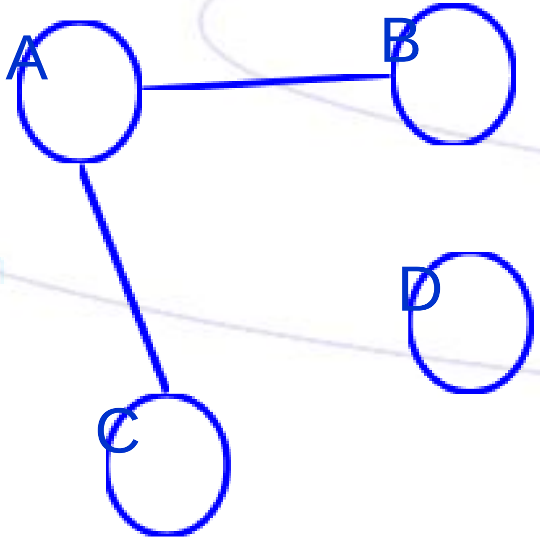
INFOGATE

CÂY

ntsonptnk@gmail.com

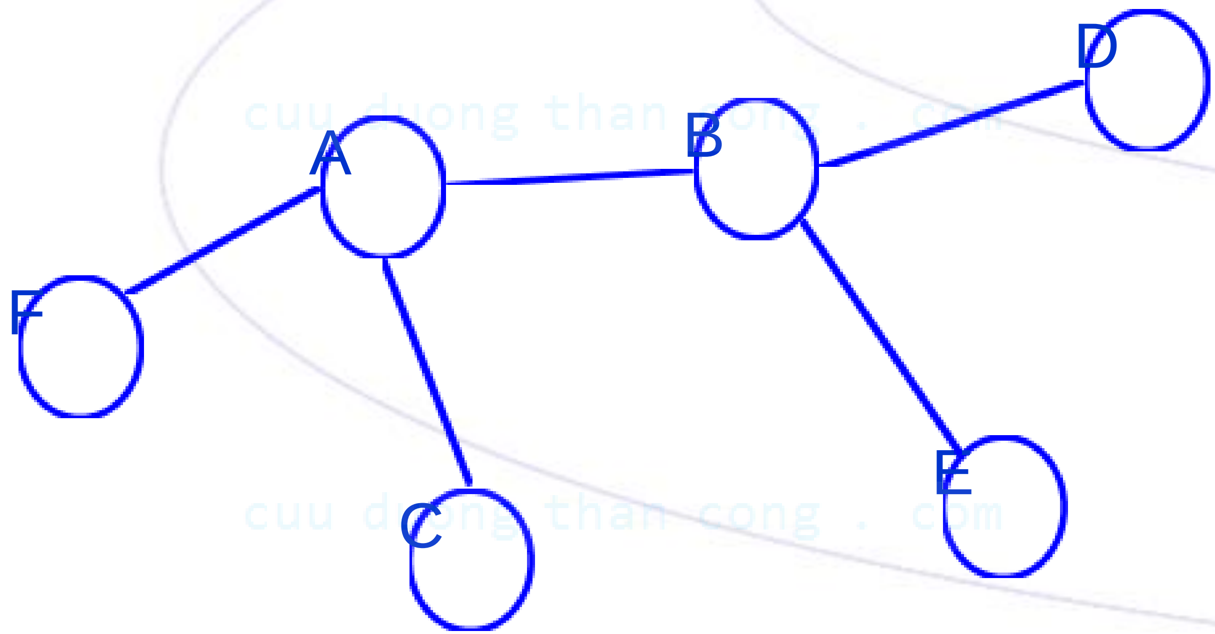
ĐỊNH NGHĨA

- CÂY là đồ thị liên thông và không có chu trình
- RỪNG là một đồ thị gồm p thành phần liên thông, trong đó mỗi thành phần liên thông là một cây
- *<u>Lưu ý</u>: cây không chứa khuyên và cạnh song song.*



SỰ TỒN TẠI ĐỈNH TREO

Định lý: Một cây T gồm N đỉnh với N □ 2 chứa ít nhất hai đỉnh treo



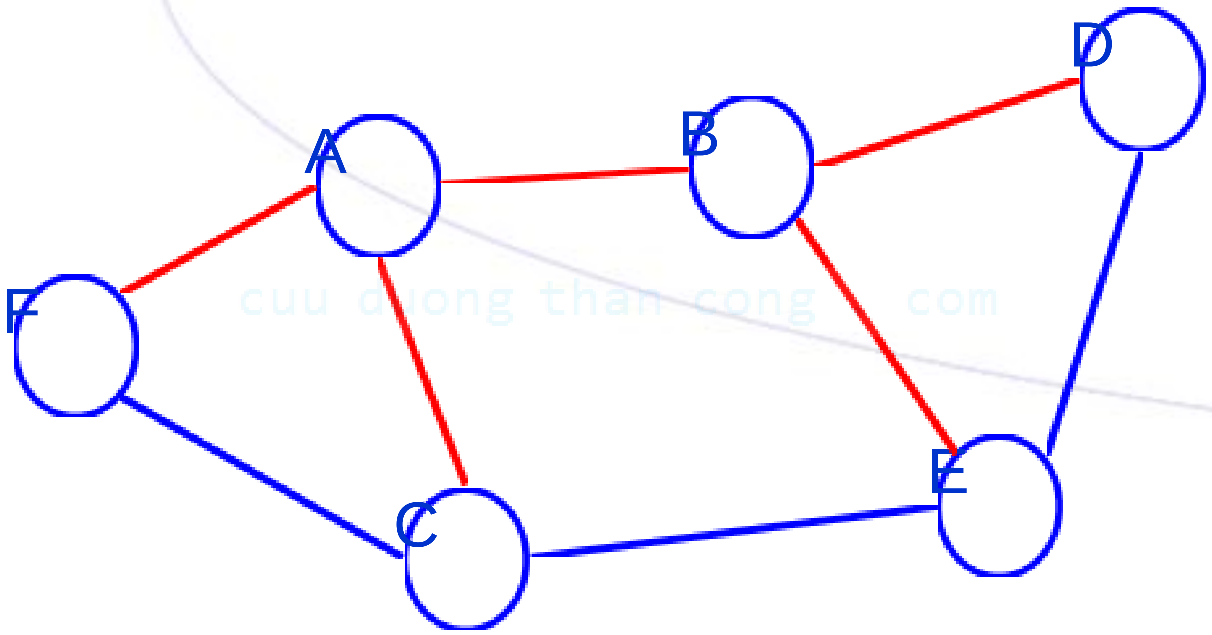
CÁC ĐỊNH NGHĨA TƯƠNG ĐƯƠNG

Xét đồ thị G gồm N đỉnh, các điều sau đây tương đương.

1. Đồ thị G là cây.
2. Giữa hai đỉnh bất kỳ của G, tồn tại duy nhất một dây chuyền nối chúng với nhau.
3. G liên thông tối tiểu.
4. Thêm một cạnh nối 2 đỉnh bất kỳ của G thì G sẽ chứa một chu trình duy nhất.
5. G liên thông và có n-1 cạnh
6. G không có chu trình và có n-1 cạnh

CÂY TỐI ĐẠI

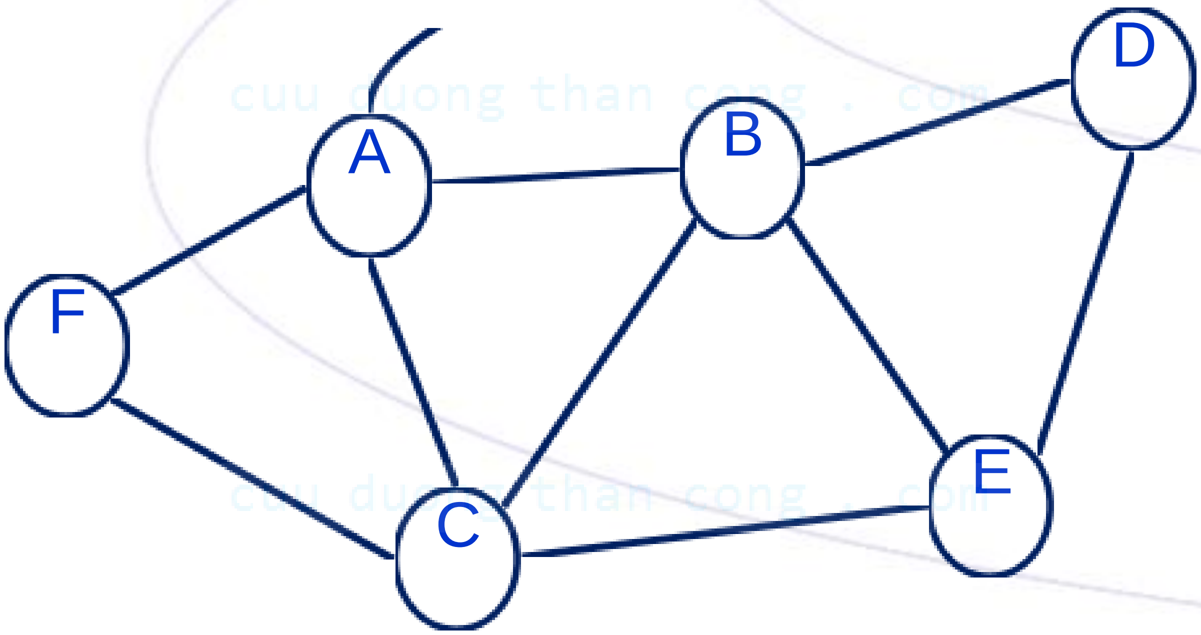
- **Định nghĩa:** Cho G=(X, E) là một đồ thị liên thông và T=(X, F) là một đồ thị bộ phận của G. Nếu T là cây thì T được gọi là một cây tối đại của G.
- Các tên gọi khác: cây khung, cây bao trùm, cây phủ



INFOGATE

SỰ TỒN TẠI CỦA CÂY TỐI ĐẠI

- **Định lý:** Mọi đồ thị liên thông đều có chứa ít nhất một cây tối đại



XÁC ĐỊNH CÂY TỐI ĐẠI

Thuật toán tựa PRIM

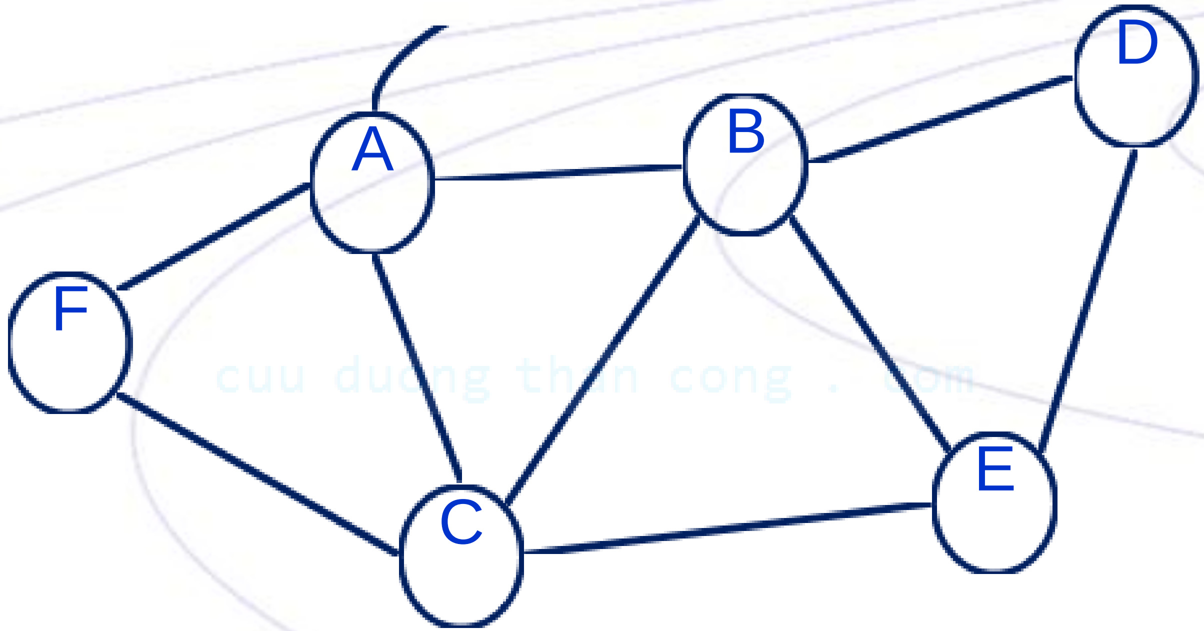
Input: đồ thị liên thông G=(X, E), X gồm N đỉnh

Output: cây tối đại T=(V, U) của G

1. Chọn tùy ý v X và khởi tạo V := { v }; U := ;
2. Chọn w X \ V sao cho e E, e nối w với một đỉnh trong V
3. V := V {w}; U := U {e}
4. Nếu U đủ N-1 cạnh thì dừng, ngược lại lặp từ bước 2.

INFOGATE

XÁC ĐỊNH CÂY TỐI ĐẠI



V = {F, A, B, E, C, D}   U = {FA, AB, BE, FC, ED}

CÂY TỐI ĐẠI NGẮN NHẤT

Định nghĩa: Cho G=(X, E)

1. G được gọi là ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG nếu mỗi cạnh của G được tương ứng với một số thực, nghĩa là có một ánh xạ như sau:

L: E □ □ □|R

e |□ □ □L(e)

1. TRỌNG LƯỢNG của một cây T của G bằng với tổng trọng lượng các cạnh trong cây:

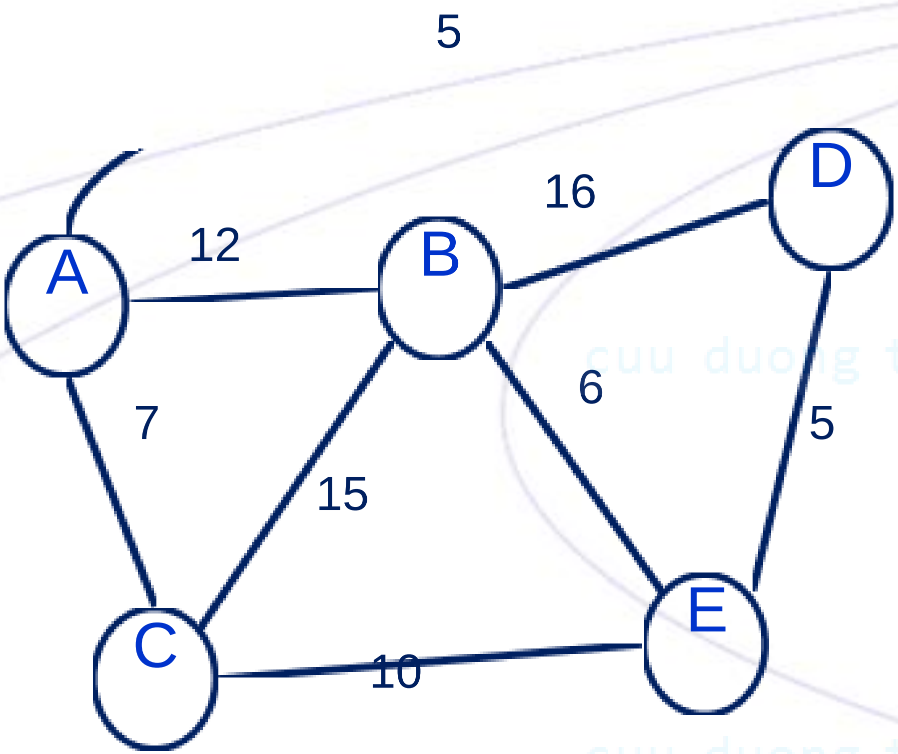
L(T) = □(e□T)L(e)

1. CÂY TỐI ĐẠI NGẮN NHẤT là cây tối đại có trọng lượng nhỏ nhất của G

MA TRẬN TRỌNG LƯỢNG

- Trong các thuật toán tìm cây tối đại ngắn nhất chúng ta có thể bỏ đi hướng các cạnh và các khuyên; đối với các cạnh song song thì có thể bỏ đi và chỉ để lại một cạnh trọng lượng nhỏ nhất trong chúng. Vì vậy đồ thị có thể biểu diễn bằng MA TRẬN TRỌNG LƯỢNG LNxN được qui ước như sau:
  - ●Lij = trọng lượng cạnh nhỏ nhất nối i đến j (nếu có)
  - ●Lij = □ nếu không có cạnh nối i đến j

MA TRẬN TRỌNG LƯỢNG



XÁC ĐỊNH CÂY TỐI ĐẠI NGẮN NHẤT

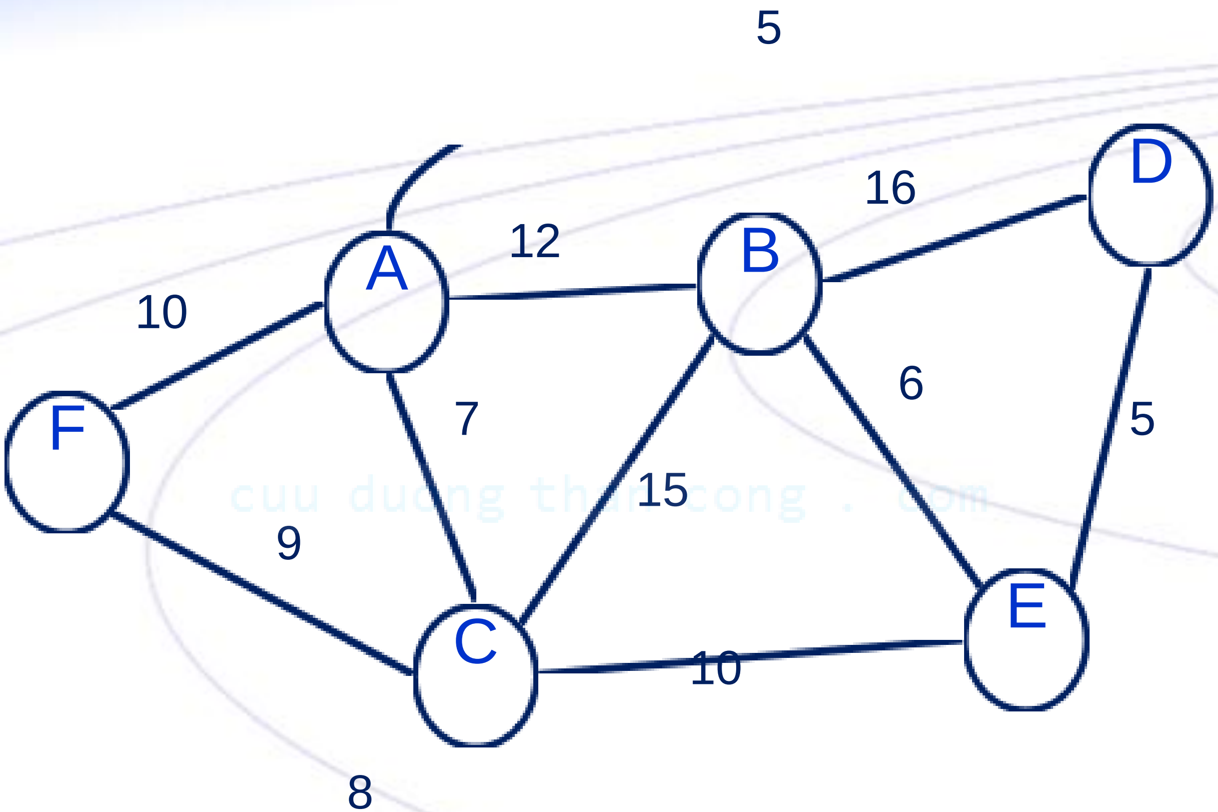
Thuật toán PRIM

Input: đồ thị liên thông G=(X, E), X gồm N đỉnh

Output: cây tối đại ngắn nhất T=(V, U) của G

1. Chọn tùy ý v □ X và khởi tạo V := { v }; U := □;
2. Chọn cạnh e có trọng lượng nhỏ nhất trong các cạnh (w, v) mà w □ X\V và v □ V
3. V := V □ {w}; U := U □ {e}
4. Nếu U đủ N-1 cạnh thì dừng, ngược lại lặp từ bước 2.

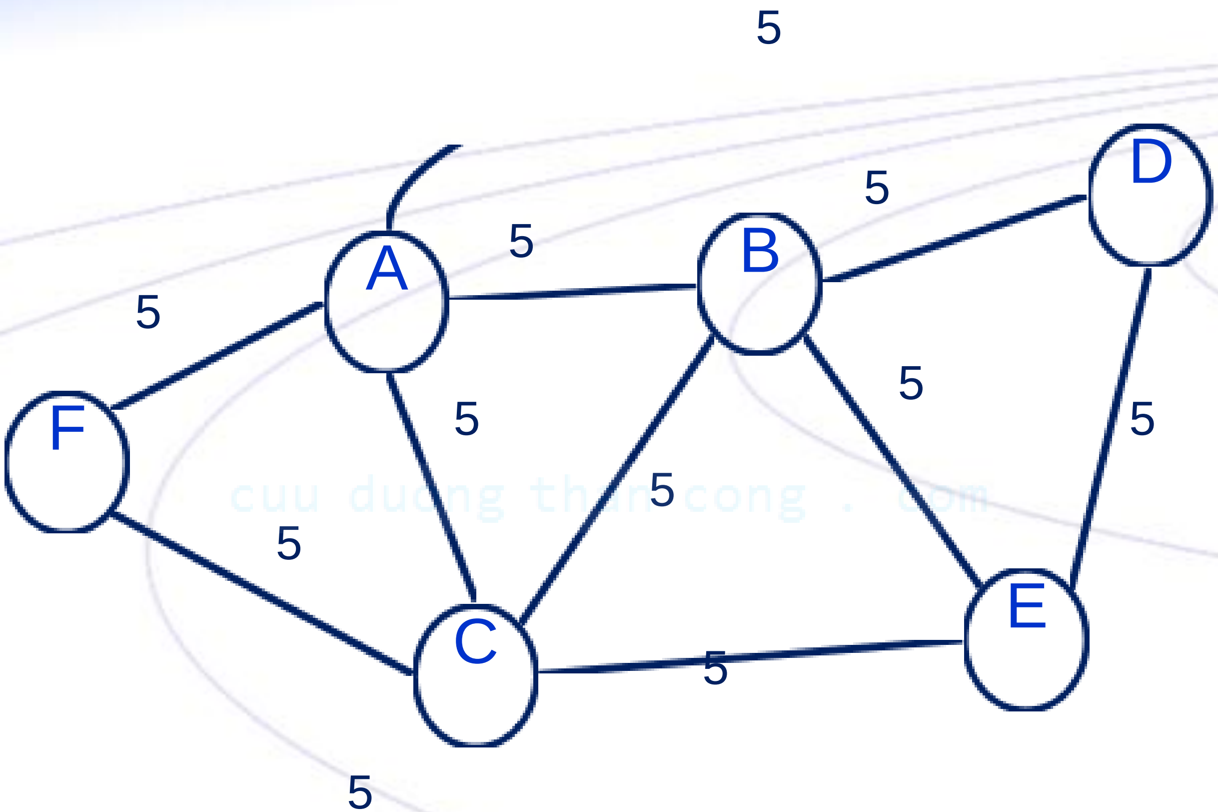
THUẬT TOÁN PRIM



V = {F, C, A, D, E, B} U = {FC, CA, AD, DE, EB}

Trọng lượng: 32

THUẬT TOÁN PRIM - nháp



XÁC ĐỊNH CÂY TỐI ĐẠI NGẮN NHẤT

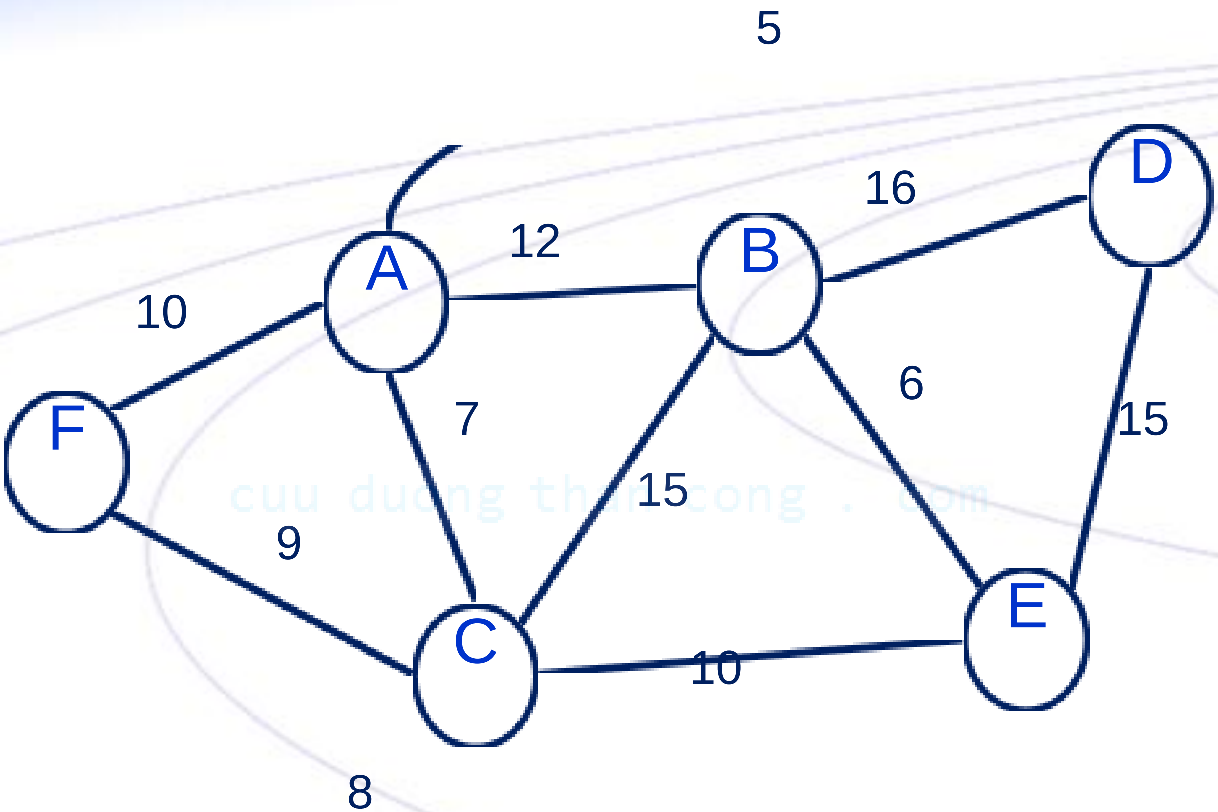
Thuật toán KRUSKAL

Input: đồ thị G=(X, E) liên thông, X gồm N đỉnh

Output: cây tối đại ngắn nhất T=(V, U) của G

1. Sắp xếp các cạnh trong G tăng dần theo trọng lượng; khởi tạo T := .
2. Lần lượt lấy từng cạnh e thuộc danh sách đã sắp xếp. Nếu T+{e} không chứa chu trình thì kết nạp e vào T: T := T+{e}.
3. Nếu T đủ N-1 cạnh thì dừng; ngược lại, lặp bước 2.

THUẬT TOÁN KRUSKAL



E = {AD, DE, EB, AC, CC, FC, AF, CE, AB, BC, DB}

Trọng lượng: 32

THUẬT TOÁN TỰA PRIM – CÀI ĐẶT

```
Graph Graph::SpanningTree()
{
//Tìm cây khung của đồ thị
}
```

THUẬT TOÁN PRIM – CÀI ĐẶT

```
Graph Graph::MST_Prim()
{
//Tìm cây tối đại ngắn nhất của đồ thị có trọng
}
```

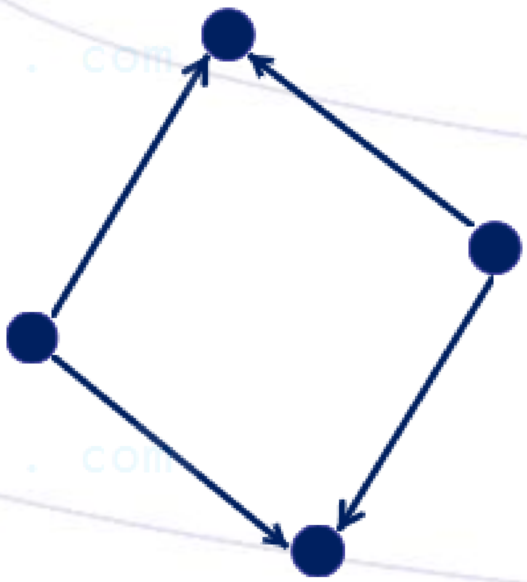
THUẬT TOÁN KRUSKAL – CÀI ĐẶT

```
Graph Graph::MST_Kruskal()
{
//Tìm cây tối đại ngắn nhất của đồ thị có trọng
}
```

ĐỒ THỊ CÓ GỐC

Định nghĩa: Cho đồ thị có hướng G=(X, E). Ta nói G là một ĐỒ THỊ CÓ GỐC nếu tồn tại đỉnh r□X sao cho từ r có đường đi đến v, v□X

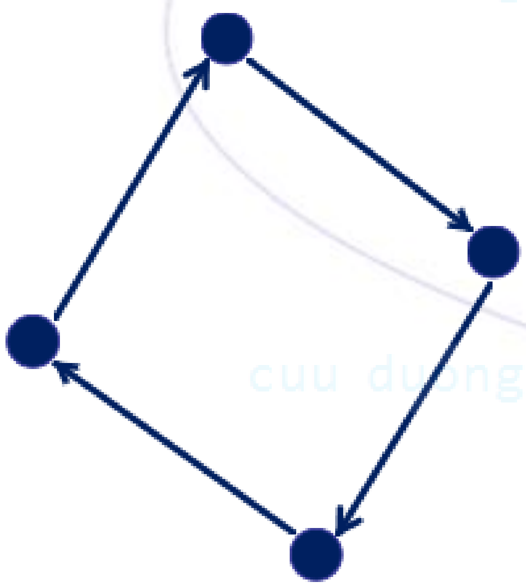
G1



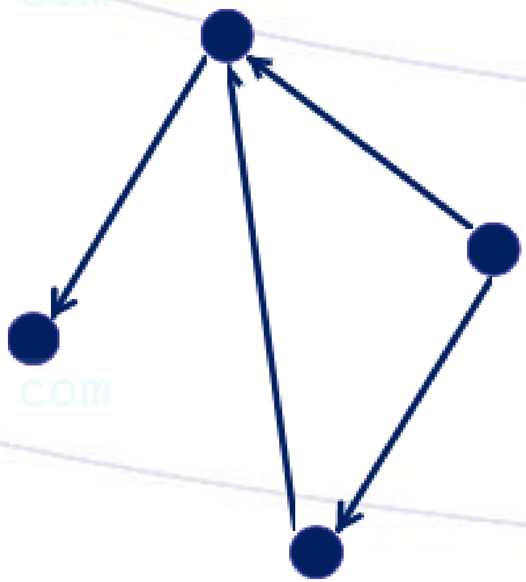
G2

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG MẠNH

Định nghĩa: Cho đồ thị có hướng G=(X, E). Ta nói G là ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG MẠNH khi và chỉ khi i,j□X luôn tồn tại đường đi từ i đến j và đường đi từ j đến i.



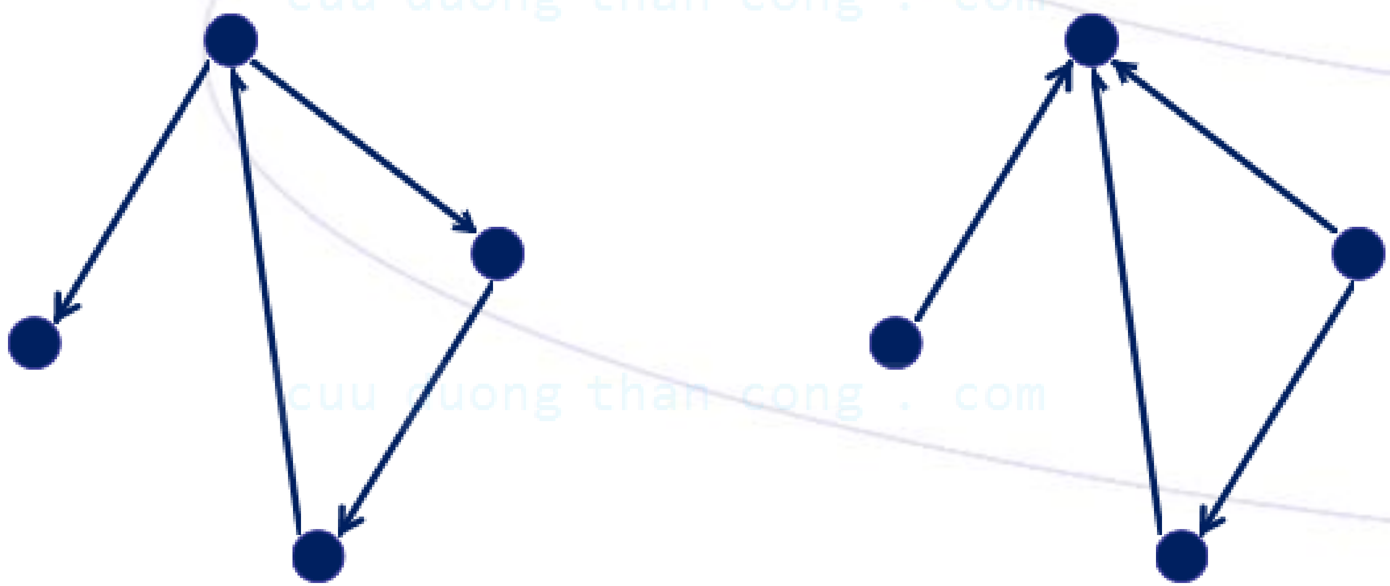
G1



G2

ĐỒ THỊ TỰA LIÊN THÔNG MẠNH

Định nghĩa: Cho đồ thị có hướng G=(X, E). Ta nói G là ĐỒ THỊ TỰA LIÊN THÔNG MẠNH khi và chỉ khị i, j X,̣ k X sao cho có đường đi từ k đến i và có đường đi từ k đến j.



G1 G2

ĐỒ THỊ TỰA LIÊN THÔNG MẠNH

- **Nhận xét:** G=(X, E) là đồ thị có hướng:

G có gốc □ G tựa liên thông mạnh □ G liên thông

- **Định lý:** với G=(X, E) là đồ thị có hướng hữu hạn, ta có:

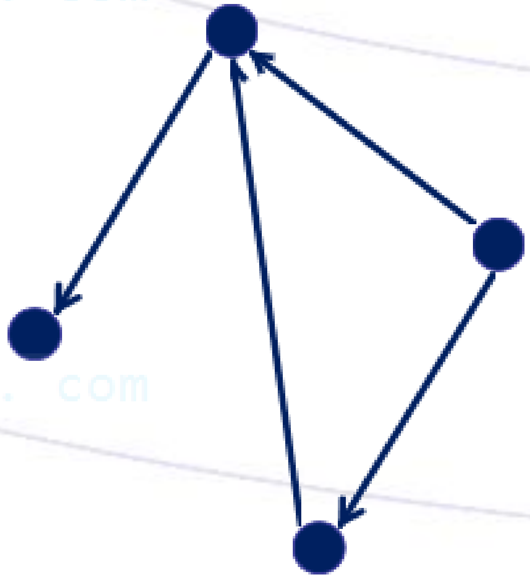
G có gốc □ G tựa liên thông mạnh

CÂY CÓ HƯỚNG (CÂY NGOÀI)

Định nghĩa: Cho G=(X, E) là đồ thị có hướng liên thông. G được gọi là cây có hướng nếu:

1. a)G không có chu trình,
2. b)G có gốc.

G1



G2

CÂY CÓ HƯỚNG

Lưu ý:

- ●Chu trình có thể không quan tâm đến hướng của các cạnh.
- ●Cây có hướng cũng là cây.
- ●Cần phân biệt cây trong LTĐT và cây trong các giáo trình khác

INFOGATE

CÂY CÓ HƯỚNGCÁC ĐỊNH NGHĨA TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho đồ thị có hướng G=(X, E) gồm N đỉnh. Các điều sau đây tương đương với nhau.

1. G là một cây có hướng.
2. r X thỏa v X, có một đường đi duy nhất từ r đến v.
3. G tựa liên thông mạnh tối tiểu.
4. G liên thông và có đỉnh r sao cho:

d-(r)=0 và d-(i)=1, iX\{r}.

1. G không có chu trình và có đỉnh r sao cho:

d-(r)=0 và d-(i)=1, iX\{r}.

CÂY CÓ HƯỚNGCÁC ĐỊNH NGHĨA TƯƠNG ĐƯƠNG

1. G tựa liên thông mạnh và không có chu trình.
2. G tựa liên thông mạnh và có N-1 cạnh.

Lưu ý:

- ●r trong các định nghĩa trên là duy nhất và được gọi là gốc của cây có hướng.
- ●Mỗi đỉnh i□X có duy nhất một đỉnh j mà cạnh liên kết với (j, i) hướng vào i, đỉnh j được gọi đỉnh cha của I.
- ●Nếu đỉnh x□X thỏa điều kiện d+(x)=0 thì x được gọi là lá của cây có hướng.

CÂY CÓ HƯỚNG

Định lý: Cho G là đồ thị có hướng.

1. Nếu G có chứa một đồ thị bộ phận là cây có hướng thì G tựa liên thông mạnh.
2. Nếu G tựa liên thông mạnh thì G có chứa một đồ thị bộ phận là cây có hướng.

Nếu G tựa liên thông mạnh, T là một cây có hướng là đồ thị bộ phận G thì T cũng được gọi là cây có hướng tối đại của G.

MA TRẬN KIRCHOFF

Định nghĩa: Cho đồ thị có hướng G=(X, E) gồm N đỉnh. Ma trận KIRCHOFF là ma trận KNxN được định nghĩa như sau:

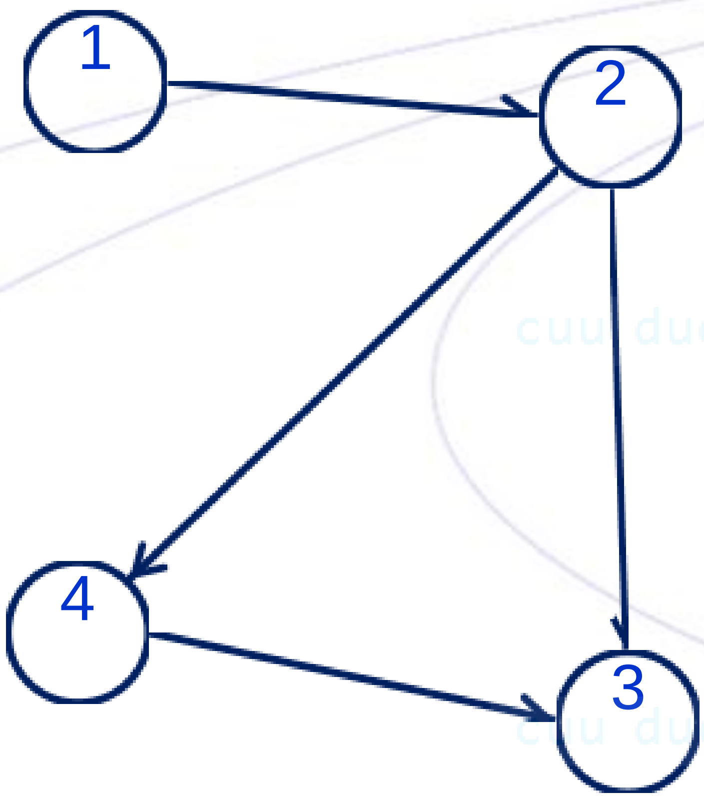
d-(i) nếu i=j

Kij =

-Bij nếu i□j

(Bij làphần tử ở dòng i cột j của ma trận kề)

MA TRẬN KIRCHOFF



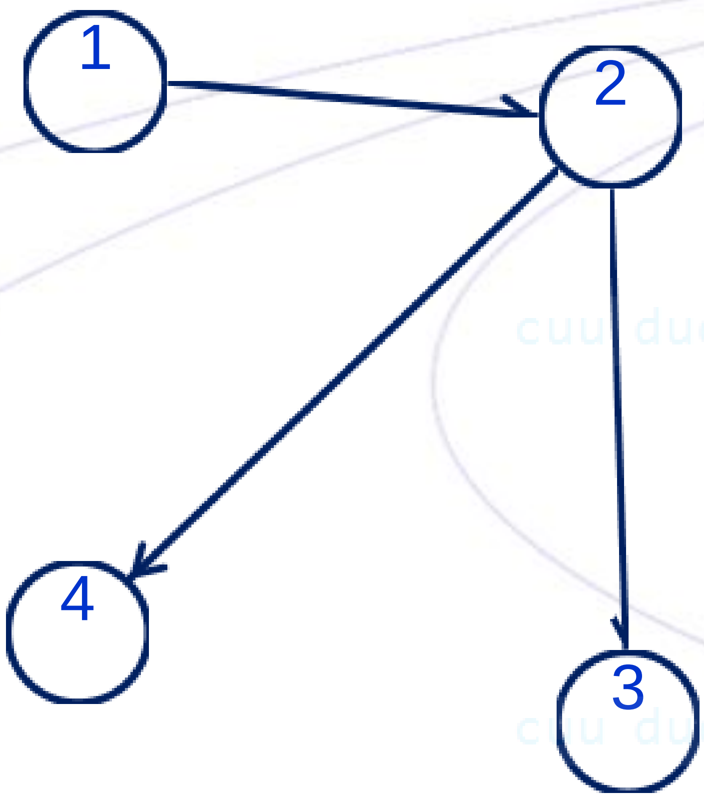
ĐỊNH LÝ KIRCHOFF

Định lý:

Giả sử G là đồ thị có hướng đơn, N đỉnh, N-1 cạnh có ma trận Kirchoff là K.

- Gọi K(1, 1) là ma trận có được từ ma trận K bằng cách bỏ đi dòng 1 và cột 1,
- khi đó G là cây ngoài có gốc tại đỉnh 1X khi và chỉ khi det K(1, 1)=1.

ĐỊNH LÝ KIRCHOFF



BÀI TẬP

1. Chứng minh các định lý tương đương
2. Xác định số lượng cây tối đại của đồ thị dạng CÂY, CHU TRÌNH SƠ CẤP, ĐỦ, …
3. Chứng minh tính đúng đắn của các giải thuật PRIM, KRUSKAL