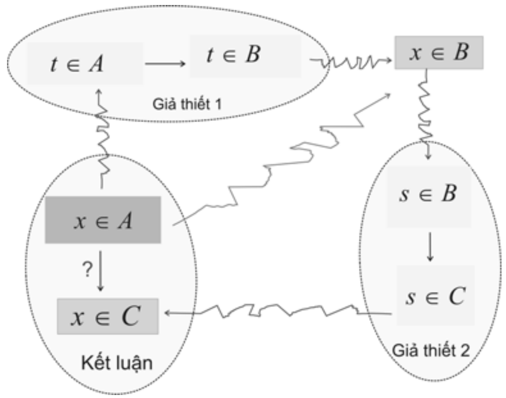
4. Thay thế "yếu tố cho sẳn" trong kết luận, bằng "yếu tố mới 1" , và lặp lại qui trình bên trên, ta sẽ tìm ra "yếu tố mới 1" .

5. Thay thế "yếu tố mới 1" trong kết luận, bằng "yếu tố mới 21" , và lặp lại qui trình bên trên, ta sẽ tìm ra "yếu tố mới 2" .

6. Lặp lại các qui trình bên trên cho đến khi tìm ra "yếu tố phải chứng minh".

V. THÍ DỤ

Bài toán: Cho ba tập hợp khác trống A, B và C sao cho $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng minh $A \subset C$.



1. Viết rỏ bài toán

Ta có hai giả thiết

Cho $t \in A$, ta có $t \in B$ (1)

Cho $s \in B$, ta có $s \in C$ (2)

Ta có một kết luận

Cho $x \in A$, chứng minh $x \in C$

(3)

2. Qui trình lý luận

a. Từ yếu tố cho sẳn "$x \in A$" ta phải chứng minh yếu tố "$x \in C$".

9

Cho $t \in A$, ta có $t \in B$ (1)

Cho $s \in B$, ta có $s \in C$ (2)

Cho $x \in A$, chứng minh $x \in C$ (3)

Thấy "$x \in A$" giống giống khác yếu tố "$t \in A$" trong (1) . Làm chúng thật giống nhau : viết lại (1) cùng dạng với (3)

Cho $x \in A$, ta có $x \in B$ (1')

Vậy $x \in B$. Ta thấy "$x \in B$" giống giống khác yếu tố "$s \in B$" trong (2). Làm chúng thật giống nhau : viết lại (2) cùng dạng với (1')

Cho $x \in B$, ta có $x \in C$ (2')

Vậy cho $x \in A$ ta có $x \in C$.

10

PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI TOÁN

I. QUI TẮC GIẢI TOÁN

QUI TẮC GIẢI TOÁN 1

Khi bài toán có nhiều yếu tố chưa rõ ràng, trước hết ta làm rõ các yếu tố này trước khi giải bài toán. Thật là phi lý khi giải một bài toán khi chưa rõ các yếu tố trong bài toán.

Nhiều khi bài toán được giải ngay sau khi các yếu tố được làm rõ.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 2

Nên xét bài toán trong trường hợp đơn giản nhất. Sau đó xét bài toán dạng phức tạp hơn một chút, dựa vào cách giải trường hợp trước. Lặp qui trình này cho đến khi giải xong bài toán

QUI TẮC GIẢI TOÁN 3

Viết và đánh số cẩn thận các giả thiết và kết luận của bài toán, với cùng các yếu tố đã được làm rõ.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 4

Không dùng cùng một ký hiệu cho hai sự việc có thể khác nhau.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 5

Viết các yếu tố trong bài toán cùng một dạng

QUI TẮC GIẢI TOÁN 6

Xét các yếu tố "giống giống khác khác" trong bài toán, cố gắng làm chúng ra dạng giống nhau hẵn. Sau đó viết lại bài toán với các dạng mới, và xét các yếu tố giống giống khác khác trong dạng bài toán mới. Lặp qui trình này cho đến khi giải xong bài toán. Nếu chỉ có hai yếu tố "giống giống khác khác" còn các yếu tố còn lại hoàn toàn giống nhau, ta chỉ tập trung quan sát hai yếu tố này. Khi dùng phản chứng, ta phải tập trung quan sát các yếu tố "giống giống khác khác" nhưng chống nhau. Không nên để ý nhiều quá những yếu tố hoàn toàn giống nhau.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 7

Khi bài toán có yếu tố phức tạp, ta làm mất sự phức tạp đó bằng cách chia thành nhiều trường hợp. Sau đó giải quyết từng trường hợp. Đây là chính sách “chia để trị” trong toán học.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 8 (Phản chứng)

Chúng ta dùng phản chứng trong các trường hợp sau :

- Dữ kiện cho trước yếu hơn dữ kiện cần chứng minh.
- Dữ kiện cho trước không rõ ràng bằng dữ kiện cần chứng minh.
- Không thể dùng được dữ kiện cho trước.

Cách dùng phản chứng : để chứng minh *"P đúng"*. ta chỉ cần chứng minh $\sim P$ không thể nào đúng được như sau

- Giả sử $\sim P$ đúng, coi như đây là một giả thiết của bài toán. Giả thiết mới này thường được gọi là *giả thiết phản chứng*.
- Dùng qui tắc giải toán 6, làm thật giống các yếu tố "giống giống khác khác".
- Sau cùng ta sẽ tìm được một yếu tố "giống giống chống chống". Ta viết lại các yếu tố này cho thật giống nhau và thật chống nhau. Từ đó chúng ta cố tìm ra một điều mâu thuẫn với các giả thiết cho sẵn của bài toán hoặc mâu thuẫn với các định nghĩa hoặc các kết quả có từ trước.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 9 (Chứng minh bằng đảo đề)

Khi chứng minh "$P \Rightarrow Q$" khó quá, ta có thể chứng minh "$\sim Q \Rightarrow \sim P$"

QUI TẮC GIẢI TOÁN 10

Khi bài toán có yếu tố được xác định trong nhiều trường hợp. Vậy ta phải xét bài toán trong nhiều trường hợp tương ứng.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 11

Khi bài toán viết theo dạng tích hợp các trường hợp. Ta tách bài toán ra từng trường hợp.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 12

Nếu định nghĩa của một yếu tố trong bài toán khá phức tạp (sup , sự hội tụ, sự liên tục . . .). Ta phải chép định nghĩa dưới dạng tổng quát, sau đó mới thay vào các ký hiệu tương ứng của bài toán. Cách này giúp ta tránh sai sót, và giúp ta có một kho kiến thức toán có chọn lọc : dùng nhiều được ghi ra nhiều lần.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 13

Nếu một số bé hơn (tương tự lớn hơn) một số cụ thể hơn, thay vì chặn trên trực tiếp số đó, ta có thể chặn trên (tương tự chặn dưới) số cụ thể đó.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 14

Khi bài toán có các số chỉ số (như y_δ , z_M , . . .), nhất là khi dùng phản chứng, ta biến các yếu tố bài toán ra dạng dãy số. Những số có chỉ số đôi khi ta phải đặt $x_n = y_\delta$. Với mỗi n ta phải chọn δ. Thường ta chọn $\delta = n$ hoặc $\delta = n^{-1}$. Ta chọn δ sao cho gia tăng thuận lợi giả bài toán, thí dụ gia tăng sự mâu thuẫn trong phản chứng: nếu δ càng nhỏ thì mâu thuẫn càng tăng, ta chọn $\delta = n^{-1}$. Nếu δ càng lớn thì mâu thuẫn càng tăng, ta chọn $\delta = n$.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 15

Nếu bài toán có các ký hiệu phức tạp, ta nên đặt ký hiệu mới làm trong sáng bài toán. Tương tự, ta nên biến bất đẳng thức thành đẳng thức .

QUI TẮC GIẢI TOÁN 16

Nếu bài toán phức tạp vì có những trường hợp không giải được. Ta giải trước các trường hợp có thể giải được. Sau đó cố gắng đưa các trường hợp còn lại về các trường hợp đã giải.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 17

Nếu bài toán phức tạp vì có nhiều trường hợp khác nhau. Ta có thể loại các trường hợp không cần thiết và viết lại bài toán.

QUI TẮC GIẢI TOÁN 18

Nếu trong giả thiết có "với mọi x trong . . ." , "với mọi ε trong . . ." . . ., ta có thể chọn x , ε, ... cho phù hợp với các yếu tố trong phần kết luận**.**

QUI TẮC GIẢI TOÁN 19

Khi phải chứng minh nhiều phần nhỏ của bài toán, ta nên chứng minh phần dễ trước**.**

QUI TẮC GIẢI TOÁN 20

Để tìm một ẩn số (x, y, δ **. . .**), ta cố gắng để ẩn số đó đứng một mình ở một vế trong một đẳng thức hay bất đẳng thức.

II. KỸ THUẬT GIẢI TOÁN

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 1

Để chứng minh P_n đúng với mọi $n \geq N$ chỉ cần hai bước như sau :

- Chứng minh P_n đúng với $n = N$,
- Cho k là một số nguyên dương $k \geq N$. Giả sử P_k đúng, chứng minh P_{k+1} cũng đúng.

Các kỹ thuật quan trọng trong phép qui nạp :

- Không dùng cùng một ký hiệu cho hai sự việc có thể khác nhau (Qui tắc giải toán 4).
- Đưa các dữ kiện của P_{n+1} về dạng các dữ kiện của P_n

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 2

Khi làm việc các bất đẳng thức, ta nên tập trung một vế của bất đẳng thức. Chỉ để tâm đến vế còn lại nếu thật cần thiết.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 3

Khi bài toán có nhiều biến số, ta nên giử nguyên một biến số và cho các biến số còn lại nhận các trị giá đặc biệt. Lúc đó ta đưa bài toán về một biến số.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 4

Làm mạnh bất đẳng thức $a < b$ bằng cách: có một số $\varepsilon > 0$ sao cho $a + \varepsilon < b$.
Làm mạnh bất đẳng thức $a < b$ bằng cách: có một số $\varepsilon > 0$ sao cho $a < b - \varepsilon$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 5

Khi có bất đẳng thức liên quan đến một số dương và các số nguyên dương (hoặc nghịch đảo số nguyên dương) , ta phải nhớ tính chất Archimède sau : Nếu $x > 0$ và $0 < y$, lúc đó có một số nguyên dương m sao cho $y < mx$. (hay $m^{-1}y < x$).

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6

Cho A là một tập bị chặn trên trong $\mathbb{R}$ và $M \in \mathbb{R}$. Để chứng minh $\sup A \leq M$, ta có thể làm như sau : Chứng minh $x \leq M \quad \forall x \in A$.
Cho B là một tập bị chặn dưới trong $\mathbb{R}$ và $S \in \mathbb{R}$. Để chứng minh $S \leq \inf B$, ta có thể làm như sau : Chứng minh $S \leq y \quad \forall y \in B$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6b

Nếu một số bị bé hơn một số cụ thể hơn, thay vì chặn trên trực tiếp số đó, ta có thể chặn trên số cụ thể tương ứng.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 6c

Nếu $\{a_n\}$ hội tụ về a. Ta có thể ước lượng $|a_n|$ theo $|a|$ như sau.

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có $N(\varepsilon) \in \subseteq$ sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N(\varepsilon) \qquad (1)$$

$$|a_n| \le |a_n - a| + |a| \le |a| + 1 \qquad \forall n > N(1) \qquad (2)$$

Nếu $a \neq 0$:

$$2^{-1}|a| \le |a| - |a_n - a| \le |a_n| \qquad \forall n > N(2^{-1}|a|) \qquad (3)$$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 7

Khi giải bất phương trình có "≤" với nhiều ẩn số. Chúng ta thử giải phương trình có "=" và các ẩn số đều bằng nhau .

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 8

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Để chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a, ta chỉ cần tìm một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về a.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 9

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực Cauchy và a là một số thực. Để chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ về a, ta chỉ cần tìm một dãy con $\{x_{n_m}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\{x_{n_m}\}$ hội tụ về a.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 10

Để chứng minh một dãy $\{x_n\}$ hội tụ, nhưng chưa biết giới hạn của nó. Ta chỉ cần chứng minh $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 11

Trong bài toán có giới hạn và có sup hoặc inf, ta nên viết "$\{x_n\}$ hội về a" dưới dạng

Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $N(\varepsilon) \in N$ sao cho $|x_n - a| \le \varepsilon \quad \forall n \ge N(\varepsilon)$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 12

Bản chất của chuỗi số hội tụ là một số thực α, hơn nữa, α là giới hạn của một dãy số.

Để khảo sát một chuỗi số, ta phải xét dãy $\{s_n\}$ các tổng riêng phần của nó. Sau đó mới khảo sát giới hạn của $\{s_n\}$, giới hạn của $\{s_n\}$ chính là α.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 13

Để khảo sát một dãy số $\{x_n\}$, ta có thể xét chuỗi số $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, với $a_1 = x_1$, $a_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ với số nguyên dương k. Lúc đó dãy số $\{x_n\}$ chính là dãy tổng riêng phần $\{s_n\}$ của chuỗi đó.

Cho chuỗi số $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$. Để khảo sát dãy số $\{a_n\}$, ta để ý $a_n = s_n - s_{n-1}$ với mọi số nguyên dương k, ở đây $\{s_n\}$ chính là dãy tổng riêng phần của chuỗi đó.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 14

Khi có số nguyên N sao cho $|a_n| \le b_n \quad \forall\, n \ge N$. Để chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, ta nên xét sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ và dùng tiêu chuẩn so sánh.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 15

Yếu tố "f liên tục tại x" có thể viết thành hai dạng tương đương :

(i) Nếu $\{x_n\}$ hội tụ về x, thì $\{f(x_n)\}$ hội tụ về $f(x)$.

(ii) Cho một $\varepsilon > 0$ tìm $\delta > 0$ sao cho

$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in A$ với $|y - x| < \delta(x)$

Ta thường dủng dạng (i).

Thường ta dùng dạng dãy số

Cho một $\varepsilon > 0$ ta có một $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \forall\, n \ge N(\varepsilon) \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ Cho một $\varepsilon' > 0$ ta có một $M(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon' \qquad \forall\, n \ge M(\varepsilon'). \qquad (2)$$

Có $\varepsilon'' > 0$ sao cho với mỗi $m \in \mathbb{N}$ ta có một $z_m \in A$ với $|z_m - x| < \delta$ sao cho

$$|f(z_m) - f(x)| \geq \varepsilon'' \quad (3)$$

Theo QTGT 6, ta để ý $\{x_n\}$ trong (1) hội tụ còn $\{z_m\}$ trong (3) thì chưa chắc hội tụ. Để làm chúng giống nhau, ta nên dùng định lý Bolzano-Weierstrass.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 16

Để chứng minh một hàm số liên tục, ta nên xét nó có phải là tổng hoặc tích các hàm số liên tục.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 17

Nếu $f'(x)$ và $|f(z) - f(x)|$ cùng xuất hiện trong bài toán, ta ta phải để ý và dùng các bất đẵng thức sau:

Cho f là một hàm số thực trên khoảng mở (a,b) và $x \in (a,b)$. Giả sử f khả vi tại x.

(1) Có một số thực M và một $\delta > 0$ sao cho $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x| \quad \forall\, y, |y-x| < \delta$

(2) Nếu $f'(x) = 0$: với mọi số thực dương ε và một $\mu(\varepsilon) > 0$ sao cho : $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon|t-x| \quad \forall\, t, |t-x| < \mu(\varepsilon)$.

(3) Nếu $f'(x) \neq 0$: với mọi số thực dương $c < |f'(x)|$ có $\eta(c) > 0$ sao cho : $c|s-x| \leq |f(s) - f(x)| \quad \forall\, s, |s-x| < \eta(c)$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 18

Để đưa bài toán về trường hợp đơn giản hơn hay những trường hợp đã giải quyết, ta có thể làm như sau:

(1) Đưa về trường hợp $f(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - f(a)$.

(2) Đưa về trường hợp $f'(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - x f'(a)$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 19

Để đưa bài toán về trường hợp đơn giản hơn hay những trường hợp đã giải quyết, ta có thể làm như sau:

(1) Đưa về trường hợp $f(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - f(a)$.

(2) Đưa về trường hợp $f'(a) = 0$: đặt $g(x) = f(x) - x f'(a)$.

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 20

Cho f là một song ánh từ một khoảng I vào một khoảng J . Lúc đó

(1) Để chứng minh f liên tục trên I , ta chỉ cần chứng minh f đơn điệu trên I .

(2) Để chứng minh f đơn điệu trên I , ta chỉ cần chứng minh f liên tục trên I .

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 21

Khi bài toán có f' và $f(x) - f(y)$, ta nên nhớ định lý giá trị trung bình :

Định lý giá trị trung bình. Nếu f là một ánh xạ liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a, b) , thì có một $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 22

Cho f là một hàm số thực liên tục trên một khoảng đóng $[a, b]$. Lúc đó f khả tích. Để giải các bài toán lý thuyết về tích phân của f, chúng ta làm những bước sau

- Với mọi số nguyên n, chọn phân hoạch P_n của $[a,b]$

$\{a, a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a) , b; a + n^{-1}(b - a), \cdots, a + (n-1)n^{-1}(b - a) , b\}$

- Xử lý bài toán dựa trên tổng Riemann $S(f,P_n)$

$$S(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})đd([a+(k-1)\frac{b-a}{n},a+k\frac{b-a}{n}]) \quad =\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

Dùng tính chất $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n)=\int_a^b f(x)dx$

KỸ THUẬT GIẢI TOÁN 23

Khi ước lượng một tích phân, ta nên ước lượng tích phân của giá trị tuyệt đối hàm số trong tích phân : $|\int_a^b f(t)dt| \le \int_a^b |f(t)|dt$

III. KIẾN THỨC CƠ BẢN

KIẾN THỨC CƠ BẢN 1 (TẬP HỢP TƯƠNG ỨNG VỚI $\exists$ VÀ $\forall$)

Cho A_i là các tập con của X với mọi $i \in I$, ta đặt

$\cup_{i\in I} A_i = \{x \in X : \exists\, i \in I , x \in A_i\}$ và $\cap_{i\in I} A_i = \{x \in X : \forall\, i \in I , x \in A_i\}$

KIẾN THỨC CƠ BẢN 2 (TẬP HỢP TƯƠNG ỨNG VỚI “và” VÀ “hoặc”)

Cho A và B là các tập con của X,

$A \cup B = \{x \in X : x \in A$ hoặc $x \in B\}$ và $A \cap B = \{x \in X : x \in A$ và $x \in B\}$

KIẾN THỨC CƠ BẢN 3 ***(Cách viết một mệnh đề U thành dạng cơ bản)***

□ Để ý đến các cụm từ *"với mọi"* và *"có một" ở trong U,* và viết chúng thành một trong bốn dạng

$\forall x \in A$ thì P đúng đối với x

$\exists x \in A$ sao cho P đúng đối với x

$\exists x \in A$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z , $\forall z \in$

$\forall x \in A, \exists y \in B$ sao cho $P(x)$ đúng đối với z , $\forall z \in C(y)$

($P(x)$ là một mệnh đề được xác định tùy theo các giá trị của x, $C(y)$ là một tập hợp được xác định tùy theo các giá trị của y)

Nếu cần ta đặt thêm các tập hợp mới.

Cho các tập hợp C, D, E, F và G , ta đặt

$A = C \times D$ và $B = E \times F \times G$ và viết

- "$\forall x \in C, \forall y \in D$ " thành "$\forall (x,y) \in A$".
- "$\exists u \in E, \exists v \in F$ và $\exists t \in G$" thành "$\exists (u,v,t) \in B$"

Cách phủ định các mệnh đề ở dạng cơ bản

- đổi $\exists$ thành $\forall$
- đổi $\forall$ thành $\exists$
- đổi P thành $\sim P$
- để nguyên "$\in$"
- để nguyên *" đúng với"*

KIẾN THỨC CƠ BẢN 4 (Phủ định các mệnh đề có "và" hay "hoặc")

P là *" R và S "* ; $\sim P$ là *" ~R hoặc ~S "*

Q là *" R hoặc S "* ; $\sim Q$ là *"~R và ~S"*

KIẾN THỨC CƠ BẢN 5

Để tìm một dãy con của một dãy số thực $\{x_n\}$. Ta có thể tìm J là một tập con có vô hạn phần tử trong N .

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$n_1 = \min J$

$n_2 = \min J \setminus [0, n_1]$

$n_3 = \min J \setminus [0, n_2]$

$n_{k+1} = \min J \setminus [0, n_k] \quad \forall k \in$ N.

Lúc đó $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Lưu ý $n_k \in J$ với mọi $k \in$ N.

KIẾN THỨC CƠ BẢN 6

Cách thứ hai để tìm dãy con

Cho $\{x_n\}$ là một dãy số thực. Cho $\{J_n\}$ là một họ đếm được các tập con trong N . Giả sử J_n có vô hạn phần tử và $J_{n+1} \subset J_n$ với mọi số nguyên dương n .

Dùng qui nạp toán học ta đặt

$n_1 = \min J_1$

$n_2 = \min J_2 \setminus [0, n_1]$

$n_3 = \min J_3 \setminus [0, n_2]$

$n_{k+1} = \min J_{k+1} \setminus [0, nk] \quad \forall k \in$ N.

Lúc đó $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{x_n\}$. Lưu ý $n_k \in J_k$ với mọi $k \in$ N.