LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

ntsonptnk@gmail.com

NỘI DUNG

1. Đại cương về đồ thị
2. Cây
3. Các bài toán đường đi
4. Đồ thị phẳng và bài toán tô màu đồ thị
5. Mạng và bài toán luồng trên mạng, bài toán cặp ghép

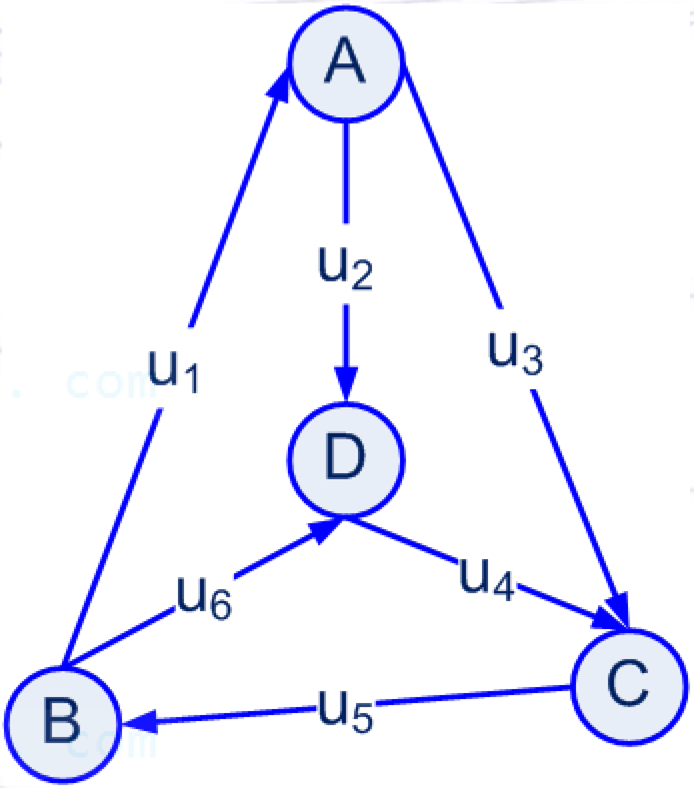
TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giáo trình Lý Thuyết Đồ Thị - *Dương Anh Đức, Trần Đan Thư*
2. Toán rời rạc – *Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa*
3. ...

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

ĐỊNH NGHĨA

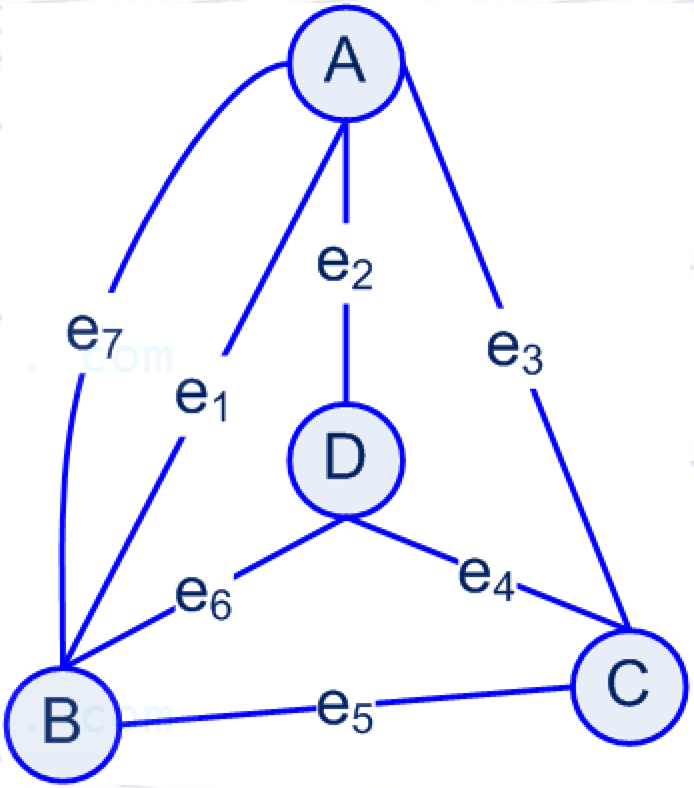
- Một đồ thị có hướng G=(X, U) được định nghĩa bởi:
  - Tập hợp X ≠ ∅ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
  - Tập hợp U là tập các cạnh của đồ thị;
  - Mỗi cạnh u∈U được liên kết với một cặp đỉnh $(i, j) \in X^2$.



ĐỊNH NGHĨA

✦ Một đồ thị vô hướng G=(X, E) được định nghĩa bởi:

- Tập hợp $X \neq \emptyset$ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
- Tập hợp E là tập các cạnh của đồ thị;
- Mỗi cạnh $e \in E$ được liên kết với một cặp đỉnh $\{i, j\} \in X^2$, không phân biệt thứ tự



ĐỒ THỊ HỮU HẠN

- Đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn được gọi là ĐỒ THỊ HỮU HẠN
- Học phần này chỉ làm việc các ĐỒ THỊ HỮU HẠN, tuy nhiên để ngắn gọn chúng ta chỉ dùng thuật ngữ ĐỒ THỊ và hiểu ngầm đó là đồ thị hữu hạn.

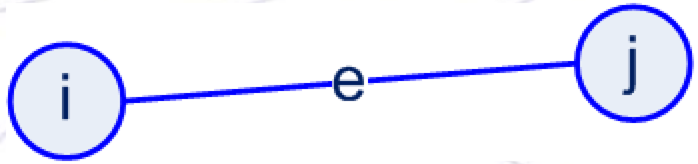
ĐỈNH KỀ

- Trên đồ thị có hướng, xét cạnh u được liên kết với cặp đỉnh (i, j):

  - Cạnh u **kề** với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j **kề** với cạnh u); có thể viết tắt u=(i, j). Cạnh u đi ra khỏi đỉnh i và đi vào đỉnh j
  - Đỉnh j được gọi là đỉnh kề của đỉnh i

ĐỈNH KỀ

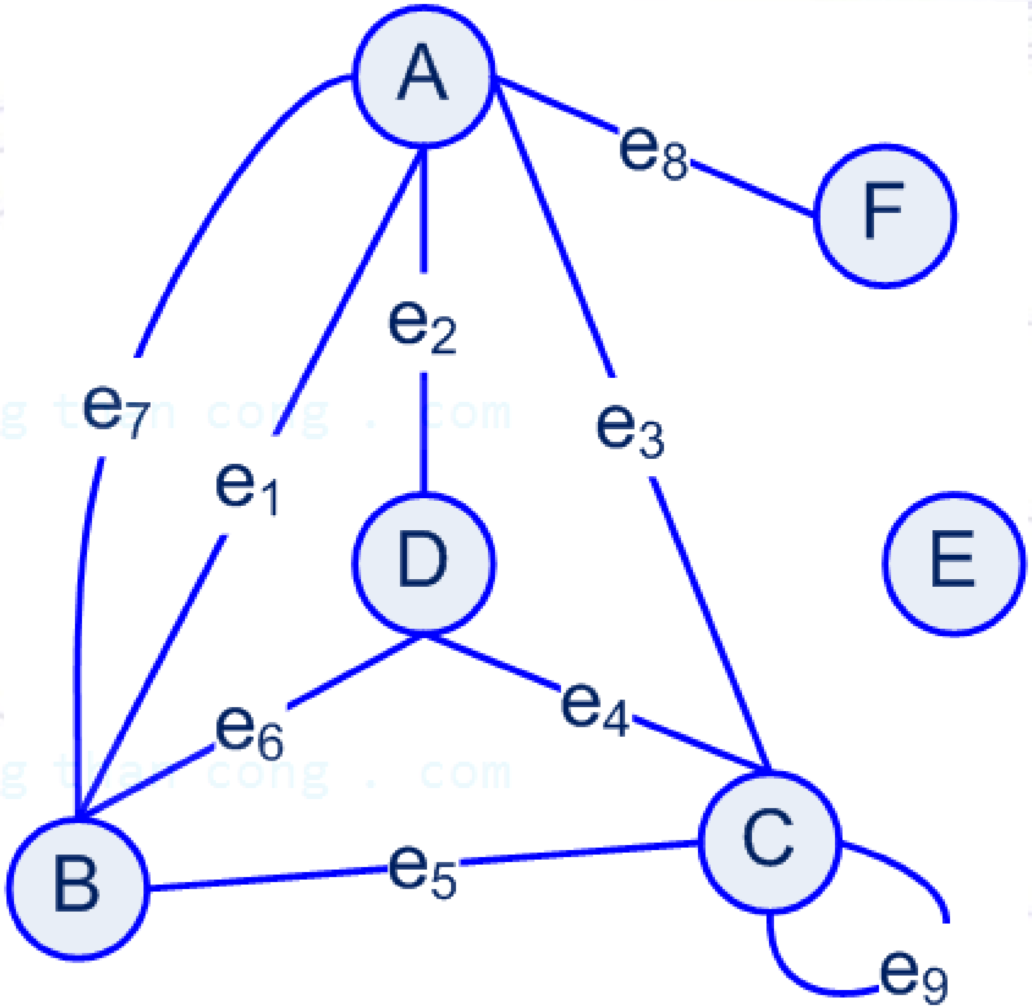
- Trên đồ thị vô hướng, xét cạnh e được liên kết với cặp đỉnh (i, j):



- Cạnh e **kề** với đỉnh i và đỉnh j (hay đỉnh i và đỉnh j **kề** với cạnh e); có thể viết tắt e=(i, j).
- Đỉnh i và đỉnh j được gọi là 2 đỉnh kề nhau (hay đỉnh i kề với đỉnh j và ngược lại, đỉnh j kề với đỉnh i)

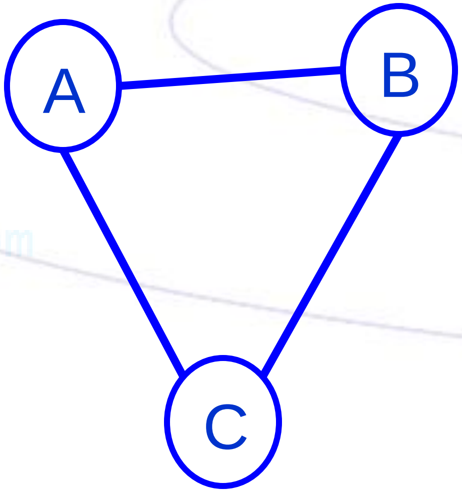
MỘT SỐ KHÁI NIỆM

- Cạnh song song
- Khuyên
- Đỉnh treo
- Đỉnh cô lập



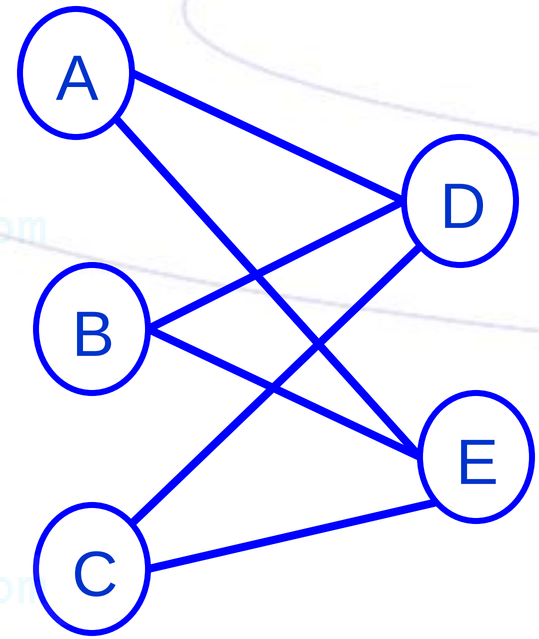
CÁC DẠNG ĐỒ THỊ

- Đồ thị RỖNG: tập cạnh là tập rỗng
- Đồ thị ĐƠN: không có khuyên và cạnh song song
- Đồ thị ĐỦ: đồ thị vô hướng, đơn, giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh.
  - Đồ thị đủ N đỉnh ký hiệu là K_N.
  - K_N có N(N-1)/2 cạnh.



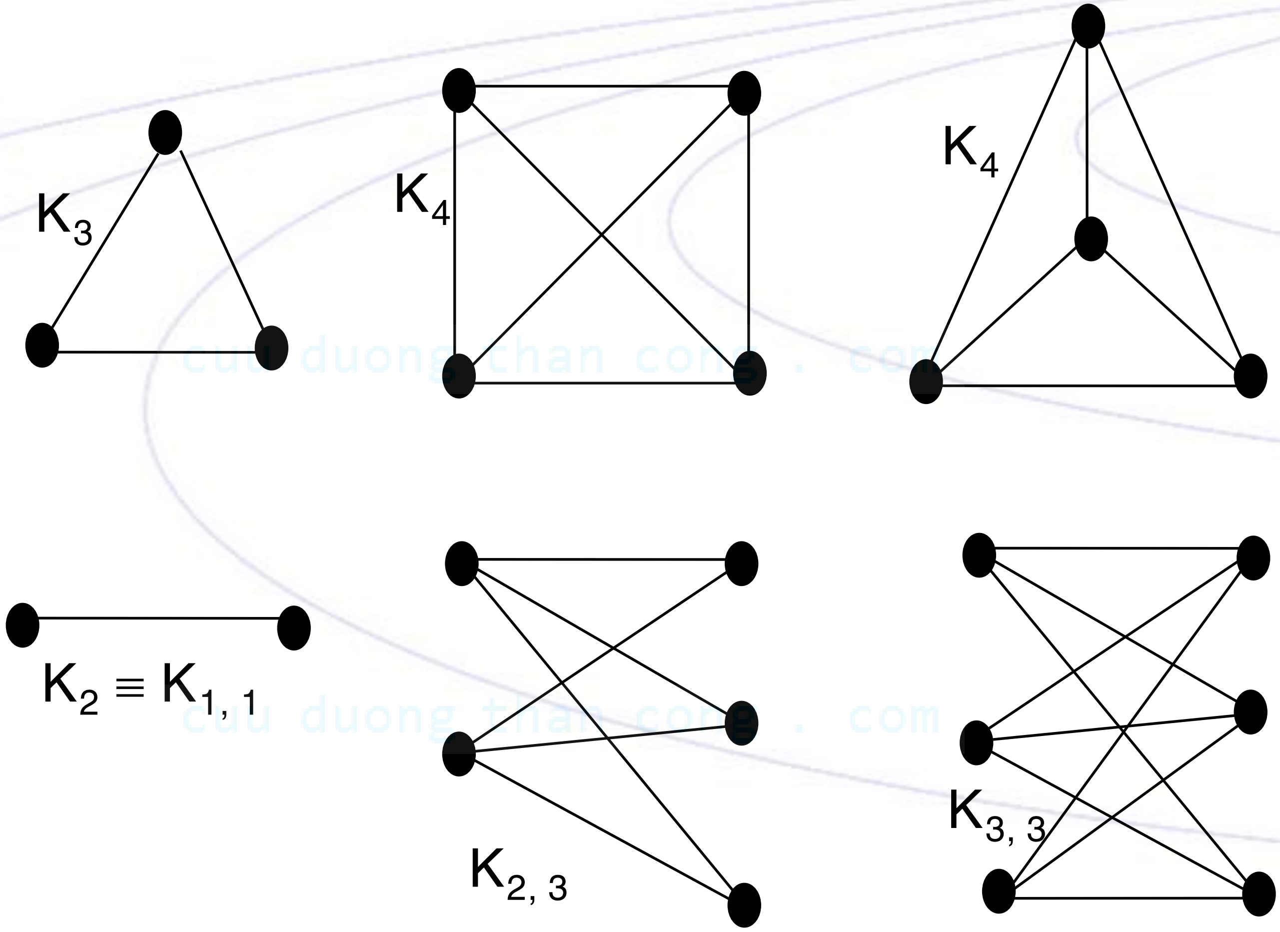
CÁC DẠNG ĐỒ THỊ

- Đồ thị LƯỠNG PHÂN: đồ thị G=(X, E) được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập X được chia thành hai tập X_1 và X_2 thỏa:
  - X_1 và X_2 phân hoạch X;
  - Cạnh chỉ nối giữa X_1 và X_2.



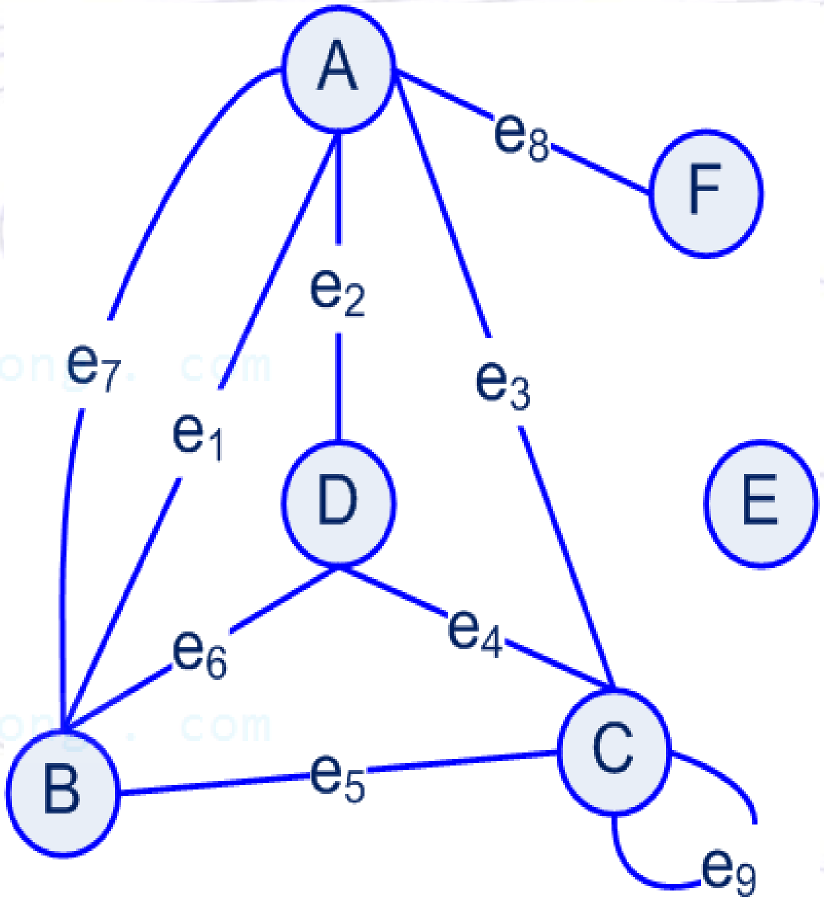
- Đồ thị LƯỠNG PHÂN ĐỦ: là đồ thị lưỡng phân đơn, vô hướng thỏa với $\forall(i, j)/i \in X_1$ và $j \in X_2$ có đúng một cạnh i và j.
  - $|X_1|$=N và $|X_2|$=M, ký hiệu $K_{M, N}$.

VÍ DỤ: ĐỒ THỊ ĐỦ



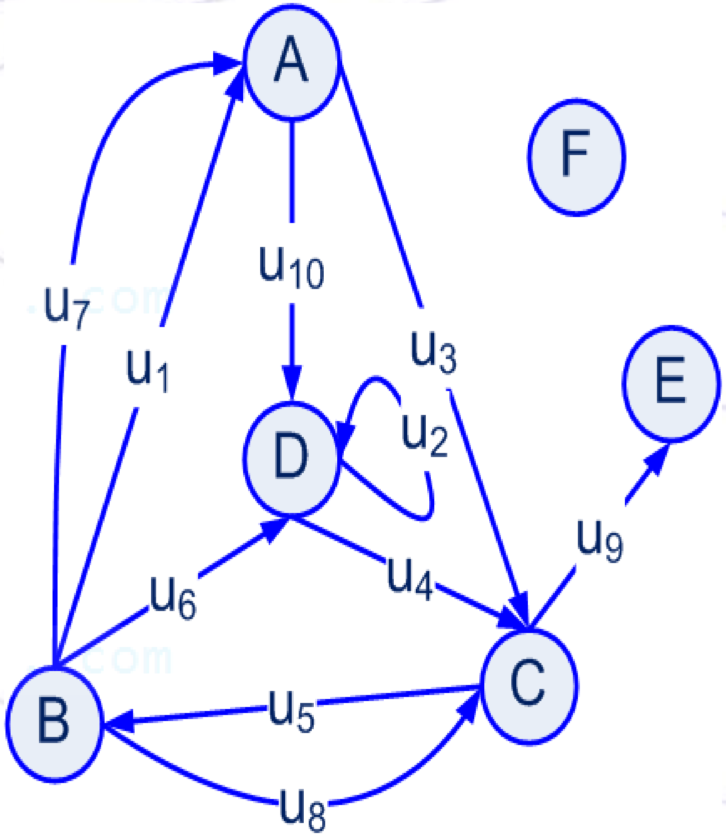
BẬC CỦA ĐỈNH

- Xét đồ thị vô hướng G
  - **Bậc của đỉnh x** trong đồ thị G là số các cạnh kề với đỉnh x, mỗi khuyên được tính hai lần, ký hiệu là **dG(x)** (hay **d(x)** nếu đang xét một đồ thị nào đó).



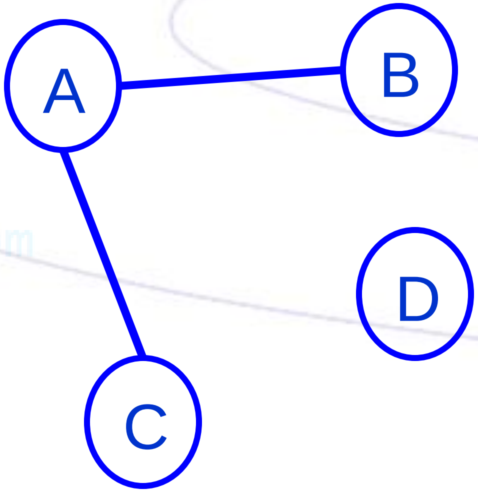
BẬC CỦA ĐỒ THỊ

- Xét đồ thị có hướng G
  - **Nửa bậc ngoài** của đỉnh x là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh x, ký hiệu $d^+(x)$.
  - **Nửa bậc trong** của đỉnh x là số các cạnh đi vào đỉnh x, ký hiệu $d^-(x)$.
  - **Bậc** của đỉnh x: $d(x)=d^+(x)+d^-(x)$



BẬC CỦA ĐỈNH

- Đỉnh TREO là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh CÔ LẬP là đỉnh có bậc bằng 0.



MỐI LIÊN HỆ BẬC - SỐ CẠNH

✦ Định lý:

- Xét đồ thị có hướng G=(X, U). Ta có:

$$\sum_{x \in X} d^{+}(x) = \sum_{x \in X} d^{-}(x) \quad \text{và} \quad \sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$$

- Xét đồ thị vô hướng G=(X, E). Ta có:

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|E|$$

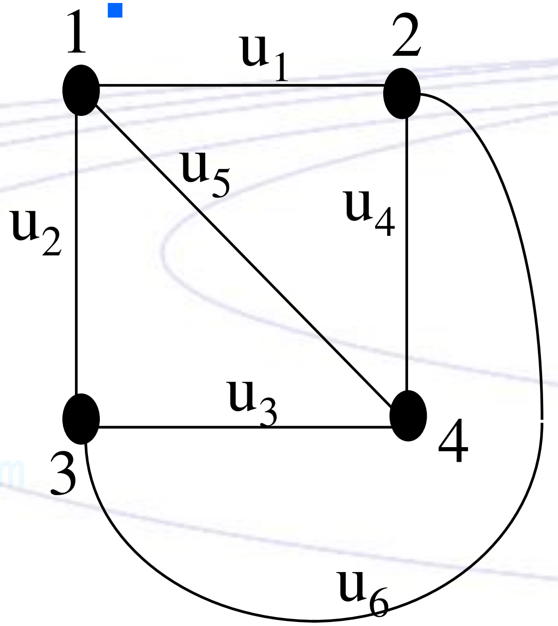
✦ Hệ quả: số lượng các đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.

ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

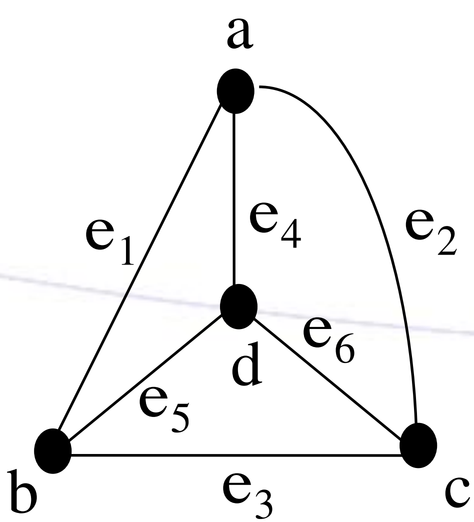
Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (X_1, E_1)$ và $G_2 = (X_2, E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện:

- $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ và $\delta: E_1 \rightarrow E_2$
- Nếu cạnh $e \in E_1$ kề với cặp đỉnh $\{x, y\} \subseteq X_1$ trong G_1 thì cạnh $\delta(e)$ sẽ kề với cặp đỉnh $\{\psi(x), \psi(y)\}$ trong G_2 (sự tương ứng cạnh).

G_1



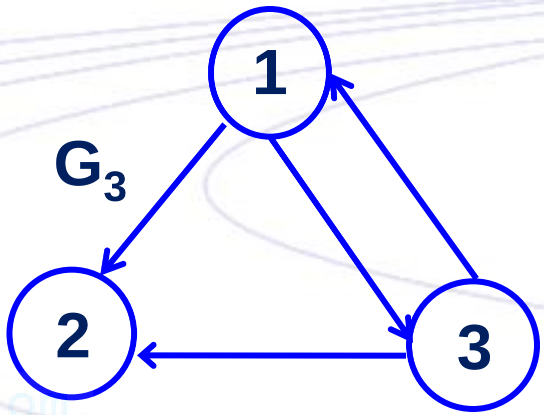
G_2

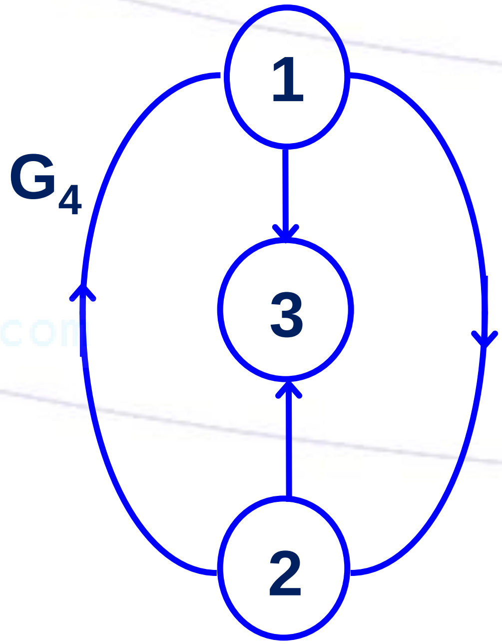


ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ

Hai đồ thị có hướng $G_1=(X_1, U_1)$ và $G_2=(X_2, U_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện:

- ψ: $X_1 \rightarrow X_2$ và δ: $U_1 \rightarrow U_2$
- Nếu cạnh $u \in U_1$ liên kết với cặp đỉnh $(x, y) \in X_1$ trong G_1 thì cạnh $\delta(u)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $(\psi(x), \psi(y))$ trong G_2 (sự tương ứng cạnh).

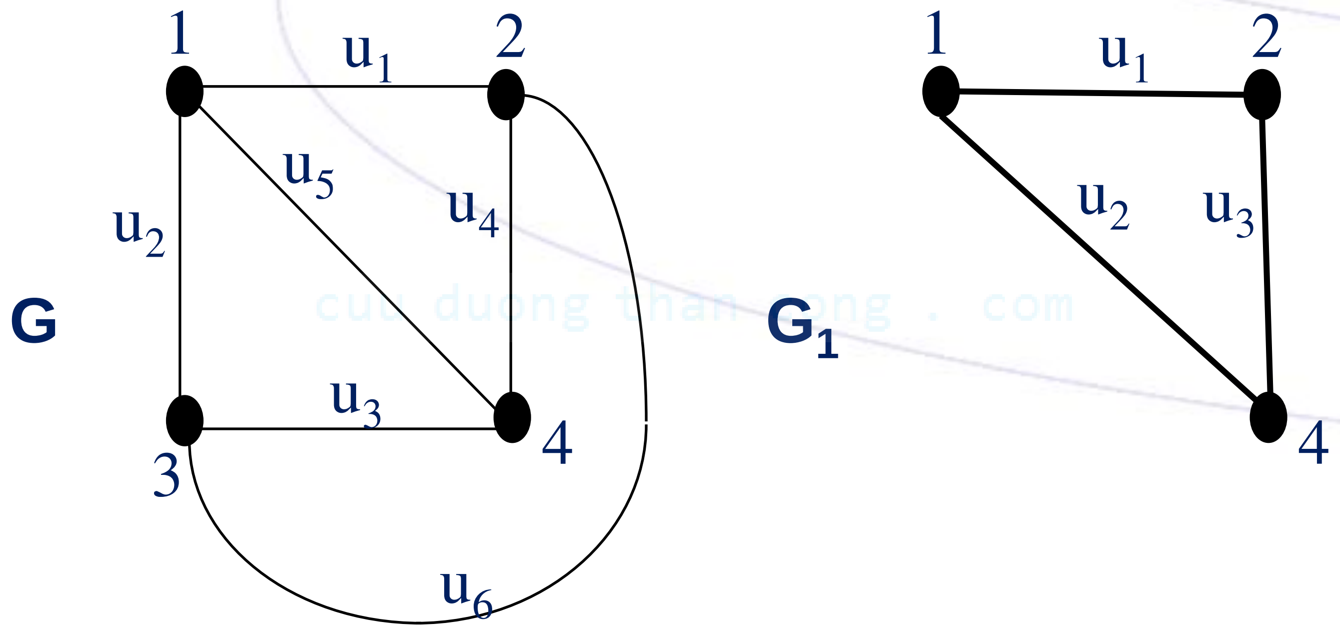




ĐỒ THỊ CON

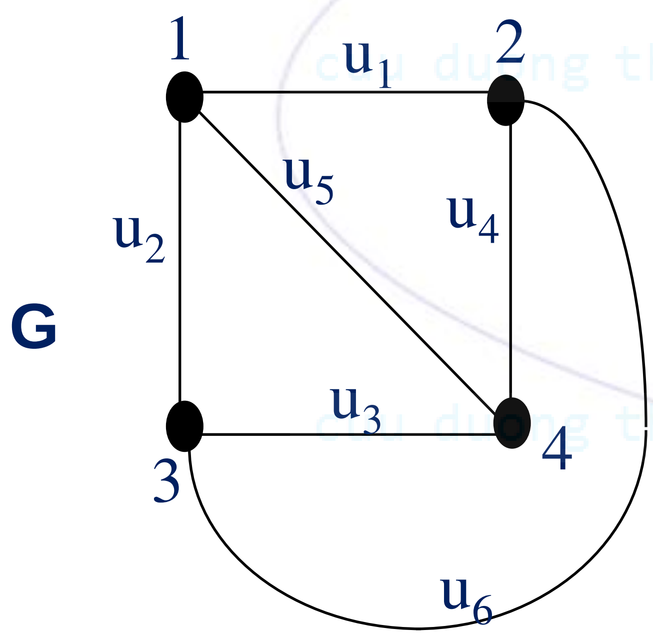
Xét hai đồ thị G=(X, U) và G_1=(X_1, U_1). G_1 được gọi là đồ thị con của G và ký hiệu $G_1 \leq G$ nếu:

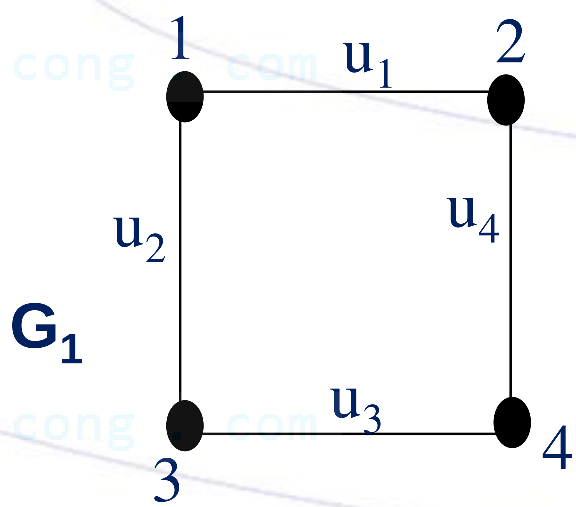
- $X_1 \subseteq X$; $U_1 \subseteq U$
- $\forall u=(i, j) \in U$ của G, nếu $u \in U_1$ thì $i, j \in X_1$



ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

Đồ thị con $G_1=(X_1, U_1)$ của đồ thị $G=(X, U)$ được gọi là đồ thị bộ phận của G nếu X=X1.

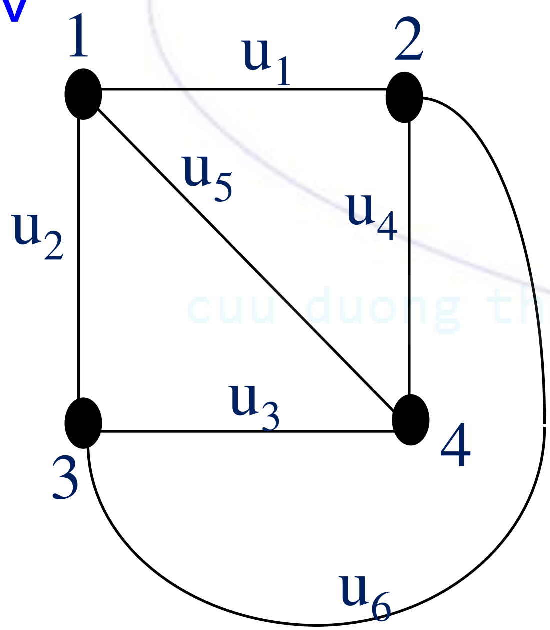




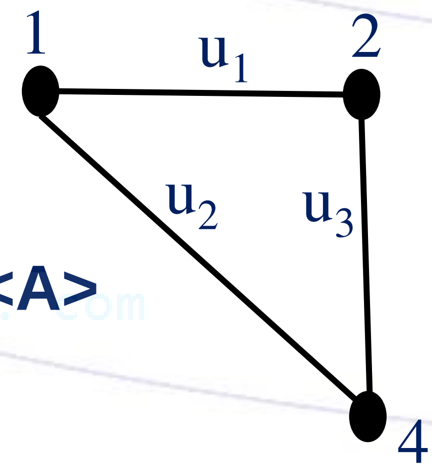
ĐỒ THỊ CON SINH BỞI TẬP ĐỈNH

- Cho đồ thị G=(X, U) và A $\subseteq$ X. Đồ thị con sinh bởi tập đỉnh A, ký hiệu <A> (A, V), trong đó:
  - (i) tập cạnh V $\subseteq$ U
  - (ii) Gọi u=(i, j) $\in$ U là một cạnh của G, nếu i, j $\in$ A thì u $\in$ V

G



<A>



A={1, 2, 4}

DÂY CHUYỀN, CHU TRÌNH

- Một dây chuyền trong G=(X, U) là một đồ thị con C=(V, E) của G với:
  - V = {x_1, x_2, …, x_M}
  - E = {u_1, u_2, …, u_{M-1}} với u_1=x_1x_2, u_2=x_2x_3, …, u_{M-1}=$x_{M-1}x_M$; liên kết x_ix_{i+1} không phân biệt thứ tự.
- Khi đó, x_1 và x_M được nối với nhau bằng dây chuyền C. x_1 là đỉnh đầu và x_M là đỉnh cuối của C.
- Số cạnh của C được gọi là độ dài của C.
- Khi các cạnh hoàn toàn xác định bởi cặp đỉnh kề, dây chuyền có thể viết gọn (x_1, x_2, …, x_M)

DÂY CHUYỀN, CHU TRÌNH

- Dây chuyền SƠ CẤP: dây chuyền không có đỉnh lặp lại.
- CHU TRÌNH: là một dây chuyền có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

ĐƯỜNG ĐI, MẠCH

- Một ĐƯỜNG ĐI trong G=(X, U) là một đồ thị con P=(V, E) của G với:
  - $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$
  - $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_{M-1}\}$ với $u_1=x_1x_2$, $u_2=x_2x_3$, …, $u_{M-1}=x_{M-1}x_M$; liên kết x_ix_{i+1} theo đúng thứ tự.
- Khi đó, có đường đi P nối từ x_1 đến x_M. x_1 là đỉnh đầu và x_M là đỉnh cuối của P.
- Số cạnh của P được gọi là độ dài của P.
- Khi các cạnh hoàn toàn xác định bởi cặp đỉnh kề, đường đi có thể viết gọn $(x_1, x_2, \ldots, x_M)$

ĐƯỜNG ĐI, MẠCH

- Đường đi SƠ CẤP: đường đi không có đỉnh lặp lại.
- MẠCH: là một đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối
- Với **đồ thị vô hướng**:
  - Dây chuyền ≡ đường đi, chu trình ≡ mạch.
  - Do đó, thuật ngữ đường đi cũng được dùng cho đồ thị vô hướng.
- Mạch trong đồ thị có hướng còn được gọi là "chu trình có hướng". Đường đi trong đồ thị có hướng cũng được gọi là "đường đi có hướng" để nhấn mạnh.

THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

- Cho đồ thị G=(X, U). Ta định nghĩa một quan hệ LIÊN KẾT ~ như sau trên tập đỉnh X:

  $\forall$i, j$\in$X, i ~ j $\Leftrightarrow$ (i$\equiv$j hoặc có dây chuyền nối i với j).

- Quan hệ nầy có ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ tương đương. Do đó tập X được phân hoạch thành các lớp tương đương.

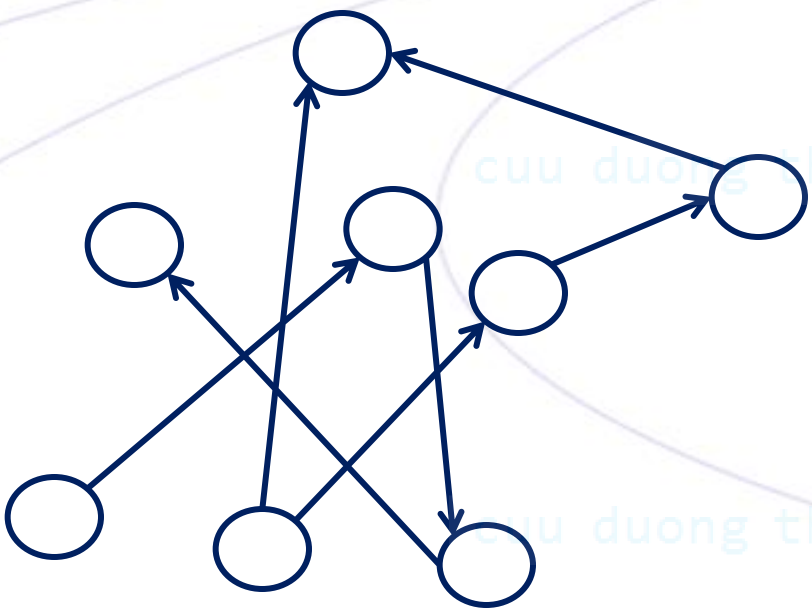
THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

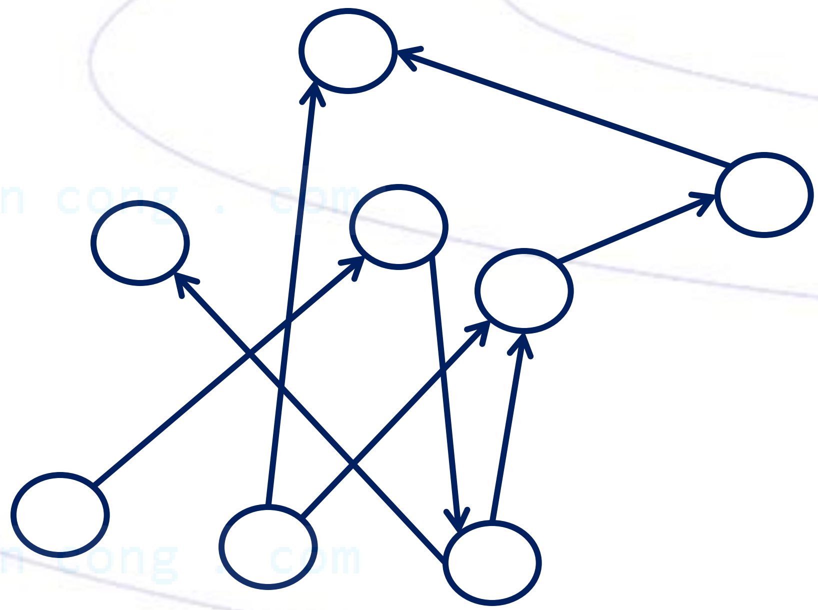
Định nghĩa:

- Một thành phần liên thông của đồ thị là một lớp tương đương được xác định bởi quan hệ LIÊN KẾT $\sim$;
- Số thành phần liên thông của đồ thị là số lượng các lớp tương đương;
- Đồ thị liên thông là đồ thị chỉ có một thành phần liên thông.
- Khi một đồ G gồm p thành phần liên thông G_1, G_2, …, G_p thì các đồ thị G_i cũng là các đồ thị con của G và $dG(x) = dG_i(x)$, $\forall x$ của G_i.

THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

G gồm 2 thành phần liên thông, H là đồ thị liên thông





THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

Thuật toán xác định các thành phần liên thông

Input: đồ thị G=(X, E), tập X gồm N đỉnh 1, 2, …, N

Output: các đỉnh của G được gán nhãn là số hiệu của thành phần liên thông tương ứng

1. Khởi tạo biến *label=0* và gắn nhãn 0 cho tất cả các đỉnh
2. Duyệt qua tất cả các đỉnh $i \in X$

   Nếu nhãn của *i* là 0

   1. *label* = *label* + 1

   2. Gán nhãn cho tất cả các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với *i* là *label*

THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG

Thuật toán gán nhãn các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với đỉnh i – Visit(i, label)

<u>Input</u>: đồ thị G=(X, E), đỉnh *i*, nhãn *label*

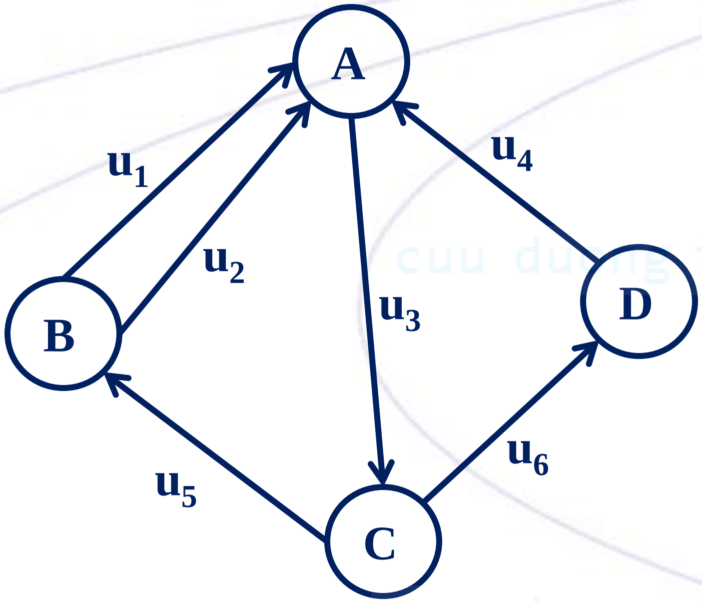
<u>Output</u>: các đỉnh cùng thuộc thành phần liên thông với i được gắn nhãn *label*

1. Gắn nhãn label cho đỉnh *i*
2. Duyệt qua tất cả các đỉnh $j \in X$ và có cạnh nối với *i*

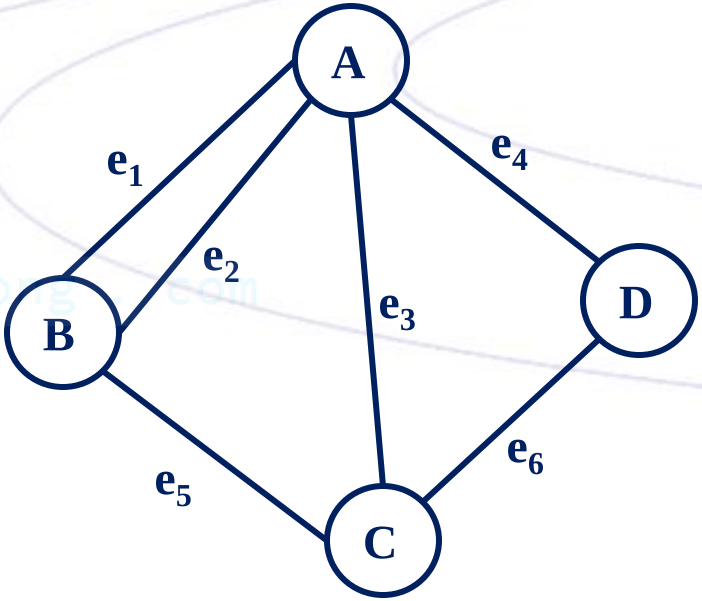
    Nếu nhãn của *j* là 0

        Visit(*j*, *label*)

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG HÌNH VẼ



G



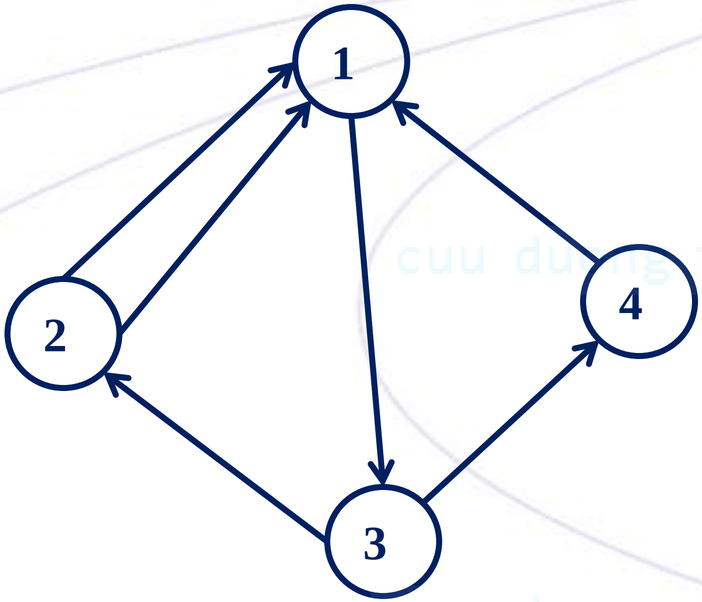
H

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

Ma trận KỀ:

- Xét đồ thị G=(X, U), giả sử tập X gồm N đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, tập U gồm M cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$.
- Ma trận kề của đồ thị G, ký hiệu B(G), là một ma trận nhị phân cấp NxN $B=(B_{ij})$ với B_{ij} được định nghĩa:
  - $B_{ij}=1$ nếu có cạnh nối x_i tới x_j,
  - $B_{ij}=0$ trong trường hợp ngược lại.

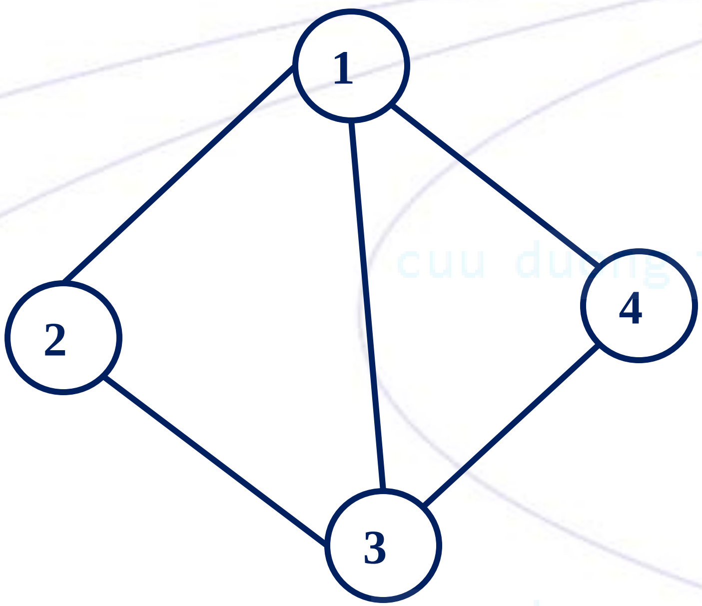
BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN KỀ



G

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN KỀ



G

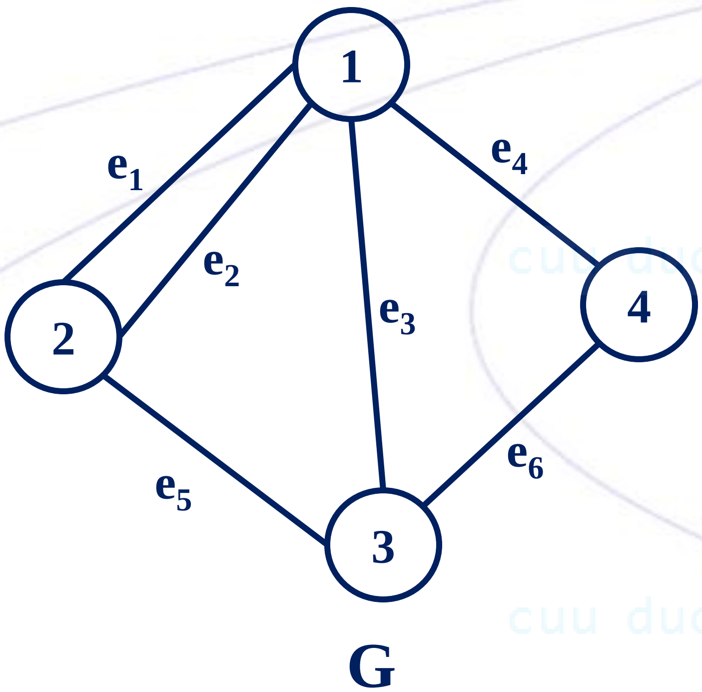
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

Ma trận LIÊN THUỘC của đồ thị vô hướng:

- Xét đồ thị G=(X, U) vô hướng, giả sử tập X gồm N đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, tập U gồm M cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$.
- Ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp NxM $A=(A_{ij})$ với A_{ij} được định nghĩa:
  - $A_{ij}=1$ nếu đỉnh x_i kề với cạnh u_j,
  - $A_{ij}=0$ nếu ngược lại.

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN LIÊN THUỘC



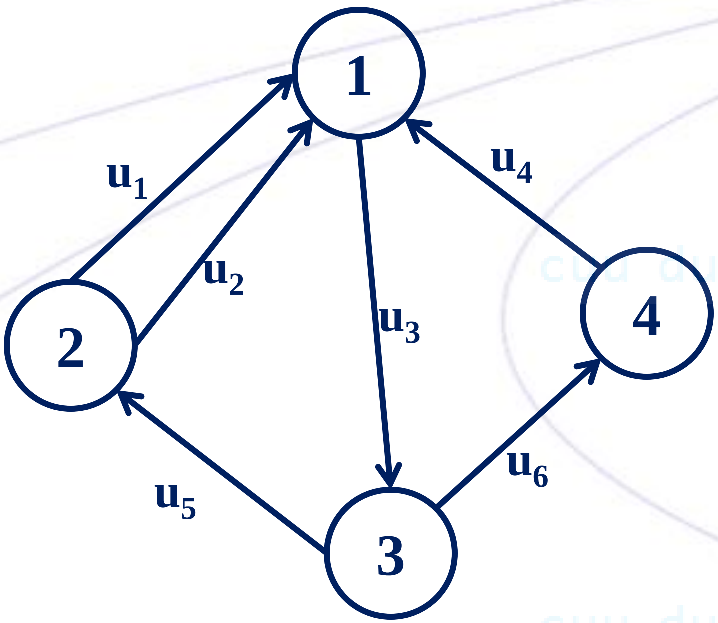
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG MA TRẬN

Ma trận LIÊN THUỘC của đồ thị có hướng:

- Xét đồ thị G=(X, U) có hướng, giả sử tập X gồm N đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, tập U gồm M cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$.
- Ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp NxM $A=(A_{ij})$ với A_{ij} được định nghĩa:
  - $A_{ij}=1$ nếu cạnh u_j đi ra khỏi đỉnh x_i,
  - $A_{ij}=-1$ nếu cạnh u_j đi vào đỉnh x_i,
  - $A_{ij}=0$ trong các trường hợp khác.

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ
BẰNG MA TRẬN LIÊN THUỘC



G

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ BẰNG NNLT C++

```
#define MAX 100
class Graph
{
    protected:
    int nVertex;        //số đỉnh của đồ thị, các đỉnh được
                        //đánh số từ 0
    int labels[MAX];  //nhãn của các đỉnh
    int degrees[MAX];       //bậc các đỉnh
    unsigned char B[MAX][MAX]; //ma trận kề
    void Visit(int i, int label);
    public:
    void GetData(const char *filename);
    int FindConnected();
    …
}
```

Source code: nhập dữ liệu từ textfile

```
void Graph::GetData(const char *filename)
{
	//nhập dữ liệu từ tập tin văn bản
	ifstream fin;
	fin.open(filename);
	fin >> nVertex;
	for (int i = 0; i < nVertex; ++i)
		for (int j = 0; j < nVertex; ++j)
			fin >> B[i][j];
	fin.close();
}
```

Source code: xác định bậc của đỉnh

```
void Graph::CountDegree()
{
	//xác định bậc của các đỉnh, đồ thị vô hướng
	for(int i=0;i<nVertex; i++)
		for(degrees[i]=0, int j=0;
						j<nVertex; j++)
			degrees[i] += B[i][j];
}
```

Source code: gán nhãn 1 TPLT

```
void Graph::Visit(int i, int label)
{
      labels[i] = label;
      for (int j=0; j<N; j++)
            if((labels[j]==0)&&(B[i][j]||B[j][i])
                  Visit(j, label);
}
```

Source code: gán nhãn tất cả TPLT

```
int Graph::FindConnected()
{
	int i, label;
	for (int i=0; i<N; i++)
		labels[i] = 0;
	label = 0;
	for (int i=0; i<N; i++)
		if (labels[i]==0)
		{
			label ++;
			Visit(j, label)
		}
	return label;	//số thành phần liên thông
}
```

BÀI TẬP

1. G là một đồ thị đơn, vô hướng có số đỉnh N>3. Chứng minh G có chứa 2 đỉnh cùng bậc.
2. Đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ. Chứng minh tồn tại một dây chuyền nối hai đỉnh đó với nhau.
3. Xét đồ thị G đơn, vô hướng gồm N đỉnh, M cạnh và P thành phần liên thông.

   a. Chứng minh: $M \leq (N-P)(N-P+1)/2$,

      suy ra nếu $M > (N-1)(N-2)/2$ thì G liên thông.

   a. Một đồ thị đơn có 10 đỉnh, 37 cạnh thì có chắc liên thông hay không?

BÀI TẬP

4. Đồ thị G đơn, vô hướng gồm N đỉnh và $d(x) \geq (N-1)/2$ với mọi đỉnh x. Chứng minh G liên thông.
5. Đồ thị vô hướng G liên thông gồm N đỉnh. Chứng minh số cạnh của G $\geq$ N-1.
6. Xét đồ thị G vô hướng đơn. Gọi x là đỉnh có bậc nhỏ nhất của G. Giả sử $d(x) \geq k \geq 2$ với k nguyên dương. Chứng minh G chứa một chu trình sơ cấp có chiều dài lớn hơn hay bằng k+1.

BÀI TẬP

7. Cho G là đồ thị vô hướng liên thông. Giả sử C_1 và C_2 là 2 dây chuyền sơ cấp trong G có số cạnh nhiều nhất. Chứng minh C_1 và C_2 có đỉnh chung.

8. G là đồ thị vô hướng không khuyên và $d(x) \geq 3$ với mọi đỉnh x. Chứng minh G có chứa chu trình với số cạnh chẵn.