Nguyễn Thành Long

Khoa Toán-tin học,
Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh

GIẢI TÍCH 4

TP. Hồ Chí Minh 2012

Mục lục

Chương 1

Phương trình vi phân cấp 1

1.1 Các ví dụ mở đầu

Một hệ thức có dạng
$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{1.1}$$
hoặc giải ra $y'(x)$ từ (1.1)
$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{1.2}$$
liên hệ với biến độc lập x, giá trị $y(x)$ của hàm y tại x, giá trị $y'(x)$ của đạo hàm cấp 1 của hàm y tại x, được gọi là một *phương trình vi phân cấp* 1.

Có thể biểu thức (1.1) không xuất hiện x, hoặc $y(x)$, hoặc cả hai x và $y(x)$, nhưng bắt buộc phải xuất hiện $y'(x)$ thì (1.1) mới gọi là một phương trình vi phân. Để cho gọn cách viết, người ta thường viết phương trình (1.1) (tương ứng (1.2)) theo các biến độc lập của nó như sau
$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0, \text{ (tương ứng } y' = f(x, y)), \tag{1.3}$$
tức là bỏ đi biến độc lập x đi theo sau hàm y và các đạo hàm y' của nó.

Nghiệm của phương trình vi phân (1.1) (tương ứng (1.2)) là một hàm $y = y(x)$ xác định và có đạo hàm trong một khoảng I và thoả phương trình vi phân (1.1) (tương ứng (1.2)) tại mọi $x \in I$. Ta sẽ làm chính xác lại các định nghĩa về các loại nghiệm phương trình vi phân ở trong phần sau. *Giải* phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Phần này đề cập đến một vài ví dụ mở đầu và giải sơ lược các phương trình vi phần cấp 1 sau đây.

1/ $y' = 4x$,
2/ $y' = 2xy$,
3/ $y^4 y' = x - 1$,
4/ $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$.

Giải 1/: Tích phân hai vế ta thu được nghiệm y có dạng như sau
$$y = \int 4x dx = 2x^2 + C,$$
nghiệm này phụ thuộc vào một hằng số C, ta gọi nghiệm này là *nghiệm tổng quát* của 1/. Ứng với hằng số C khác nhau, ta có các nghiệm khác nhau của 1/, chẳng hạn như $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 + 2$, là các nghiệm của 1/. Thông thường để chỉ ra một nghiệm (tìm hằng số C) trong số đó ta hay đặt thêm một điều kiện kèm theo, thường là điều kiện đầu, ví dụ như tìm một nghiệm của 1/ thỏa thêm điều kiện $y(1) = 3$. Vậy hàm $y = 2x^2 + C$ thỏa điều kiện $y(1) = 3$ khi và chỉ khi $3 = 2 + C$, hay $C = 1$. Vậy hàm $y = 2x^2 + 1$ là nghiệm của 1/ thoả điều kiện $y(1) = 3$.■

Giải 2/: Nhân hai vế của phương trình 2/ cho e^{-x^2}, sau đó chuyển qua vế trái.
$$e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = 0.$$

Khi đó vế trái chính là đạo hàm của tích hai hàm số
$$\left(e^{-x^2} y\right)' = 0.$$

Tích phân hai vế ta thu được nghiệm tổng quát của 2/ như sau

$$y = Ce^{x^2},$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. ■

Giải 3/: Tích phân hai vế ta thu được nghiệm y có dạng như sau

$$\int y^4 y' dx = \int (x-1)dx + C,$$

hay

$$\frac{y^5}{5} = \frac{(x-1)^2}{2} + C,$$

hay

$$y = \left(\frac{5(x-1)^2}{2} + 5C \right)^{1/5},$$

trong đó C là một hằng số tùy ý, do đó công thức sau cùng này là nghiệm tổng quát của 3/. ■

Giải 4/: Ta đặt $u = \frac{y}{x}$, khi đó

$$y = xu, \; y' = u + xu'.$$

Phương trình 4/ trở thành

$$u + xu' = u^2 + u + 1,$$

hay

$$xu' = u^2 + 1.$$

Chia hai vế cho $x(u^2+1)$, ta được

$$\frac{u'}{u^2+1} = \frac{1}{x}.$$

Tích phân hai vế ta thu được (chú ý $u'dx = du$)

$$\int \frac{1}{u^2+1} du = \int \frac{1}{x} dx + C,$$

hay

$$arctgu = \ln|x| + C.$$

Giả sử $\frac{-\pi}{2} < \ln|x| + C < \frac{\pi}{2}$, ta có

$$\frac{y}{x} = u = tg(\ln|x| + C),$$

hay

$$y = xtg(\ln|x| + C), \quad e^{-C-\frac{\pi}{2}} < |x| < e^{-C+\frac{\pi}{2}}.$$

Đây là nghiệm tổng quát của 4/. ■

1.2 Các khái niệm chung

Một hệ thức có dạng

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \; x \in D \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

liên hệ với:

– biến độc lập x,
– giá trị $y(x)$ của hàm y tại x,
– giá trị $y'(x)$ của đạo hàm cấp 1 của hàm y tại x,
– giá trị $y''(x)$ của đạo hàm cấp 2 của hàm y tại x,
...

– giá trị $y^{(n)}(x)$ của đạo hàm cấp n của hàm y tại x,
được gọi là một *phương trình vi phân cấp n*.

$\mathcal{F}$ là hàm theo $n+2$ biến độc lập cho trước, hàm số $y = y(x)$ là hàm chưa biết cần tìm (ẩn hàm), n là cấp của phương trình vi phân (1.1), tức là cấp cao nhất của đạo hàm xuất hiện trong (1.1). Như vậy khi gọi là (1.1) là phương trình vi phân cấp n, thì nhất thiết phải chứa số hạng $y^{(n)}(x)$, mặc dù các số hạng còn lại trong (1.1) có thể có hoặc không có mặt. Để cho gọn cách viết, người ta thường viết phương trình (1.1) theo các biến độc lập của nó như sau

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \ x \in D \subset \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

tức là bỏ đi biến độc lập x đi theo sau hàm y và các đạo hàm của nó.

Một *nghiệm* của phương trình vi phân (1.1) là một hàm số $y = y(x)$ xác định trên một khoảng thực $I \subset D$, (I thông thường phụ thuộc vào hàm y), có đạo hàm đến cấp n và thoả

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \ \text{với mọi } x \in I. \tag{1.3}$$

Ta cũng chú ý rằng đẳng thức (1.3) chứa đựng các điều kiện sau:

(i) Hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm đến cấp n trong I,

(ii) $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in$ miền xác định của hàm $\mathcal{F}$, với mọi $x \in I$.

– Đồ thị của nghiệm $y = y(x)$ còn được gọi là *đường cong tích phân* hay là *đường tích phân* của phương trình vi phân.

Giải phương trình vi phân (1.1) là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Giả sử từ (1.2) ta giải được $y^{(n)}$ theo $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, ta thu được

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \ \forall (x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1.4}$$

Khi đó ta có phương trình vi phân cấp n có dạng như sau

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \ x \in D \subset \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

hay viết gọn hơn

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \ x \in D \subset \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Ta cũng định nghĩa nghiệm của phương trình vi phân (1.5) là một hàm số $y = y(x)$ xác định trên một khoảng $I \subset D$ và thoả

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \ \text{với mọi } x \in I. \tag{1.7}$$

Ta cũng chú ý rằng (1.7) chứa đựng các điều kiện sau:

– Hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm đến cấp n trong I,

– Với mọi $x \in I$, $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in \Omega =$ miền xác định của hàm f.

Cụ thể với phương trình vi phân cấp $n = 1$, ta cũng viết lại (1.2), (1.6) lần lượt, như sau

$$\mathcal{F}(x, y, y') = 0, \ x \in D \subset \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

$$y' = f(x, y), \ x \in D \subset \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Các nghiệm của các phương trình vi phân (1.8), (1.9), tương ứng, cũng định nghĩa như trên với $n = 1$.

Chú thích. Trong giải tích hàm số nhiều biến, nhờ định lý hàm ẩn, ta có thể đưa phương trình vi phân dạng (1.8) về dạng (1.9). Do đó ta chỉ cần xét phương trình vi phân cấp 1 thuộc dạng (1.9).

1.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Trong phần này ta xét phương trình vi phân cấp 1 như sau

$$y' = f(x, y), \tag{1.10}$$

trong đó $f : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm cho trước xác định trong tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Cho $(x_0, y_0) \in \Omega$. Bài toán tìm một nghiệm $y = y(x)$ của (1.10) thoả mãn điều kiện

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.11}$$

được gọi là *bài toán Cauchy* cho phương trình (1.10). Điều kiện (1.11) được gọi là *điều kiện đầu* hay *điều kiện Cauchy.* Do Ω tập mở, nên nó chứa hình chữ nhật

$$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]. \tag{1.12}$$

Do đó ta chỉ cần xét bài bài toán Cauchy cho phương trình (1.10) với f xác định liên tục trên D. Ta sẽ tìm một hàm y xác định trên một đoạn I chứa x_0, (dĩ nhiên $I \subset [x_0 - a, x_0 + a]$) sao cho

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in I, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Trước hết ta có

Bổ đề 3.1. *y là nghiệm của bài toán Cauchy* (1.13) *khi và chỉ khi y là nghiệm của phương trình tích phân sau*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad \forall x \in I. \tag{1.14}$$

Chứng minh Bổ đề 3.1. Chứng minh như bài tập. ■

Định lý 3.2. (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm)**.** *Giả sử rằng f liên tục trong miền hình chữ nhật*

$$D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

và thoả điều kiện Lipschitz theo biến y trong D, tức là, tồn tại hằng số $L \geq 0$ sao cho

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall (x, y_1),\ (x, y_2) \in D. \tag{1.15}$$

Khi đó, tồn tại $\delta > 0$, sao cho bài toán Cauchy (1.13) *có nghiệm duy nhất trên đoạn $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.*

Chứng minh Định lý 3.2. (*Phần này có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên, mà đọc thẳng vào mục 1.5*)

Trước hết, do f liên tục trên tập compact D, nên tồn tại số thực M sao cho $|f(x, y)| \leq M$, với mọi $(x, y) \in D$. Đặt

$$\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}. \tag{1.16}$$

Theo Bổ đề 3.1, thì Bài toán Cauchy (1.13) tương đương với một phương trình tích phân (1.14).
Phần chứng minh Định lý 3.2 được chia làm nhiều bước.
Bước 1. Ta xét dãy hàm $\{y_n\}$ cho bởi công thức qui nạp

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0, \ \forall x \in I, \ \text{(hàm hằng)}, \\ y_1(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt, \ \forall x \in I, \\ y_2(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt, \ \forall x \in I, \\ \quad\vdots \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \ n \geq 1, \ \forall x \in I. \end{cases} \tag{1.17}$$

Bước 2. Ta sẽ chứng minh bổ đề sau.
Bổ đề 3.3. *Dãy hàm* $\{y_n\}$ *cho bởi* (1.17) *có tính chất*

i) $|y_n(x) - y_0| \le b,\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

ii) $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!} \le M\frac{L^{n-1}\delta^n}{n!},\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

iii) *Dãy hàm* $\{y_n\}$ *hội tụ đều về một hàm* y *trên* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

iv) *Đánh giá sai số* (1.18)

$$|y_n(x) - y(x)| \le \frac{M}{L}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!},\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

v) y *là nghiệm của phương trình tích phân* (1.14).

Chứng minh Bổ đề 3.3. (*Phần này có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên, mà đọc thẳng vào mục 1.5*)
Chứng minh i).
Với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ta có

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))\ |\,dt\right| \\ &\le M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| = M\,|x - x_0| \le M\delta \le b. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Chứng minh ii).
Ta chứng minh bằng qui nạp theo n.
Với $n = 1$, bất đẳng thức này đúng vì

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt\right| \le M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| = M\,|x - x_0| \le M\delta. \tag{1.20}$$

Vậy i) được chứng minh.
Giả sử bất đẳng thức (1.18) (ii) đúng với $n = k$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = k + 1$ như sau

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))]\,dt\right| \qquad (1.21)\\ &\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))\ |\,dt\right| \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x} |y_k(t)) - y_{k-1}(t)|\,dt\right| \text{ (Do tính Lipschitz của } f) \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x} ML^{k-1}\frac{|t - x_0|^k}{k!}dt\right| \text{ (Do giả thiết bằng qui nạp)} \\ &= \frac{ML^k}{k!}\left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^k\,dt\right| \\ &= \frac{ML^k}{k!}\frac{|x - x_0|^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{ML^k\,|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{ML^k\delta^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đúng (1.18)(ii) đúng với $n = k + 1$. Do đó (1.18) (ii) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$. Vậy ii) được chứng minh.
Chứng minh iii).
Ta có

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] + y_0(x). \tag{1.22}$$

Ta xét sự hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{k=1}^{\infty}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]$

Theo (1.18)(ii) ta có

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)| \leq \frac{M}{L}\frac{(L\delta)^k}{k!},\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]. \tag{1.23}$$

Mặt khác, chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(L\delta)^k}{k!}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert, nên đánh giá (1.23) dẫn đến chuỗi hàm $\sum_{k=1}^{\infty}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]$ hội tụ đều trên $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ và có tổng là một hàm liên tục $g(x)$ trên $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, vì các hàm $y_k(x)$ cũng liên tục trên $[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

Do đó từ (1.22) chứng tỏ rằng $y_n(x)$ hội tụ đều về một hàm liên tục y trên $[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Do đó

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty}y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]+y_0(x) \qquad (1.24)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]+y_0(x) = g(x)+y_0(x). \end{aligned}$$

Vậy iii) được chứng minh.

Chứng minh iv).

Ta cũng có

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=1}^{n}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]+y_0(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}[y_k(x)-y_{k-1}(x)] \qquad (1.25)\\ &= y_n(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}[y_k(x)-y_{k-1}(x)]. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |y(x)-y_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k(x)-y_{k-1}(x)| \qquad (1.26)\\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(L\delta)^k}{k!} = \frac{M}{L}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Vậy iv) được chứng minh.

Chứng minh v).

Ta có

$$y_n(x) = y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt,\ n\geq 1,\ \forall x\in I. \tag{1.27}$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt \to \int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt,\ \forall x\in I. \tag{1.28}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))dt-\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y(t))\right|dt\right| \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(t)-y(t)\right|dt\right| \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x}\frac{M}{L}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}dt\right| \\ &\le M\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}\left|x-x_0\right| \le M\delta\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Do chuỗi số $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}=e^{L\delta}$ hội tụ, nên $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}\to 0$, khi $n\to\infty$. Từ bất đẳng thức đúng (1.29), ta suy ra (1.28) đúng. Cũng từ (1.27) và (1.28), ta suy ra rằng

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt,\ \forall x\in I. \tag{1.30}$$

Vậy y là nghiệm của phương trình tích phân (1.14) và v) được chứng minh.
Bổ đề 3.3 được chứng minh. ■

Bước 3. Tính duy nhất nghiệm trên đoạn $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$.
Ta sẽ chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.4. *Giả sử hàm z liên tục, không âm trên $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ thoả bất đẳng thức*

$$z(x)\le z_0+z_1\left|\int_{x_0}^{x} z(t)dt\right|,\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta], \tag{1.31}$$

trong đó $z_0\ge 0$, $z_1>0$ *là các hằng số. Khi đó*

$$z(x)\le z_0e^{z_1|x-x_0|},\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]. \tag{1.32}$$

Chứng minh Bổ đề 3.4. (*Phần này có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên, mà đọc thẳng vào mục 1.5*).
– Xét trường hợp $x\in[x_0,x_0+\delta]$. Khi đó (1.31) viết lại

$$z(x)\le z_0+z_1\int_{x_0}^{x} z(t)dt,\ \forall x\in[x_0,x_0+\delta]. \tag{1.33}$$

Nhân hai vế của (1.33) cho e^{-z_1x}, ta có

$$e^{-z_1x}z(x)-z_1e^{-z_1x}\int_{x_0}^{x} z(t)dt\le z_0e^{-z_1x},\ \forall x\in[x_0,x_0+\delta], \tag{1.34}$$

hay

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-z_1x}\int_{x_0}^{x} z(t)dt\right]\le z_0e^{-z_1x},\ \forall x\in[x_0,x_0+\delta]. \tag{1.35}$$

Cố định $x\in[x_0,x_0+\delta]$, tích phân (1.35) trên $[x_0,x]$, ta thu được

$$e^{-z_1x}\int_{x_0}^{x} z(t)dt\le z_0\int_{x_0}^{x} e^{-z_1t}dt=\frac{z_0}{z_1}\left(e^{-z_1x_0}-e^{-z_1x}\right). \tag{1.36}$$

Ta suy từ (1.33) và (1.36) rằng

$$\begin{aligned}z(x) &\le z_0+z_1\int_{x_0}^{x} z(t)dt\le z_0+z_1e^{z_1x}\left[\frac{z_0}{z_1}\left(e^{-z_1x_0}-e^{-z_1x}\right)\right] \\ &= z_0e^{z_1(x-x_0)}=z_0e^{z_1|x-x_0|},\ \forall x\in[x_0,x_0+\delta].\end{aligned} \tag{1.37}$$

– Xét trường hợp $x \in [x_0 - \delta, x_0]$. Khi đó (1.31) viết lại

$$z(x) \leq z_0 + z_1 \int_x^{x_0} z(t)dt, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0]. \tag{1.38}$$

Nhân hai vế của (1.38) cho $e^{z_1 x}$, ta có

$$e^{z_1 x} z(x) - z_1 e^{z_1 x} \int_x^{x_0} z(t)dt \leq z_0 e^{z_1 x}, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0], \tag{1.39}$$

hay

$$\frac{d}{dx}\left[- e^{z_1 x} \int_x^{x_0} z(t)dt\right] \leq z_0 e^{z_1 x}, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0]. \tag{1.40}$$

Cố định $x \in [x_0 - \delta, x_0]$, tích phân (1.40) trên $[x, x_0]$, ta thu được

$$- e^{z_1 x} \int_x^{x_0} z(t)dt \Big|_x^{x_0} = e^{z_1 x} \int_x^{x_0} z(t)dt \leq z_0 \int_x^{x_0} e^{z_1 t}dt = \frac{z_0}{z_1}\left(e^{z_1 x_0} - e^{z_1 x}\right), \tag{1.41}$$

hay

$$\int_x^{x_0} z(t)dt \leq \frac{z_0}{z_1}\left(e^{z_1 (x_0 - x)} - 1\right). \tag{1.42}$$

Ta suy từ (1.38) và (1.42) rằng

$$\begin{aligned} z(x) &\leq z_0 + z_1 \int_x^{x_0} z(t)dt \leq z_0 + z_1 \left[\frac{z_0}{z_1}\left(e^{z_1 (x_0 - x)} - 1\right)\right] \\ &= z_0 e^{z_1 (x_0 - x)} = z_0 e^{z_1 |x - x_0|}, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0]. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Bổ đề 3.4 được chứng minh. ■

Chú thích. Từ chứng minh của Bổ đề 3.4, ta có các bổ đề sau

Bổ đề 3.4a (Bổ đề Gronwall). *Giả sử hàm z liên tục, không âm trên $[x_0, x_0 + \delta]$ thoả bất đẳng thức*

$$z(x) \leq z_0 + z_1 \int_{x_0}^{x} z(t)dt, \ \forall x \in [x_0, x_0 + \delta], \tag{1.31a}$$

trong đó $z_0 \geq 0$, $z_1 \geq 0$ là các hằng số. Khi đó ta có

$$z(x) \leq z_0 e^{z_1 (x - x_0)}, \ \forall x \in [x_0, x_0 + \delta]. \ ■ \tag{1.32a}$$

Bổ đề 3.4b (Bổ đề Gronwall**).** *Giả sử hàm z liên tục, không âm trên $[x_0 - \delta, x_0]$ thoả bất đẳng thức*

$$z(x) \leq z_0 + z_1 \int_x^{x_0} z(t)dt, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0], \tag{1.31b}$$

trong đó $z_0 \geq 0$, $z_1 \geq 0$ là các hằng số. Khi đó

$$z(x) \leq z_0 e^{z_1 (x_0 - x)}, \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0]. \ ■ \tag{1.32b}$$

Ta tiếp tục chứng minh tính duy nhất nghiệm trên đoạn $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Giả sử y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình tích phân (1.14). Khi đó $Z = y_1 - y_2$ thỏa phương trình

$$Z(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\right] dt, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \tag{1.44}$$

Do tính Lipschitz của hàm f theo biến thứ hai, ta suy ra từ (1.44) rằng

$$Z(x) \leq L \left|\int_{x_0}^{x} |Z(t)|\, dt\right|, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Áp dụng bổ đề 3.4, với $z(x) = |Z(x)|$, $z_1 = L$, $z_0 = 0$, ta thu được $z(x) = |Z(x)| = 0$, tức là $y_1 \equiv y_2$.

Tóm lại qua 3 bước trên đây, ta đã hoàn tất chứng minh Định lý 3.2.

Nhận xét 1. Trong Định lý 3.2, nếu hàm f và $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trong miền hình chữ nhật $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Thì kết luận của Định lý 3.2 vẫn còn đúng.

Thật vậy, do $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục trên tập compact D, nên tồn tại $L = \sup\limits_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right|$.

Cho (x, y_1), $(x, y_2) \in D$. Dùng định lý Lagrang cho hàm $y \longmapsto f(x, y)$, ta có $\theta \in (0, 1)$ sao cho

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2), \tag{1.45}$$

với $\xi = \theta y_1 + (1 - \theta) y_2$. Do đó

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right| |y_1 - y_2| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Vậy f thoả điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai.

Nhận xét 2. Với các giả thiết của Định lý 3.2, khi đó, bài toán Cauchy (1.13) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, với $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Hơn nữa, nếu bài toán Cauchy (1.13) có nghiệm trên $[x_0 - a, x_0 + a]$, thì nghiệm này là duy nhất. Thật vậy, ta chỉ cần áp dụng bổ đề 3.4, với $\delta = a$, $z(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$, $z_1 = L$, $z_0 = 0$, ta thu được $z(x) = |y_1(x) - y_2(x)| = 0$, tức là $y_1 \equiv y_2$.

Tổng quát ta có

Định lý 3.5. *Nếu hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$ liên tục trong tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, thì với mọi điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$, bài toán Cauchy (1.13) có nghiệm xác định trong một khoảng chứa x_0.*

Ngoài ra nếu, đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục và bị chặn trong Ω thì nghiệm đó là duy nhất.

Định lý trên thường được gọi là định lý Peano-Cauchy-Picard. Ta công nhận định lý này. ∎

Ví dụ 1. Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + \cos^2 y, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

Ta sẽ chứng minh rằng bài toán (1.46) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, và thỏa

$$|y(x)| \leq \frac{13}{24}, \ \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Chứng minh. Đối chiếu bài toán (1.46) với bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ta chọn $f(x, y) = x^2 + \cos^2 y$, $x_0 = y_0 = 0$, $a = \frac{1}{2}$ và $b = 1$. Ta xét $D = [-a, a] \times [-b, b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$. Dễ thấy rằng f và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - \sin 2y$ liên tục trên D và có

$$|f(x, y)| \leq x^2 + \cos^2 y \leq \frac{1}{2^2} + 1 = \frac{5}{4} \equiv M, \ \forall (x, y) \in D.$$

Đặt $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\} = \frac{1}{2}$. Theo định lý 3.2, bài toán (1.46) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, và thỏa

$$|y(x)| \leq b = 1, \ \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Ta cần đánh giá sắc hơn bất đẳng thức nầy.

Ta chú ý rằng $y' = x^2 + \cos^2 y > 0$, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, do đó nghiệm của bài toán (1.46) là hàm $y = y(x)$ tăng trên trên đoạn $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$. Do đó

$$\begin{cases} 0 = y(0) < y(x) < y(\frac{1}{2}) \le 1, \ \forall x \in (0, \frac{1}{2}], \\ -1 \le y(-\frac{1}{2}) < y(t) < 0 = y(0), \ \forall t \in [-\frac{1}{2}, 0). \end{cases}$$

Mặt khác nghiệm của bài toán (1.46) là hàm $y = y(x)$ còn nghiệm đúng phương trình tích phân

$$y(x) = \int_0^x \left(t^2 + \cos^2 y(t)\right) dt = \frac{x^3}{3} + \int_0^x \cos^2 y(t) dt, \ \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Do đó

$$y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{24} + \int_0^{1/2} \cos^2 y(t) dt \le \frac{1}{24} + \int_0^{1/2} \cos^2 y(0) dt \le \frac{1}{24} + \frac{1}{2} = \frac{13}{24}.$$

Tương tự

$$y(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{24} + \int_0^{-1/2} \cos^2 y(t) dt = \frac{-1}{24} - \int_{-1/2}^0 \cos^2 y(t) dt \ge -\frac{1}{24} - \frac{1}{2} = \frac{-13}{24}.$$

Vậy, tổ hợp các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$|y(x)| \le \frac{13}{24}, \ \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \ \blacksquare$$

Ví dụ 2. Xét bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 + \cos^2 y, \ x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.47}$$

Ta sẽ chứng minh rằng bài toán (1.47) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, bài toán (1.47) tương ứng với bài toán Cauchy, với $f(x, y) = x^2 + \cos^2 y$, $x_0 = y_0 = 0$. Cho trước $a > 0$ tùy ý. Chọn $D = [-a, a] \times [-b, b]$, với $b = \frac{a(a^2+1)}{a^2+1}$. Dễ thấy rằng f và $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - \sin 2y$ liên tục trên D và có

$$|f(x, y)| \le x^2 + \cos^2 y \le a^2 + 1 \equiv M, \ \forall (x, y) \in D.$$

Đặt $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{a, \frac{a(a^2+1)}{a^2+1}\} = a$. Theo định lý 3.2, bài toán (1.47) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên đoạn $-a \le x \le a$. Do $a > 0$ tuỳ ý nên ta suy ra bài toán (1.47) có nghiệm duy nhất $y = y(x)$ trên $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

1.4 Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị, tích phân tổng quát.

(*Phần này có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên, mà đọc thẳng vào mục 1.5*)

Giả sử rằng trong miền Ω, bài toán Cauchy cho phương trình (1.8) hoặc (1.9) có nghiệm có nghiệm duy nhất.

Thông thường nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc vào một hằng số thực C và có dạng

$$y = y(x, C).$$

Định nghĩa. Một họ hàm số $y = y(x, C)$ phụ thuộc vào một tham số thực C, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân (1.8) hoặc (1.9) trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nếu với mọi điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$, tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho $y = y(x, C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1.8) hoặc (1.9) thỏa điều kiện đầu $y(x_0, C_0) = y_0$, nghĩa là: tồn tại duy nhất một hằng số C_0 sao cho

i/ $y = y(x, C_0)$ là nghiệm của phương trình vi phân (1.8) hoặc (1.9) trong khoảng nào đó chứa x_0, ii/ $y(x_0, C_0) = y_0$.

Định nghĩa. Ta gọi *nghiệm riêng* của phương trình vi phân (1.8) hoặc (1.9) là nghiệm $y = y(x, C_0)$ mà ta nhận được từ nghiệm tổng quát $y = y(x, C)$ bằng cách cho hằng số tùy ý C một giá trị cụ thể C_0.

Ví dụ 1. Xét bài toán Cauchy

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 2. \tag{1.48}$$

Từ $y' = \frac{y}{x}$, ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ hay $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.
Lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \ (C_1 > 0).$$

Suy ra

$$y = Cx, \ x \neq 0, \ (C = \pm C_1 \neq 0),$$

Ngoài ra $y = 0$ là một nghiệm riêng của phương trình $y' = \frac{y}{x}$. Nghiệm nầy tương ứng với $C = 0$ trong họ hàm

$$y = Cx, \ x \neq 0, \ (C \in \mathbb{R}).$$

Đó cũng là nghiệm tổng quát của phương trình $y' = \frac{y}{x}$.
Với $x = 1$, $y = 2$ thì $2 = C.1$. Vậy $C = 2$.
Suy ra nghiệm của bài toán (1.48) là $y = 2x$, $x \neq 0$.
Vậy, $y = 2x$, $(x \neq 0)$ là nghiệm riêng của phương trình $y' = \frac{y}{x}$, thỏa điều kiện đầu $y(1) = 2$, $(C = 2)$.
■

Tất nhiên mọi nghiệm của bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng.
Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$x\left(1 + x^2\right) y' - y = 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình vi phân ở trên lần lượt trong các miền $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ và xác định giá trị của nghiệm tại $x = 0$ sao cho để nghiệm nhận được là một hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Ta ký hiệu $I = (-\infty, 0)$ hoặc $I = (0, \infty)$. Với mọi $x \in I$, chia hai vế của phương trình vi phân ở trên cho $x\left(1 + x^2\right)$, ta có

$$y' - \frac{1}{x\,(1 + x^2)} y = 0, \quad \forall x \in I.$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (xem mục 1.5.3 dưới đây). Trước hết ta tìm một nguyên hàm của

$$\frac{-1}{x\,(1 + x^2)} = \frac{-1}{x} + \frac{x}{1 + x^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{x\,(1 + x^2)} dx &= \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{x}{1 + x^2}\right] dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C = \ln\frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} + C.\end{aligned}$$

Chọn

$$P(x) = \ln\frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}.$$

Vậy

$$e^{P(x)} = e^{\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \ x > 0, \\ \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}, \ x < 0. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình vi phân cho thừa số tích phân $\mu(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, ta được

$$\mu(x)y' - \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mu(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Ta cũng chú ý rằng

$$\begin{aligned} \mu'(x) &= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} \times \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mu(x), \ \forall x \in I. \end{aligned}$$

Do đó

$$(\mu(x)y)' = 0, \quad \forall x \in I.$$

Vậy

$$\mu(x)y = C = \text{hằng số tùy thuộc miền } I, \quad \forall x \in I.$$

Suy ra

$$y = \frac{C}{\mu(x)} = \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in I.$$

Vậy, các hàm số y_1, y_2 lần lượt được xác định dưới đây

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{C_1 x}{\sqrt{1+x^2}}, \ \forall x \in (-\infty, 0), \\ y_2(x) = \frac{C_2 x}{\sqrt{1+x^2}}, \ \forall x \in (0, \infty), \end{cases}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, là nghiệm của phương trình vi phân trên các miền tương ứng với $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$.

Ta xây dựng hàm số $y = y(x)$ xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$, như sau

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = \frac{C_1 x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (-\infty, 0), \\ y(0), & x = 0, \\ y_2(x) = \frac{C_2 x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0_-} y(x) &= \lim_{x\to 0_-} y_1(x) = 0, \\ \lim_{x\to 0_+} y(x) &= \lim_{x\to 0_+} y_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Do đó, chọn $y(0) = 0$, thì hàm y liên tục tại $x = 0$.

Ngoài ra,

$$\begin{cases} y'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{y_2(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{C_2}{\sqrt{1+x^2}} = C_2, \\ y'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{y_1(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}} = C_1. \end{cases}$$

Vậy đạo hàm $y'(0)$ tồn tại khi và chỉ khi $y'_+(0) = y'_-(0)$, tức là $C_1 = C_2$.

Vậy

$$y'(0) = C_1 = C_2 = C.$$

Vì y_1, y_2 lần lượt là nghiệm của phương trình vi phân trên các miền $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$, nên ta có hàm y thỏa phương trình vi phân tại mọi $x \neq 0$.

Tại $x = 0$, ta thay các giá trị $y(0) = 0$, $y'(0) = C$, vào phương trình vi phân

$$x\left(1+x^2\right)y' - y \,\big|_{x=0} = 0(1+0)C - 0 = 0.$$

Vậy phương trình vi phân cũng thỏa với $x = 0$.

Cuối cùng, nghiệm của phương trình vi phân trên $\mathbb{R}$ là

$$y(x) = \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. ■

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân

$$x\left(1+x^2\right)y' + \left(1-x^2\right)y = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Tương tự với ví dụ trên, ta sẽ tìm nghiệm lần lượt trong các miền $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ và xác định giá trị của nghiệm tại $x = 0$ sao cho để nghiệm nhận được là một hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Ta cũng ký hiệu $I = (-\infty, 0)$ hoặc $I = (0, \infty)$. Với mọi $x \in I$, chia hai vế của phương trình vi phân ở trên cho $x\left(1+x^2\right)$, ta có

$$y' + \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in I.$$

Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (xem mục 1.5.3 dưới đây). Trước hết ta tìm một nguyên hàm của

$$\frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1+x^2-2x^2}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}\right]dx \\ &= \ln|x| - \ln(1+x^2) + C = \ln\frac{|x|}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

Chọn

$$P(x) = \ln\frac{|x|}{1+x^2}.$$

Vậy

$$e^{P(x)} = e^{\ln\frac{|x|}{1+x^2}} = \frac{|x|}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2}, \ x > 0, \\ \frac{-x}{1+x^2}, \ x < 0. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình vi phân cho thừa số tích phân $\mu(x) = \frac{x}{1+x^2}$, ta được

$$\mu(x)y' + \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\mu(x)y = \frac{1}{1+x^2}\mu(x) = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}, \ x \in I.$$

Ta cũng chú ý rằng

$$\mu'(x) = \left(e^{P(x)}\right)' = P'(x)e^{P(x)} = \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\mu(x), \ \forall x \in I.$$

Do đó, ta viết lại

$$(\mu(x)y)' = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad x \in I.$$

Lấy tích phân, ta được

$$\mu(x)y = \int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx + C = \frac{-1}{2\left(1+x^2\right)} + C, \ x \in I,$$

trong đó C là hằng số tùy thuộc miền $I = (-\infty, 0)$ hoặc $I = (0, \infty)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu(x)}\left(\frac{-1}{2\left(1+x^2\right)}+C\right) = \frac{-1}{2x}+C\left(\frac{1+x^2}{x}\right) \\ &= Cx+\frac{2C-1}{2x},\ x \in I, \end{aligned}$$

với C là hằng số tùy thuộc miền I.

Vậy, các hàm số y_1, y_2 lần lượt được xác định dưới đây

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1x + \frac{2C_1-1}{2x},\ \forall x < 0, \\ y_2(x) = C_2x + \frac{2C_2-1}{2x},\ \forall x > 0, \end{cases}$$

với C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, là nghiệm của phương trình vi phân trên các miền tương ứng với $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$.

Ta xây dựng hàm số $y = y(x)$ xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$, như sau

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = C_1x + \frac{2C_1-1}{2x}, & x < 0, \\ y(0), & x = 0, \\ y_2(x) = C_2x + \frac{2C_2-1}{2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x\to 0_-} y(x) = \lim_{x\to 0_-} y_1(x) = \lim_{x\to 0_-}\left(C_1x + \frac{2C_1-1}{2x}\right).$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0_-} y_1(x)$ tồn tại (hữu hạn) khi và chỉ khi $2C_1 - 1 = 0$ hay $C_1 = \frac{1}{2}$.

Tương tự, $\lim\limits_{x\to 0_+} y_2(x)$ tồn tại (hữu hạn) khi và chỉ khi $C_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy muốn y liên tục tại $x = 0$ thì $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ và ta chọn giá trị $y(0) = 0$. Khi đó hàm $y(x)$ có công thức

$$y(x) = \frac{1}{2}x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa, hàm $y(x)$ như vậy có đạo hàm tại $x = 0$ và $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Mặt khác, ta thay $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ vào phương trình vi phân

$$x\left(1+x^2\right)y' + \left(1-x^2\right)y = x,$$

thì cũng được nghiệm đúng.

Cuối cùng, nghiệm của phương trình vi phân trên $\mathbb{R}$ là

$$y(x) = \frac{1}{2}x,\quad \forall x \in \mathbb{R}. \ \blacksquare$$

Định nghĩa nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân.

Xét bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.49}$$

trong đó $f : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm cho trước xác định trong tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

– Điểm $(x_0, y_0) \in \Omega$ gọi là *điểm kỳ dị* của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$, nếu bài toán Cauchy (1.49) có nhiều hơn một nghiệm.

– Hàm số $y = \varphi(x)$ gọi là *nghiệm kỳ dị* của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$, nếu:

(i) Hàm số $y = \varphi(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$,

(ii) mọi điểm (x_0, y_0) thuộc đường cong $y = \varphi(x)$ (tức là thỏa $y_0 = \varphi(x_0)$) đều là *điểm kỳ dị* của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$.

Chú thích.

– Đồ thị của một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$, còn được gọi là *đường cong tích phân* của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$.

– Tại điểm kỳ dị (x_0, y_0) của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ có ít nhất hai đường cong tích phân đi qua và có cùng tiếp tuyến với hệ số góc là $f(x_0, y_0)$.

Ví dụ 4. Xét phương trình vi phân $y' = y^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Giải.

Ta sẽ kiểm tra lại rằng hàm hằng $y = 0$ là nghiệm kỳ dị của phương trình này.

Trước hết, ta dễ thấy rằng $y = 0$ là một nghiệm của phương trình này.

Giả sử $y \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho $y^{2/3}$ và sau đó tích phân, ta được

$$\begin{aligned} \int y^{-2/3} y' dx &= \int 1 dx, \\ 3y^{1/3} &= x + C, \\ y &= \frac{1}{27}(x + C)^3, \end{aligned}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý.

Mặt khác, từ công thức $y = \frac{1}{27}(x + C)^3$, ta có

$$y'(x) = \frac{1}{9}(x + C)^2 = \left[\frac{1}{27}(x + C)^3\right]^{2/3} = y^{2/3}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $y = \frac{1}{27}(x + C)^3$ là một nghiệm của phương trình $y' = y^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi điểm $(x_0, 0)$ nằm trên đường $y = 0$ đều là điểm kỳ dị của phương trình $y' = y^{2/3}$.

Thật vậy, đường cong $y = \frac{1}{27}(x + C)^3$ đi qua điểm $(x_0, 0)$ khi và chỉ khi

$$0 = \frac{1}{27}(x_0 + C)^3 \Longleftrightarrow C = -x_0.$$

Vậy, bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^{2/3}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x_0) = 0. \end{cases}$$

có hai nghiệm là $y = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$ và hàm hằng $y = 0$.

Do đó điểm $(x_0, 0)$ là điểm kỳ dị và như vậy $y = 0$ là nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = y^{2/3}$. ■

Ví dụ 5. Chứng minh rằng $y = \pm 1$ là hai nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Giải.

Giả sử $y \neq \pm 1$, chia hai vế cho $\sqrt{1 - y^2}$, ta được $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$.

Lấy tích phân hai vế ta được $\arcsin y = x + C$. Suy ra $y = \sin(x + C)$, C là hằng số tùy ý sao cho $\frac{-\pi}{2} \leq x + C \leq \frac{\pi}{2}$.

Ta sẽ kiểm tra lại rằng họ hàm

$$y = y(x, C) = \sin(x + C), \quad -C - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -C + \frac{\pi}{2}.$$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Thật vậy, cho $(x_0, y_0) \in \Omega$, điều kiện $y(x_0, C) = y_0$ được thoả khi và chỉ khi

$$y_0 = y(x_0, C) = \sin(x_0 + C), \quad -C - \frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq -C + \frac{\pi}{2},$$

mà phương trình nầy xác định duy nhất một tham số $C = -x_0 + \arcsin y_0$.

Vậy họ hàm $y = y(x, C)$ trên đây là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$ trên miền $\Omega = \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Hiển nhiên, ta dễ thấy rằng $y = 1$, $y = -1$ là hai nghiệm của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$. Ta sẽ kiểm tra lại rằng hai hàm hằng $y = \pm 1$ là hai nghiệm kỳ dị của phương trình này.

Ta chỉ cần kiểm tra cho hàm $y = 1$, còn với hàm còn lại $y = -1$ thì tương tự.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi điểm $(x_0, 1)$ nằm trên đường $y = 1$ đều là điểm kỳ dị của phương trình $y' = \sqrt{1-y^2}$. Thật vậy, đường cong $y = \sin(x + C)$ đi qua điểm $(x_0, 1)$ khi và chỉ khi

$$1 = \sin(x_0 + C) \Longleftrightarrow C = -x_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Vậy, bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x_0) = 1. \end{cases}$$

có hai nghiệm là $y = \cos(x - x_0)$ và hàm hằng $y = 1$.

Do đó điểm $(x_0, 1)$ là điểm kỳ dị và như vậy $y = 1$ là nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$. ■

Ví dụ 6. Chứng minh rằng bài toán Cauchy dưới đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} y' = 3xy^{1/3}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Giải.

Phương trình thuộc dạng phương trình vi phân Bernuoulli với $\alpha = \frac{1}{3}$ (xem mục 1.5.4 dưới đây).

Nhận xét rằng phương trình nhận hàm hằng $y = 0$ là một nghiệm riêng.

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế cho $y^{1/3}$, ta được

$$y^{-1/3}y' = 3x.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$y^{2/3} = x^2 + C,$$

hay

$$y = \pm \left(x^2 + C\right)^{3/2},$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

Điều kiện đầu $y(0) = 0$ cho ta xác định hằng số $C = 0$.

Vậy, ta có hai nghiệm không đồng nhất bằng không được tính ra là $y = \pm\, x^3$. Như vậy, bằng phương pháp tách biến, ta đã tìm ra 3 nghiệm riêng sau đây

$$y = \pm x^3, \quad y = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng, ngoài 3 nghiệm này, bài toán Cauchy trên đây sẽ có vô số nghiệm.

Trước hết, cho một tham số thực $m > 0$, xét hàm số

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < m, \\ \left(x^2 - m^2\right)^{3/2}, & x \geq m. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy trên đây.

– Đầu tiên, điều kiện đầu $y(0) = 0$ luôn luôn thoả.

– Với $x > m$, ta có

$$y' = \frac{3}{2} 2x \left(x^2 - m^2\right)^{1/2} = 3x \left(x^2 - m^2\right)^{1/2} = 3xy^{1/3}.$$

– Với $x < m$, thì ta có cũng có $y' = 3xy^{1/3}$, bởi vì cả hai vế đều bằng không.

– Tại $x = m$, ta có
(i) $y(m) = 0$, và y liên tục tại $x = m$.
(ii) Đạo hàm bên trái

$$\lim_{x\to m_-} \frac{y(x)-y(m)}{x-m} = \lim_{x\to m_-} \frac{0-0}{x-m} = 0.$$

(iii) Đạo hàm bên phải

$$\begin{aligned}\lim_{x\to m_+} \frac{y(x)-y(m)}{x-m} &= \lim_{x\to m_+} \frac{\left(x^2-m^2\right)^{3/2}-0}{x-m} \\ &= \lim_{x\to m_+} (x-m)^{1/2}(x+m)^{3/2} = 0.\end{aligned}$$

Vậy $y'(m)$ tồn tại và $y'(m) = 0$.
Ta suy ra rằng $y' = 3xy^{1/3}$, khi $x = m$, bởi vì cả hai vế đều bằng không.
Vậy $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Ứng với mỗi $m > 0$, ta có $y(x)$ như trên là nghiệm.
Vậy bài toán Cauchy trên đây có vô số nghiệm. ■

Ví dụ 6' (*tương tự như ví dụ 6***).** Chứng minh rằng bài toán Cauchy dưới đây có vô số nghiệm

$$\begin{cases} y' = x\,|y|^{\alpha-1}\,y, \ \forall x\in\mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

với $0 < \alpha < 1$ một là hằng số cho trước.

Hướng dẫn giải ví dụ 6'. Nhận xét rằng phương trình nhận hàm hằng $y = 0$ là một nghiệm riêng.
Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế cho $|y|^{\alpha-1}\,y$, ta được

$$|y|^{-\alpha-1}\,yy' = x.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\frac{|y|^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{C}{2},$$

hay

$$y = \pm\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2+C\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

trong đó C là hằng số tùy ý. Điều kiện đầu $y(0) = 0$ cho ta xác định hằng số $C = 0$.

Vậy, ta có hai nghiệm không đồng nhất bằng không được tính ra là $y = \pm\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}|x|^{\frac{2}{1-\alpha}}$. Như vậy, ta đã tìm ra 3 nghiệm riêng sau đây

$$y = \pm\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}|x|^{\frac{2}{1-\alpha}}, \quad y = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng, ngoài 3 nghiệm nầy, bài toán Cauchy trên đây sẽ có vô số nghiệm.
Trước hết, cho một tham số thực $m > 0$, xét hàm số

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < m, \\ \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2-m^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & x \geq m. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy trên đây.
– Đầu tiên, điều kiện đầu $y(0) = 0$ luôn luôn thoả (vì $0 < m$).

– Với $x > m$, ta có $y \geq 0$ và

$$\begin{aligned}
x\left|y\right|^{\alpha-1}y &= xy^{\alpha} = x\left[\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2-m^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha} = x\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(x^2-m^2\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}};\\
y' &= \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\alpha}2x\left(x^2-m^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\frac{1}{1-\alpha}2x\left(x^2-m^2\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\
&= \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}x\left(x^2-m^2\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = x\left|y\right|^{\alpha-1}y.
\end{aligned}$$

– Với $x < m$, thì ta có cũng có $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y$, bởi vì cả hai vế đều bằng không.
– Tại $x = m$, ta có
(i) $y(m) = 0$, và y liên tục tại $x = m$.
(ii) Đạo hàm bên trái

$$\lim_{x\to m_-}\frac{y(x)-y(m)}{x-m} = \lim_{x\to m_-}\frac{0-0}{x-m} = 0.$$

(iii) Đạo hàm bên phải

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to m_+}\frac{y(x)-y(m)}{x-m} &= \lim_{x\to m_+}\frac{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2-m^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-0}{x-m}\\
&= \lim_{x\to m_+}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(x-m)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x+m)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 0.
\end{aligned}$$

Vậy $y'(m)$ tồn tại và $y'(m) = 0$.
Ta suy ra rằng $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y$, đúng khi $x = m$, bởi vì cả hai vế đều bằng không.

Vậy $y(x)$ là nghiệm của bài toán Cauchy. Ứng với mỗi $m > 0$, ta có $y(x)$ như trên là nghiệm. Vậy bài toán Cauchy trên đây có vô số nghiệm. ■

Chú ý rằng $y = 0$ là nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi điểm $(x_0, 0)$ nằm trên đường $y = 0$ đều là điểm kỳ dị của phương trình $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(i) *Trường hợp* $x_0 > 0$: Ta xét hàm

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0,\\ \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2-x_0^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & x \geq x_0.\end{cases}$$

Theo như trên với $m = x_0$, hàm $y_1 = y_1(x)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \forall x \in \mathbb{R},\\ y(x_0) = 0.\end{cases}$$

Vậy, bài toán Cauchy nầy có hai nghiệm là $y = y_1(x)$ và hàm hằng $y = 0$.
Do đó điểm $(x_0, 0)$ là điểm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
(ii) *Trường hợp* $x_0 = 0$: Ta dễ thấy rằng hàm $y = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|x\right|^{\frac{2}{1-\alpha}}$ và hàm hằng $y = 0$ là hai nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \forall x \in \mathbb{R},\\ y(0) = 0.\end{cases}$$

Do đó điểm $(0, 0)$ là điểm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = x\left|y\right|^{\alpha-1}y, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
(iii) *Trường hợp* $x_0 < 0$: Ta xét hàm

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x > x_0,\\ \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(x^2-x_0^2\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & x < x_0 = -\left|x_0\right|.\end{cases}$$

Lập luận tương tự như trên ta cũng thấy rằng hàm $y = y_2(x)$ và hàm hằng $y = 0$ là hai nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\,|y|^{\alpha-1}\,y,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x_0) = 0. \end{cases}$$

Do đó điểm $(x_0, 0)$ là điểm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = x\,|y|^{\alpha-1}\,y,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Tóm lại, cả 3 trường hợp trên, $y = 0$ là nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân $y' = x\,|y|^{\alpha-1}\,y,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
■

Ví dụ 7. Chứng minh rằng phương trình vi phân $y' - y = \ln x,\ \forall x > 0$, không có nghiệm bị chặn.
Giải.
Phương trình thuộc dạng phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 (xem mục 1.5.3 dưới đây).
Nhân hai vế của phương trình vi phân cho thừa số tích phân $\mu(x) = e^{-x}$, ta được

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = e^{-x}\ln x,\ \forall x > 0,$$

hay

$$(ye^{-x})' = e^{-x}\ln x,\ \forall x > 0.$$

Cho $x > 0$, lấy tích phân trên từ 1 đến x, ta được

$$y(x) = e^x\left[y(1)e^{-1} + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right],\ \forall x > 0.$$

Dùng chứng minh phản chứng.
Giả sử nghiệm này bị chặn, khi đó tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|y(x)| = e^x\left|y(1)e^{-1} + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right| \le M,\ \forall x > 0.$$

Do đó

$$\left|y(1)e^{-1} + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right| \le Me^{-x} \to 0,\ \text{khi } x \to +\infty.$$

Vậy, tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_1^x e^{-t}\ln t\,dt = \int_1^\infty e^{-t}\ln t\,dt = -y(1)e^{-1}$.
Do đó

$$y(x) = e^x\left[-\int_1^\infty e^{-t}\ln t\,dt + \int_1^x e^{-t}\ln t\,dt\right] = -e^x\int_x^\infty e^{-t}\ln t\,dt,\ \forall x > 0.$$

Dùng tích phân từng phần, ta được

$$\begin{aligned} y(x) &= -e^x\left[-e^{-t}\ln t\,\Big|_x^\infty + \int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\right] = -e^x\left[e^{-x}\ln x + \int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}\right] \\ &= -\ln x - e^x\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t},\ \forall x > 0. \end{aligned}$$

Mà

$$0 < e^x\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} \le \frac{1}{x}e^x\int_x^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{x}e^xe^{-x} = \frac{1}{x} \to 0,\ \text{khi } x \to +\infty.$$

Vậy

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\lim_{x\to+\infty}\ln x - \lim_{x\to+\infty} e^x\int_x^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} = -\infty.$$

Điều nầy mâu thuẫn với giả thiết nghiệm này bị chặn. ■

Chú thích. Khi giải phương trình (1.8) hoặc (1.9) có khi ta cũng không nhận được nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh $y = y(x, C)$, mà nhận được một hệ thức có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.50}$$

Khi đó nghiệm tổng quát được xác định dưới dạng hàm ẩn. Phương trình (1.48) được gọi là *tích phân tổng quát* của (1.8) hoặc (1.9). Cho $C = C_0$ ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \tag{1.51}$$

mà ta gọi là *tích phân riêng* của phương trình vi phân nói trên.

Chú thích. Như đã chú thích trên đây, dùng định lý hàm ẩn, ta có thể đưa phương trình vi phân dạng $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$ về dạng $y' = f(x, y)$. Một số khái niệm và kết quả liên quan đến hai dạng phương trình vi phân nầy cũng được phát biểu tương tự.

Đối với phương trình vi phân dạng $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$, ta có.

Định lý 3.6. **(**Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm**).** *Giả sử rằng $\mathcal{F} : \Omega \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trong một miền mở Ω của $\mathbb{R}^3$ chứa (x_0, y_0, y'_0) sao cho*

i) $\mathcal{F}\left(x_0, y_0, y'_0\right) = 0$,

ii) $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\left(x_0, y_0, y'_0\right) \neq 0$.

Khi đó tồn tại một khoảng mở J chứa x_0 sao cho bài toán dưới đây có duy nhất một nghiệm $y = y(x)$:

$$\mathcal{F}\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0, \ \forall x \in J.$$

Chú thích. Ở đẳng thức sau cùng này cũng tương đương với

$$\begin{cases} (j) \quad y = y(x) \text{ có đạo hàm trong khoảng } J, \\ (jj) \quad (x, y(x), y'(x)) \in \Omega, \ \forall x \in J, \\ (jjj) \ \mathcal{F}\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0, \ \forall x \in J, \\ (jv) \ \ y(x_0) = y_0, \\ (v) \quad y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$$

1.5 Cách giải một số dạng phương trình vi phân cấp một thường gặp.

1.5.1 Phương trình vi phân cấp 1 tách biến

Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 1 *tách biến* là phương trình có dạng

$$p(y)y' = q(x),$$

trong đó p, q là hai hàm số cho trước.

Cách giải. Nhân hai vế cho dx và chú ý rằng $y'dx = dy$, sau đó lấy tích phân bất định hai vế ta được tích phân tổng quát

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx + C,$$

hay

$$P(y) = Q(x) + C,$$

trong đó P, Q lần lượt là các nguyên hàm của p và q. Nghiệm $y = y(x)$ của phương trình vi phân được xác định từ phương trình sau cùng này.

Chú thích. Có một số dạng phương trình vi phân cấp 1 khác với dạng trên chẳng hạn như

$$\begin{aligned} &(i) \quad p(y)p_1(x)y' = q(x)q_1(y), \\ &(ii) \ \ p(y)dy = q(x)dx, \\ &(iii) \ p(y)p_1(x)dy = q(x)q_1(y)dx, \end{aligned}$$

trong đó p, q, p_1, $q_1$là hai hàm số cho trước.

Dạng (i) đưa về dạng $p(y)y' = q(x)$ bằng cách chia hai vế cho $p_1(x)q_1(y)$,

$$\frac{p(y)}{q_1(y)}y' = \frac{q(x)}{p_1(x)},$$

dĩ nhiên ta cần đặt điều kiện $p_1(x)q_1(y) \neq 0$. Sau đó xét trường hợp $p_1(x)q_1(y) = 0$ có cho ta thêm nghiệm riêng hay không.

Chú ý rằng nếu không xét trường hợp này chúng ta đã vô tình bỏ sót nghiệm.

Dạng (ii) được giải bằng cách lấy tích phân bất định hai vế, ta được tích phân tổng quát như sau

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx + C.$$

Dạng (iii) đưa về dạng (ii) bằng cách chia hai vế cho $p_1(x)q_1(y)$,

$$\frac{p(y)}{q_1(y)}dy = \frac{q(x)}{p_1(x)}dx,$$

sau đó lấy tích phân bất định hai vế, ta được tích phân tổng quát như sau

$$\int \frac{p(y)}{q_1(y)}dy = \int \frac{q(x)}{p_1(x)}dx + C,$$

dĩ nhiên ta cần đặt điều kiện $p_1(x)q_1(y) \neq 0$. Sau đó xét trường hợp $p_1(x)q_1(y) = 0$ có cho ta thêm nghiệm riêng hay không, cụ thể như sau:

- Nếu $q_1(y) = 0$ tại $y = y_*$ (tức là $q_1(y_*) = 0$) thì $y = y_*$ là nghiệm của phương trình vi phân (iii), điều nầy kiểm tra bằng cách thế trực tiếp vào (iii).

- Nếu $p_1(x) = 0$ tại $x = x_*$ (tức là $p_1(x_*) = 0$) thì $x = x_*$ là nghiệm của (iii), điều nầy kiểm tra bằng cách thế trực tiếp vào (iii).

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân $\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{y}{1+y^2}dy$.

Lấy tích phân, ta được

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{1+x^2}dx &= \int \frac{y}{1+y^2}dy + C_1,\\
\frac{1}{2}\ln(1+x^2) &= \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1,\\
\ln(\frac{1+x^2}{1+y^2}) &= 2C_1.
\end{aligned}$$

Ta được tích phân tổng quát

$$1 + x^2 = C\left(1 + y^2\right), \quad (C = e^{2C_1} > 0). \blacksquare$$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$y' = xy(y+2).$$

Ta có

$$dy = xy(y+2)dx.$$

- Nếu $y(y+2) = 0$ thì $y = 0$, $y = -2$ là nghiệm của phương trình.

- Các nghiệm khác tìm được bằng cách thì chia hai vế của phương trình cho $y(y+2)$ rồi lấy tích phân, ta được

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(y+2)} &= \int xdx + C_1,\\
\frac{1}{2}\int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2})dy - \frac{1}{2}x^2 &= C_1,\\
\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - x^2 &= \ln C = 2C_1.
\end{aligned}$$

Vậy tích phân tổng quát là
$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2},\ (C>0).\ \blacksquare$$

Chú thích. Phương trình vi phân $y' = xy(y+2)$ viết lại dưới dạng phương trình vi phân Bernuoulli như sau (chúng ta sẽ gặp lại phương trình vi phân ở phần sau)
$$y' - 2xy = xy^2.$$

– Phương trình nầy nhận $y = 0$ là một nghiệm riêng.
– Với $y \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho y^2,
$$\frac{y'}{y^2} - 2x\frac{1}{y} = x.$$

Đặt $z = \frac{-1}{y}$, ta có $z' = \frac{y'}{y^2}$, ta có
$$z' + 2xz = x.$$

Nhân hai vế của phương trình với e^{x^2}, và chú ý rằng $e^{x^2}(z' + 2xz) = (e^{x^2}z)'$, do đó ta có
$$(e^{x^2}z)' = xe^{x^2}.$$

Lấy tích phân, ta được
$$e^{x^2}z = \int xe^{x^2}dx + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C,$$
hay
$$z = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}.$$

Trở về ẩn hàm cũ $z = \frac{-1}{y}$ ta thu được nghiệm tổng quát là
$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}},$$
trong đó C là một hằng số tùy ý. Ta cũng chú ý rằng nghiệm tổng quát nầy chứa một nghiệm riêng $y = -2$, ứng với $C = 0$.

So sánh với kết quả theo cách tìm nghiệm trên đây, ngoài hai nghiệm riêng $y = 0$, $y = -2$, các nghiệm còn lại chứa trong họ nghiệm $\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2}$, $(C > 0)$. Ta sẽ nghiệm lại rằng hai họ nghiệm $\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2}$, $(C > 0)$ và $y = \frac{-1}{\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}}$, $C \neq 0$ là như nhau.

Thật vậy, ta biến đổi $\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2}$, $(C > 0)$ như sau
$$\frac{y}{y+2} = \pm Ce^{x^2} = C_1e^{x^2},\quad (C_1 = \pm C \neq 0),$$
hay
$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2C_1}e^{-x^2}},\quad (C_1 \neq 0).$$

Đặt $C_2 = \frac{-1}{2C_1} \neq 0$, ta có
$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2} + C_2e^{-x^2}},\quad (C_2 \neq 0).\ \blacksquare$$

Chú thích. Phương trình dạng
$$y' = f(ax + by + c),\ b \neq 0,$$
có thể đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $z = ax + by + c$.

Thật vậy
$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z).$$
Nếu phương trình $a + bf(z) = 0$ có nghiệm $z = z_*$, thì $ax + by + c = z_*$ là nghiệm của phương trình vi phân nói trên.

Các nghiệm khác tìm được bằng cách thì chia hai vế của phương trình cho $a+bf(z)$ rồi lấy tích phân, ta được
$$\int \frac{dz}{a + bf(z)} = x + C.$$
Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân $y' = (x - y + 1)^2$.
Đặt $z = x - y + 1$ thì $z' = 1 - y'$. Thay vào phương trình, ta có $1 - z' = z^2$ hay
$$dz = (1 - z^2)dx.$$
· Nếu $1 - z^2 = 0$ thì $z = 1$, $z = -1$ là các nghiệm. Chuyển về ẩn hàm cũ bằng cách thay vào $z = \pm 1$, ta có $y = x$, $y = x + 2$ là các nghiệm riêng.
· Nếu $1 - z^2 \neq 0$. Chia hai vế cho $1 - z^2$ ta có
$$\frac{dz}{1 - z^2} = dx.$$
Lấy tích phân hai vế, ta được
$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = x + \frac{1}{2}\ln C,\ C > 0.$$
Suy ra
$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = Ce^{2x},\ C > 0.$$
Sau cùng, ta được tích phân tổng quát
$$\left|\frac{x-y+2}{x-y}\right| = Ce^{2x},\ C > 0. \blacksquare$$

1.5.2 Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

Định nghĩa. Phương trình vi phân *đẳng cấp cấp* 1 là phương trình có dạng
$$y' = f(\frac{y}{x}),$$
trong đó f là hàm số cho trước.

Cách giải. Ta đưa về phương trình vi phân tách biến bằng cách đổi qua ẩn hàm mới $u = \frac{y}{x}$. Khi đó
$$y = ux, \quad y' = xu' + u.$$
Thay vào phương trình vi phân ta được
$$xu' + u = f(u).$$
hay
$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$
· Nếu $f(u) - u \neq 0$, (với mọi u trong miền xác định của hàm f) ta có
$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}.$$

Đây là phương trình vi phân tách biến. Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \int \frac{du}{f(u)-u} + \ln|C| \equiv \Phi(u) + \ln|C|,$$

trong đó $\Phi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}$. Do đó $x = Ce^{\Phi(u)}$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình vi phân là

$$x = Ce^{\Phi(\frac{y}{x})}.$$

· Nếu $f(u) - u \equiv 0$, thì $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$ và phương trình vi phân có dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

hay

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế của, ta được

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

hay

$$y = Cx,\ x \neq 0$$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trong trường hợp $f(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$.

· Nếu $f(u) - u \equiv 0$, tại $u = u_*$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy rằng hàm $y = u_*x$, $(x \neq 0)$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân đẳng cấp $y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Ta viết lại phương trình vi phân ở trên như sau

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Đặt $\frac{y}{x} = u$ hay $y = ux$, ta có $y' = u'x + u$, và thay vào phương trình, ta có

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

hay

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{1+u^2}du.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\begin{aligned}
\ln|x| &= \int \frac{1-u}{1+u^2}du + \frac{1}{2}\ln|C| \\
&= \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln|C| \\
&= arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\ln|C|,
\end{aligned}$$

hay

$$\ln[x^2(1+u^2)] = 2arctgu + \ln|C|,$$

do đó

$$x^2(1+u^2) = C_1e^{2arctgu}.$$

hay

$$x^2 + y^2 = C_1e^{2arctg(\frac{y}{x})},\ C_1 > 0.\ \blacksquare$$

Chú thích. Phương trình dạng

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

trong đó a, b, c, a', b', c' là các hằng số cho trước, có thể đưa về phương trình vi phân đẳng cấp.

Thật vậy, ta xét hai trường hợp:

(i) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0:$

(i_1) Nếu $c = c' = 0$. Khi đó phương trình vi phân viết lại thành phương trình vi phân đẳng cấp

$$y' = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a' + b'\frac{y}{x}}\right) \equiv \tilde{f}(\frac{y}{x}).$$

(i_2) Nếu $c = c' = 0$. Khi đó hệ

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất (x_*, y_*). Khi đó đặt $X = x - x_*,\ Y = y - y_*$, ta có $Y = Y(X) = y(x) - y_*$. Cũng chú ý rằng $Y'(X) = y'(x)$, sau khi thay vào phương trình, ta nhận được phương trình vi phân đẳng cấp:

$$\begin{aligned} Y' &= f\left(\frac{a(X + x_*) + b(Y + y_*) + c}{a'(X + x_*) + b'(Y + y_*) + c'}\right) \\ &= f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{a' + b'\frac{Y}{X}}\right) = \tilde{f}(\frac{Y}{X}). \end{aligned}$$

(ii) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0:$ Khi đó ta có $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $a = \lambda a',\ b = \lambda b'$.

Đặt $Z = a'x + b'y$ thì $Z' = a' + b'y'$ và ta được phương trình vi phân tách biến

$$Z' = a' + b'f\left(\frac{\lambda Z + c}{Z + c'}\right) \equiv \Phi(Z).$$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

Hệ

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ 2x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

vô nghiệm. Đặt $Z = x + y$, ta có $dZ = dx + dy$.

Vậy ta viết lại phương trình vi phân ở trên như sau

$$(Z + 2)dx + (2Z - 1)(dZ - dx) = 0,$$

hay

$$(3 - Z)dx + (2Z - 1)dZ = 0.$$

· Nếu $Z - 3 = 0$, thì $Z = 3$ là nghiệm hay $x + y = 3$ là nghiệm.

· Nếu $Z - 3 \neq 0$, thì ta có

$$\frac{2Z - 1}{Z - 3}dZ = dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{2Z - 1}{Z - 3}dZ = \int dx + C,$$

hay

$$2Z + 5\ln|Z - 3| - x = C.$$

Thay $Z = x + y$ vào, ta suy ra tích phân tổng quát của phương trình vi phân là

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C. \blacksquare$$

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân đẳng cấp $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}$.

Ta có $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, do đó hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0, \\ x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x_*, y_*) = (1, -5)$. Khi đó đặt $X = x - 1,\ Y = y + 5$, ta có $Y = Y(X) = y(x) + 5$. Sau khi thay vào phương trình vi phân, ta nhận được phương trình vi phân đẳng cấp:

$$Y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6} = \frac{(X + 1) + (Y - 5) + 4}{(X + 1) - (Y - 5) - 6} = \frac{X + Y}{X - Y} = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 - \frac{Y}{X}} = \tilde{f}(\frac{Y}{X}).$$

Sử dụng lại ví dụ 1, ta thu được tích phân tổng quát

$$X^2 + Y^2 = C_1 e^{2arctg(\frac{Y}{X})},\ C_1 > 0.$$

Trở về ẩn cũ ta thu được nghiệm tổng quát phương trình vi phân là

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = C_1 e^{2arctg(\frac{y+5}{x-1})},\ C_1 > 0. \blacksquare$$

1.5.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Định nghĩa. Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 1 là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.52}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong một khoảng nào đó.

Nếu $q(x) \neq 0$, thì (*) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *không thuần nhất.*

Nếu $q(x) \equiv 0$, thì (*) đươc gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp* 1 *thuần nhất tương ứng với* (1.52).

(i) **Phương pháp biến thiên hằng số (Lagrange)**

Trước hết ta xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất tương ứng với (1.52)

$$y' + p(x)y = 0, \tag{1.53}$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

Với $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1.$$

Do đó

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Đó là nghiệm tổng quát của phương trình (1.53). Ta thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (1.53) và cũng là một nghiệm riêng của phương trình (1.53) ứng với $C = 0$.

Bây giờ ta coi C không phải là hằng số mà là một hàm khả vi theo biến x. Ta sẽ tìm hàm số $C = C(x)$ để biểu thức

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

là nghiệm của phương trình không thuần nhất (1.52).

Lấy đạo hàm công thức nầy, ta được

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Thay vào phương trình (1.52), ta được

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

hay

$$dC = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$C = C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1.52) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right].$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + y\cos x = 0.$$

Với $y \neq 0$, ta có

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx.$$

Lấy tích phân, ta được

$$\ln|y| = -\sin x + \ln C_1.$$

Do đó

$$y = Ce^{-\sin x}.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. Mặt khác $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất ứng với $C = 0$.

Bây giờ ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y = C(x)e^{-\sin x},$$

với $C = C(x)$ cần phải tìm.

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)e^{-\sin x} - \cos xe^{-\sin x}C(x) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x},$$

hay

$$C'(x) = 1.$$

Lấy tích phân, ta được

$$C(x) = x + C_1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = (x + C_1)e^{-\sin x}. \blacksquare$$

(ii) Phương pháp Bernuoulli

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất (1.52) dưới dạng

$$y = u(x)v(x).$$

Thế vào (1.52), ta được

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

hay

$$[u' + p(x)u]v + uv' = q(x).$$

Chọn $u(x)$ là một nghiệm nào đó của phương trình

$$u' + p(x)u = 0,$$

ta có

$$u = e^{-\int p(x)dx}$$

Thay $u(x)$ vừa tính được vào phương trình $[u' + p(x)u]v + uv' = q(x)$, ta được

$$v'e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Vậy, tích phân ta thu được nghiệm tổng quát cho bởi

$$v(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân $y'\sin x - y\cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$.
Đặt $y = u(x)v(x)$, ta có

$$u'v\sin x + uv'\sin x - uv\cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2},$$

hay

$$v[u'\sin x - u\cos x] + uv'\sin x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Chọn $u(x)$ là một nghiệm của phương trình

$$u'\sin x - u\cos x = 0,$$

ta có thể lấy $u = \sin x$. Vậy ta có phương trình

$$v'\sin^2 x = -\frac{\sin^2 x}{x^2},$$

hay

$$v' = -\frac{1}{x^2}.$$

Tích phân, ta được

$$v(x) = \frac{1}{x} + C.$$

Vậy

$$y = uv = (\frac{1}{x} + C)\sin x.\blacksquare$$

(iii) Phương pháp thừa số tích phân

Nhân hai vế của (1.52) với thừa số

$$e^{\int p(x)dx},$$

ta được

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

mà vế trái của đẳng thức nầy chính là đạo hàm của tích số $ye^{\int p(x)dx}$. Vậy ta viết lại đẳng thức nầy như sau

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (10) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Chú thích.
(i) Nếu lấy $q(x) = 0$, ta thu được nghiệm tổng quát của (1.53) là

$$y_{tq} = Ce^{-\int p(x)dx},$$

với C là một hằng số tùy ý.
(ii) Nếu lấy $C = 0$, ta thu được nghiệm riêng của (1.52) là

$$y_r = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1.52) là

$$y = y_{tq} + y_r,$$

tức là

Nghiệm tổng quát của (1.52) = nghiệm tổng quát của (1.53) + nghiệm riêng của (1.52).

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân $y' + 2xy = 4x$.
Nhân hai vế của phương trình với thừa số

$$e^{\int 2xdx} = e^{x^2},$$

ta được

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = 4xe^{x^2},$$

hay

$$\frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = 4xe^{x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ye^{x^2} = 4\int xe^{x^2}dx + C = 2e^{x^2} + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (10) là

$$y = 2 + Ce^{-x^2}. \blacksquare$$

1.5.4 Phương trình vi phân Bernuoulli

Định nghĩa. Phương trình vi phân *Bernuoulli* là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong một khoảng nào đó và α là một hằng số thực cho trước.

Với $\alpha = 0$, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Với $\alpha = 1$, ta có phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

$$y' + [p(x) - q(x)]y = 0.$$

Ở đây ta chỉ cần xét $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Cách giải. Giả sử $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$.

Nếu $\alpha > 0$, thì $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân. Ngược lại nếu $\alpha \leq 0$, thì $y \equiv 0$ không là nghiệm.

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình vi phân cho y^α, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ và phương trình trên được viết lại

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z. Sau khi giải tìm được nghiệm tổng quát của nó, ta trở về ẩn y bởi công thức $z = y^{1-\alpha}$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$y' - 2xy = 4x^3y^4.$$

Đây là phương trình vi phân Bernuoulli ứng với $\alpha = 4 > 0$, do đó thì $y \equiv 0$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho y^4, ta được

$$y^{-4}y' - 2xy^{-3} = 4x^3.$$

Đặt $z = y^{-3}$, khi đó ta có $z' = -3y^{-4}y'$ và phương trình trên trở thành

$$z' + 6xz = -12x^3.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đối với ẩn hàm z.

Nhân hai vế của phương trình nầy với thừa số

$$e^{\int 6xdx} = e^{3x^2},$$

ta được

$$z'e^{3x^2} + 6xe^{3x^2}z = -12x^3e^{3x^2},$$

hay

$$\frac{d}{dx}(ze^{3x^2}) = -12x^3e^{3x^2}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$ze^{3x^2} = -12\int x^3e^{3x^2}dx + C.$$

Đổi biến $t = 3x^2$, $dt = 6xdx$, ta có

$$\begin{aligned} ze^{3x^2} &= -\frac{2}{3}\int te^t dt + C = -\frac{2}{3}\left[te^t - \int e^t dt\right] + C \\ &= -\frac{2}{3}(t-1)e^t + C \\ &= -\frac{2}{3}(3x^2-1)e^{3x^2} + C, \end{aligned}$$

do đó

$$z = -\frac{2}{3}(3x^2-1) + Ce^{-3x^2}.$$

Trở về ẩn cũ ta thu được nghiệm tổng quát phương trình vi phân là

$$y = \frac{1}{z^{1/3}} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}(3x^2-1) + Ce^{-3x^2}\right)^{1/3}}. \blacksquare$$

1.5.5 Phương trình vi phân Riccati

Định nghĩa. Phương trình vi phân *Riccati* là phương trình có dạng

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong một khoảng nào đó.

Nếu $r(x) \equiv 0$, ta có phương trình vi phân Bernuoulli ứng với $\alpha = 2$

$$y' - q(x)y = p(x)y^2.$$

Cách giải. Giả sử rằng phương trình vi phân *Riccati* có một nghiệm riêng y_1 biết trước. Ta tìm nghiệm của phương trình vi phân Riccati dưới dạng

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

trong đó $u = u(x)$, là các hàm số cần tìm. Thay vào phương trình vi phân Riccati ta được

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + r(x),$$

hay

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x) + \frac{1}{u^2}\left[u' + (2p(x)y_1 + q(x)\ )\,u + p(x)\right].$$

Do $y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)$, ta có u thoả phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$u' + (2p(x)y_1 + q(x)\ )\,u + p(x) = 0.$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$y' = \frac{-1}{x^2}y^2 + \frac{1}{x}y + 1.$$

Đây là phương trình vi phân Riccati. Có thể thử lại rằng hàm $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân Riccati. Ta tìm nghiệm của phương trình vi phân Riccati dưới dạng

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}.$$

Lấy đạo hàm và thay vào phương trình vi phân Riccati ta được

$$1 - \frac{u'}{u^2} = \frac{-1}{x^2}\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + 1,$$

hay

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 theo u. Dùng thừa số tích phân

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

ta được

$$\left(\frac{1}{x}u\right)' = \frac{1}{x}u' - \frac{u}{x^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{x}u = \int \frac{1}{x^3}dx + C = \frac{-1}{2x^2} + C,$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Vậy

$$u = \frac{-1}{2x} + Cx = \frac{Cx^2 - 1}{2x}.$$

Cuối cùng ta thu được nghiệm tổng quát phương trình vi phân Riccati là

$$y = x + \frac{2x}{Cx^2 - 1}. \blacksquare$$

1.5.6 Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa. Phương trình vi phân có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

được gọi là phương trình vi phân *toàn phần* nếu tồn tại hàm hai biến $u = u(x,y)$ sao cho

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Mặt khác, ta có

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy.$$

Vậy phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ là phương trình vi phân toàn phần khi và chỉ khi

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Điều nầy xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Do đó ta có

Định lý. *Giả sử rằng P, $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trong một miền mở Ω của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ là một phương trình vi phân toàn phần khi và chỉ khi*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Cách giải. Xét phương trình vi phân toàn phần $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Khi đó, tồn tại hàm hai biến $u = u(x,y)$ sao cho

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Vậy

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Longleftrightarrow du(x,y) = 0 \Longleftrightarrow u(x,y) = C \text{ (hằng số)}.$$

Nghiệm $y = y(x)$ hoặc $x = x(y)$ sẽ được tìm từ tích phân tổng quát $u(x,y) = C$.

Vấn đề là chỉ ra hàm $u = u(x,y)$ như vậy. Thật vậy hàm $u = u(x,y)$ sẽ được tìm từ việc giải hệ

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y). \end{cases}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$(x^2 + y + 1)dx + (x + y + y^3)dy = 0.$$

Đối chiếu với dạng phương trình vi phân, với $P(x,y) = x^2+y+1$, $Q(x,y) = x+y+y^3$, là các hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục và $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$. Do đó, phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ là một phương trình vi phân toàn phần. Như vậy tồn tại hàm $u(x,y)$ thoả hệ phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = x^2 + y + 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = x + y + y^3.$$

Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx + C(y) = \int \left(x^2 + y + 1\right) dx + C(y) \\ &= \frac{x^3}{3} + yx + x + C(y), \end{aligned}$$

trong đó $C(y)$ là hàm số tùy ý chỉ phụ thuộc y (hằng số độc lập x). Dùng phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x + C'(y) = Q(x,y) = x + y + y^3.$$

Do đó

$$C'(y) = y + y^3.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$C(y) = \int \left(y + y^3\right) dy + C_1 = \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C_1,$$

trong đó C_1 là một hằng số tùy ý. Vậy

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + yx + x + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + C_1.$$

Cuối cùng ta thu được tích phân tổng quát phương trình vi phân toàn phần là

$$u(x,y) = \text{hằng số},$$

hay

$$\frac{x^3}{3} + yx + x + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C_2 = \text{hằng số}. \ \blacksquare$$

1.5.7 Phương trình đưa về phương trình vi phân toàn phần

Chúng ta xét phương trình vi phân có dạng

$$\begin{cases} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial P}{\partial y}(x,y). \end{cases} \tag{1.54}$$

Như vậy phương trình nầy không là phương trình vi phân toàn phần do điều kiện $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.

Định nghĩa. Một hàm số $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ được gọi là một *thừa số tích phân* nếu phương trình vi phân

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0, \tag{1.55}$$

là một phương trình vi phân toàn phần. Mặt khác, hai phương trình (1.54) và (1.55) là tương đương.

Ta lại có (**) là một phương trình vi phân toàn phần tương đương với điều kiện

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y},$$

tức là

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{1.56}$$

Với hàm P, Q biết trước việc tìm thừa số tích phân là hàm hai biến $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ từ phương trình nầy là không dễ dàng chút nào. Một số trường hợp xảy ra sẽ cho phép ta tìm thừa số tích phân theo một biến $\mu = \mu(x) \neq 0$ hoặc $\mu = \mu(y) \neq 0$.

(i) Giả sử rằng ta tìm thừa số tích phân $\mu = \mu(x) \neq 0$ là hàm theo một biến x. Khi đó $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Ta viết lại (1.56) như sau

$$\mu'(x) + \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}\right)\mu(x) = 0.$$

Khi đó $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = p(x)$ là hàm độc lập với y (chỉ phụ thuộc x). Vậy $\mu(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$\mu'(x) + p(x)\mu(x) = 0.$$

Một nghiệm của nó được chọn là

$$\mu(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right) = \exp\left(-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}dx\right).$$

(ii) Giả sử rằng ta tìm thừa số tích phân $\mu = \mu(y) \neq 0$ là hàm theo một biến y. Khi đó $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y)$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$. Ta viết lại (1.56) như sau

$$\mu'(y) + \left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-P}\right)\mu(y) = 0.$$

Khi đó $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-P} = \bar{p}(y)$ là hàm độc lập với x (chỉ phụ thuộc y). Vậy $\mu(y)$ là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$\mu'(y) + \bar{p}(y)\mu(y) = 0.$$

Một nghiệm của nó được chọn là

$$\mu(y) = \exp\left(-\int \bar{p}(y)dy\right) = \exp\left(-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-P}dy\right).$$

Vậy ta có định lý

Định lý. *Giả sử rằng P, $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trong một miền mở Ω của $\mathbb{R}^2$. Khi đó, phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ có thừa số tích phân là hàm theo một biến tùy theo từng trường hợp sau:*
(i) Nếu $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = p(x)$ là hàm liên tục, độc lập với y (chỉ phụ thuộc x), khi đó thừa số tích phân $\mu = \mu(x)$ của phương trình trên cho bởi

$$\mu(x) = \exp\left(-\int p(x)dx\right) = \exp\left(-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q}dx\right).$$

(ii) Nếu $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-P} = \bar{p}(y)$ là hàm liên tục, độc lập với x (chỉ phụ thuộc y), khi đó thừa số tích phân $\mu = \mu(y)$ của phương trình trên cho bởi

$$\mu(y) = \exp\left(-\int \bar{p}(y)dy\right) = \exp\left(-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{-P}dy\right). \blacksquare$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$(3y + 4xy + 5x^2y^3)dx + (x + x^2 + 3x^3y^2)dy = 0.$$

Đối chiếu với dạng phương trình vi phân, với $P(x,y) = 3y + 4xy + 5x^2y^3$, $Q(x,y) = x + x^2 + 3x^3y^2$, là các hàm có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục và

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(1 + 2x + 9x^2y^2\right) - \left(3 + 4x + 15x^2y^2\right) = -2\left(1 + x + 3x^2y^2\right) \neq 0.$$

Do đó, phương trình cho không là một phương trình vi phân toàn phần. Như vậy ta cần tìm một thừa số tích phân μ của phương trình vi phân.

Mặt khác, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{-2\left(1+x+3x^2y^2\right)}{x+x^2+3x^3y^2} = \frac{-2}{x} = p(x)$ là hàm liên tục, độc lập với y (chỉ phụ thuộc x), do đó thừa số tích phân $\mu = \mu(x)$ của phương trình trên cho bởi

$$\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dx\right) = \exp\left(-\int \frac{-2}{x} dx\right) = x^2 \text{ (chọn hằng số } = 0).$$

Nhân hai vế của phương trình vi phân bởi thừa số tích phân $\mu(x) = x^2$, ta được một phương trình vi phân toàn phần sau

$$x^2(3y + 4xy + 5x^2y^3)dx + x^2(x + x^2 + 3x^3y^2)dy = 0.$$

Thật vậy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2(x + x^2 + 3x^3y^2)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2(3y + 4xy + 5x^2y^3)\right] = 3x^2 + 4x^3 + 15x^4y^2.$$

Do đó, tồn tại hàm $u(x, y)$ thoả hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = x^2(3y + 4xy + 5x^2y^3), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^2(x + x^2 + 3x^3y^2). \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + C(y) = \int \left[x^2(3y + 4xy + 5x^2y^3)\ \right] dx + C(y) \\ &= x^3y + x^4y + x^5y^3 + C(y), \end{aligned}$$

trong đó $C(y)$ là hàm số tùy ý chỉ phụ thuộc y (hằng số độc lập x). Dùng phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x^3 + x^4 + 3x^5y^2 + C'(y) = x^2(x + x^2 + 3x^3y^2).$$

Do đó

$$C'(y) = 0.$$

Vậy

$$C(y) = C_1 = \text{là một hằng số tùy ý.}$$

Do đó

$$u(x, y) = x^3y + x^4y + x^5y^3 + C_1.$$

Cuối cùng ta thu được tích phân tổng quát phương trình vi phân toàn phần là

$$u(x, y) = \text{hằng số},$$

hay

$$x^3y + x^4y + x^5y^3 = C_2 = \text{hằng số.} \blacksquare$$

Chương 2

Phương trình vi phân cấp 2

2.1 Các khái niệm chung

Phần nầy nhắc lại và cụ thể lại các khái niệm được lấy từ mục 1.2.

Định nghĩa. *Phương trình vi phân cấp* 2 là phương trình có dạng

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.1}$$

trong đó $\mathcal{F}$ là một hàm cho trước theo bốn biến độc lập. Nếu giải được phương trình (2.1) đối với y'' thì phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{2.2}$$

trong đó f là một hàm cho trước theo ba biến độc lập.

Nghiệm của phương trình vi phân (2.1) (tương ứng với (2.2)) trên khoảng I là một hàm số $y = y(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (2.1) (tương ứng với (2.2)) ta được đẳng thức trên I :

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0, \ \forall x \in I,$$

hoặc

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \ \forall x \in I,$$

(tương ứng với (2.2)).

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân $y'' = 6x + 1$.

Đặt $y' = Z$, ta có

$$Z' = y'' = 6x + 1,$$

suy ra

$$Z = \int Z'dx + C_1 = 3x^2 + x + C_1,$$

tức là

$$y' = 3x^2 + x + C_1.$$

Vậy

$$y = \int (3x^2 + x + C_1)dx + C_2 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2. \ \blacksquare$$

Ta thấy phương trình vi phân cấp 2 có nghiệm phụ thuộc vào hai hằng số, nên để xác định một nghiệm cụ thể cần có hai điều kiện nào đó. Người ta thường xét bài toán Cauchy (bài toán điều kiện đầu). Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.1) hoặc (2.2), thỏa điều kiện đầu

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \tag{2.3}$$

với x_0, y_0, y'_0 là những số cho trước.

Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Nếu hàm số $f(x,y,y')$ liên tục trong miền mở $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nào đó chứa (x_0,y_0,y'_0), tồn tại nghiệm của bài toán (2.2), (2.3).
Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục và bị chặn trong Ω, thì nghiệm ấy là duy nhất.

Ta công nhận định lý nầy.

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2.
Như đã thấy, nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thường phụ thuộc vào hai hằng số thực C_1, C_2, và có dạng

$$y = y(x, C_1, C_2).$$

Định nghĩa. Giả sử trong miền Ω, bài toán Cauchy cho phương trình vi phân (2.2) có nghiệm duy nhất. Họ hàm số $y = y(x, C_1, C_2)$ phụ thuộc vào hai tham số thực C_1, C_2 được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp hai (2.2) trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nếu
– Với mọi cặp số thực (C_1, C_2), hàm $x \longmapsto y(x, C_1, C_2)$ là nghiệm của bài toán (2.2).
– Với mọi $(x_0, y_0, y'_0) \in \Omega$, tồn tại duy nhất một cặp số thực (C_{01}, C_{02}) sao cho hàm $x \longmapsto y = y(x, C_{01}, C_{02})$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.2) thỏa các điều kiện đầu

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0.$$

Ví dụ 2. Phương trình vi phân $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ trong $\Omega = \mathbb{R}^3$.
Thật vậy, trước tiên ta thấy hàm số nầy là nghiệm của phương trình $y'' + y = 0$ với mọi hằng số C_1, C_2 (kiểm tra trực tiếp). Lấy $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$, điều kiện đầu (2.3) có dạng

$$\begin{cases} C_1 \cos x_0 + C_2 \sin x_0 = y_0, \\ -C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y'_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Coi C_1, C_2 như là ẩn, hệ phương trình tuyến tính (2.4) có nghiệm duy nhất (C_{01}, C_{02}), vì định thức của hệ nầy bằng $1 \neq 0$. Vậy tồn tại duy nhất một cặp (C_{01}, C_{02}) để hàm $y = C_{01} \cos x + C_{02} \sin x$ là nghiệm của phương trình vi phân $y'' + y = 0$ thỏa các điều kiện đầu (2.4).■
Định nghĩa. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát $y = y(x, C_1, C_2)$ bằng cách cho các hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể được gọi là *nghiệm riêng.*
Định nghĩa. Phương trình

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

cho ta mối quan hệ giữa biến độc lập và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai được gọi là *tích phân tổng quát* của nói trên.
Nếu cho $C_1 = C_{01}$, $C_2 = C_{02}$ là những giá trị cụ thể ta được phương trình

$$\Phi(x, y, C_{01}, C_{02}) = 0$$

mà ta gọi nó là *tích phân nghiệm riêng* của phương trình vi phân nói trên.
Về phương diện hình học, tích phân tổng quát của phương trình vi phân cấp hai xác định một họ đường cong trong mặt phẳng tọa độ phụ thuộc vào hai tham số tùy ý. Các đường cong ấy được gọi là *đường cong tích phân* của phương trình vi phân.

2.2 Phương trình vi phân cấp hai giảm cấp được

Bây giờ ta xét một số phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y'' = f(x, y, y')$$

mà ta có thể đưa chúng về cấp một.

2.2.1 Phương trình vi phân dạng $y'' = f(x)$

Cách giải. Vì $y'' = (y')'$, nên từ phương trình vi phân ta suy ra

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta được

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' = \sin 2x$ thỏa các điều kiện đầu

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Ta có:

$$y' = \int \sin 2x dx + C_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int (-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1)dx + C_2 = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2.$$

Mặt khác khi $x = 0$ thì $y = 0$ nên từ phương trình cuối, ta có $C_2 = 0$. Khi $x = 0$ thì $y' = 0$, do đó ta có $1 = -\frac{1}{2} + C_1$ hay $C_1 = \frac{3}{2}$. Do đó nghiệm riêng của bài toán Cauchy đã cho là $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x$. ■

2.2.2 Phương trình vi phân dạng $y'' = f(x, y')$

Cách giải. Đặt $y' = p$, khi đó $y'' = p'$ và phương trình vi phân có dạng

$$p' = f(x, p).$$

Đây là phương trình vi phân cấp 1. Nếu giải được, ta có nghiệm tổng quát là

$$p = p(x, C_1).$$

Vì $y' = p$, nên ta có

$$y' = p(x, C_1).$$

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân $y'' = 3x - \frac{y'}{x}$.
Đặt $y' = p$, ta có $y'' = p'$. Do đó phương trình đã cho có dạng

$$p' = 3x - \frac{p}{x},$$

hay

$$p' + \frac{p}{x} = 3x.$$

Đó là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Nhân hai vế với x, ta được

$$xp' + p = 3x^2,$$

hay

$$(xp)' = 3x^2.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$xp = x^3 + C_1,$$

hay

$$p = x^2 + \frac{C_1}{x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \int (x^2 + \frac{C_1}{x})dx + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1 \ln|x| + C_2. \blacksquare$$

2.2.3 Phương trình vi phân dạng $y'' = f(y, y')$

Cách giải. Đặt $y' = p = p(y)$ và xem như là hàm của y. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức nầy theo x, ta có

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Khi đó, phương trình đã cho có dạng

$$p'\frac{dy}{dx} = f(y, p).$$

Đó là phương trình vi phân cấp 1 với ẩn hàm là $p = p(y)$. Nếu phương trình nầy giải được, ta có

$$p = p(y, C_1),$$

hay

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1), \quad \frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân $yy'' - (y')^2 = 0$.
Đặt $y' = p = p(y)$. Ta có $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ và phương trình vi phân đã cho có dạng

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0,$$

hay

$$p(y\frac{dp}{dy} - p) = 0.$$

Do đó ta được hoặc $p = 0$, hoặc là $y\frac{dp}{dy} - p = 0$.
Nếu $p = 0$, ta có $y' = p = 0$, suy ra $y = C$.
Nếu $y\frac{dp}{dy} - p = 0$, ta nhân hai vế với thừa số $\frac{1}{y^2}$, ta thu được

$$\frac{1}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y^2}p = 0,$$

hay

$$\frac{d}{dy}(\frac{1}{y}p) = 0.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{1}{y}p = C_1, \text{ hay } p = C_1 y, \text{ hay } y' = C_1 y.$$

Lấy tích phân một lần nữa, ta được

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Nếu lấy $C_1 = 0$, ta được $y = C_2$ là nghiệm đã thấy ở trên. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_2 e^{C_1 x},\ C_1,\ C_2 \text{ là các hằng số tùy ý. } \blacksquare$$

Ví dụ. *Đường cong đuổi bắt* (The curve of parsuit).

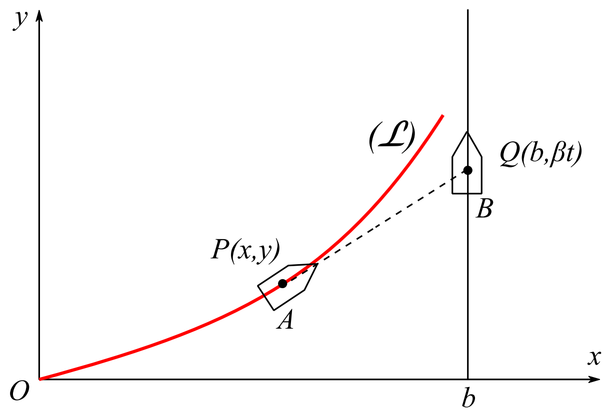
Bài toán đặt ra là tìm một đường cong $(\mathcal{L})$ (đường cong đuổi bắt) mà một con tàu A chuyển động trên đó đuổi bắt một con tàu B khác chạy trốn dọc trên một đường thẳng, biết rằng vận tốc của hai con tàu là các hằng số.

Giả sử hai con tàu A và B chuyển động với vận tốc lần lượt là α, β.

Giả sử rằng quỹ đạo của hai con tàu A và B nằm trong phạm vi mặt phẳng $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Giả sử lúc bắt đầu (tại thời điểm $t = 0$) con tàu A ở vị trí tại gốc tọa độ $O(0,0)$ và con tàu B ở vị trí tại điểm $(b, 0)$, $b > 0$ và con tàu A chạy trên $(\mathcal{L})$ đuổi bắt con tàu B chạy trốn dọc trên một đường thẳng $x = b$ theo hướng tung độ dương.

Ở thời điểm $t > 0$, con tàu A chạy đến vị trí $P(x, y(x))$ trên đường cong $(\mathcal{L})$ và B chạy đến vị trí $Q(b, \beta t)$. (Xem hình 1).



Hình vẽ 1

(a) Vì tàu A đuổi theo tàu B, khi đó tại mỗi thời điểm t, tàu A phải hướng thẳng đến tàu B, tức là tiếp tuyến với đường cong đuổi bắt $(\mathcal{L})$ tại $P(x, y(x))$ phải đi qua điểm $Q(b, \beta t)$. Như vậy

$$y'(x) = \frac{y(x) - \beta t}{x - b}. \tag{a1}$$

(b) Chiều dài khoảng đường đi trên đường cong $(\mathcal{L})$ mà tàu A di chuyển sau thời gian t là αt. Chiều dài này cũng là độ dài cung của đường cong $(\mathcal{L}) : y = y(x)$ từ điểm $O(0,0)$ đến điểm $P(x, y(x))$. Dùng công thức tính chiều dài cung ta có

$$\alpha t = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2}\, ds. \tag{a2}$$

Từ (a1) và (a2) ta có

$$\frac{y(x) - (x - b)y'(x)}{\beta} = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2}\, ds. \tag{a3}$$

(c) Đạo hàm hai vế của (a3) theo x, ta có

$$(x - b)w'(x) = \frac{-\beta}{\alpha}\sqrt{1 + w^2(x)}, \tag{a4}$$

trong đó $w(x) = y'(x)$.

(d) Giải (a4) (theo dạng PTVP tách biến) với điều kiện đầu

$$x = 0 : w(0) = w'(0) = 0, \text{ khi } t = 0.$$

Viết lại (a4),

$$\frac{w'(x)}{\sqrt{1+w^2(x)}} = \frac{-\beta}{\alpha}\frac{1}{x-b},$$

sau đó tích phân từ 0 đến x, $0 \le x < b$, ta được

$$\int_0^x \frac{w'(z)}{\sqrt{1+w^2(z)}}dz = \frac{-\beta}{\alpha}\int_0^x \frac{1}{z-b}dz,$$

mà không khó khăn để tính được từ tích phân này

$$w(x) + \sqrt{1+w^2(x)} = \left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha}.$$

Từ đây giải ra $w(x)$ ta được

$$y'(x) = w(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha} - \left(1-\frac{x}{b}\right)^{\beta/\alpha}\right]. \tag{a5}$$

Tại thời điểm $t = 0 : A \equiv O(0,0)$, tức là $y(0) = 0$.
(d1) Với $\alpha \neq \beta$: Tích phân (a5) từ 0 đến x, $0 \le x < b$, ta có

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x y'(s)ds = \frac{1}{2}\left[\frac{-b}{-\beta/\alpha+1}\left(1-\frac{s}{b}\right)^{-\beta/\alpha+1} + \frac{b}{\beta/\alpha+1}\left(1-\frac{s}{b}\right)^{\beta/\alpha+1}\right]\Bigg|_0^x \qquad \text{(a6)}\\ &= \frac{b}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{\beta/\alpha+1}}{1+\beta/\alpha} - \frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-\beta/\alpha}}{1-\beta/\alpha}\right] + \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2},\ 0 \le x < b. \end{aligned}$$

- Nếu $\alpha > \beta$, từ (a6), ta thấy rằng hàm $y = y(x)$ liên tục trên $0 \le x \le b$, và do đó vị trí A gặp B là $x = b$, $y = y(b) = \dfrac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$, tại thời điểm $t = \dfrac{y(b)}{\beta} = \dfrac{b\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$. (Xem hình 2).

- Nếu $\alpha < \beta$, do $\lim\limits_{x\to b_-}\left(1-\dfrac{x}{b}\right)^{1-\beta/\alpha} = +\infty$, từ (a6) ta thấy rằng $\lim\limits_{x\to b_-} y(x) = +\infty$, và do đó đường cong $(\mathcal{L})$ tiệm cận với đường thẳng $x = b$. Vậy con tàu A không gặp (không đuổi kịp) tàu B (Xem hình 3).

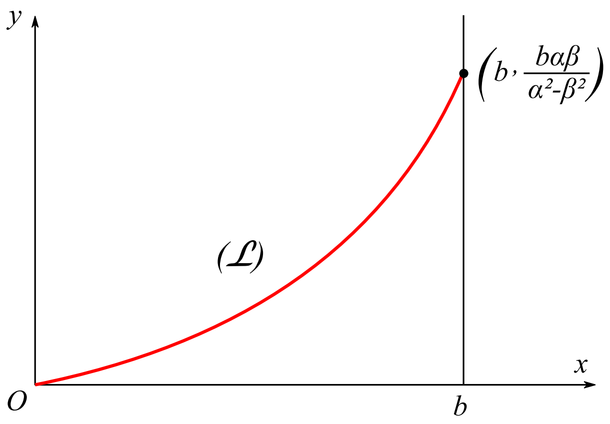
(d2) Với $\alpha = \beta$:

$$y'(x) = w(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{b}} - \left(1-\frac{x}{b}\right)\right]. \tag{a7}$$

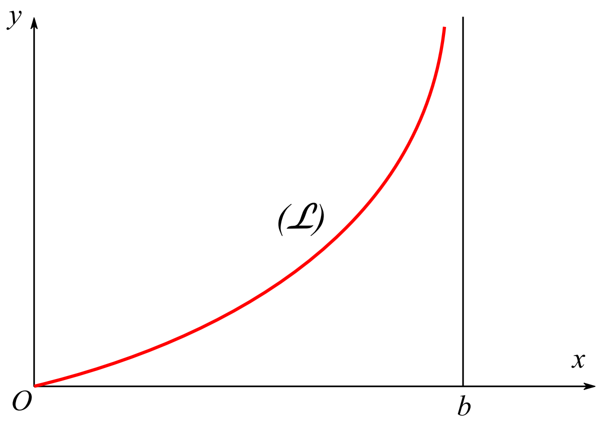
Tích phân (a7) từ 0 đến x, $0 \le x < b$, ta có

$$y(x) = \frac{b}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^2 - 1}{2} - \ln\left(1-\frac{x}{b}\right)\right],\ 0 \le x < b. \tag{a8}$$

Từ (a8), ta thấy rằng $\lim\limits_{x\to b_-} y(x) = +\infty$. Như vậy đường cong $(\mathcal{L})$ tiệm cận với đường thẳng $x = b$, do đó con tàu A không gặp (không đuổi kịp) tàu B (Xem hình 3).



Hình vẽ 2: $\alpha > \beta$



Hình vẽ 3: $\alpha \leq \beta$

Tóm lại:

$\alpha \leq \beta$: Con tàu A không gặp (không đuổi kịp) tàu B.

$\alpha > \beta$: Con tàu A gặp (đuổi kịp) tàu B tại vị trí $\left(b, \dfrac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)$, tại thời điểm $t = \dfrac{b\alpha}{\alpha^2-\beta^2}$.

2.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

2.3.1 Định nghĩa.

Phương trình vi phân *tuyến tính cấp* 2 là phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \ \ x \in I, \tag{2.5}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong khoảng $I = (a, b)$.

Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.5'}$$

được gọi là *phương trình thuần nhất* tương ứng với phương trình (2.5'). Ký hiệu vế trái của (2.5) là $L(y)$, tức là

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y.$$

Khi đó L là một ánh xạ tuyến tính. Tính chất tuyến tính được thể hiện như sau:

i) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$,

ii) $L(Cy) = CL(y)$, C là hằng số.

Các tính chất nầy được kiểm tra dễ dàng.

Vậy các phương trình (2.5) và (2.5'), lần lượt được viết dưới dạng

$$L(y) = f(x), \tag{2.6}$$

$$L(y) = 0. \tag{2.6'}$$

Từ các tính chất tuyến tính ta thấy rằng, nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.5') thì $C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (2.5'), trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Định lý. (*Nguyên lý chồng chất nghiệm*). *Giả sử y_1 và y_2 lần lượt là nghiệm riêng của hai phương trình sau*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x).$$

Khi đó, với hai hằng số (thực hoặc phức) C_1, C_2, thì $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = C_1f_1(x) + C_2f_2(x).$$

Chứng minh. Từ các tính chất tuyến tính ta dễ thấy rằng

$$L(y) = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x).$$

Ta công nhận kết quả sau:

Định lý (*sự tồn tại và duy nhất nghiệm***).** *Nếu các hàm số $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b), thì với mọi $(x_0, y_0, y_0') \in (a,b) \times \mathbb{R}^2$ cho trước, bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \ x \in (a,b), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{2.7}$$

có một nghiệm duy nhất.

2.3.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất

Xét phương trình vi phân thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.5'}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong khoảng $I = (a,b)$.

Trước hết ta lập một vài kết quả bổ trợ.

Định nghĩa.

(i) Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trong khoảng (a,b), nếu

$$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

(ii) Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là *phụ thuộc lập tuyến tính* trong khoảng (a,b), nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ không độc lập tuyến tính trong khoảng (a,b).

Định nghĩa.

Cho hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a,b). Khi đó định thức

$$W(x) = W[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

được gọi là *Wronski của các hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$.*

Định lý. *Cho hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ có đạo hàm $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ trong khoảng (a,b). Khi đó*

$$y_1, \ y_2 \text{ phụ thuộc tuyến tính trong } (a,b) \Longrightarrow W[y_1, y_2] = 0, \ \forall x \in (a,b).$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $W(x_0) \neq 0$ và

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Lấy đạo hàm, ta được

$$C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) = 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Cho $x = x_0$ ta được hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Hệ đó có định thức $W(x_0) \neq 0$, vậy hệ này có duy nhất nghiệm tầm thường $C_1 = C_2 = 0$, tức là, $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính. ■

Chú ý: Phần đảo không đúng.

Phần đảo đúng$\Longleftrightarrow$ [$\forall y_1,\ y_2,\ W[y_1, y_2] = 0,\ \forall x \in (a, b) \Longrightarrow y_1,\ y_2$ phụ thuộc tuyến tính trong (a, b)].

Phần đảo không đúng $\Longleftrightarrow$ [tồn tại $y_1,\ y_2$ sao cho $W[y_1, y_2] = 0,\ \forall x \in (a, b)$ và $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính trong (a, b)].

Ta cần chỉ ra hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ có đạo hàm $y_1'(x),\ y_2'(x)$ trong khoảng $(-1, 1)$ sao cho:

$W[y_1, y_2] = 0,\ \forall x \in (-1, 1)$ và $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính trong $(-1, 1)$.

Xét hai hàm sau đây:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \end{cases} \\ y_2(x) &= \begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó, ta có thể nghiệm lại rằng $W[y_1, y_2] = 0,\ \forall x \in (-1, 1)$ và $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính trong $(-1, 1)$.

Định lý sau đây cho phần đảo là đúng

Định lý. *Giả sử $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất* (2.5'). *Khi đó*

$$y_1,\ y_2 \text{ độc lập tuyến tính trong } (a, b) \Longleftrightarrow \exists x_0 \in (a, b) : W[y_1, y_2](x_0) \neq 0.$$

Chứng minh.

– ($\Longleftarrow$) Nếu $\exists x_0 \in (a, b) : W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, thì theo định lý trên, các hàm $y_1,\ y_2$ của nó độc lập tuyến tính.

– ($\Longrightarrow$) Ngược lại, giả sử hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ của nó độc lập tuyến tính trong (a, b). Ta cần chứng minh $\exists x_0 \in (a, b) : W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, $W[y_1, y_2] = 0,\ \forall x \in (a, b)$.

(i) Nếu $y_1(x) = -y_2(x),\ \forall x \in (a, b)$, thì $y_1,\ y_2$ phụ thuộc tuyến tính trong (a, b). Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

(ii) Nếu $\exists x_0 \in (a, b) : y_1(x_0) \neq -y_2(x_0)$, thì $(C_{01}, C_{02}) = (y_2(x_0), -y_1(x_0)) \neq (0, 0)$, vì $C_{01} \neq C_{02}$.

Xét bài toán

$$\begin{cases} L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in (a, b), \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

Khi đó, hàm

$$z(x) = C_{01}y_1(x) + C_{02}y_2(x),\ x \in (a, b), \tag{2.9}$$

là nghiệm của bài toán (2.8). Thật vậy

$$\begin{aligned} &(j) \quad L(z) = L(C_{01}y_1 + C_{02}y_2) = C_{01}L(y_1) + C_{02}L(y_2) = 0,\ x \in (a, b), \\ &(jj)\ \ z(x_0) = C_{01}y_1(x_0) + C_{02}y_2(x_0) = y_2(x_0)y_1(x_0) - y_1(x_0)y_2(x_0) = 0, \\ &(jjj)\ z'(x_0) = C_{01}y_1'(x_0) + C_{02}y_2'(x_0) = y_2(x_0)y_1'(x_0) - y_1(x_0)y_2'(x_0) \\ &\qquad\qquad = -W[y_1, y_2](x_0) = 0. \end{aligned}$$

Nhưng theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, đó chính là nghiệm $z \equiv 0$ trong (a, b), vậy

$$C_{01}y_1(x) + C_{02}y_2(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a, b),$$

tức là y_1 và y_2 phụ thuộc tuyến tính. Định lý được chứng minh. ■

Chú thích. Giả sử rằng $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm không đồng nhất bằng không của phương trình vi phân thuần nhất (2.5').

Xét Wronski của các hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$:

$$W(x) = W[y_1, y_2] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

Ta cũng chú ý rằng

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.9a}$$

Trong (2.9a), ta nhân phương trình thứ nhất bởi y_2' và phương trình thứ hai bởi y_1', sau đó trừ nhau, ta được

$$y_2''(x)y_1(x) - y_1''(x)y_2(x) = p(x)\left(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)\right) = -p(x)W(x).$$

Mặt khác,

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x).$$

Do đó

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0. \tag{2.b9b}$$

Cho $x, x_0 \in (a,b)$, nhân hai vế (2.b9b) bởi $e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$, sau đó tích phân, ta thu được

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \ \forall x, x_0 \in (a,b). \tag{2.b9c}$$

Từ đây ta thấy rằng

$$W(x) \neq 0, \ \forall x \in (a,b) \Longleftrightarrow \exists x_0 \in (a,b) : W(x_0) \neq 0. \tag{2.b9d}$$

Chú thích. Hai hàm $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính có thể nhận biết bằng điều kiện $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ không là hàm hằng, thật vậy,

$$W(x) = W[y_1, y_2] = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = y_1^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) \neq 0,$$

dĩ nhiên ta phải lý luận chặt chẻ, bởi lẽ hàm $y_1(x)$ có thể triệt tiêu tại một số chỗ trong (a,b).

Định lý. *Cho* $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong* (a,b) *của phương trình thuần nhất* (2.5'). *Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình* (2.5') *có dạng*

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{2.10}$$

với C_1, C_2 *là hai hằng số.*

Chứng minh.

Hiển nhiên hàm số có dạng (2.10) là nghiệm của phương trình (2.5') với mọi hằng số C_1, C_2.

Ngược lại, giả sử $u = u(x)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \ x \in (a,b), \\ y(x_0) = u_0, \quad y'(x_0) = u_0', \end{cases} \tag{2.11}$$

với $(x_0, u_0, u_0') \in (a,b) \times \mathbb{R}^2$ cho trước. Ta cần chứng minh rằng, khi đó tồn tại duy nhất một cặp số C_{01}, C_{02} sao cho $u = C_{01}y_1(x) + C_{02}y_2(x)$.

Thậy vậy, ta xét hệ phương trình với ẩn là C_{01}, C_{02}

$$\begin{cases} C_{01}y_1(x_0) + C_{02}y_2(x_0) = u_0, \\ C_{01}y_1'(x_0) + C_{02}y_2'(x_0) = u_0'. \end{cases}$$

Định thức của hệ phương trình này là

$$W(x_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

vì hai nghiệm $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính. Vậy hệ này có một nghiệm C_1^0, C_2^0 duy nhất. Điều nầy có nghĩa là

$$u = C_{01}y_1(x) + C_{02}y_2(x)$$

là nghiệm của bài toán (2.11).■

Chú thích. Hai nghiệm riêng $y_1,\ y_2$ độc lập tuyến tính được gọi là *hai nghiệm cơ bản* (*cơ sở*) của phương trình vi phân (2.5').

Như vậy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2.5'), ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó, rồi lấy tổ hợp tuyến tính của chúng.

2.3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hằng

Xét phương trình vi phân (2.5') với p, q là các hằng số thực sau

$$y'' + py' + qy = 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

Ta tìm nghiệm riêng của (2.12) dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là một hằng số nào đó. Ta có

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}.$$

Thay các biểu thức y, y', y'' vào (2.12) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Vì $e^{kx} \neq 0$ nên ta được

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.13}$$

Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (2.13) thì hàm $y = e^{kx}$ là một nghiệm riêng của phương trình (2.12). Phương trình (2.13) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (2.12). Có ba trường hợp sau đây

(i) Phương trình (2.13) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 : $k_{1,2} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.
Khi đó ta có hai nghiệm riêng của phương trình (2.12) là

$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}.$$

Hai nghiệm nầy độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq \text{ hằng số.}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.12) là

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

(ii) Phương trình (2.13) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = -p/2$.

Lúc đó ta có một nghiệm riêng của phương trình (2.12) là $y_1 = e^{k_1x}$. Ta sẽ chứng minh $y_2 = xe^{k_1x}$ cũng là một nghiệm riêng của phương trình (2.12). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x} = (1 + k_1x)e^{k_1x}, \\ y_2'' &= k_1e^{k_1x} + k_1(1 + k_1x)e^{k_1x} = (2k_1 + k_1^2x)e^{k_1x}. \end{aligned}$$

Thay các biểu thức y_2, y_2', y_2'' vào (2.12) ta được

$$\begin{aligned} y_2'' + py_2' + qy_2 &= e^{k_1x}[(2k_1 + k_1^2x) + p(1 + k_1x) + qx] \\ &= e^{k_1x}[(k_1^2 + pk_1 + q)x + (2k_1 + p)]. \end{aligned}$$

Vì $k_1 = -p/2$ là nghiệm kép của phương trình (2.13) nên

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0,\ \ 2k_1 + p = 0.$$

Vậy

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Hai nghiệm y_1 và y_2 độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = x \neq \text{ hằng số.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2.12) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

(iii) Phương trình (2.13) có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q-p^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$, với $\alpha = \frac{-p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

Ta có hai nghiệm riêng của phương trình (2.12) là

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x}, \\ \overline{y}_2 &= e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}. \end{aligned}$$

Dùng công thức Euler

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x,\ e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x,$$

ta được

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \\ \overline{y}_2 &= e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x). \end{aligned}$$

Khi đó các hàm

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2 &= \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x, \end{aligned}$$

cũng là các nghiệm của phương trình (2.12). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = \cot g\beta x \neq \text{ hằng số.}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.12) là

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 1. Giải các phương trình vi phân

i/ $y'' - 6y' + 8y = 0$,
ii/ $y'' - 6y' + 8y = 0$,
iii/ $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Giải i/. Phương trình đặc trưng của i/ là

$$k^2 - 6k + 8 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình i/ là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Giải ii/. Phương trình đặc trưng của ii/ là

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $k_1 = k_2 = -2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ii/ là

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}, \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Giải iii/. Phương trình đặc trưng của iii/ là

$$k^2 + 2k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $k_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình iii/ là

$$y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x), \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}\blacksquare$$

2.3.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số hàm

Ta xét phương trình vi phân (2.5') dưới đây với $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số thực sau

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \ x \in (a, b), \tag{2.5'}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số liên tục trong khoảng (a, b).

Hiển nhiên $y \equiv 0$ là một nghiệm của (2.5'). Với các hàm $p(x)$, $q(x)$ cho trước, một cách tổng quát, thật khó mà chỉ ra một nghiệm tường minh $y_1 \neq 0$ của (2.5'). Đối với phương trình vi phân (2.5') trên đây, mọi việc sẽ bắt đầu từ việc cần biết trước một nghiệm riêng $y_1 \neq 0$ này.

Như ở phần trên, ta cần có hai nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính trong (a, b) để thiết lập nghiệm tổng quát $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (với C_1, C_2 là hai hằng số). Muốn vậy ta cần tìm thêm một nghiệm $y_2(x)$ của phương trình (2.5') sao cho $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong (a, b). Định lý sau đây sẽ nói lên điều này.

Định lý. *Giả sử $y_1 \neq 0$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân* (2.5'). *Xét hàm số*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left(\displaystyle\int - p(x)dx\right)}{y_1^2(x)} dx, \tag{2.14}$$

ở đây các hằng số trong các tích phân bất định được chọn bằng không.

Khi đó, $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm của (2.5') *và độc lập tuyến tính trong* (a, b).

Chứng minh. Ta tìm nghiệm riêng $y_2(x)$ của (2.5') dưới dạng

$$y_2(x) = u(x)y_1(x), \tag{2.15}$$

trong đó $u(x)$ không là hàm hằng. Tính toán đạo hàm ta có

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= u(x)y_1'(x) + u'(x)y_1(x), \\ y_2''(x) &= u(x)y_1''(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u''(x)y_1(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Nhân với (2.15) cho $q(x)$, với $(2.16)_1$ cho $p(x)$, với $(2.16)_2$ cho 1, rồi cộng lại, ta được

$$\begin{aligned} y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \ &= \ u(x)\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\ \right) \\ &\quad + u'(x)\left(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\ \right) + u''(x)y_1(x). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Do $y_1(x)$ là nghiệm của (2.5') và nếu $y_2(x)$ là nghiệm của (2.5'), nên ta suy từ (2.17) rằng

$$u'(x)\left(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\ \right) + u''(x)y_1(x) = 0. \tag{2.18}$$

Đặt $v = u'$, ta viết lại (2.18) rằng

$$v'(x) + \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) v(x) = 0. \tag{2.19}$$

Đây là một phương trình vi phân với $v(x)$ là ẩn hàm.

Trước hết một nguyên hàm của $2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)$ được chọn là (ta lấy các hằng số $= 0$ trong phép tính tích phân bất định)

$$\Psi(x) = \int \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) dx = 2\ln|y_1(x)| + \int p(x)dx = \ln y_1^2(x) + \int p(x)dx.$$

Dùng thừa số tích phân

$$\mu(x) = \exp\Psi(x) = y_1^2(x)\exp\left(\int p(x)dx \right),$$

và nhân vào hai vế của phương trình vi phân (2.19), ta được

$$\mu(x)v'(x) + \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) \mu(x)v(x) = 0. \tag{2.20}$$

Ta cũng chú ý rằng

$$\mu'(x) = \Psi'(x)\exp\Psi(x) = \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x) \right) \mu(x),$$

do đó, ta viết lại (2.20), như sau

$$(\mu(x)v(x)\ )' = 0.$$

Vậy

$$\mu(x)v(x) = C_1 = \text{hằng số}.$$

Ta suy ra

$$u'(x) = v(x) = \frac{C_1}{\mu(x)} = \frac{C_1\exp\left(-\int p(x)dx \right)}{y_1^2(x)}.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$u(x) = C_1\int \frac{\exp\left(-\int p(x)dx \right)}{y_1^2(x)} dx + C_2,$$

Chọn các hằng số $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, ta được

$$u(x) = \int \frac{\exp\left(-\int p(x)dx \right)}{y_1^2(x)} dx \neq \text{ hàm hằng.} \ \blacksquare$$

Ví dụ 2. Giải phương trình vi phân

$$x^2y'' + 7xy' - 7y = 0,\ x > 0.$$

Giải. Phương trình vi phân được viết lại theo dạng

$$y'' + \frac{7}{x}y' - \frac{7}{x^2}y = 0,\ x > 0,$$

với $p(x) = \frac{7}{x}$, $q(x) = \frac{-7}{x^2}$ là các hàm liên tục trên $x > 0$. Có thể thử lại rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân.

Ta tìm thêm một nghiệm thứ hai bằng công thức

$$y_2(x) = x\int \frac{\exp\left(\int -\frac{7}{x}dx\right)}{x^2}dx = x\int \frac{\exp(-7\ln x)}{x^2}dx = x\left(\frac{x^{-8}}{-8} + C\right).$$

Chọn hằng số $C = 0$, ta được $y_2(x) = \frac{x^{-7}}{-8}$ là một nghiệm của phương trình vi phân. Suy ra $\bar{y}_2(x) = x^{-7}$ cũng vậy.

Hơn nữa dễ thấy rằng $y_1(x) = x$, $\bar{y}_2(x) = x^{-7}$ là hai nghiệm của độc lập tuyến tính trong $(0, +\infty)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên $(0, +\infty)$ là

$$y = C_1x + C_2x^{-7}, \text{ trong đó } C_1,\ C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}\blacksquare$$

Ví dụ 3. Giải phương trình vi phân

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ x > 0.$$

Giải. Phương trình vi phân được viết lại theo dạng

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0,\ x > 0,$$

với $p(x) = \frac{3}{x}$, $q(x) = \frac{1}{x^2}$ là các hàm liên tục trên $x > 0$. Có thể thử lại rằng $y_1 = \frac{1}{x}$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân. Thật vậy

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{x},\ y_1' = \frac{-1}{x^2},\ y_1'' = \frac{2}{x^3}, \\ y_1'' + \frac{3}{x}y_1' + \frac{1}{x^2}y_1 &= \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{1}{x} = 0,\ x > 0. \end{aligned}$$

Ta tìm thêm một nghiệm thứ hai bằng công thức

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\int \frac{\exp\left(\int -\frac{3}{x}dx\right)}{x^{-2}}dx = \frac{1}{x}\int \frac{\exp(-3\ln x)}{x^{-2}}dx = \frac{1}{x}\left(\ln x + C\right).$$

Chọn hằng số $C = 0$, ta được $y_2(x) = \frac{\ln x}{x}$ là một nghiệm của phương trình vi phân. Hơn nữa dễ thấy rằng $y_1(x) = \frac{1}{x}$, $y_2(x) = \frac{\ln x}{x}$ là hai nghiệm của độc lập tuyến tính trong $(0, +\infty)$ là hai nghiệm của phương trình vi phân. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên $(0, +\infty)$ là

$$y = \frac{1}{x}\left(C_1 + C_2\ln x\right), \text{ trong đó } C_1,\ C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý. } \blacksquare$$

2.3.5 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2.5}$$

và phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất tương ứng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.5'}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong khoảng $I = (a, b)$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.5') có dạng

$$y_{tq} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{2.21}$$

với $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong (a, b) của (2.5'), với C_1, C_2 là hai hằng số.

Định lý sau đây cho ta mối quan hệ giữa các nghiệm của các phương trình vi phân (2.5) và (2.5'). Qua đó cho phép ta tiến hành tìm nghiệm của phương trình vi phân (2.5) thông qua nghiệm của phương trình vi phân (2.5').

Định lý. *Giả sử y_r là một nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.5) trên I. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.5) cho bởi*

$$y = y_r + y_{tq} = y_r + C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{2.22}$$

với C_1, C_2 là hai hằng số bất kỳ.

Chứng minh.

– Giả sử y là một nghiệm tùy ý của phương trình vi phân (2.5) trên I, ta có

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

và do y_r là một nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.5) trên I, ta có

$$y_r'' + p(x)y_r' + q(x)y_r = f(x).$$

Trừ hai phương trình, ta có

$$(y - y_r)'' + p(x)(y - y_r)' + q(x)(y - y_r) = 0.$$

Vậy $u = y - y_r$ là một nghiệm của phương trình vi phân

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0.$$

Theo định lý về tồn tại và duy nhất nghiệm thì nghiệm nầy có dạng

$$u = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

trong đó y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (2.5'), C_1, C_2 là các hằng số thích hợp. Vậy

$$y = y_r + u = y_r + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

– Giả sử y_{tq} là một nghiệm tùy ý của phương trình vi phân (2.5'), ta có

$$y_{tq}'' + p(x)y_{tq}' + q(x)y_{tq} = 0,$$

và do y_r là một nghiệm riêng của phương trình vi phân (2.5) trên I, ta có

$$y_r'' + p(x)y_r' + q(x)y_r = f(x).$$

Cộng hai phương trình, ta có

$$(y_{tq} + y_r)'' + p(x)(y_{tq} + y_r)' + q(x)(y_{tq} + y_r) = f(x).$$

Do đó, $y_{tq} + y_r$ là một nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.5).■

Ví dụ 4. Giải phương trình vi phân

$$y'' - y = x.$$

Giải.

– Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân thuần nhất

$$y'' - y = 0$$

là

$$k^2 - 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm thực phân biệt $k_{1,2} = \pm 1$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

– Dễ thấy rằng hàm $y_r = -x$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất là

$$y = y_r + y_{tq} = -x + C_1e^x + C_2e^{-x}. \ ■$$

2.3.6 Phương pháp biến thiên hằng số

Như ở phần trên nghiệm tổng quát của phương trình (2.5') có dạng

$$y_{tq} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.21}$$

với $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong (a, b) của (2.5'), với C_1, C_2 là hai hằng số. Chúng ta sẽ dùng nghiệm này bằng cách thay hai hằng số C_1, C_2 bởi hai hàm số

$$C_1 = u_1(x),\ C_2 = u_2(x),$$

với mong muốn là hàm số

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{2.23}$$

sẽ là nghiệm của phương trình vi phân (2.5). Phương pháp nầy gọi là *Phương pháp biến thiên hằng số* hay *Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange*.

Lấy đạo hàm (2.23), ta được

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x).$$

Để cho gọn biểu thức, trước hết ta đặt một quan hệ giữa $u_1'(x)$, $u_2'(x)$ bởi phương trình

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{2.24}$$

Khi đó

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{2.25}$$

Lấy đạo hàm (2.25), ta được

$$y'' = u_1(x)y_1''(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \tag{2.26}$$

Nhân với (2.23) cho $q(x)$, với (2.25) cho $p(x)$, với (2.26) cho 1, rồi cộng lại, và cũng chú ý rằng, $y_1,\ y_2$ là hai nghiệm của (2.5'), ta được

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= u_1(x)\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + u_2(x)\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) \\ &\quad + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) \\ &= u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Do đó, muốn cho $y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.5) ta phải có

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{2.28}$$

Các phương trình (2.25), (2.28) thành lập hệ phương trình sau đây với ẩn là $u_1'(x)$, $u_2'(x)$:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0, \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{2.29}$$

Do Wonski của hai hàm y_1, y_2

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0,$$

nên hệ (2.29) xác định duy nhất

$$\begin{cases} u_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{-y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}, \\ u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Vậy lấy tích phân (2.30) và chọn các hằng số là bằng 0, ta chọn được các hàm

$$\begin{cases} u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx, \\ u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx. \end{cases} \tag{2.31}$$

Do đó, một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất (2.5) được chọn là

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = y_1(x)\int \frac{-y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx. \tag{2.32}$$

Do đó ta có định lý

Định lý. *Giả sử* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *là hai nghiệm độc lập tuyến tính trong* (a, b) của (2.5'). *Khi đó một nghiệm riêng* y_r *của phương trình vi phân không thuần nhất* (2.5) *trên* I *có dạng*

$$y_r = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{2.33}$$

trong đó, $u_1(x)$, $u_2(x)$ *là hai nghiệm riêng của hệ phương trình*

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0, \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{2.34}$$

hoặc $u_1(x)$, $u_2(x)$ *được chọn từ hệ phương trình* (2.34) *như sau*

$$\begin{cases} u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx, \\ u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx. \end{cases} \tag{2.35}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình vi phân

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x},\ 0 < x < \pi. \tag{2.36}$$

Giải.
– Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân thuần nhất

$$y'' + y = 0$$

là

$$k^2 + 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \pm i$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.
– Một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất (2.36) là

$$y_r = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x,$$

trong đó, $u_1(x)$, $u_2(x)$ là hai nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x = 0, \\ u_1'(x)\,(-\sin x) + u_2'(x)\cos x = f(x), \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} u_1'(x) = -1, \\ u_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x. \end{cases}$$

Lấy tích phân hai vế, sau đó chọn các hằng số $= 0$, ta được

$$u_1(x) = -x, \quad u_2(x) = \ln(\sin x).$$

Do đó, một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất (2.36) trên $0 < x < \pi$ là

$$y_r = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x),$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất (2.36) trên $0 < x < \pi$ (2.36) là

$$y = y_r + y_{tq} = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất là

$$y = y_r + y_{tq} = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \blacksquare$$

Ví dụ 6. Giải phương trình vi phân

$$y'' + y' - 2y = x + e^x. \tag{2.37}$$

Giải.

– Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân thuần nhất

$$y'' + y' - 2y = 0$$

là

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 1$, $k_2 = -2$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

– Một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất (2.37) là

$$y_r = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-2x},$$

trong đó, $u_1(x)$, $u_2(x)$ là hai nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ u_1'(x)e^x + u_2'(x)(-2e^{-2x}) = f(x) = x + e^x, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} u_1'(x) = \frac{1}{3}(x + e^x), \\ u_2'(x) = \frac{-1}{3}(x + e^x). \end{cases}$$

Lấy tích phân hai vế, sau đó chọn các hằng số $= 0$, ta được

$$u_1(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right), \quad u_2(x) = \frac{-1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right).$$

Do đó, một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất (2.37) là

$$y_r = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)e^x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)e^{-2x} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\left(e^x - e^{-2x}\right).$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất (2.37) là

$$y = y_r + y_{tq} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\left(e^x - e^{-2x}\right) + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \blacksquare$$

2.3.7 Phương pháp hệ số bất định

Xét phương trình vi phân (2.5) với p, q là các hằng số thực sau

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.38}$$

với vế phải là hàm $f(x)$ có vài dạng cụ thể. Ta tìm nghiệm riêng của (2.38) với vế phải như thế bằng một số thủ thuật riêng. Dĩ nhiên, phương pháp nầy không thể giải quyết được với $f(x)$ tùy ý như ở phương pháp biến thiên hằng số.

Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng với (2.38) là

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.39}$$

và phương trình đặc trưng của (2.39) là

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{2.40}$$

Ta xét hai trường hợp tương ứng với hai dạng của vế phải $f(x)$.

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó α là số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

a) Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = e^{\alpha x}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n, \text{ với } n+1 \text{ hệ số chưa biết.}$$

Để tìm các hệ số chưa biết, ta thay y_r vào phương trình (2.38) rồi đồng nhất các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ở hai vế ta sẽ được một hệ $(n+1)$ phương trình bậc nhất với $(n+1)$ ẩn là các hệ số của đa thức $Q_n(x)$.

b) Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2.40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = xe^{\alpha x}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

c) Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (2.40), thì ta tìm nghiệm riêng y_r theo dạng

$$y_r = x^2e^{\alpha x}Q_n(x), \text{ với } Q_n(x) \text{ là đa thức bậc } n.$$

Trường hợp 2. $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + \widetilde{P}_m(x)\sin\beta x\right]$, trong đó α, β là hằng số thực, $P_n(x)$, $\widetilde{P}_m(x)$ là các đa thức bậc n, m tương ứng.

Khi đó:

a) Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.40), thì một nghiệm riêng của phương trình (2.38) có dạng

$$y_r = e^{\alpha x}\left[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x\right],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.

b) Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.40), thì một nghiệm riêng của phương trình (2.38) có dạng

$$y_r = xe^{\alpha x}\left[Q_s(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_s(x)\sin\beta x\right],$$

với $Q_s(x)$, $\widetilde{Q}_s(x)$ là các đa thức bậc $s = \max\{n, m\}$.

Ví dụ 7. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - y' - 2y = 4x^2$.

Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó là

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}, \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = 4x^2 = e^{\alpha x}P_n(x)$, ta có $n = 2$, $\alpha = 0$. Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng

$$y_r = e^{0x}Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Lấy đạo hàm y_r', y_r'' rồi thế vào phương trình đã cho

$$2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2,$$

hay

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + 2A - B - 2C = 4x^2.$$

Cân bằng các hệ số cùng bậc ở hai vế, ta được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = 4, \\ -2A - 2B = 0, \\ 2A - B - 2C = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $A = -2$, $B = 2$, $C = -3$. Vậy

$$y_r = -2x^2 + 2x - 3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_{tq} + y_r = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3. \blacksquare$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.
Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y'' + y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 1 = 0$$

có hai nghiệm phức $k_{1,2} = \pm i$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \text{ với } C_1, C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta tìm nghiệm riêng y_r của phương trình đã cho theo dạng tổng

$$y_r = y_1 + y_2,$$

trong đó y_1, y_2 lần lượt là các nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau

$$y'' + y = xe^x \text{ và } y'' + y = 2e^{-x}.$$

Do $\alpha = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên y_1, y_2 có dạng

$$y_1 = (Ax + B)e^x, \quad y_2 = Ce^{-x}.$$

Vậy y_r có dạng

$$y_r = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}.$$

Lấy đạo hàm y_r', y_r'' rồi thế vào phương trình đã cho, ta thu được

$$y_r'' + y_r = (2Ax + 2A + 2B)e^x + 2Ce^{-x} = xe^x + 2e^{-x}.$$

Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + 2B = 0, \\ 2C = 2. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1}{2}$, $C = 1$. Vậy

$$y_r = \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x},$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x + e^{-x}.\blacksquare$$

Ví dụ 9. Giải phương trình $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$.
Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình đã cho là

$$y_{tq} = C_1e^x + C_2e^{2x}, \text{ trong đó } C_1,\ C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Đối chiếu với dạng của vế phải $f(x) = e^x(3-4x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, ta có $n = 1$, $\alpha = 1$. Vì $\alpha = 1$ trùng với một nghiệm của phương trình đặc trưng tìm nghiệm riêng y_r được tìm của phương trình đã có theo dạng

$$y_r = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Thay vào phương trình đã cho và rút gọn, ta thu được

$$y_r'' - 3y_r' + 2y_r = e^x(-2Ax + 2A - B) = e^x(-4x + 3),$$

hay

$$-2Ax + 2A - B = -4x + 3.$$

Từ đó ta nhận được một hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ 2A - B = 3. \end{cases}$$

Do đó $A = 2$, $B = 1$. Vậy

$$y_r = e^x(2x^2 + x),$$

và nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^x(2x^2 + x).\blacksquare$$

Ví dụ 10. Hãy tìm một nghiệm riêng của các phương trình $y'' + 2y' - 3y = f(x)$ với $f(x)$ là các hàm số sau:

a) $2\cos 3x$,
b) $3xe^x$,
c) $(x+1)\cos x$,
d) $3xe^x \sin x + e^x \cos x$.

Giải.

Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 1$, $k_2 = -3$.

a) $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $n = m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng theo dạng

$$y_r = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Thay vào phương trình đã cho, ta được sau khi rút gọn

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = (-12A + 6B)\cos 3x + (-6A - 12B)\sin 3x = 2\cos 3x.$$

Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} -12A + 6B = 2, \\ -6A - 12B = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A = \frac{-2}{15}$, $B = \frac{1}{15}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = \frac{-2}{15}\cos 3x + \frac{1}{15}\sin 3x. \blacksquare$$

b) $\alpha = 1$, $n = 1$.(trường hợp 1). Vì $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y_r = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta được

$$y_r'' + 2y_r' - 3y_r = e^x(8Ax + 2A + 4B) = 3xe^x.$$

Suy ra

$$8Ax + 2A + 4B = 3x.$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} 8A = 3, \\ 2A + 4B = 0. \end{cases}$$

Giải ra ta được $A = \frac{3}{8}$, $B = \frac{-3}{16}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = (\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x)e^x. \blacksquare$$

c) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 1$, $m = 0$. Vậy $\alpha \pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng dưới dạng

$$y_r = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Thay vào phương trình đã cho, sau khi rút gọn, ta có

$$[(-4A + 2C)x + 2A - 4B + 2C + 2D]\cos x + [(-2A - 4C)x - 2A - 2B + 2C - 3D]\sin x = (x+1)\cos x.$$

Cân bằng các hệ số hai vế của phương trình ta được hệ

$$\begin{cases} -4A + 2C = 1, \\ 2A - 4B + 2C + 2D = 1, \\ -2A - 4C = 0, \\ -2A - 2B + 2C - 3D = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $A = \frac{-1}{5}$, $B = \frac{-3}{20}$, $C = \frac{1}{10}$, $D = \frac{3}{10}$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình đã cho là

$$y_r = -(\frac{1}{5}x + \frac{3}{20})\cos x + (\frac{1}{10}x + \frac{3}{10})\sin x.$$

d) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $n = 0$, $m = 1$. Vậy $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng

$$y_r = e^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]. \blacksquare$$

Giải tương tự như trên. Phần còn lại dành cho bạn đọc.

2.4 Phương trình vi phân Euler cấp 2

2.4.1 Định nghĩa.

Phương trình vi phân Euler cấp 2 là phương trình vi phân cấp 2 có dạng

$$x^2y'' + xpy' + qy = f(x),\ x \in I, \tag{2.41}$$

trong đó p, q là các hằng số thực cho trước $f(x)$ là hàm số cho trước liên tục trong khoảng $I \subset (0, +\infty)$, hoặc $I \subset (-\infty, 0)$.

Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

$$x^2y'' + xpy' + qy = 0, \tag{2.42}$$

được gọi là *phương trình Euler thuần nhất* tương ứng với phương trình (2.41).

Nếu $f(x) \neq 0$, phương trình (2.41) *phương trình Euler không thuần nhất.*

2.4.2 Phương trình vi phân Euler thuần nhất cấp 2

Xét phương trình vi phân Euler thuần nhất (2.42). Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình nầy theo dạng $y = |x|^{k-1}x$, với k là hằng số.

Bằng cách lấy đạo hàm

$$y' = k|x|^{k-1}, y'' = k(k-1)|x|^{k-3}x,$$

và thay vào phương trình (2.42) ta được các phương trình sau với mọi $x \in I$,

$$|x|^{k-1}x\,[k(k-1) + pk + q\,] = 0,$$

hay

$$k(k-1) + pk + q = 0.$$

hay

$$k^2 + (p-1)k + q = 0. \tag{2.43}$$

Phương trình (2.43) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (2.42).

Vậy, nếu k là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.43), thì $y = x^k$ là nghiệm của phương trình vi phân (2.42).

Có ba trường hợp sau đây

(i) Phương trình (2.43) có hai nghiệm thực phân biệt k_1, k_2 : $k_{1,2} = \frac{1-p\pm\sqrt{(p-1)^2-4q}}{2}$.
Khi đó ta có hai nghiệm riêng của phương trình (2.42) trên I là

$$y_1 = |x|^{k_1-1}x,\ y_2 = |x|^{k_2-1}x.$$

Hai nghiệm nầy độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = |x|^{k_1-k_2} \neq \text{ hằng số}.$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.42) là

$$y = C_1 |x|^{k_1-1} x + C_2 |x|^{k_2-1} x, \quad x \in I,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý (các hằng số nầy tùy thuộc vào I).

(ii) Phương trình (2.43) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = \frac{1-p}{2}$.

Lúc đó ta có một nghiệm riêng của phương trình (2.42) là $y_1 = |x|^{k_1-1} x$. Ta sẽ chứng minh $y_2 = y_1 \ln|x| = |x|^{k_1-1} x \ln|x|$ cũng là một nghiệm riêng của phương trình (2.42). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1' \ln|x| + y_1 \frac{1}{x}, \\ y_2'' &= y_1'' \ln|x| + y_1' \frac{2}{x} - y_1 \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Thay các biểu thức y_2, y_2', y_2'' vào (2.42) ta được

$$\begin{aligned} x^2 y_2'' + xp y_2' + q y_2 &= x^2 \left[y_1'' \ln|x| + y_1' \frac{2}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} \right] + px \left[y_1' \ln|x| + y_1 \frac{1}{x} \right] + q y_1 \ln|x| \\ &= \left[x^2 y_1'' + px y_1' + q y_1 \right] \ln|x| + 2x y_1' + (p-1) y_1. \end{aligned}$$

Do

$$x^2 y_1'' + px y_1' + q y_1,$$

và $2xy_1' = 2k_1 |x|^{k_1-1} x = -(p-1)y_1$ ta có

$$x^2 y_2'' + xp y_2' + q y_2 = 0.$$

Hai nghiệm y_1 và y_2 độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\ln|x|} \neq \text{ hằng số.}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2.42) là

$$y = C_1 |x|^{k_1-1} x + C_2 |x|^{k_1-1} x \ln|x| = (C_1 + C_2 \ln|x| \ ) |x|^{k_1-1} x,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý (các hằng số này tùy thuộc vào I).

(iii) Phương trình (2.43) có hai nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \frac{1-p \pm i\sqrt{4q-(p-1)^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$, với $\alpha = \frac{1-p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q-(p-1)^2}}{2}$.

Ta có hai nghiệm riêng của phương trình (2.42) là

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= |x|^{k_1-1} x = |x|^{\alpha+i\beta-1} x = |x|^{\alpha-1} x \, |x|^{i\beta} = |x|^{\alpha-1} x e^{i\beta \ln|x|}, \\ \overline{y}_2 &= |x|^{k_2-1} x = |x|^{\alpha-i\beta-1} x = |x|^{\alpha-1} x \, |x|^{-i\beta} = |x|^{\alpha-1} x e^{-i\beta \ln|x|}. \end{aligned}$$

Dùng công thức Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

ta được

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= |x|^{\alpha-1} x \left[\cos(\beta \ln|x|) + i \sin(\beta \ln|x|) \right], \\ \overline{y}_2 &= |x|^{\alpha-1} x \left[\cos(\beta \ln|x|) - i \sin(\beta \ln|x|) \right]. \end{aligned}$$

Khi đó các hàm

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = |x|^{\alpha-1} x \cos(\beta \ln|x|), \\ y_2 &= \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{2i} = |x|^{\alpha-1} x \sin(\beta \ln|x|), \end{aligned}$$

cũng là các nghiệm của phương trình (2.42). Hai nghiệm này độc lập tuyến tính, vì

$$\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{cotg}(\beta \ln |x|) \neq \text{ hằng số.}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2.42) là

$$y = C_1 |x|^{\alpha-1} x \cos(\beta \ln |x|) + C_2 |x|^{\alpha-1} x \sin(\beta \ln |x|) = |x|^{\alpha-1} x \left(C_1 \cos(\beta \ln |x|) + C_2 \sin(\beta \ln |x|)\ \right),$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý (các hằng số nầy tùy thuộc vào I).

Ví dụ 11. Giải các phương trình vi phân

i/ $x^2y'' + 4xy' - 4y = 0, x > 0,$

ii/ $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, x > 0,$

iii/ $x^2y'' + 3xy' + 4y = 0, x > 0.$

*Giải i/***.** Phương trình đặc trưng của i/ là

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = 1$, $k_2 = -4$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình i/ là

$$y = C_1 |x|^{k_1-1} x + C_2 |x|^{k_2-1} x = C_1x + C_2 |x|^{-5} x = C_1x + C_2x^{-4},\ x > 0,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

*Giải ii/***.** Phương trình đặc trưng của ii/ là

$$k^2 + 4k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $k_1 = k_2 = -2$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ii/ là

$$y = (C_1 + C_2 \ln |x|\ \ ) |x|^{k_1-1} x = (C_1 + C_2 \ln x)x^{-2},\ x > 0,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

*Giải iii/***.** Phương trình đặc trưng của iii/ là

$$k^2 + 2k + 4 = 0.$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức liên hợp $k_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $k_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình iii/ là

$$y = |x|^{\alpha-1} x \left(C_1 \cos(\beta \ln |x|) + C_2 \sin(\beta \ln |x|)\ \right) = \left[C_1 \frac{\cos\left(\sqrt{3}\ln x\right)}{x} + C_2 \frac{\sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)}{x}\right],\ x > 0,$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng số tùy ý.■

2.4.3 Phương trình vi phân Euler không thuần nhất cấp 2

Xét phương trình vi phân không thuần nhất

$$x^2y'' + xpy' + qy = f(x),\ x \in I, \tag{2.41}$$

trong đó p, q là các hằng số thực cho trước $f(x)$ là hàm số cho trước liên tục trong khoảng $I \subset (0, +\infty)$, hoặc $I \subset (-\infty, 0)$. Trong khoảng I, phương trình vi phân (2.41) tương đương với

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = \frac{1}{x^2}f(x),\ x \in I, \tag{2.44}$$

mà phương trình có thể chỉ ra được hai nghiệm độc lập tuyến tính y_1 và y_2. Nhờ phương pháp biến thiên hằng số ta có thể chỉ ra một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Ví dụ 12. Giải phương trình vi phân $x^2y'' + 5xy' + 3y = x\ln x$, $x > 0$.

Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình Euler thuần nhất tương ứng

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = -1$, $k_2 = -3$.

Hai nghiệm độc lập tuyến tính trên $x > 0$ của phương trình thuần nhất là

$$y_1 = |x|^{k_1 - 1}x = \frac{1}{x},\ y_2 = |x|^{k_2-1}x = \frac{1}{x^3}. \tag{2.45}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_{tq} = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x^3}, \tag{2.46}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Nhờ phương pháp biến thiên hằng số ta có tìm một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất

$$y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = \frac{\ln x}{x},$$

theo công thức

$$y_r = u_1(x)\frac{1}{x} + u_2(x)\frac{1}{x^3},$$

trong đó, $u_1(x)$, $u_2(x)$ là hai nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_1'(x)\frac{1}{x} + u_2'(x)\frac{1}{x^3} = 0, \\ u_1'(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + u_2'(x)\left(\frac{-3}{x^4}\right) = \frac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} u_1'(x) = \frac{1}{2}x\ln x, \\ u_2'(x) = u_2'(x)1 = \frac{-1}{2}x^3\ln x. \end{cases}$$

Lấy tích phân hai vế, sau đó chọn các hằng số $= 0$, ta được

$$\begin{cases} u_1(x) = \frac{1}{4}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right), \\ u_2(x) = \frac{-1}{8}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right). \end{cases}$$

Do đó, một nghiệm riêng y_r của phương trình vi phân không thuần nhất là

$$y_r = \frac{1}{4}x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}x\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}x\ln x - \frac{3}{32}x.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất là

$$y = y_r + y_{tq} = \frac{1}{8}x\ln x - \frac{3}{32}x + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^3}. \blacksquare$$

Chú thích. Ta có thể đưa (2.41), về phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng bằng cách dùng phép đổi biến và đổi ẩn hàm như sau

(i) *Trường hợp* $I = (0, +\infty)$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = x(t) = e^t, \\ z = z(t) = y(x) = y(e^t), \\ \bar{f}(t) = f(x(t)) = f(e^t). \end{cases} \tag{2.47}$$

Khi đó

$$\begin{cases} z' = z'(t) = y'(x)x'(t) = y'(x)x, \\ z'' = z''(t) = \frac{d}{dx}\left[xy'(x)\right]x'(t) = \left[xy''(x) + y'(x)\right]x(t) \\ \quad = x^2y'' + xy' = x^2y'' + z'. \end{cases} \tag{2.48}$$

Thay $xy'(x) = z'$, $x^2y'' = z'' - z'$ vào (2.41), ta được

$$z'' + (p-1)z' + qz = \bar{f}(t), t \in \mathbb{R}. \tag{2.49}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng không thuần nhất.
Giải phương trình này ta nhận được nghiệm tổng quát của nó là

$$z = z(t, C_1, C_2).$$

Sau đó ta trở về ẩn hàm cũ bằng cách thay $t = \ln x$:

$$y = z(\ln x, C_1, C_2), \ x > 0.$$

(ii) *Trường hợp* $I = (-\infty, 0)$. Ta đặt

$$\begin{cases} x = x(t) = -e^t, \\ Z = Z(t) = y(x) = y(-e^t), \\ \bar{f}_1(t) = f(x(t)) = f(-e^t). \end{cases} \tag{2.50}$$

Tương tự, ta cũng có

$$Z' = Z'(t) = xy'(x), Z'' = x^2y'' + Z'. \tag{2.51}$$

Thay $xy'(x) = Z'$, $x^2y'' = Z'' - Z'$ vào (2.41), ta được

$$Z'' + (p-1)Z' + qz = \bar{f}_1(t), t \in \mathbb{R}. \tag{2.52}$$

Giải phương trình này ta nhận được nghiệm tổng quát của nó là

$$z = Z(t, C_1, C_2).$$

Sau đó ta trở về ẩn hàm cũ bằng cách thay $t = \ln(-x)$:

$$y = Z(\ln(-x), C_1, C_2), \quad x < 0.$$

Ví dụ 13. Giải các phương trình vi phân $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x\ln^2 x$, $x > 0$.

Giải. Vế phải xác định với mọi $x > 0$, ta có thể đưa về phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng bằng cách dùng phép đổi biến và đổi ẩn hàm như sau:

$$\begin{cases} x = x(t) = e^t, \\ z = z(t) = y(x) = y(e^t), \\ \bar{f}(t) = f(x(t)) = 2x\ln^2 x = 2t^2e^t. \end{cases}$$

Khi đó, ta thay $xy'(x) = z'$, $x^2y'' = z'' - z'$ vào phương trình vi phân, ta được

$$z'' - 5z' + 6z = 2t^2e^t = \bar{f}(t), t \in \mathbb{R}.$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng không thuần nhất.

Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt là $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$z_{tq} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}, \text{ trong đó } C_1,\ C_2 \text{ là hai hằng số tùy ý.}$$

Đối chiếu với dạng của vế phải $\bar{f}(t) = 2t^2e^t = e^{\alpha t}P_2(t)$, ta có $n = 2$, $\alpha = 1 \notin \{k_1, k_2\}$. Do đó, ta tìm nghiệm riêng z_r của phương trình không thuần nhất theo dạng

$$z_r = e^t(At^2 + Bt + C).$$

Thay vào phương trình đã cho và rút gọn, ta thu được

$$\begin{aligned} z_r &= e^t(At^2 + Bt + C), && (6) \\ z_r' &= e^t(At^2 + Bt + C) + e^t(2At + B), && (-5) \\ z_r'' &= e^t(At^2 + Bt + C) + 2e^t(2At + B) + 2Ae^t. && (1) \end{aligned} \tag{2.53}$$

Nhân $(2.53)_1$ bởi 6, cho, $(2.53)_2$ bởi -5, cho, $(2.53)_3$ bởi 1, rồi cộng lại, ta được

$$\begin{aligned} z_r'' - 5z_r' + 6z_r &= 2e^t(At^2 + Bt + C) - 3e^t(2At + B) + 2Ae^t \\ &= e^t\left[2At^2 + (-6A + 2B)\,t + 2A - 3B + 2C\right]. \end{aligned}$$

Vậy

$$z_r'' - 5z_r' + 6z_r = 2t^2e^t,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

tương đương với

$$2At^2 + (-6A + 2B)\,t + 2A - 3B + 2C = 2t^2,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Đồng nhất hệ số đồng bậc của đa thức và giải phương trình tuyến tính, ta được

$$A = 1,\ B = 3,\ C = \frac{7}{2}.$$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là

$$z_r = e^t(t^2 + 3t + \frac{7}{2}).$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình phương trình vi phân không thuần nhất là

$$z = z_r + z_{tq} = e^t(t^2 + 3t + \frac{7}{2}) + C_1e^{2t} + C_2e^{3t}.$$

Sau đó ta trở về ẩn hàm cũ bằng cách thay $t = \ln x$:

$$y = z = x(\ln^2 x + 3\ln x + \frac{7}{2}) + C_1x^2 + C_2x^3. \blacksquare$$

2.5 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình vi phân tuyến tính cấp 2.

(*Phần nầy có thể bỏ qua khi đọc lần đầu tiên*)

Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 sau

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \; x \in J, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{2.54}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trên đoạn $J = [a, b]$, $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$ cho trước.

Như ta đã biết ở phần (2.3.4), để giải phương trình vi phân (2.54) chúng ta cần chỉ ra một nghiệm tường minh $y_1 \neq 0$ của phương trình thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Việc nầy cũng không dễ dàng chút nào cho dù về mặt lý thuyết có thể khẳng định rằng nó tồn tại nghiệm. Mục đích phần nầy là nhằm thiết lập kết quả tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy (2.54).

Trước tiên, một số kết quả chuẩn bị sẽ được trình bày ngay dưới đây

2.5.1 Bổ túc về hàm véctơ, ma trận.

Các định nghĩa.

(i) Cho $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$, ta đặt

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

gọi là *chuẩn của véctơ* y.

(ii) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2$, ta đặt

$$\|A\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$$

gọi là *chuẩn của ma trận* A.

(iii) Quan hệ giữa hai chuẩn trên

$$\|Ay\| \leq \|A\| \, \|y\| \, , \; \forall y \in \mathbb{R}^2, \; \forall A \in \mathfrak{M}_2.$$

Chứng minh (iii).

Ta có

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \sqrt{(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)^2 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(a_{11}^2 + a_{12}^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right) + \left(a_{21}^2 + a_{22}^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right)} \\ &= \sqrt{\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2\right)} = \|A\| \, \|y\| \, . \end{aligned}$$

(iv) **Bổ đề 1.** *Cho* $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$. *Đặt*

$$\begin{aligned} y(x) &= (y_1(x), y_2(x))^T, \\ \int_a^b y(x)dx &= \left(\int_a^b y_1(x)dx, \int_a^b y_2(x)dx\right)^T. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\left\|\int_a^b y(x)dx\right\| \le \int_a^b \|y(x)\|\, dx,$$

hay

$$\sqrt{\left(\int_a^b y_1(x)dx\right)^2 + \left(\int_a^b y_2(x)dx\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}dx.$$

2.5.2 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 2. (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm**).**
Giả sử rằng $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ *là các hàm số cho trước liên tục trên đoạn* $J = [a,b]$, $(x_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$ *cho trước. Khi đó bài toán Cauchy (2.54) có duy nhất nghiệm trên* J.

Chứng minh Định lý. Chứng minh được chia làm nhiều bước.

Bước 1. Thiết lập phương trình tích phân tương đương với (2.54). Ta đặt $z_1 = y$, $z_2 = y'$. Khi đó bài toán (2.54) được viết lại như sau

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = -p(x)z_2 - q(x)z_1 + f(x), \ x \in J, \\ z_1(x_0) = y_0, \\ z_2(x_0) = y_0', \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}, \quad x \in J, \\ \begin{bmatrix} z_1(x_0) \\ z_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} z' = A(x)z + F(x), \ \ x \in J, \\ z(x_0) = z_0, \end{cases} \tag{2.55}$$

trong đó

$$\begin{aligned} z(x) &= \begin{bmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{bmatrix}, \ z'(x) = \begin{bmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{bmatrix}, \ z_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix} \\ A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{bmatrix}, \ F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Như vậy bài toán (2.54) tương đương với một phương trình tích phân tương đương sau

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x (A(t)z(t) + F(t)\ )\, dt, \ x \in J. \tag{2.56}$$

Bước 2. Thiết lập dãy hàm $\{y_n\}$ cho bởi công thức qui nạp

$$\begin{cases} z_0(x) = z_0, \ \forall x \in J, \ (\text{hàm hằng}), \\ z_1(x) = z_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (A(t)z_0(t) + F(t)\ )\,dt, \, \forall x \in J, \\ z_2(x) = z_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (A(t)z_1(t) + F(t)\ )\,dt, \, \forall x \in J, \\ \qquad \vdots \\ z_n(x) = z_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (A(t)z_{n-1}(t) + F(t)\ )\,dt, \ n \geq 1, \ \forall x \in J. \end{cases} \tag{2.57}$$

Bước 3. Đặt $L = \sup\limits_{a \leq x \leq b} \|A(x)\|$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} \|A(x)z_0 + F(x)\|$.

Ta sẽ chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3. *Dãy hàm $\{z_n\}$ cho bởi (2.57) có tính chất*

$$\|z_n(x) - z_{n-1}(x)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(L\,|x - x_0|)^n}{n!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L(b-a)\ )^n}{n!}, \tag{2.58}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $x \in J = [a, b]$.

Chứng minh Bổ đề 3. Ta chứng minh bằng qui nạp

Với $n = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \|z_1(x) - z_0\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} (A(t)z_0(t) + F(t)\ )\,dt \right\| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|A(t)z_0(t) + F(t)\|\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} M\,dt \right| \leq M\,|x - x_0| \leq M(b-a) = \frac{M}{L} \frac{(L(b-a)\ )^1}{1!}. \end{aligned}$$

Vậy (2.58) đúng với $n = 1$.

Giả sử (2.58) đúng với n, ta sẽ chứng minh (2.58) đúng với $n + 1$. Thật vậy

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}(x) - z_n(x)\| &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|z_n(t) - z_{n-1}(t)\|\,dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \frac{(L\,|t - x_0|)^n}{n!} dt \right| \\ &= L^n M \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^n}{n!} dt \right| \\ &= \frac{M}{L} \frac{(L\,|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L(b-a)\ )^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Vậy (2.58) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bổ đề 3 được chứng minh. ■

Bước 4. Ta sẽ chứng minh rằng

Bổ đề 4. *Phương trình tích phân có nghiệm trên J.*

*Chứng minh Bổ đề 4***.** Ta chú ý rằng, với

$$z_n(x) = (z_{1,n}(x), z_{2,n}(x))^T,$$

ta có

$$z_n(x) - z_{n-1}(x) = (z_{1,n}(x) - z_{1,n-1}(x), \ z_{2,n}(x) - z_{2,n-1}(x))^T,$$

Mặt khác,

$$|z_{1,n}(x) - z_{1,n-1}(x)| \le \|z_{n+1}(x) - z_n(x)\| \le \frac{M}{L}\frac{(L\,|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L(b-a)\,)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{2.59}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $x \in J = [a, b]$.

Lý luận tương tự như trong chứng minh định lý 3.2, ở mục 1.3, chương 1, thì ta có dãy $\{z_{1,n}(x)\}$ hội tụ đều trên J về một hàm liên tục $Z_1 = Z_1(x)$. Lý luận tương tự với đánh giá

$$|z_{2,n}(x) - z_{2,n-1}(x)| \le \|z_{n+1}(x) - z_n(x)\| \le \frac{M}{L}\frac{(L\,|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L(b-a)\,)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{2.60}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $x \in J = [a, b]$, thì ta cũng thu được dãy $\{z_{2,n}(x)\}$ hội tụ đều trên J về một hàm liên tục $Z_2 = Z_2(x)$. Do đó dãy hàm véctơ $\{z_n\}$ cũng hội tụ đều trên J về hàm $z = (Z_1, Z_2)^T$, tức là

$$\sup_{a\le x\le b} \|z_n(x) - z(x)\| \to 0,\ \text{khi } n \to +\infty. \tag{2.61}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{x_0}^{x} (A(t)z_{n-1}(t) + F(t)\,)\,dt - \int_{x_0}^{x} (A(t)z(t) + F(t)\,)\,dt \right\| \\
= & \left\| \int_{x_0}^{x} A(t)\,(z_{n-1}(t) - z(t)\,)\,dt \right\| \\
\le & \left| \int_{x_0}^{x} \|A(t)\,(z_{n-1}(t) - z(t))\|\,dt \right| \\
\le & \left| \int_{x_0}^{x} \|A(t)\|\,\|z_{n-1}(t) - z(t)\|\,dt \right| \\
\le & L(b-a) \sup_{a\le t\le b} \|z_{n-1}(t) - z(t)\|,\ \forall n \ge 1,\ \forall x \in J.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\sup_{a\le x\le b} \left\| \int_{x_0}^{x} (A(t)z_{n-1}(t) + F(t)\,)\,dt - \int_{x_0}^{x} (A(t)z(t) + F(t)\,)\,dt \right\| \to 0,\ \text{khi } n \to \infty. \tag{2.62}$$

Từ công thức (2.57), cho $n \to \infty$, ta suy ra từ (2.61), (2.62), rằng

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)z(t) + F(t)\,)\,dt,\ n \ge 1,\ \forall x \in J. \tag{2.63}$$

Vậy z là nghiệm của phương trình tích phân (2.56).

Bổ đề 4 được chứng minh.■

Như vậy, bài toán Cauchy (2.54) có nghiệm.

Bước 5. Tính duy nhất nghiệm.

Ta sẽ chứng minh rằng

Bổ đề 5. *Nghiệm của bài toán Cauchy* (2.54) *là duy nhất.*

Chứng minh Bổ đề 5. Giả sử bài toán Cauchy (2.54) có hai nghiệm y_1, y_2. Khi đó $y = y_1 - y_2$ là bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in J = [a, b], \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Do đó $z(x) = (y(x),\ y'(x))^T$ thỏa phương trình tích phân

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)z(t)dt,\ x \in J = [a, b]. \tag{2.64}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \|z(x)\| &= \left\| \int_{x_0}^{x} A(t)z(t)dt \right\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \|A(t)z(t)\|\, dt \right| \\ &\le L \left| \int_{x_0}^{x} \|z(t)\|\, dt \right|,\ x \in J = [a,b], \end{aligned} \tag{2.65}$$

với $L = \sup\limits_{a \le x \le b} \|A(x)\|$.

Để chứng minh $z \equiv 0$, ta chỉ chứng minh rằng

$$\begin{cases} \|z(x)\| = 0, \ \ \forall x \in [x_0, b], \\ \|z(x)\| = 0, \ \ \forall x \in [a, x_0], \end{cases} \tag{2.66}$$

(i) Chứng minh $\|z(x)\| = 0, \ \forall x \in [x_0, b]$.

Từ bất đẳng thức tích phân (2.65), ta có

$$\|z(x)\| \le L \int_{x_0}^{x} \|z(t)\|\, dt, \ \forall x \in [x_0, b].$$

Dùng bổ đề Gronwall (Bổ đề 3.4a), ta có $\|z(x)\| = 0, \ \forall x \in [x_0, b]$.

(ii) Chứng minh $\|z(x)\| = 0, \ \forall x \in [a, x_0]$.

Từ bất đẳng thức tích phân (2.65), ta có

$$\|z(x)\| \le L \int_{x}^{x_0} \|z(t)\|\, dt, \ \forall x \in [a, x_0].$$

Dùng bổ đề Gronwall (Bổ đề 3.4b), ta có $\|z(x)\| = 0, \ \forall x \in [a, x_0]$.

Vậy (2.66) được chứng minh, và do đó Bổ đề 5 cũng được chứng minh.■

Kết luận, bài toán Cauchy (2.54) có nghiệm duy nhất trên đoạn $J = [a, b]$.

Định lý 2 được chứng minh.■

Định lý 3. (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm trên $\mathbb{R}$**).** *Giả sử rằng $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trên $\mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ cho trước. Khi đó bài toán Cauchy (2.54) có duy nhất nghiệm trên $J = \mathbb{R}$.*

Chứng minh Định lý 3. Ta có $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [-k, k]$, và $x_0 \in \mathbb{R}$. Do đó tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$, sao cho $x_0 \in [-k_0, k_0]$. Xét đoạn $J_k = [-k, k]$ với $k \in \mathbb{N}$ tùy ý $\ge k_0$. Theo Định lý 2, bài toán Cauchy (2.54) có duy nhất nghiệm Y_k trên J_k.

Ta xét hàm số $y = y(x)$, xác định trên $\mathbb{R}$ như sau.

Coi $x \in \mathbb{R}$, vậy tồn tại $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ sao cho $x \in J_k = [-k, k]$, ta đặt

$$y(x) = Y_k(x).$$

Giá trị hàm $y(x)$ không phụ thuộc vào sự chọn lựa giá trị $Y_k(x)$. Thật vậy, giả sử $x \in J_k = [-k, k]$, và $x \in J_{k'} = [-k', k']$, với $k,\ k' \ge k_0$. Tương ứng trên J_k và $J_{k'}$ ta có hai nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy (2.54) là $Y_k(x)$ và $Y_{k'}(x)$. Do tính duy nhất nghiệm của bài toán (2.54), ta có

$$Y_k(x) = Y_{k'}(x) \ \forall x \in J_k \cap J_{k'} = J_{k_1}, \ k_1 = \min\{k, k'\}.$$

Dễ dàng thử lại rằng $y = y(x)$ là nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R}$ của bài toán (2.54).

Định lý 3 được chứng minh.■

Chương 3

Sơ lược về phương trình vi phân tuyến tính cấp cao và hệ phương trình vi phân

Phần nầy đề cập một ít về phương trình vi phân tuyến tính cấp cao và biến đổi nó về một hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1. Một vài kết quả về tồn tại và duy nhất nghiệm cũng được trình bày. Ta cũng ký hiệu I là một khoảng liên thông trong $\mathbb{R}$, tức là I là một trong các tập sau $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

3.1 Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

3.1.1 Một vài khái niệm liên quan

Định nghĩa. *Phương trình vi phân tuyến tính cấp n* là phương trình vi phân cấp n có dạng

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),\ x \in I, \tag{3.1}$$

trong đó $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ là các hàm số cho trước liên tục trong khoảng I.

Nếu $f(x) \equiv 0$, phương trình

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,\ x \in I, \tag{3.2}$$

được gọi là *vi phân tuyến tính cấp n thuần nhất* tương ứng với phương trình (3.1).

Ký hiệu vế trái của (3.1) là $L(y)$, tức là

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y.$$

Ta kiểm tra dễ dàng rằng L là một ánh xạ tuyến tính. Từ tính chất nầy ta thấy rằng, nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots, y_m(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (3.2) thì $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_my_m$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (3.2), trong đó C_1, C_2, $\ldots, C_m$ là các hằng số tùy ý. Tương tự, ta cũng có nguyên lý chồng chất nghiệm sau đây

Định lý 1. (Nguyên lý chồng chất nghiệm). *Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ lần lượt là nghiệm riêng của hai phương trình sau*

$$\begin{aligned}
y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y &= f_1(x),\\
y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y &= f_2(x),\\
&\ \ \vdots\\
y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y &= f_m(x).
\end{aligned}$$

Khi đó, với hai hằng số (thực hoặc phức) C_1, C_2, $\ldots, C_m$, thì $y = \sum_{i=1}^m C_iy_i(x)$ là nghiệm riêng của phương trình

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = \sum_{i=1}^m C_if_i(x).\blacksquare$$

Mặc khác, ta cũng có (xem Định lý 7).

Định lý 2. (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). *Nếu các hàm số* $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ *liên tục trong* I, *thì với mọi* $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in I \times \mathbb{R}^n$ *cho trước, bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),\ x \in I, \\ \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.3}$$

có một nghiệm duy nhất.■

Định nghĩa.

(i) Các hàm số $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ được gọi là *độc lập tuyến tính* trong I, nếu

$$\forall C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I \Longrightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

(ii) Các hàm số $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ được gọi là *phụ thuộc lập tuyến tính* trong I, nếu $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ không độc lập tuyến tính trong I.

Định nghĩa.

Cho n hàm số $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ có đạo hàm đến cấp $n-1$ trên I. Khi đó hàm số

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix},$$

được gọi là *Wronski của các hàm* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Định lý 3. *Cho* n *hàm số* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *có đạo hàm đến cấp* $n-1$ trên I. *Khi đó*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ phụ thuộc tuyến tính trong } I \Longrightarrow W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0, \ \forall x \in I.$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $W(x_0) \neq 0$ và

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Lần lượt lấy đạo hàm, ta được

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x) = 0, \quad \forall x \in I, \\ \\ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i''(x) = 0, \quad \forall x \in I, \\ \\ \qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x) = 0, \quad \forall x \in I. \end{cases}$$

Cho $x = x_0$ ta được hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn C_1, $C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x_0) = 0, \\ \\ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i''(x_0) = 0, \\ \\ \qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Hệ nầy có định thức $W(x_0) \neq 0$, vậy hệ nầy có duy nhất nghiệm tầm thường $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, tức là, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ độc lập tuyến tính.

Định lý 3 được chứng minh.■

Định lý 4. *Giả sử $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là n nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất* (3.2). *Khi đó*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ độc lập tuyến tính trong } I \Longleftrightarrow \exists x_0 \in I : W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0. \blacksquare$$

Định lý 5. *Cho các hàm số $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$ liên tục trong I, và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là n nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất* (3.2).

Nếu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ độc lập tuyến tính trong I, thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.2) *là*

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{3.4}$$

với $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tùy ý.

Chứng minh. Hiển nhiên hàm số có dạng (3.4) là nghiệm của phương trình (3.2) với mọi hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Ngược lại, giả sử $u = u(x)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \ x \in I, \\ \\ y(x_0) = u, \ y'(x_0) = u_0', \quad y^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.5}$$

với $\left(x_0, u_0, u_0', ..., u_0^{(n-1)}\right) \in I \times \mathbb{R}^n$ cho trước. Ta cần chứng minh rằng, khi đó tồn tại duy nhất một bộ n số thực $(C_{01}, C_{02}, ..., C_{0n})$ sao cho $u = \sum_{i=1}^{n} C_{0i} y_i(x)$.

Thậy vậy, ta xét hệ phương trình với ẩn là $(C_{01}, C_{02}, ..., C_{0n})$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_{0i} y_i(x_0) = u_0, \\ \\ \sum_{i=1}^{n} C_{0i} y_i'(x_0) = u_0', \\ \\ \qquad \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} C_{0i} y_i^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Định thức của hệ phương trình nầy là

$$W(x_0) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

vì các nghiệm $y_1, y_2, \ldots, y_n$ độc lập tuyến tính. Vậy hệ nầy có một nghiệm $(C_{01}, C_{02}, ..., C_{0n})$ duy nhất. Điều nầy có nghĩa là

$$u = \sum_{i=1}^{n} C_{0i} y_i(x)$$

là nghiệm của bài toán (3.5).■

Chú thích. Các nghiệm riêng $y_1, y_2, \ldots, y_n$ độc lập tuyến tính được gọi là *hai nghiệm cơ bản* (*cơ sở*) của phương trình vi phân (3.2).

Như vậy muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.2), ta chỉ cần tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó, rồi lấy tổ hợp tuyến tính của chúng.

Định lý 6. *Cho các hàm số $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_{n-1}(x)$, $f(x)$ liên tục trong I. Khi đó, nghiệm tổng quát $y(x)$ của phương trình* (3.1) *bằng tổng của nghiệm tổng quát $y_{tq}(x)$ của phương trình* (3.2) *với một nghiệm riêng $y_r(x)$ của phương trình* (3.1):

$$y(x) = y_{tq}(x) + y_r(x). \blacksquare \tag{3.7}$$

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0. \tag{3.8}$$

Giải. Ta tìm nghiệm riêng của (3.8) dưới dạng

$$y = e^{kx},\ k \text{ là hằng số}. \tag{3.9}$$

Thay (3.9) vào phương trình (3.8), ta được

$$\left(k^3 - 3k^2 + 3k - 1\right) e^{kx} = 0,$$

hay

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0. \tag{3.10}$$

Phương trình (3.10) được gọi là phương trình đặc trưng của (3.8), mà phương trình (3.10) tương đương với

$$(k-1)^3 = 0 \Longleftrightarrow k = 1.$$

Vậy một nghiệm riêng của (3.8) là

$$y_1 = e^x.$$

Ta xét các hàm số

$$y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2e^x.$$

Ta sẽ nghiệm lại rằng các hàm nầy y_1, y_2, y_3 độc lập tuyến tính. Thật vậy, Giả sử, với C_1, C_2, C_3 là 3 hằng số tùy ý sao cho

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó ta có

$$\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) e^x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

hay

$$C_1 + C_2x + C_3x^2 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Do đó, y_1, y_2, y_3 độc lập tuyến tính. Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (3.8) là

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x,$$

với C_1, C_2, C_3 là 3 hằng số tùy ý.

3.2 Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

3.2.1 Định nghĩa.

Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là một hệ phương trình vi phân có dạng sau

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x),\\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x),\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x),\ x \in I,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

trong đó $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$, $1 \le i,\ j \le n$ là các hàm số cho trước liên tục trong khoảng I.

Nếu $f_1(x) = f_2(x) = ... = f_n(x) \equiv 0$, thì hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \quad \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \ x \in I, \end{cases} \tag{3.12}$$

được gọi là *hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất* tương ứng với hệ (3.12). Ngược lại hệ (3.11) được gọi là *hệ không thuần nhất. C*ác hàm $a_{ij}(x)$, $1 \le i,\ j \le n$ được gọi là các hàm hệ số của hệ. Sau đây chúng ta sẽ đưa hệ trên đây thành dạng véctơ.

3.2.2 Dạng véctơ của hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Trước hết, với mỗi $x \in I$, ta xét ma trận $A(x)$ cấp n sau đây

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Như vậy, ta có ánh xạ $x \longmapsto A(x)$ xác định trên I nhận giá tri trong tập $\mathfrak{M}_n$ các ma trận cấp n. Hàm nầy còn gọi là *hàm ma trận*, hay *ma trận hàm* xác định trên I.

Ta xét hàm véctơ (vectơ cột) sau

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T. \tag{3.14}$$

Thay vì viết thành vectơ cột, người thường viết chuyển vị của một véctơ dòng. Điều nầy cũng làm cho việc trình bày biểu thức toán học đỡ phải bị choán chỗ.

Hàm $x \longmapsto y(x)$ xác định trên I nhận giá tri trong tập $\mathbb{R}^n$. Hàm nầy còn gọi là *hàm véctơ* xác định trên I.

Ta cũng định nghĩa đạo hàm của hàm véctơ $x \longmapsto y(x)$ như sau

$$y'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix} = \left(y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x)\right)^T. \tag{3.15}$$

Tương tự cho hàm

$$x \longmapsto F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T. \tag{3.16}$$

Như vậy, ta sẽ lần lượt viết lại các hệ (3.11) và (3.12) thành các dạng véctơ như sau

$$y'(x) = A(x)y(x) + F(x), \ x \in I, \tag{3.17}$$

và

$$y'(x) = A(x)y(x), \ x \in I. \tag{3.18}$$

3.2.3 Biến đổi phương trình vi phân tuyến tính cấp cao về hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Trong phần nầy chúng ta sẽ biến đổi một phương trình vi phân tuyến tính cấp cao (3.3) về một hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ta đặt $y_1 = y$, $y_2 = y', ..., y_n = y^{(n-1)}$. Khi đó phương trình vi phân (3.3) được viết lại như sau

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = -p_0(x)y_1 - p_1(x)y_2 - ... - p_{n-1}(x)y_n + f(x), \quad x \in I, \\ y_1(x_0) = y_0,\ y_2(x_0) = y_0', ..., \ y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.19}$$

hay

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & \cdots & -p_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + F(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = \bar{Y}_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

trong đó

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}, \ \bar{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

và

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & \cdots & -p_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Ví dụ 2. Để hình dung ra ma trận $A(x)$ ta lấy 2 ví dụ ứng với $n = 3$, $n = 4$.
Với $n = 3$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) \end{bmatrix}.$$

Với $n = 4$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p_0(x) & -p_1(x) & -p_2(x) & -p_3(x) \end{bmatrix}.$$

3.2.4 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 7. (sự tồn tại và duy nhất nghiệm). *Giả sử hàm ma trận $A(x)$ và hàm véctơ $F(x)$ xác định liên tục trên I. Khi đó, với mọi $\left(x_0, \bar{Y}_0\right) \in I \times \mathbb{R}^n$ cho trước, bài toán Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + F(x), \ x \in I, \\ y(x_0) = \bar{Y}_0, \end{cases} \tag{3.23}$$

có một nghiệm duy nhất trên I.■

Chứng minh Định lý 7. Chứng minh tương tự như trường hợp $n = 2$ của Định lý 2, phần 2.52 của chương 2.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Giải các phương trình vi phân tách biến

   (a) $\tan y dx - x \ln x dy = 0$,

   (b) $(\cos x)y' = y$,

   (c) $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \frac{3y+2}{x+1}y'$,

   (d) $y' = a\cos y + b, \ (b > a > 0)$,

   (e) $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$,

   (f) $y' = \cos(ay + bx)$,

   (g) $y' = \frac{1}{2x+y}$,

   (h) $y'(x + y) = 1$,

   (i) $y' = \sqrt{2x + y - 3}$,

   (j) $y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$,

   (k) $y' = \sin(y - x - 1)$,

   (l) $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0$, thỏa $y(0) = 1$,

   (m) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$, thỏa $y(0) = 0$,

   (n) $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2}dy = 0$, thỏa $y(\sqrt{8}) = 1$,

   (o) $y' = -\frac{3x+3y-1}{2(x+y)}$, thỏa $y(0) = 2$,

   (p) $y' tgx = y$, thỏa $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

   (a) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$,

   (b) $xy' = xtg\frac{y}{x} - y$,

   (c) $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$,

   (d) $(x + 2y)dx - xdy = 0$,

   (e) $(x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0$,

   (f) $xydy - y^2dx = (x + y)^2 e^{-y/x}dx$,

   (g) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$,

   (h) $xy^{/} = y\ln\frac{y}{x}$, thỏa $y(1) = 1$,

   (i) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, thỏa $y(1) = 1$,

   (j) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$, thỏa $y(1) = 0$.

3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau

   (a) $y' + ay = e^{bx}, \ (a + b \neq 0)$,

   (b) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$,

   (c) $y' = \frac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$,

(d) $x(1+x^2)y' + y = arctgx.$

4. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 sau

   (a) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, thỏa $y(0) = 0$,
   (b) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$, thỏa $y(0) = 0$,
   (c) $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$, thỏa $y(1) = 0$,
   (d) $y' = 2y + e^x - x$, thỏa $y(0) = \frac{1}{4}$,
   (e) $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$, thỏa $y(1) = 1$.

5. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau

   (a) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$,
   (b) $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$,
   (c) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$,
   (d) $y' - 2ytgx + y^2\sin^2 x = 0$,
   (e) $y' = y(y^3\cos x + tgx)$,
   (f) $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

6. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân Bernoulli sau

   (a) $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$, thỏa $y(0) = 1$,
   (b) $3dy + (1+3y^3)y\sin x dx = 0$, thỏa $y(\frac{\pi}{2}) = 1$,
   (c) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$, thỏa $y(1) = 0$,
   (d) $ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0$, thỏa $y(\frac{1}{2}) = 1$.

7. Giải các phương trình vi phân dạng $y'' = f(x)$ sau

   (a) $y'' = x^2 + xe^x + 1$,
   (b) $y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^2 x$,
   (c) $y'' = xe^{-x}$, thỏa, $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

8. Giải các phương trình vi phân dạng $y'' = f(x, y')$

   (a) $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$,
   (b) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, thỏa $y(2) = 1,\ y'(2) = -1$,
   (c) $y'' = \frac{y'}{x} + x$,
   (d) $(y'')^2 = y'$.

9. Giải các phương trình vi phân dạng $y'' = f(y, y')$

   (a) $yy'' - (y')^2 = 0$, thỏa $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$,
   (b) $1 + (y')^2 = yy''$,
   (c) $yy'' - (y')^2 = y^2\ln y$,
   (d) $y''\cos y + (y')^2\sin y - y' = 0$, thỏa $y(-1) = \frac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2$,
   (e) $yy'' = y'(y'+1)$.

10. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng. Giải các phương trình vi phân thuần nhất sau

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$,

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

(c) $y'' + 4y = 0$,

(d) $y'' - 2y' - y = 0$,

(e) $y'' + y = 0$,

(f) $4y'' - 20y' + 25y = 0$.

11. Giải các phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau

(a) $y'' - 4y' = -12x^2 - 6x - 4$,

(b) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, thỏa $y(0) = 3,\ y'(0) = 9$,

(c) $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$,

(d) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$,

(e) $y'' - 4y = e^x[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x]$,

(f) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$,

(g) $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$,

(h) $y'' - y = x\cos^2 x$,

(i) $y'' + 4y = \sin 2x + 1$, thỏa $y(0) = \frac{1}{4},\ y'(0) = 0$,

(j) $y'' + 6y' + 9y = xe^{\alpha x}$, ($\alpha$ là hằng số),

(k) $y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1$, ($m$ là hằng số),

(l) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$,

(m) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.

12. Cho trước hàm f liên tục trên $[0, +\infty)$ và các hằng số thực $\omega > 0$, p, q, y_0, y_1. Giải các bài toán Cauchy cho phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau:

(a) $y'' = f(x)$, $x > 0$, và thỏa $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$;

(b) $y'' + \omega^2 y = f(x)$, $x > 0$, và thỏa $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$;

(c) $y'' - \omega^2 y = f(x)$, $x > 0$, và thỏa $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$;

(d) $y'' + py' + qy = f(x)$, $x > 0$, và thỏa $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí, (chủ biên), *Toán học Cao cấp*, *Tập II*, NXB Giáo dục, 1993.

[2] Nguyễn Đình Trí, (chủ biên), *Toán học Cao cấp*, *Tập III*, NXB Giáo dục, 1993.

[3] Đỗ Công Khanh, (chủ biên), *Toán Cao cấp*, *Giải tích hàm một biến*, (*Toán* 1), NXB. ĐHQG Tp.HCM, 2002.

[4] Đỗ Công Khanh, (chủ biên), *Toán Cao cấp*, *Giải tích hàm nhiều biến*, (*Toán* 3), NXB. ĐHQG Tp.HCM, 2003.

[5] Đỗ Công Khanh, (chủ biên), Toán Cao cấp, *Chuỗi và Phương trình vi phân*, (*Toán* 4), NXB. ĐHQG Tp. HCM, 2003.

[6] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình Giải tích-Hàm một biến*, NXB. ĐHQG Tp. HCM, 2002.

[7] Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đinh Ngọc Thanh, Đặng Đức Trọng, *Giáo trình Giải tích-Hàm nhiều biến*, NXB. ĐHQG Tp. HCM, 2002.

[8] Robert A. Adams, *Calculus, A complete course*, 1990.

[9] Nguyễn Thanh Vũ, *Phương trình vi phân*, NXB. ĐHQG Tp. HCM, 2001.

[10] Jean Marie Monier, *Giải tích 2, 4*, bản dịch tiếng Việt bởi Đoàn Quỳnh, Lý Hoàng Tú, NXB Giáo dục, 2000.

[11] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[12] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, E. Shikin, *Mathematical analysis for Engineers*, Vol. 1, 2, Mir Publishers Moscow, 1990.