



# CÁC BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

[ntsonptnk@gmail.com](mailto:ntsonptnk@gmail.com)

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)



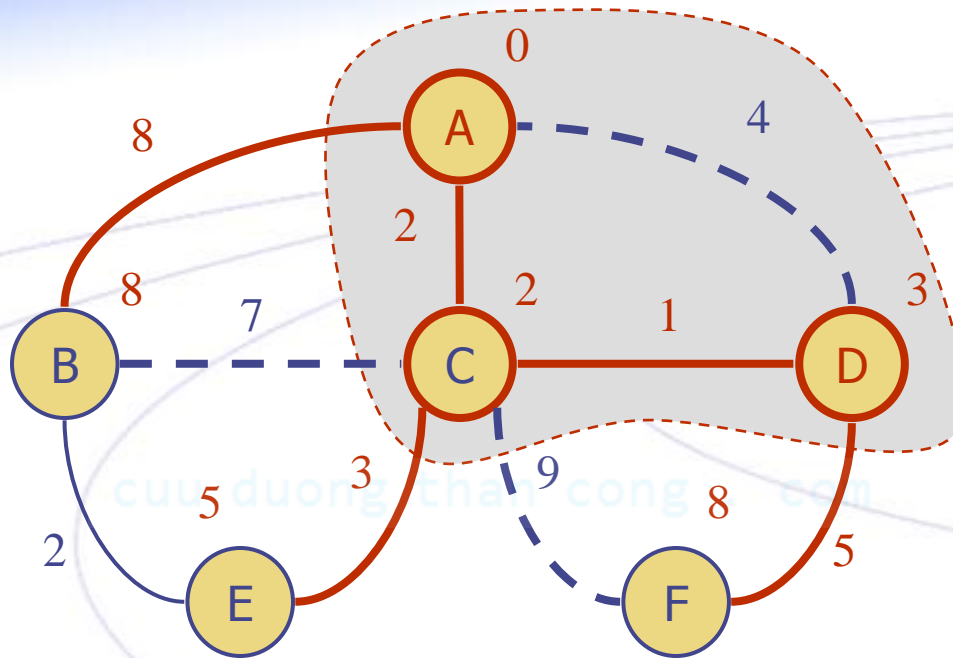
# NỘI DUNG

## ✦ Đường đi ngắn nhất

- ◆ Bài toán
- ◆ Nguyên lý Bellman
- ◆ Thuật toán Dijkstra
- ◆ Thuật toán Floyd
- ◆ Thuật toán Ford-Bellman

## ✦ Đồ thị Euler

## ✦ Đồ thị Hamilton



# ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

# BÀI TOÁN

Cho đồ thị có hướng có trọng  $G=(X, E)$  và hai đỉnh  $s, t \in X$ , gọi  $P$  là một đường đi từ đỉnh  $s$  đến đỉnh  $t$ , trọng lượng (hay giá) của đường đi  $P$  được định nghĩa là:

$$L(P) = \sum_{(e \in P)} L(e)$$

**Bài toán:** tìm đường đi từ  $s$  đến  $t$  có trọng lượng nhỏ nhất

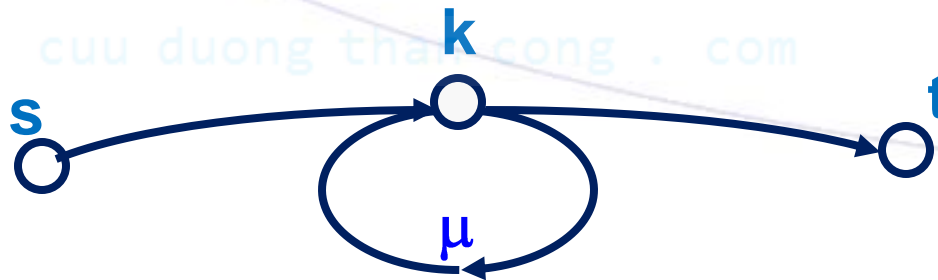
# NHẬN XÉT

- ✦ Bài toán được phát biểu cho đồ thị có hướng có trọng, nhưng các thuật toán sẽ trình bày đều có thể áp dụng cho các đồ thị vô hướng có trọng bằng cách xem mỗi cạnh của đồ thị vô hướng như hai cạnh có cùng trọng lượng nối cùng một cặp đỉnh nhưng có chiều ngược nhau.
- ✦ Khi tìm đường đi ngắn nhất có thể bỏ bớt đi các cạnh song song và chỉ chừa lại một cạnh có trọng lượng nhỏ nhất.
- ✦ Đối với các khuyên có trọng lượng không âm thì cũng có thể bỏ đi mà không làm ảnh hưởng đến kết quả của bài toán. Đối với các khuyên có trọng lượng âm thì có thể đưa đến bài toán đường đi ngắn nhất không có lời giải.

# ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI LỜI GIẢI

$P$  là một đường đi từ  $s$  đến  $t$ , giả sử  $P$  có chứa một mạch  $\mu$ .

- ◆ Nếu  $L(\mu) \geq 0$  thì có thể cải tiến đường đi  $P$  bằng cách bỏ đi mạch  $\mu$ .
- ◆ Nếu  $L(\mu) < 0$  thì không tồn tại đường đi ngắn nhất từ đỉnh  $s$  đến đỉnh  $t$  vì nếu quay vòng tại  $\mu$  càng nhiều vòng thì trọng lượng đường đi  $P$  càng nhỏ đi, tức là  $L(P) \rightarrow -\infty$ .

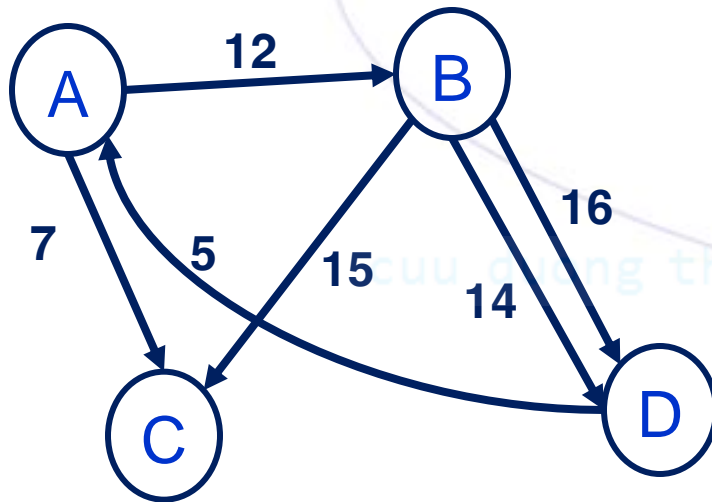


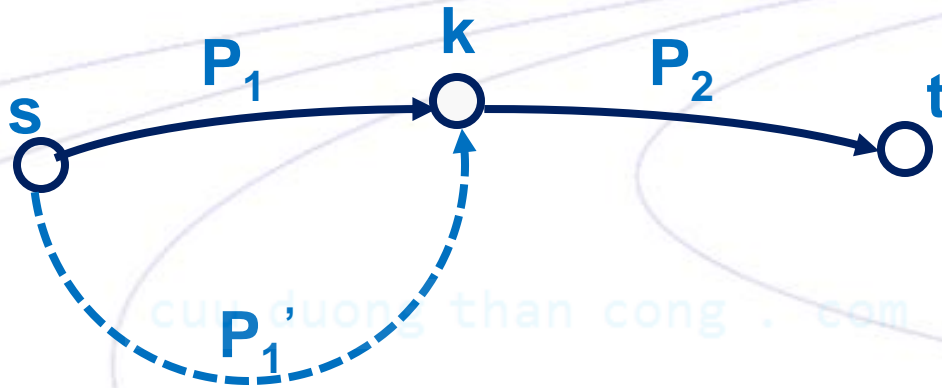
# DỮ LIỆU NHẬP

✦ Ma trận trọng lượng  $L_{N \times N}$  được định nghĩa:

- ✦  $L_{ij}$  = trọng lượng cạnh nhỏ nhất nối  $i$  đến  $j$  nếu có,
- ✦  $L_{ij} = \infty$  nếu không có cạnh nối  $i$  đến  $j$ .

✦ Khi cài đặt thuật toán có thể dùng 0 thay cho  $\infty$  bằng cách đưa thêm một số kiểm tra thích hợp.


$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 7 & \infty \\ \infty & 0 & 15 & 14 \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

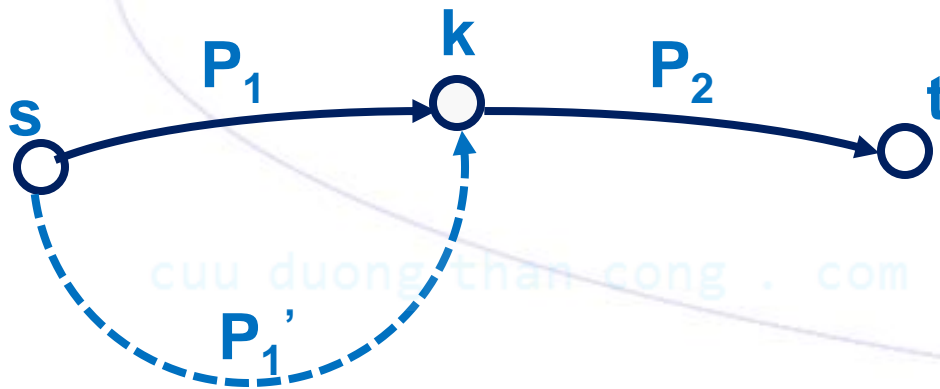


# NGUYÊN LÝ BELLMAN

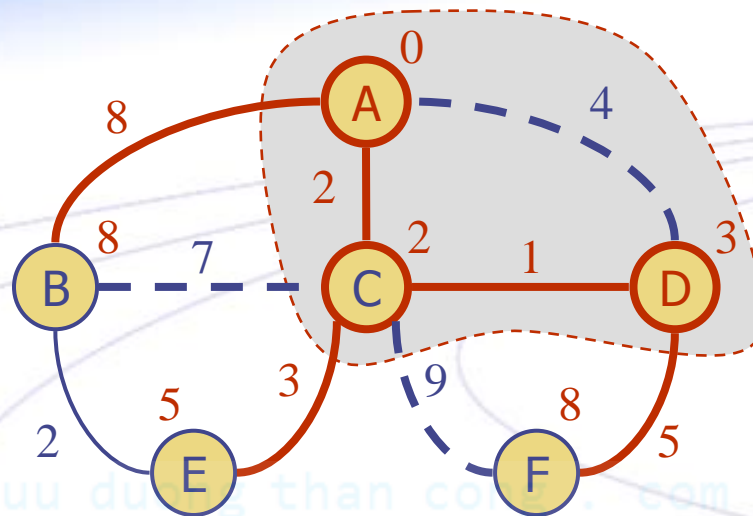


# NGUYÊN LÝ BELLMAN

- ✦ Gọi  $P$  là đường đi ngắn nhất từ đỉnh  $s$  đến đỉnh  $t$ ;  $k \in P$ . Giả sử  $P = P_1 \oplus P_2$  với  $P_1$  là đường đi con của  $P$  từ  $s$  đến  $k$  và  $P_2$  là đường đi con của  $P$  từ  $k$  đến  $t$ . Khi đó  $P_1$  cũng là đường đi ngắn nhất từ  $s$  đến  $k$ .



$$L(P_1') < L(P_1) \Rightarrow L(P_1' \oplus P_2) < L(P_1 \oplus P_2) = L(P)$$



TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ DƯƠNG

# THUẬT TOÁN DIJKSTRA

# THUẬT TOÁN DIJKSTRA

**Input:**  $N, L, s, t$  – số đỉnh, ma trận trọng lượng, đỉnh xuất phát, đỉnh kết thúc

**Output:**  $D, \text{Labels}$  –  $D[k]$ : trọng lượng ĐĐNN  $s \rightarrow k$ ,  $\text{Labels}[k]$ : đỉnh ngay trước  $k$  trong ĐĐNN  $s \rightarrow k$

1.  $V = X; D[s] = 0; D[k] = \infty, \forall k \in X \setminus \{s\}; \text{Labels}[k] = -1, \forall k \in X.$

2. Trong khi  $t \in V$ :

1. Chọn đỉnh  $v \in V$  với  $D[v]$  nhỏ nhất;

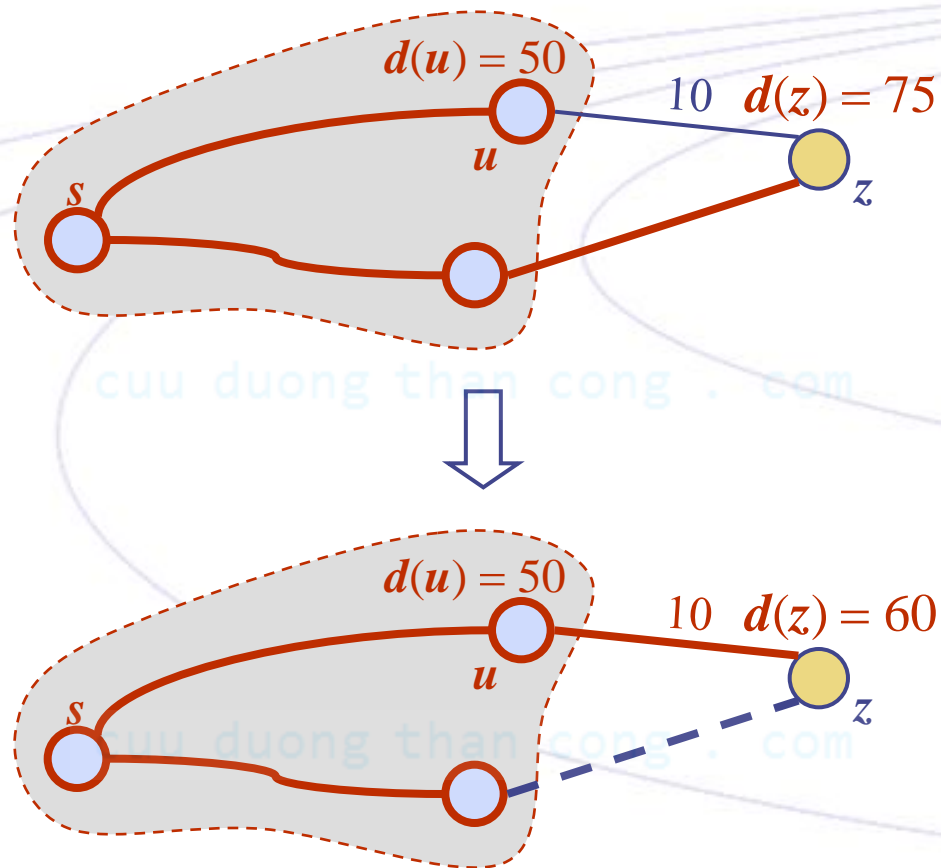
2.  $V := V \setminus \{v\};$

3. Với mọi đỉnh  $k \in V$  và có cạnh nối từ  $v$  đến  $k$ ,

Nếu  $D[k] > D[v] + L_{vk}$  thì

$D[k] = D[v] + L_{vk}$  và  $\text{Labels}[k] = v$

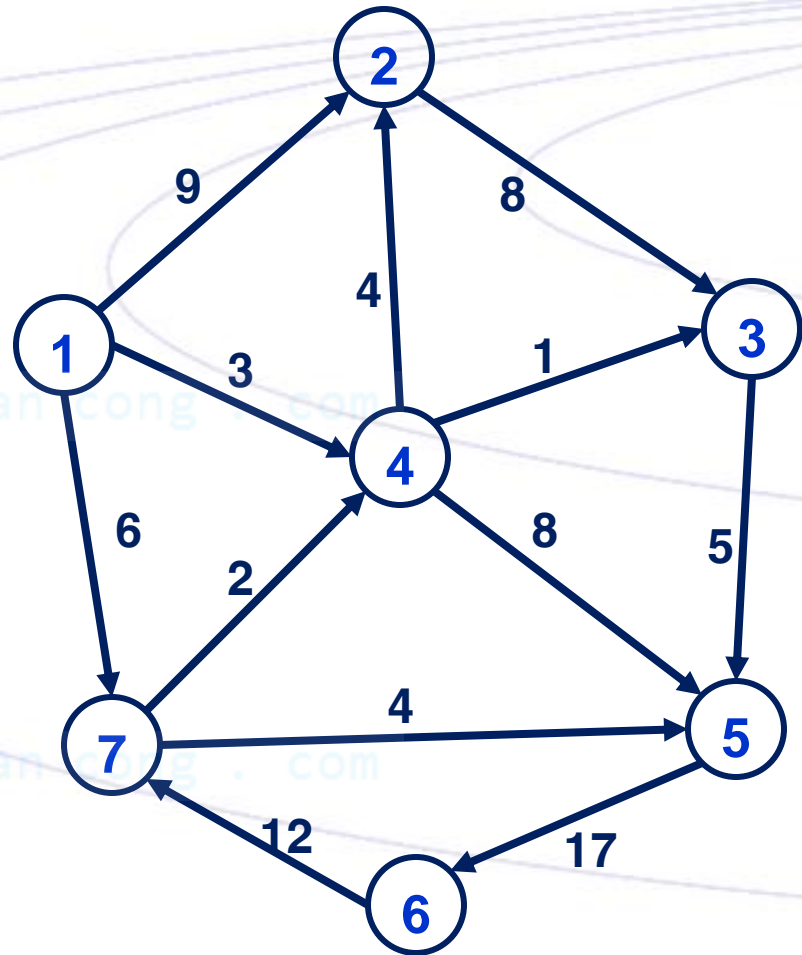
# VÍ DỤ



Cập nhật độ dài ĐĐ từ  $s$  đến đỉnh  $z$ :  $75 \rightarrow 60$

# VÍ DỤ

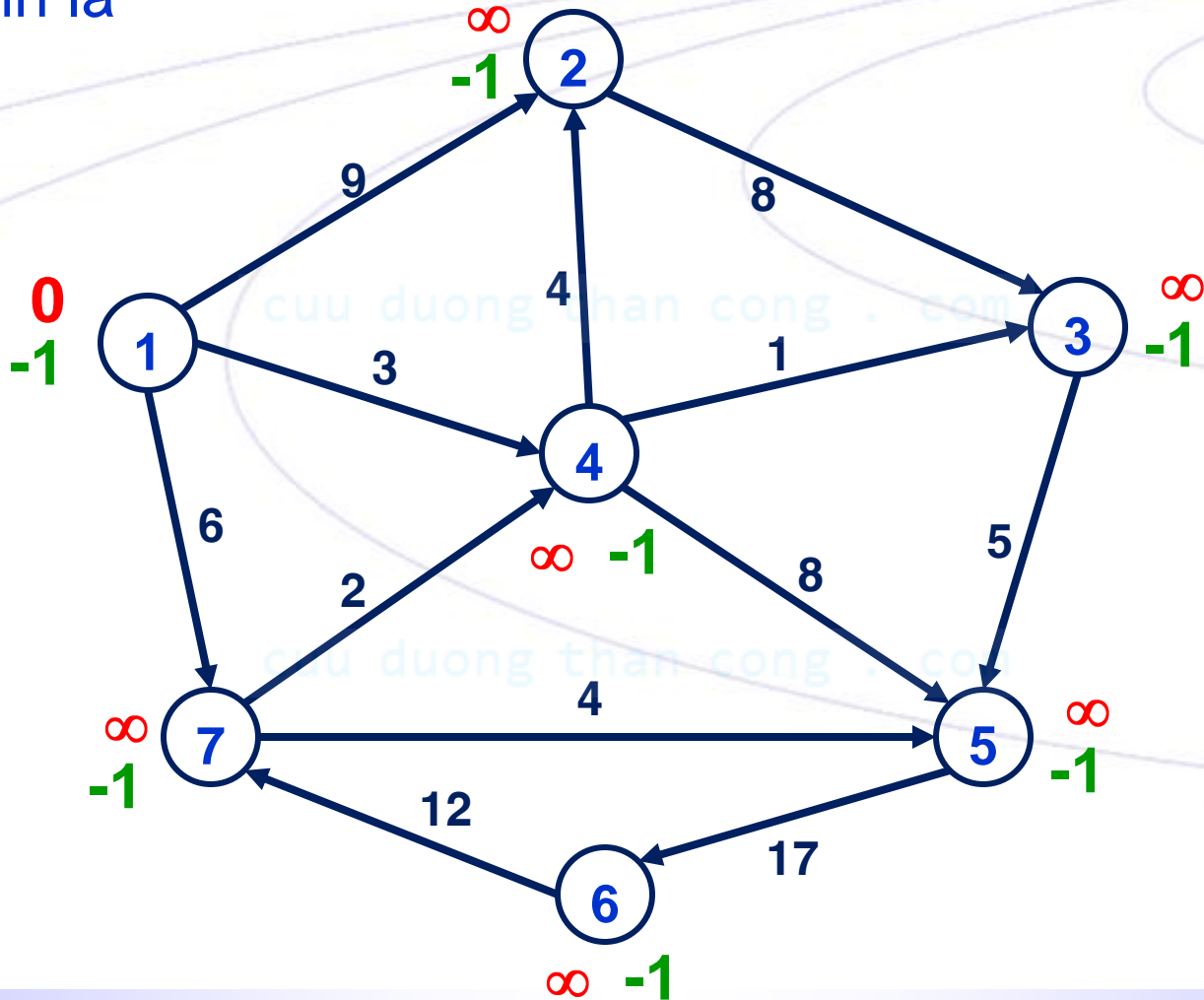
Đồ thị G gồm 7 đỉnh, 12 cạnh như hình bên. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 5



0	9	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	6
$\infty$	0	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	5	$\infty$	$\infty$
$\infty$	4	1	0	8	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	17	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	12
$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	4	$\infty$	0

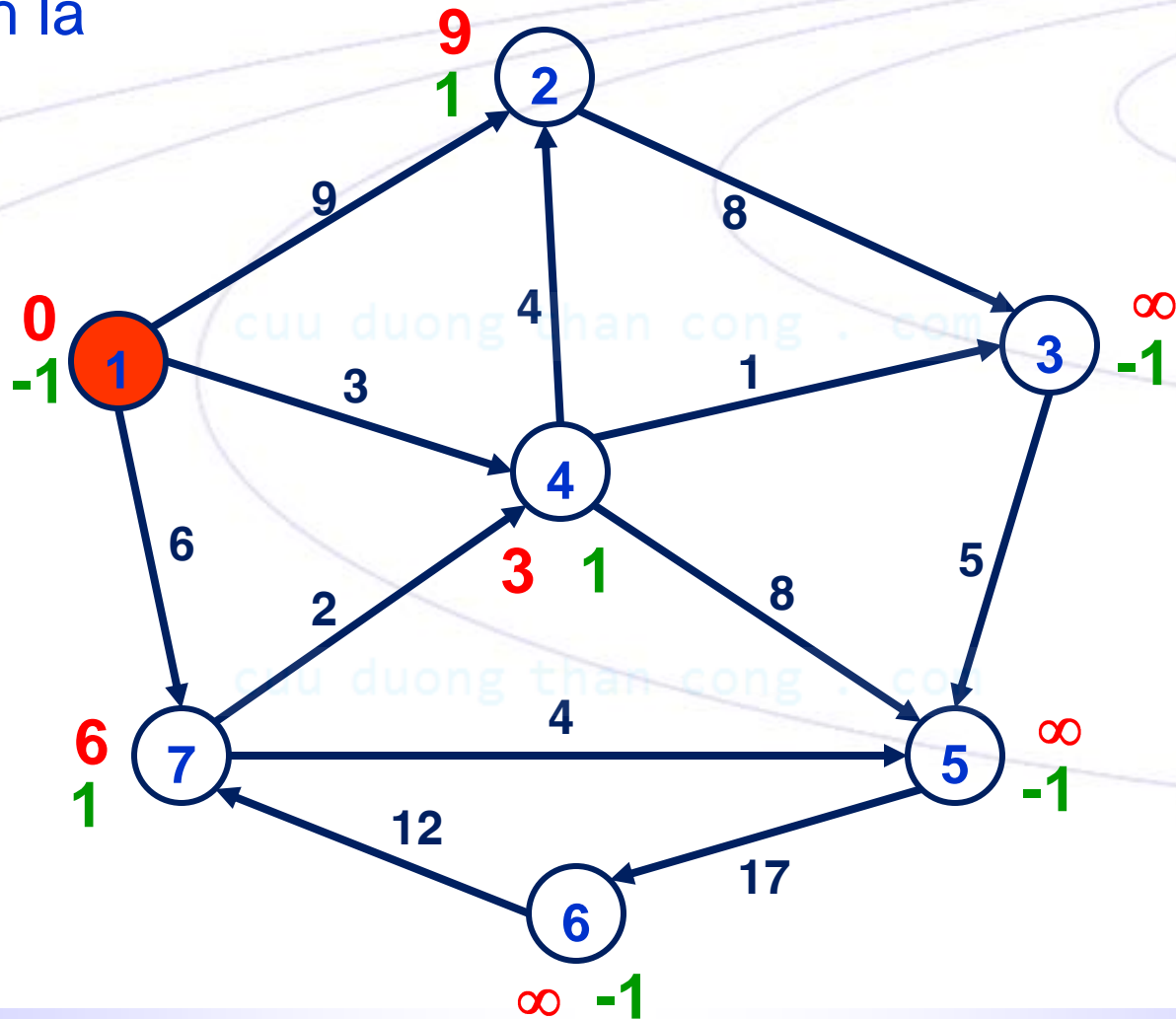
# VÍ DỤ

V: đỉnh chưa bị tô màu; D[k]: số có màu đỏ; Labels[k]: số có màu xanh lá



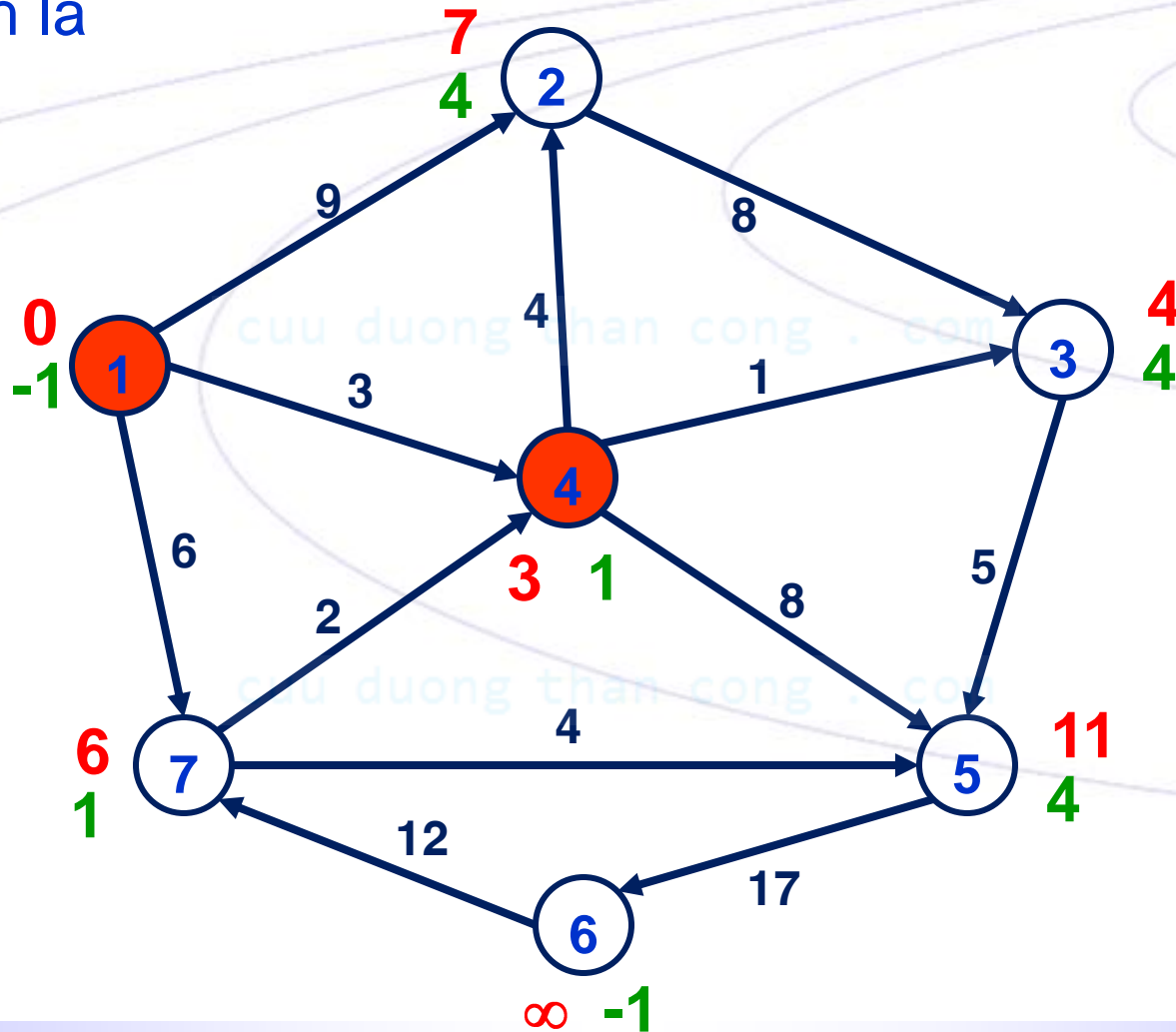
# VÍ DỤ

V: đỉnh chưa bị tô màu; D[k]: số có màu đỏ; Labels[k]: số có màu xanh lá



# VÍ DỤ

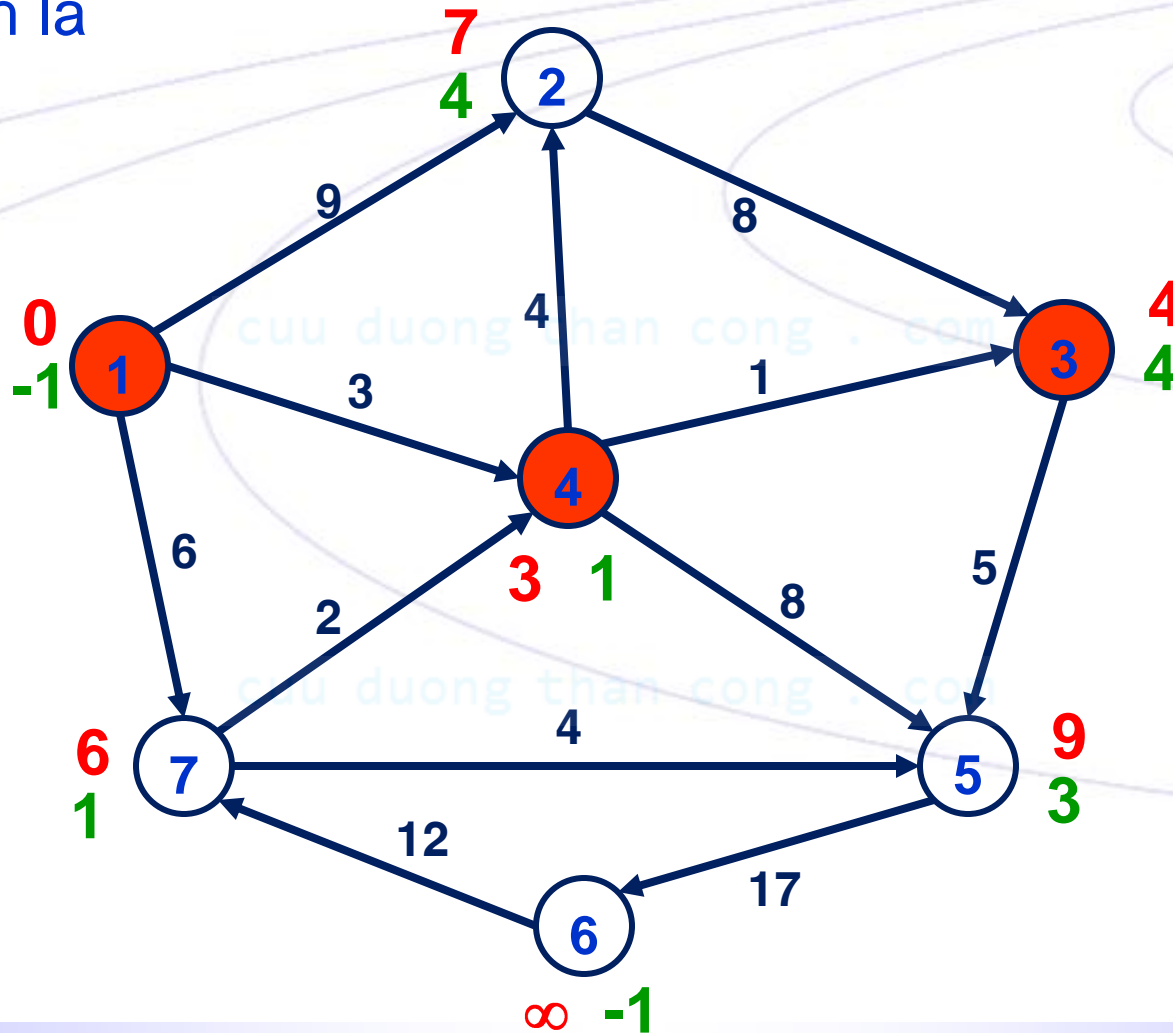
V: đỉnh chưa bị tô màu; D[k]: số có màu đỏ; Labels[k]: số có màu xanh lá





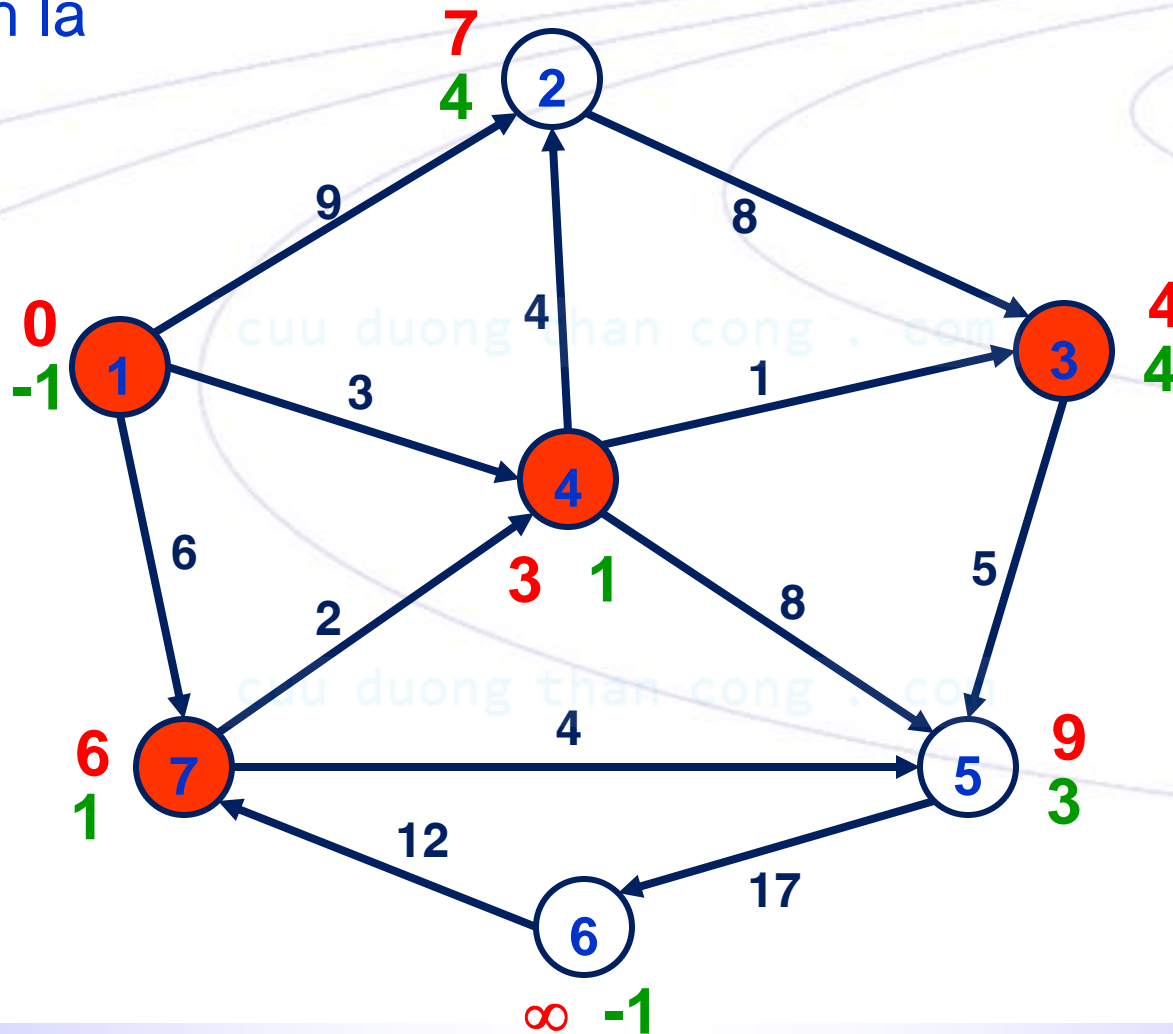
# VÍ DỤ

V: đỉnh chưa bị tô màu; D[k]: số có màu đỏ; Labels[k]: số có màu xanh lá



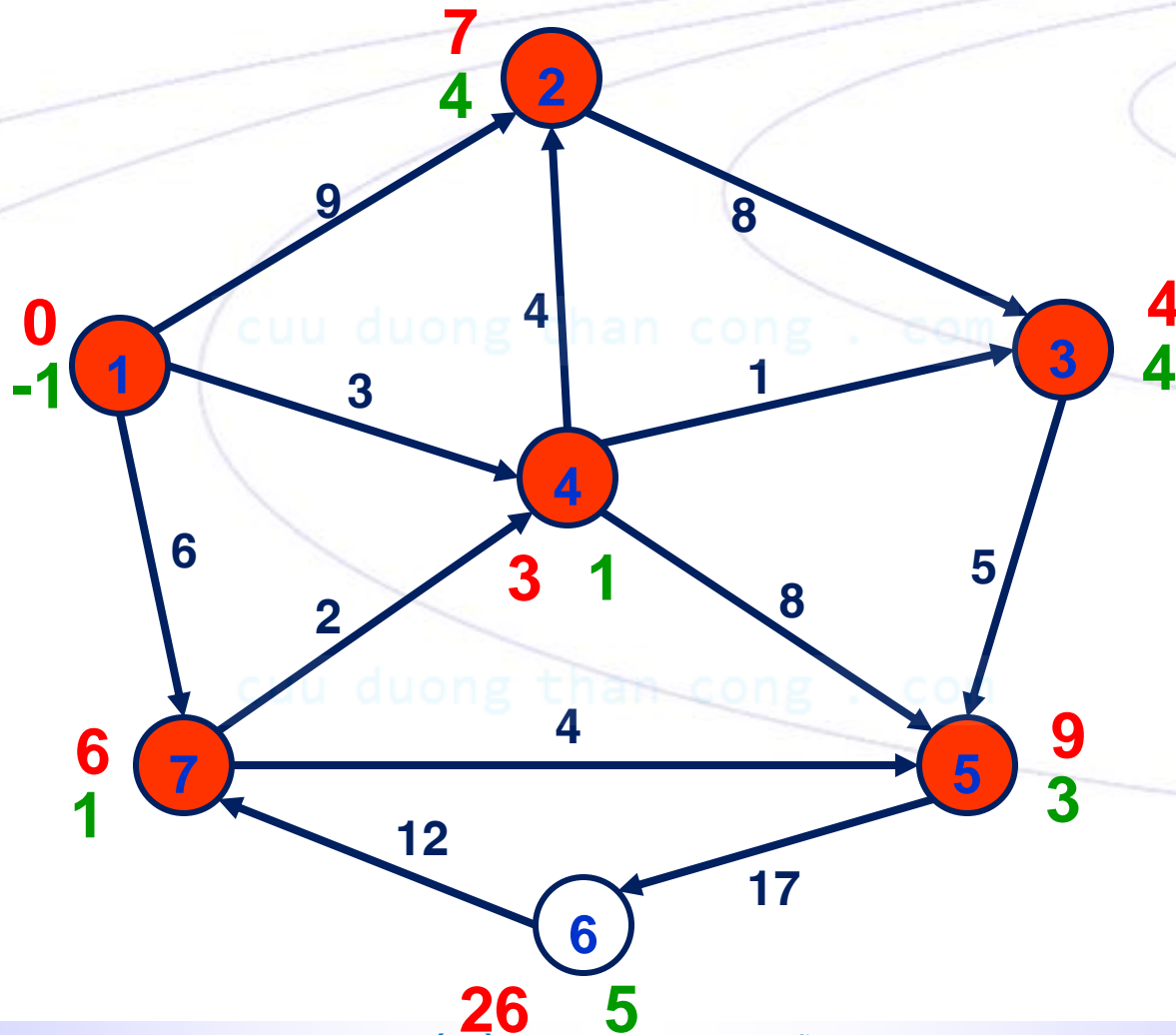
# VÍ DỤ

V: đỉnh chưa bị tô màu; D[k]: số có màu đỏ; Labels[k]: số có màu xanh lá



# VÍ DỤ

ĐĐNN từ 1 đến 5 có trọng lượng  $D[5]=9$ :  $5 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 1$



# GIÁ TRỊ CÁC BIẾN D, Labels

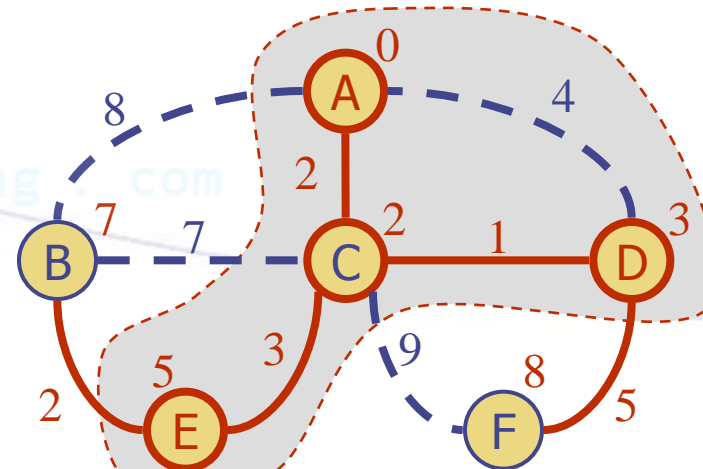
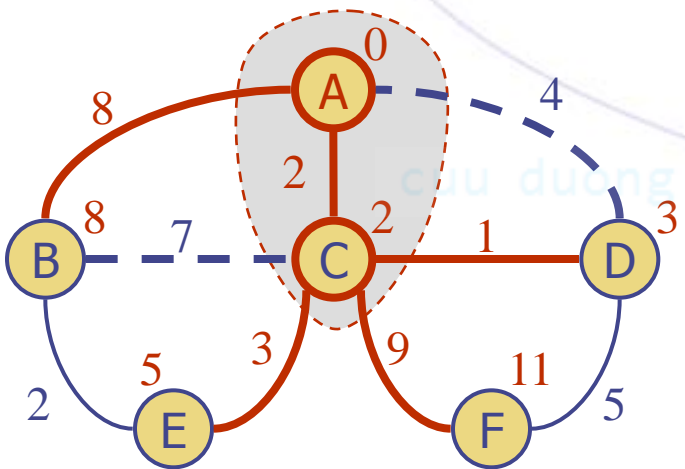
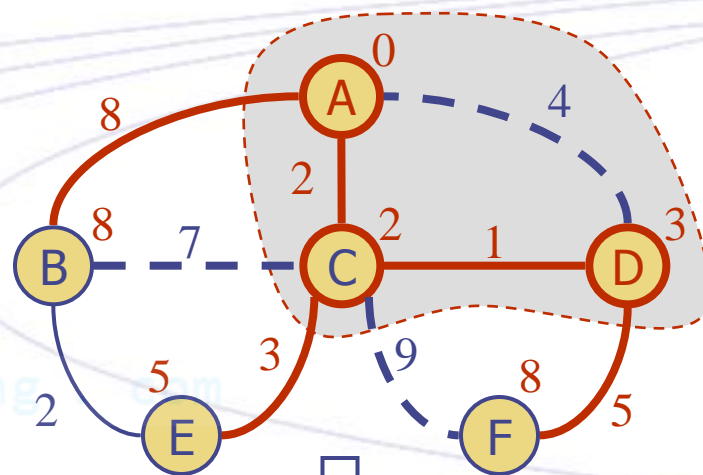
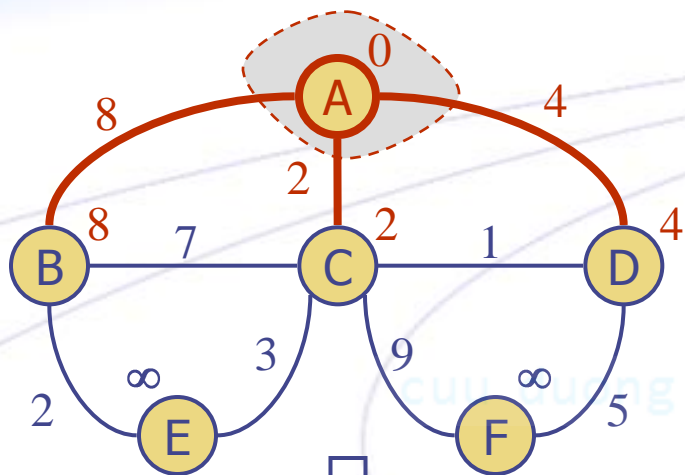
D

	1	2	3	4	5	6	7
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1		9	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	6
2		7	4		11	$\infty$	6
3		7			9	$\infty$	6
4		7			9	$\infty$	
5					9	$\infty$	

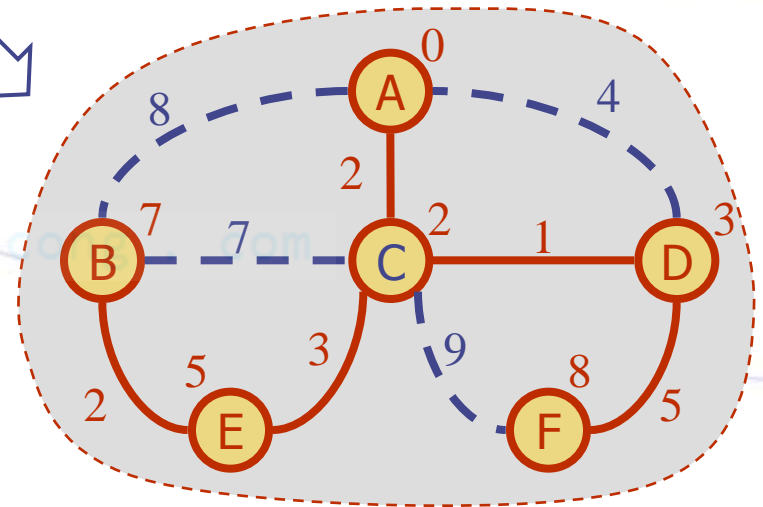
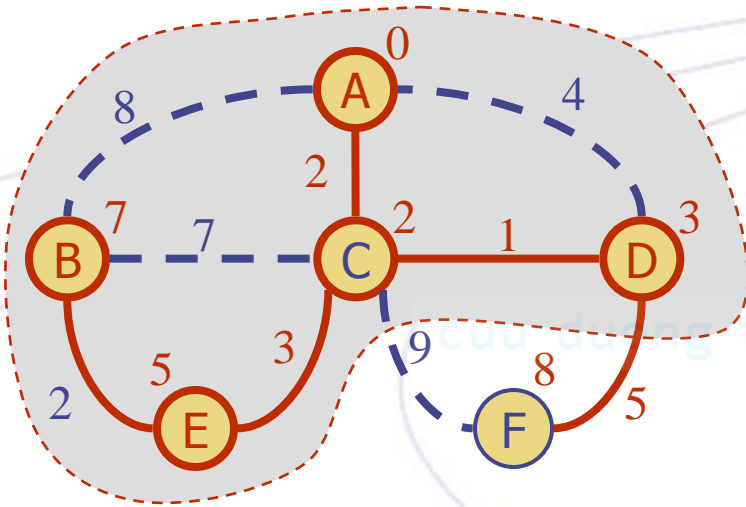
Labels

	1	2	3	4	5	6	7
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1		1	-1	1	-1	-1	1
2		4	4		4	-1	1
3		4			3	-1	1
4		4			3	-1	
5					3	-1	

# VÍ DỤ



# VÍ DỤ



# THUẬT TOÁN DIJKSTRA – CÀI ĐẶT

```
Graph Graph::Dijkstra(int s, int t)
{
    //Tìm đường đi ngắn nhất từ s đến t
}
```

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

# THUẬT TOÁN DIJKSTRA – CÀI ĐẶT

```
Graph Graph::PrintPath(int s, int t)
{
    int temp[MAX];
    int dem = 0;
    //In đường đi ngắn nhất từ s đến t dựa vào Labels
    while (Labels[t] != -1)
    {
        temp[dem++] = t;
        t = Labels[t];
    }
    temp[dem++] = s;
    while (dem > 0)
        printf("%d ", temp[--dem]);
}
```





cuu duong than cong . com

TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT GIỮA CÁC CẶP ĐỈNH TRÊN ĐỒ THỊ

# THUẬT TOÁN FLOYD

cuu duong than cong . com

# THUẬT TOÁN FLOYD

**Input:**  $N, L$  – số đỉnh, ma trận trọng lượng của  $G(X, E)$

**Output:**  $L, Nexts$  –  $L[u, v]$ : trọng lượng ĐĐNN  $u \rightarrow v$ ,  
 $Nexts[u, v]$ : đỉnh ngay sau  $u$  trong ĐĐNN  $u \rightarrow v$

1. Nếu  $L[u, v] \neq \infty$ :  $Nexts[u, v] = v$

Ngược lại:  $Nexts[u, v] = -1, \forall (u, v) \in X^2$ .

2. Với mọi  $t \in X$

Với mọi  $u \in X$  có  $L[u, t] \neq \infty$

Với mọi  $v \in X$  có  $L[t, v] \neq \infty$

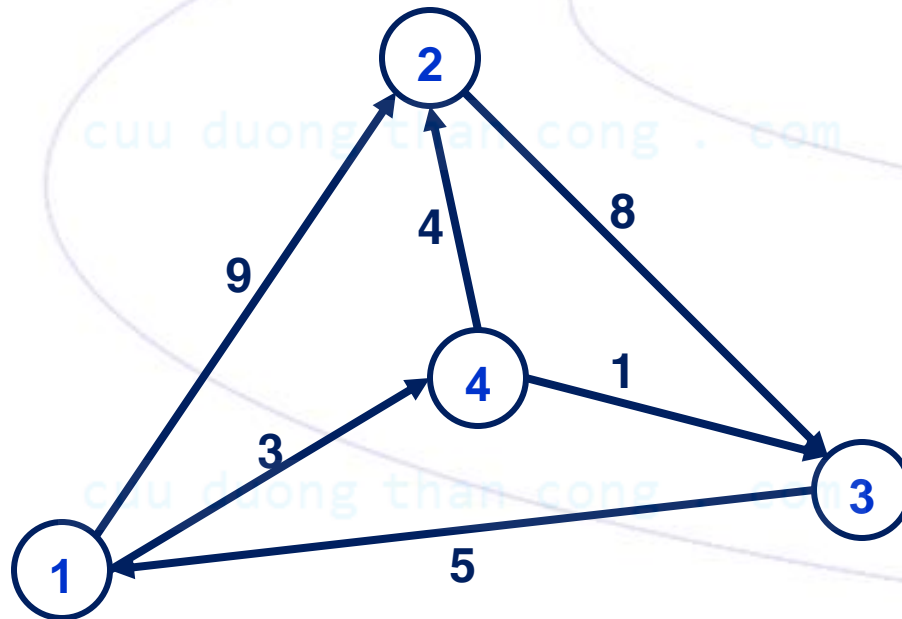
Nếu  $L[u, v] > L[u, t] + L[t, v]$  thì

1.  $L[u, v] = L[u, t] + L[t, v]$

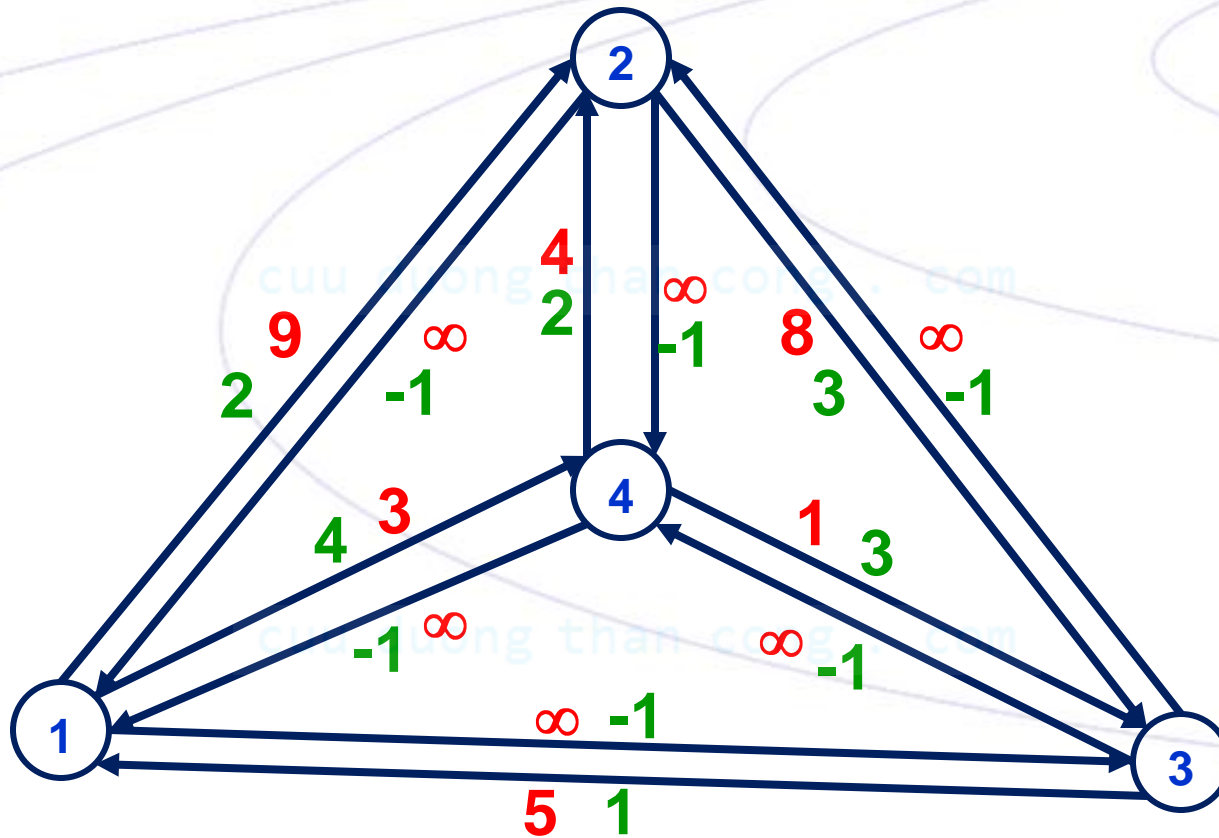
2.  $Nexts[u, v] = Nexts[u, t]$

# VÍ DỤ

Xác định đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh trên đồ thị gồm 4 đỉnh 6 cạnh



# VÍ DỤ

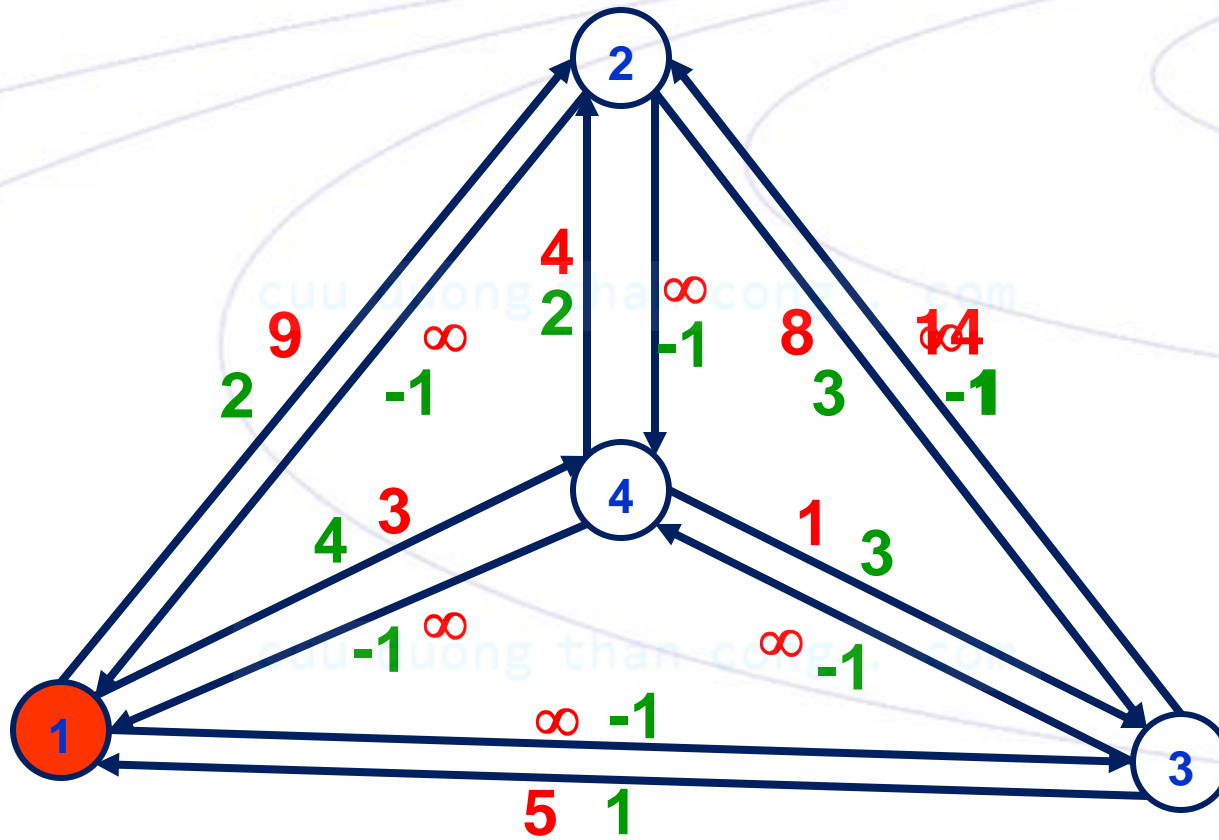


# VÍ DỤ

$t = 1$

$u = 3$

$v = 2$

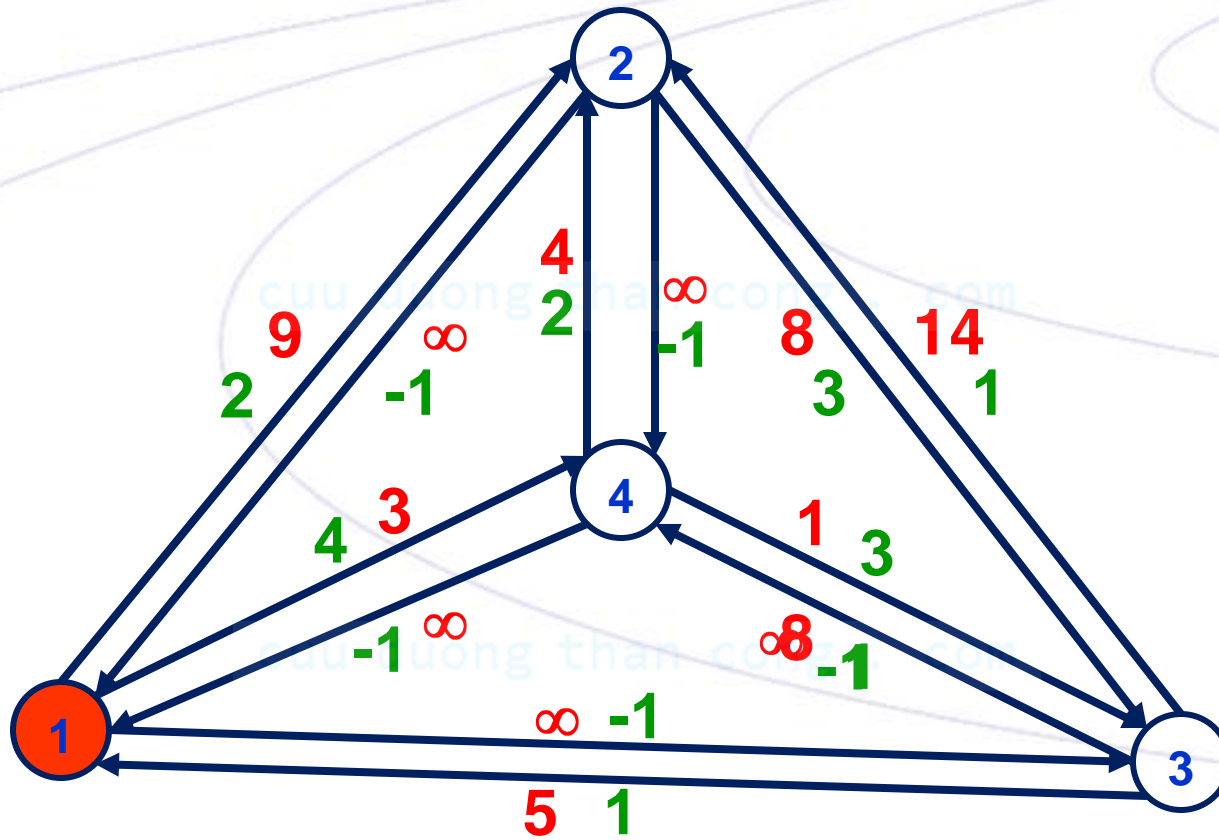


# VÍ DỤ

$t = 1$

$u = 3$

$v = 4$

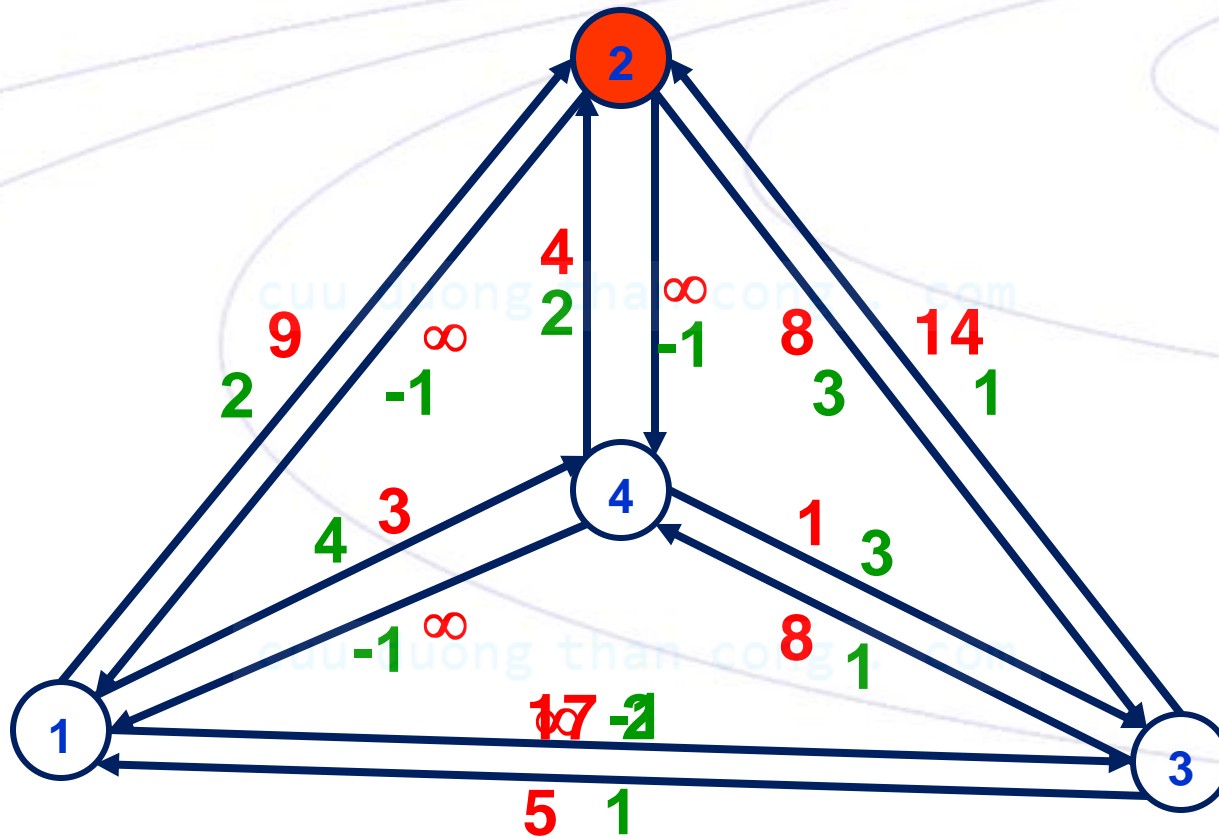


# VÍ DỤ

$t = 2$

$u = 1$

$v = 3$

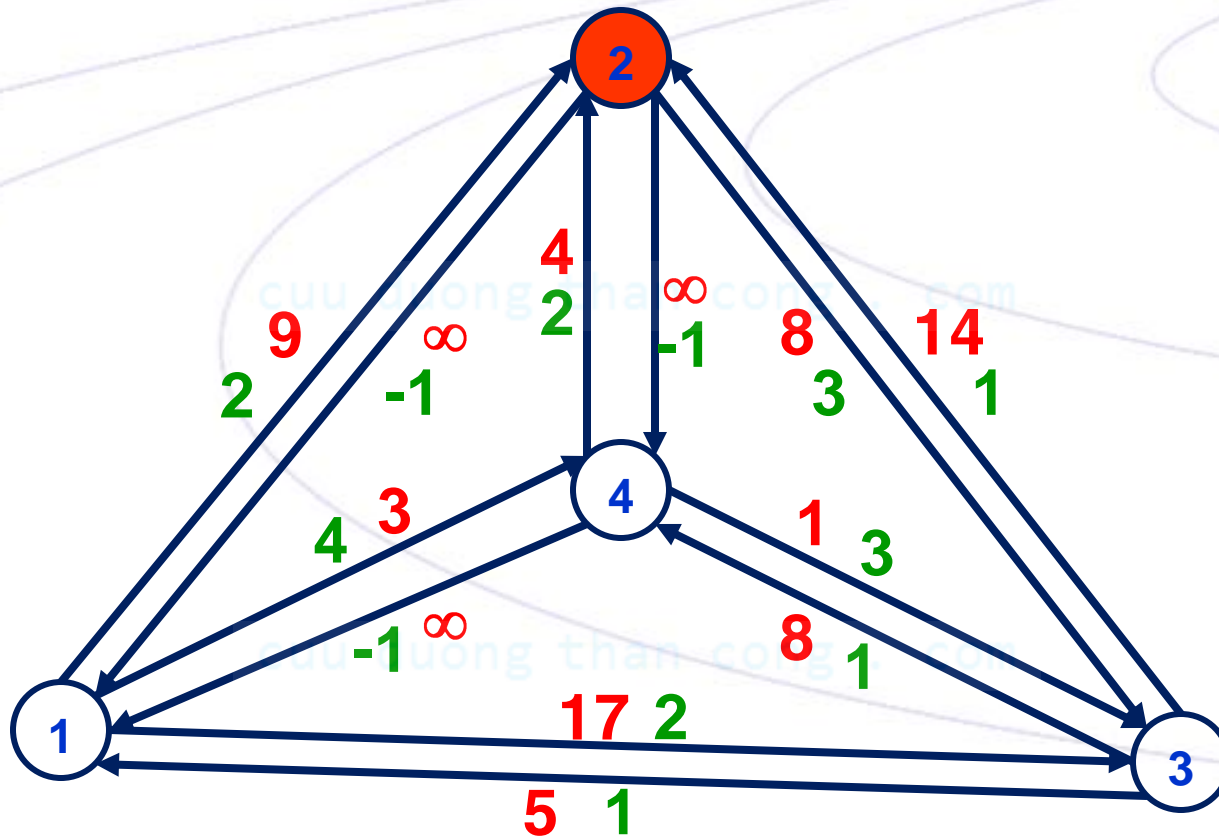


# VÍ DỤ

$t = 2$

$u = 3$

$v = x$



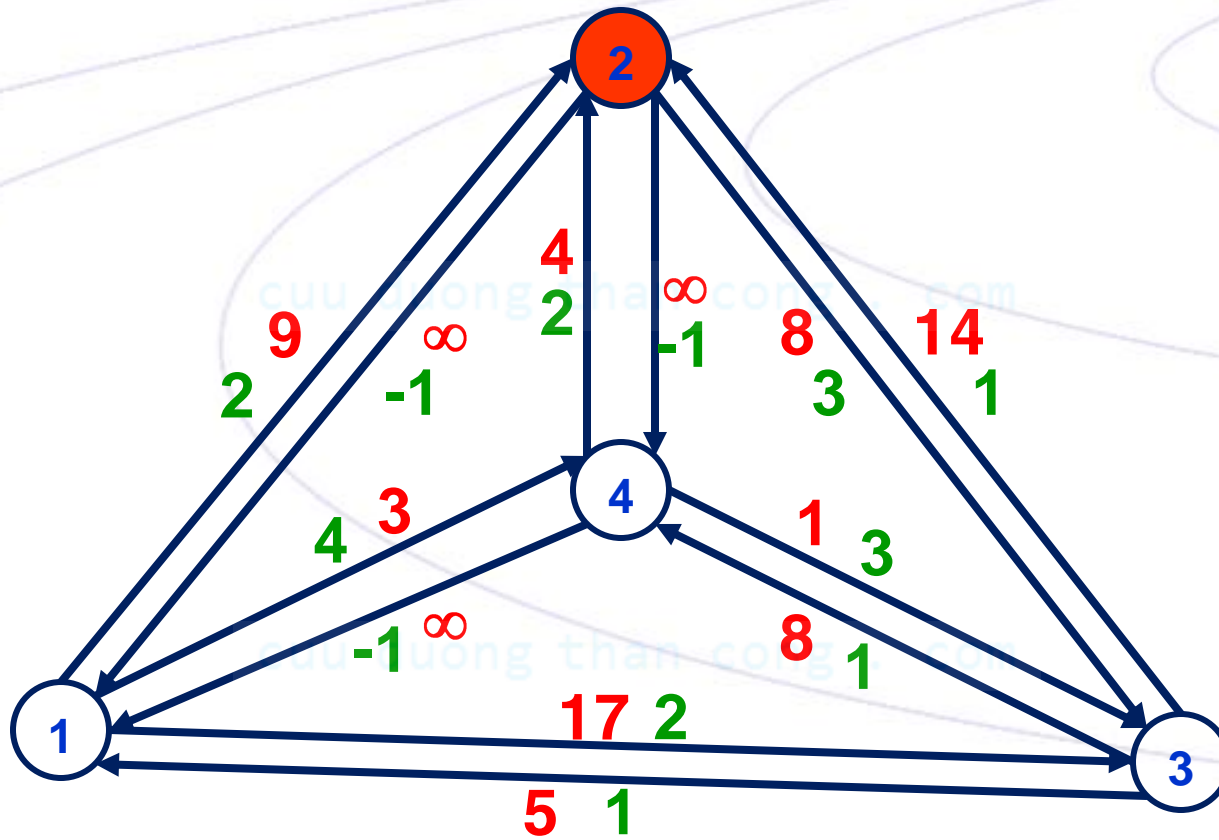


# VÍ DỤ

$t = 2$

$u = 4$

$v = 3$

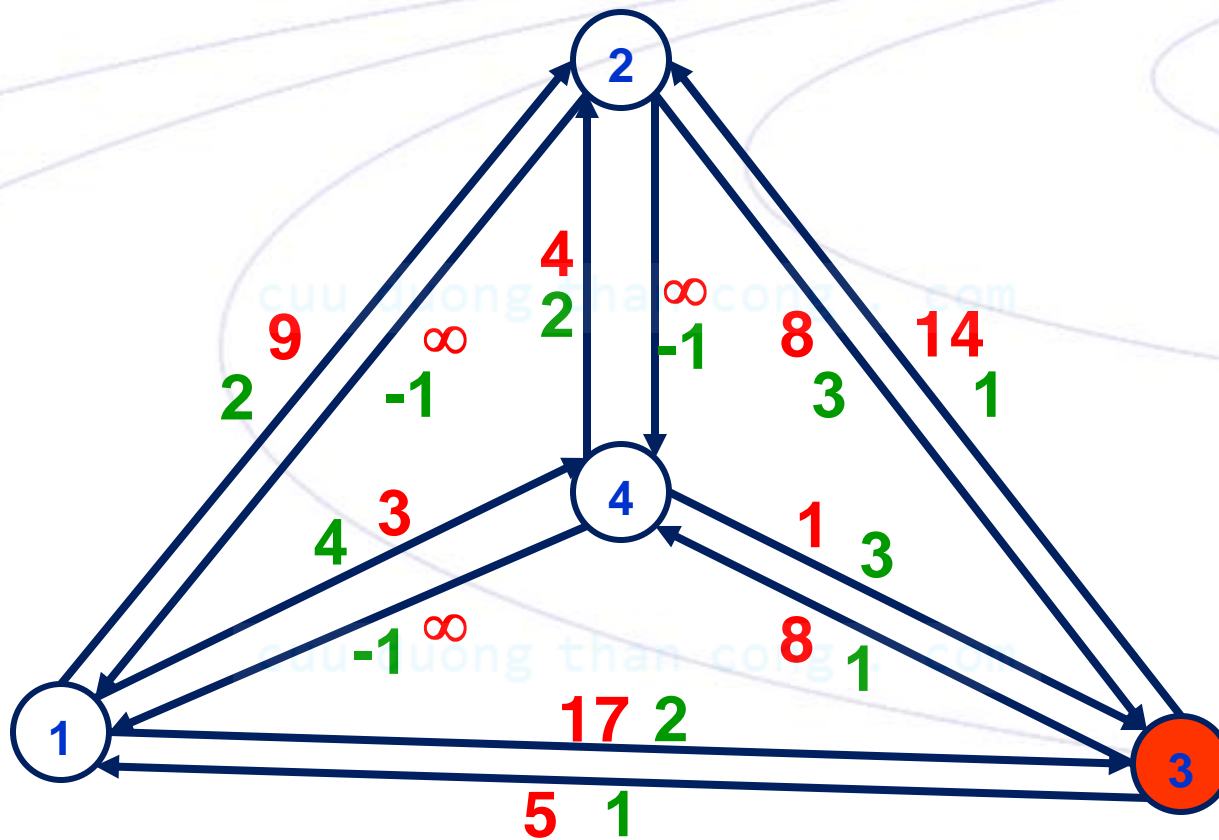


# VÍ DỤ

$t = 3$

$u = 1$

$v = 2$

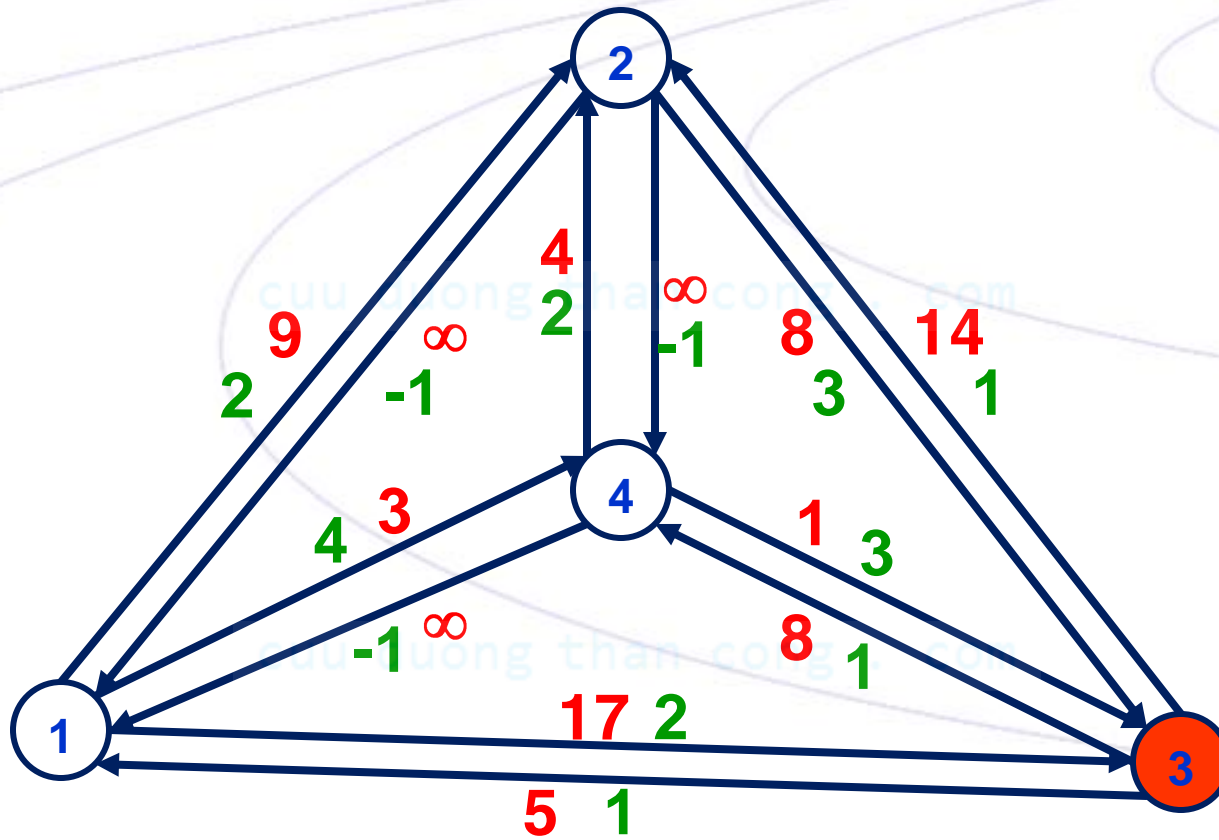


# VÍ DỤ

$t = 3$

$u = 1$

$v = 4$

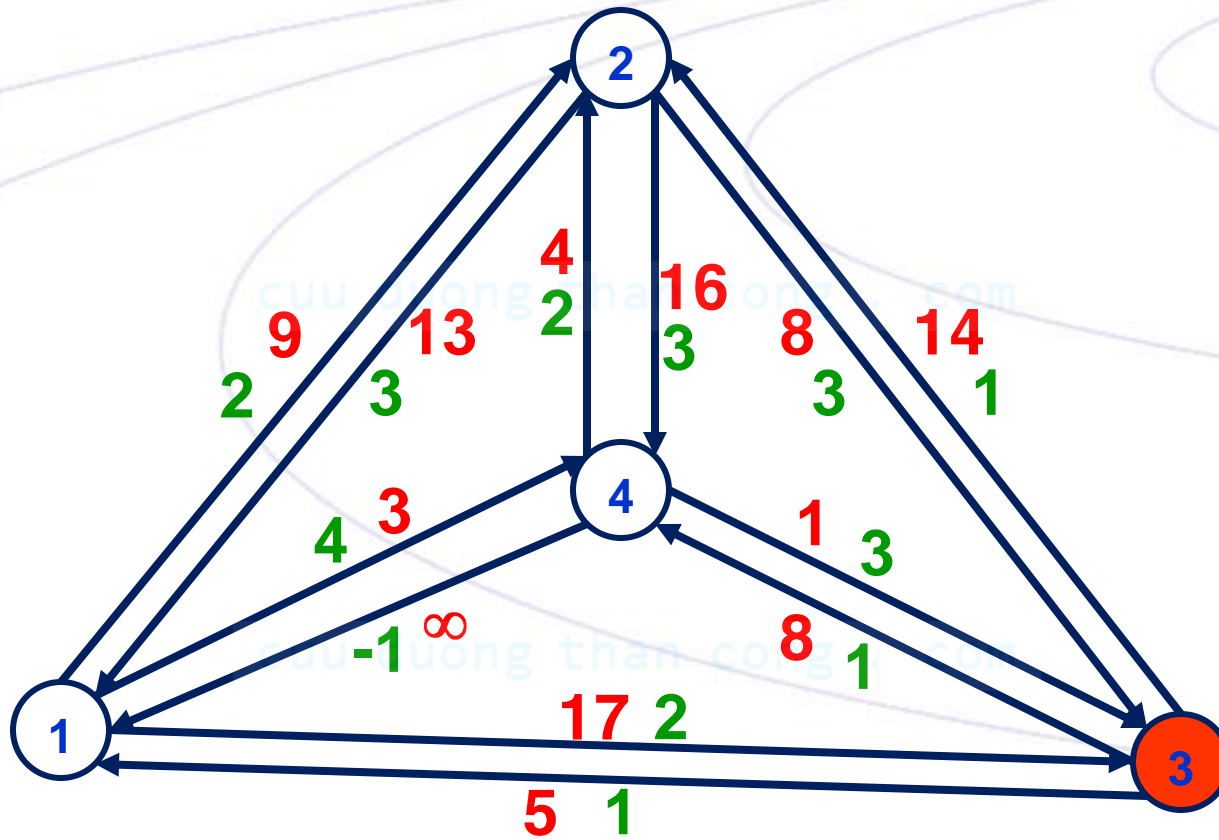


# VÍ DỤ

$t = 3$

$u = 2$

$v = 1, 4$

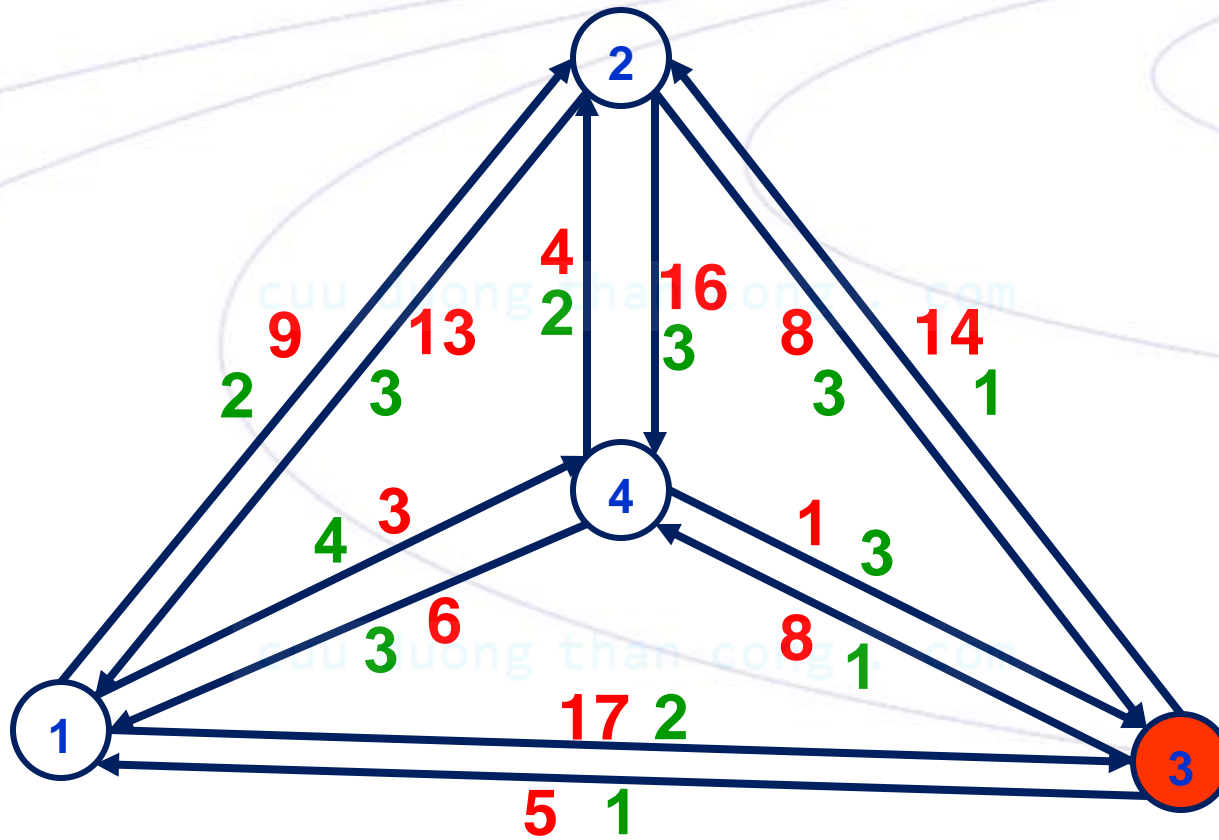


# VÍ DỤ

$t = 3$

$u = 4$

$v = 1, 2$

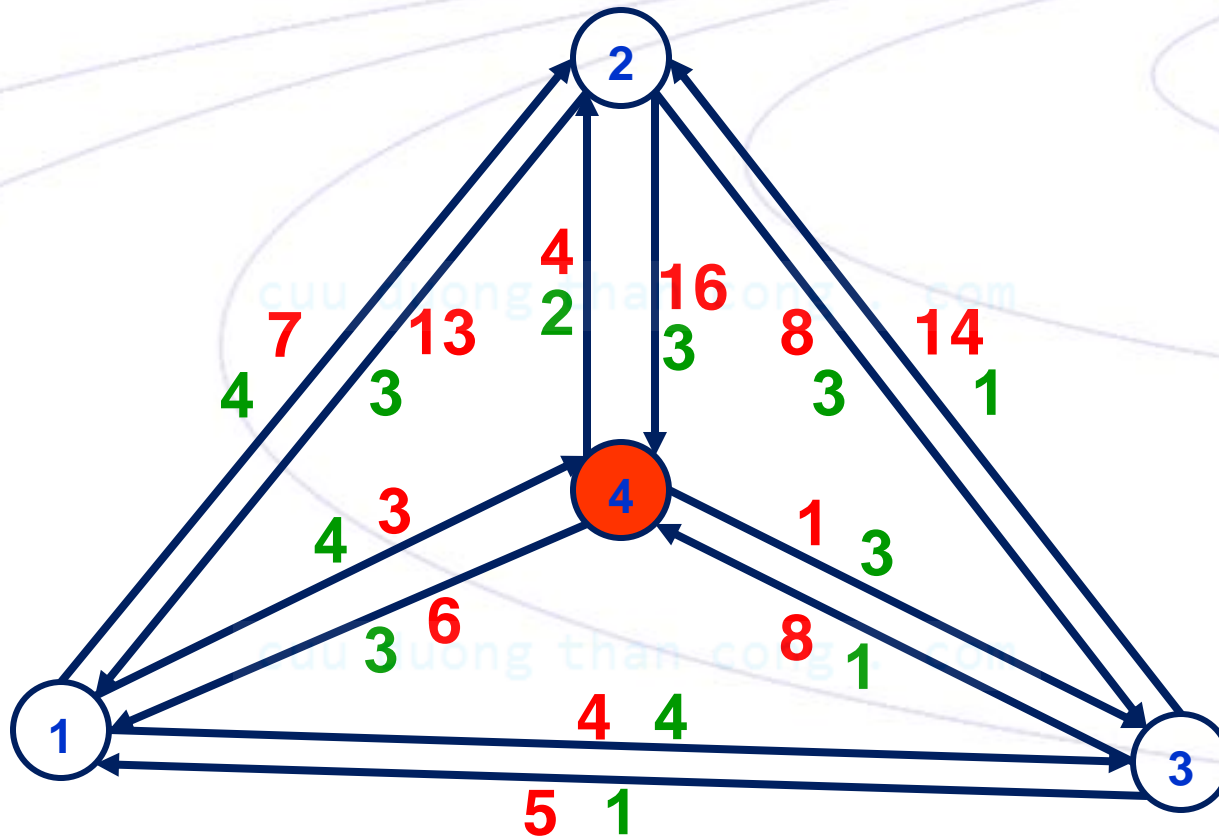


# VÍ DỤ

$t = 4$

$u = 1$

$v = 2, 3$

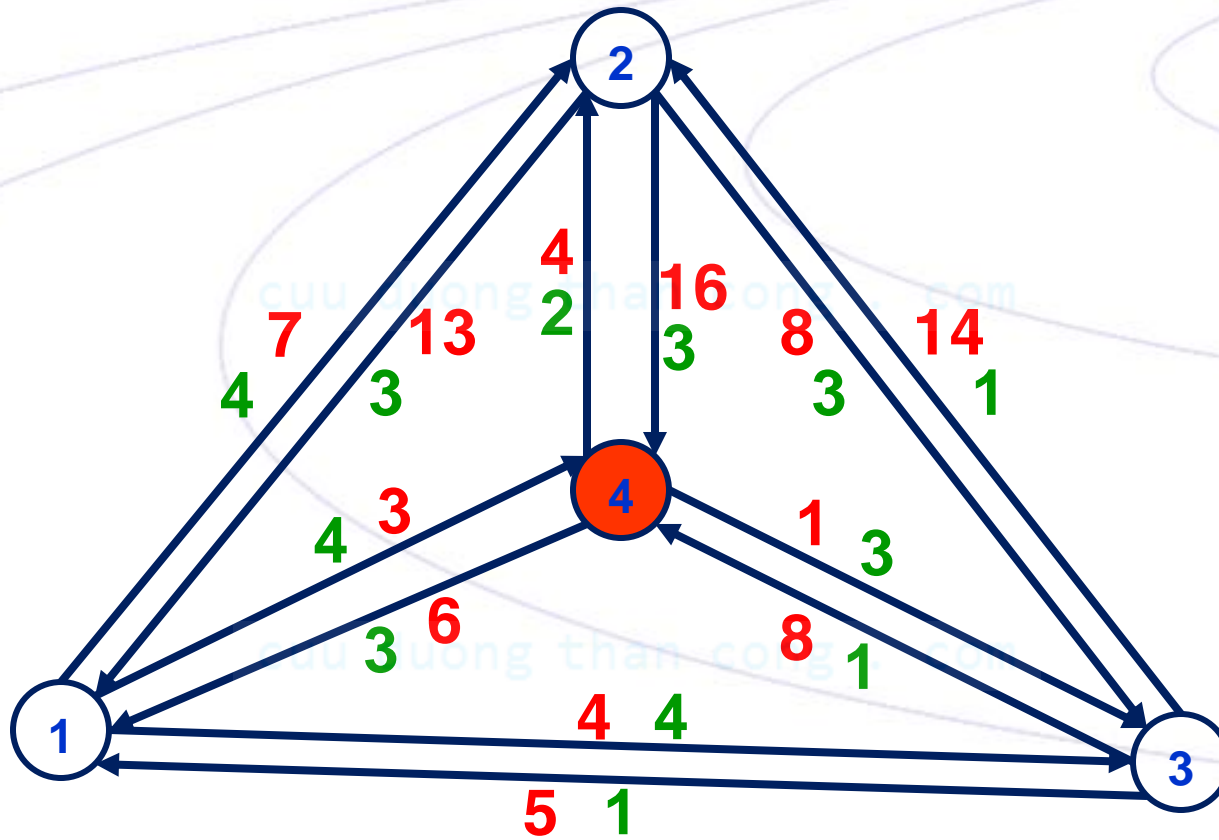


# VÍ DỤ

$t = 4$

$u = 2$

$v = 1, 3$

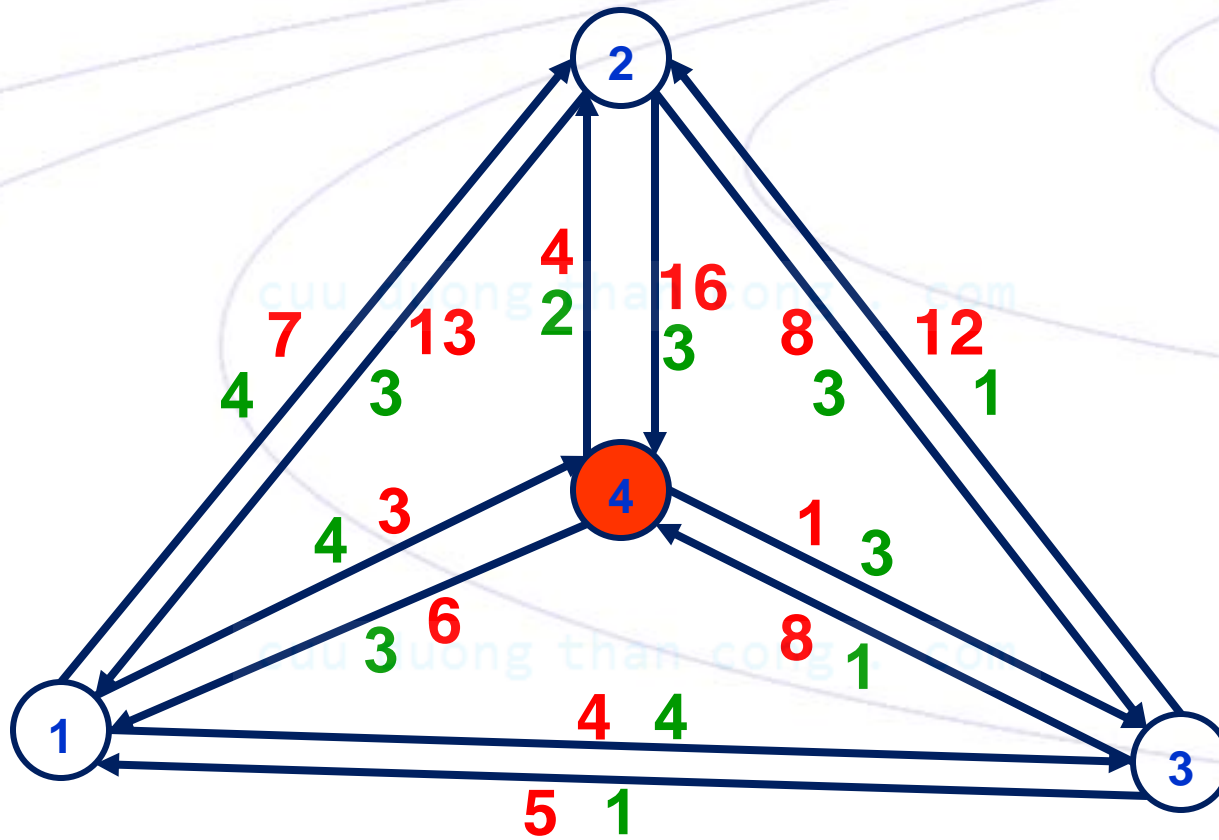


# VÍ DỤ

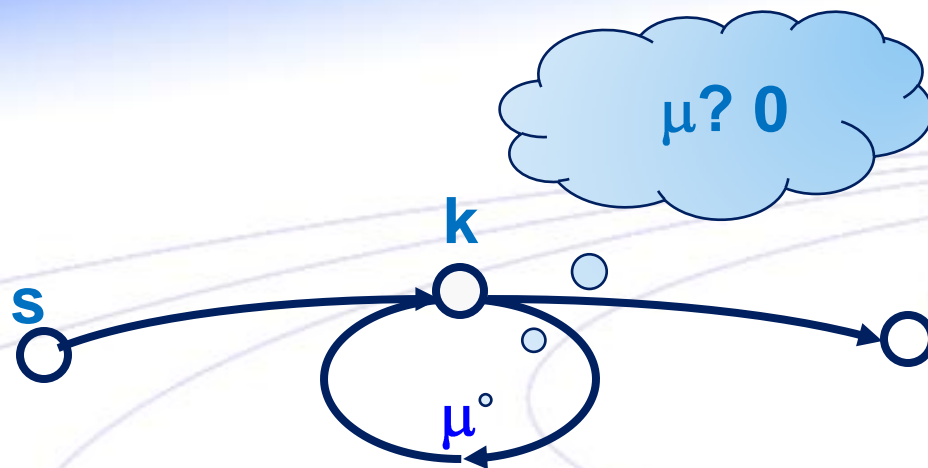
$t = 4$

$u = 3$

$v = 1, 2$







cuu duong than cong . com

TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ CÓ CẠNH ÂM

# THUẬT TOÁN BELLMAN

cuu duong than cong . com

# THUẬT TOÁN BELLMAN

**Input:**  $N, L, u$  – số đỉnh, ma trận trọng lượng của  $G(X, E)$ ,  
đỉnh xuất phát

**Output:**  $\pi, \text{Labels}$  –  $\pi(k, v)$ : trọng lượng ĐĐNN  $u \rightarrow v$  sau  $k$   
bước lặp,  $\text{Labels}[v]$ : đỉnh ngay trước  $v$  trong ĐĐNN  $u \rightarrow v$

1.  $\pi(0, u) = 0; \pi(0, v) = \infty \forall v \in X \setminus \{u\}; \text{Labels}[v] = -1 \forall v \in X;$

2. Lặp với  $k = 1, 2, N-1$

1.  $\forall i \in X$ , chọn  $j \in X$  sao cho  $\pi(k-1, j) + L_{ji}$  đạt nhỏ nhất; nếu  
 $j \neq i$ :

1.  $\pi(k, i) = \pi(k-1, j) + L_{ji}$

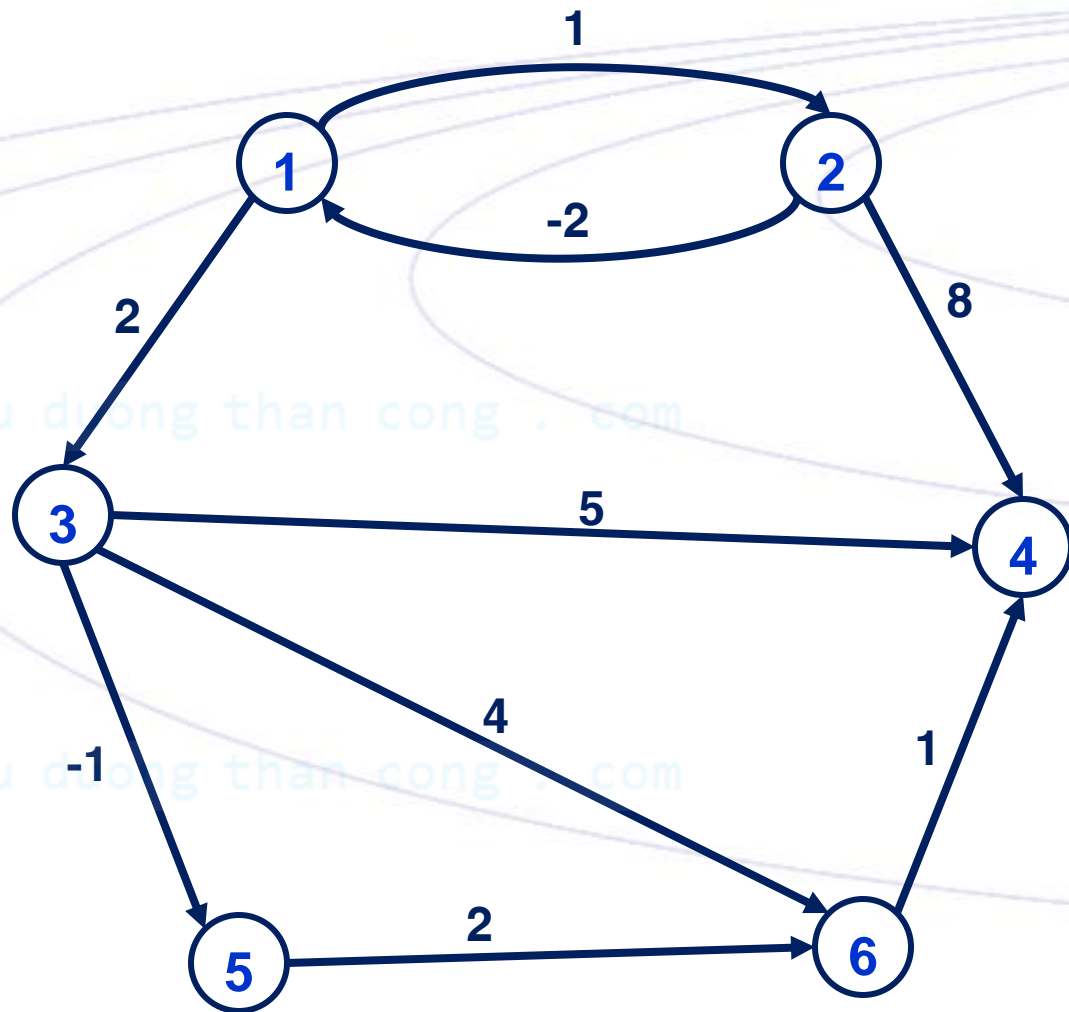
2.  $\text{Labels}[i] = j$

2. Nếu  $\pi(k) = \pi(k-1)$ :  $\pi(k, v)$  là đường đi ngắn nhất  $u \rightarrow v$

3. Nếu  $\pi$  vẫn còn thay đổi sau bước lặp  $N-1$ : từ  $u$  đã đi đến  
mạch âm

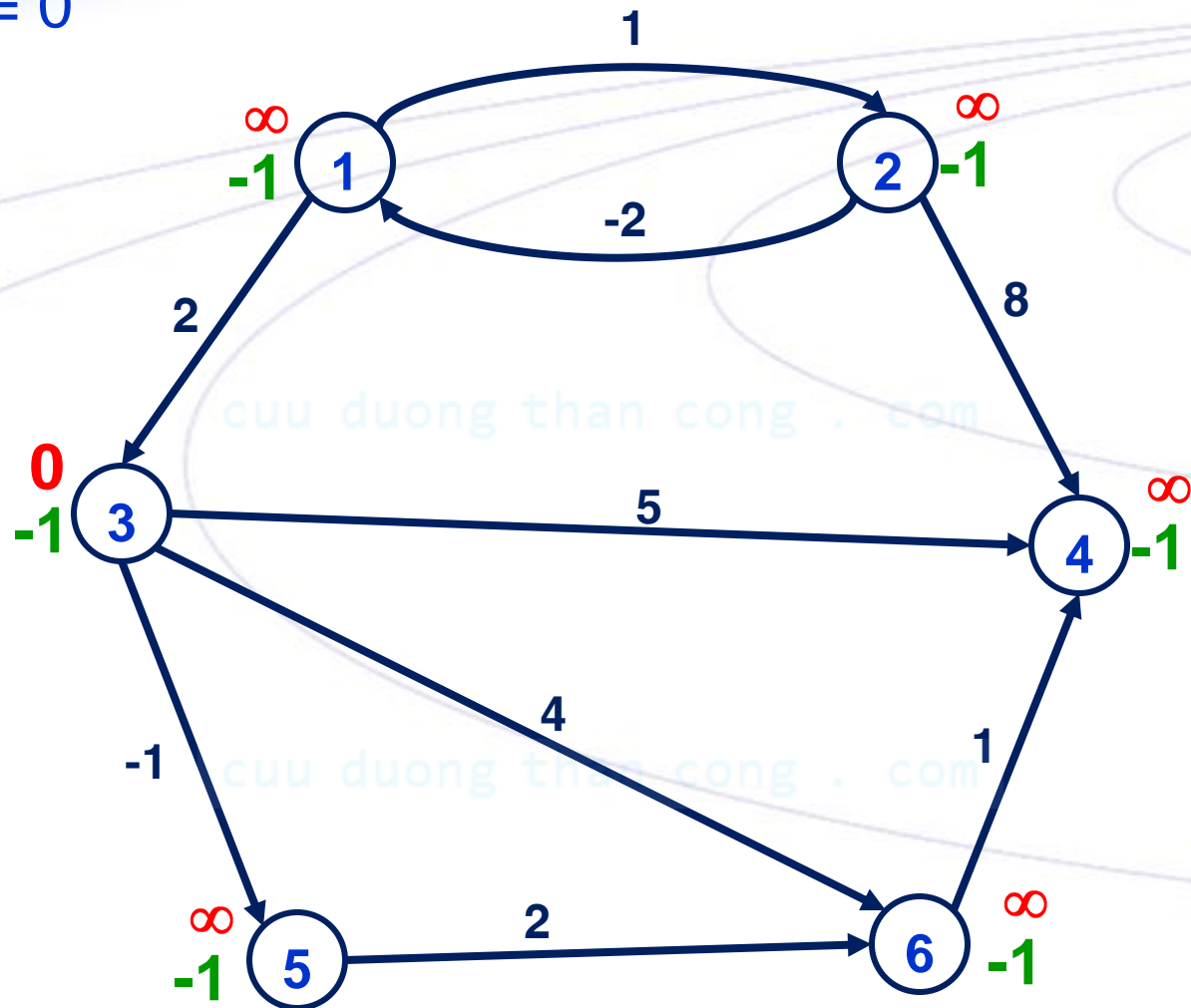
# VÍ DỤ

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 3 đến các đỉnh còn lại



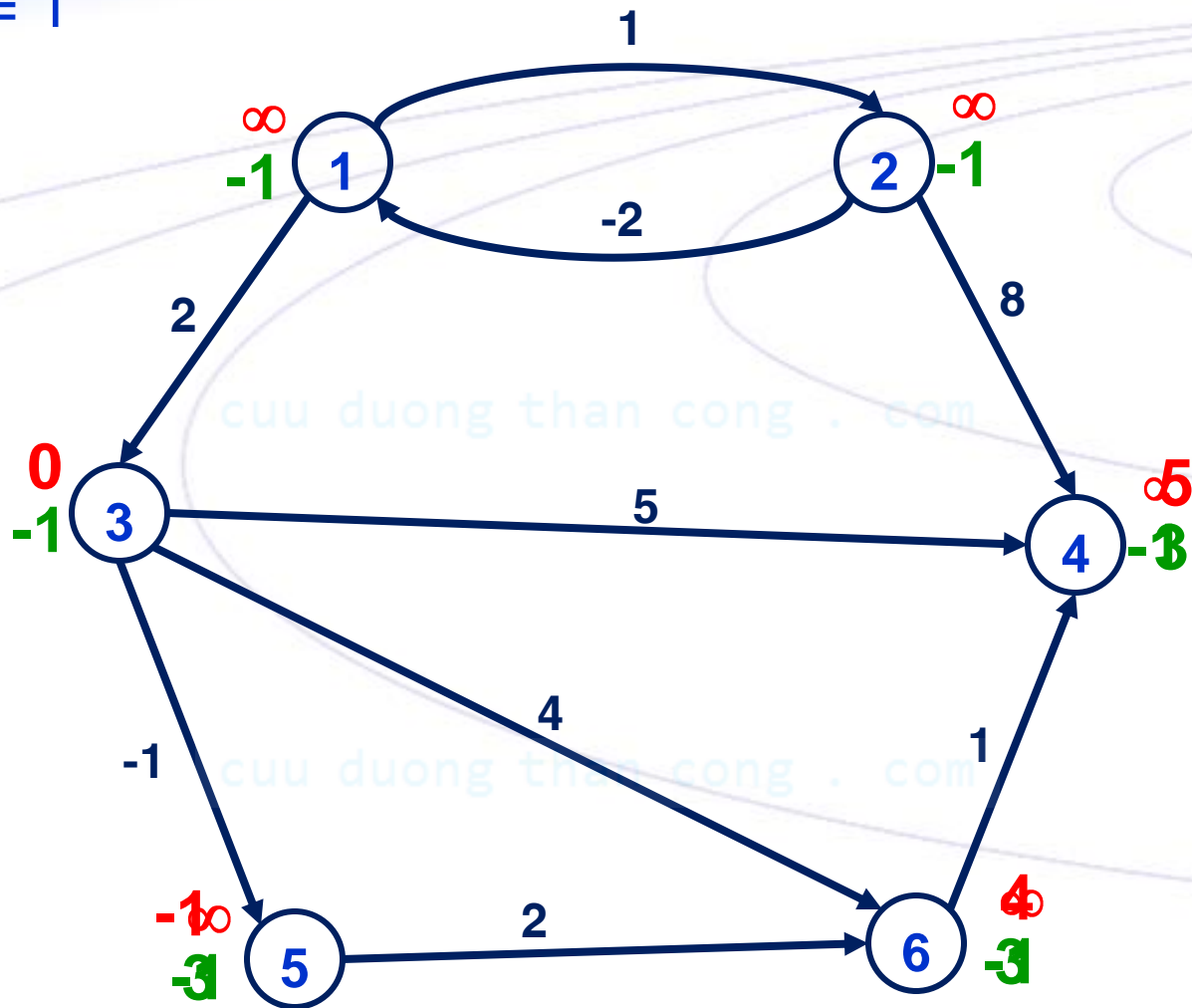
# VÍ DỤ

$k = 0$



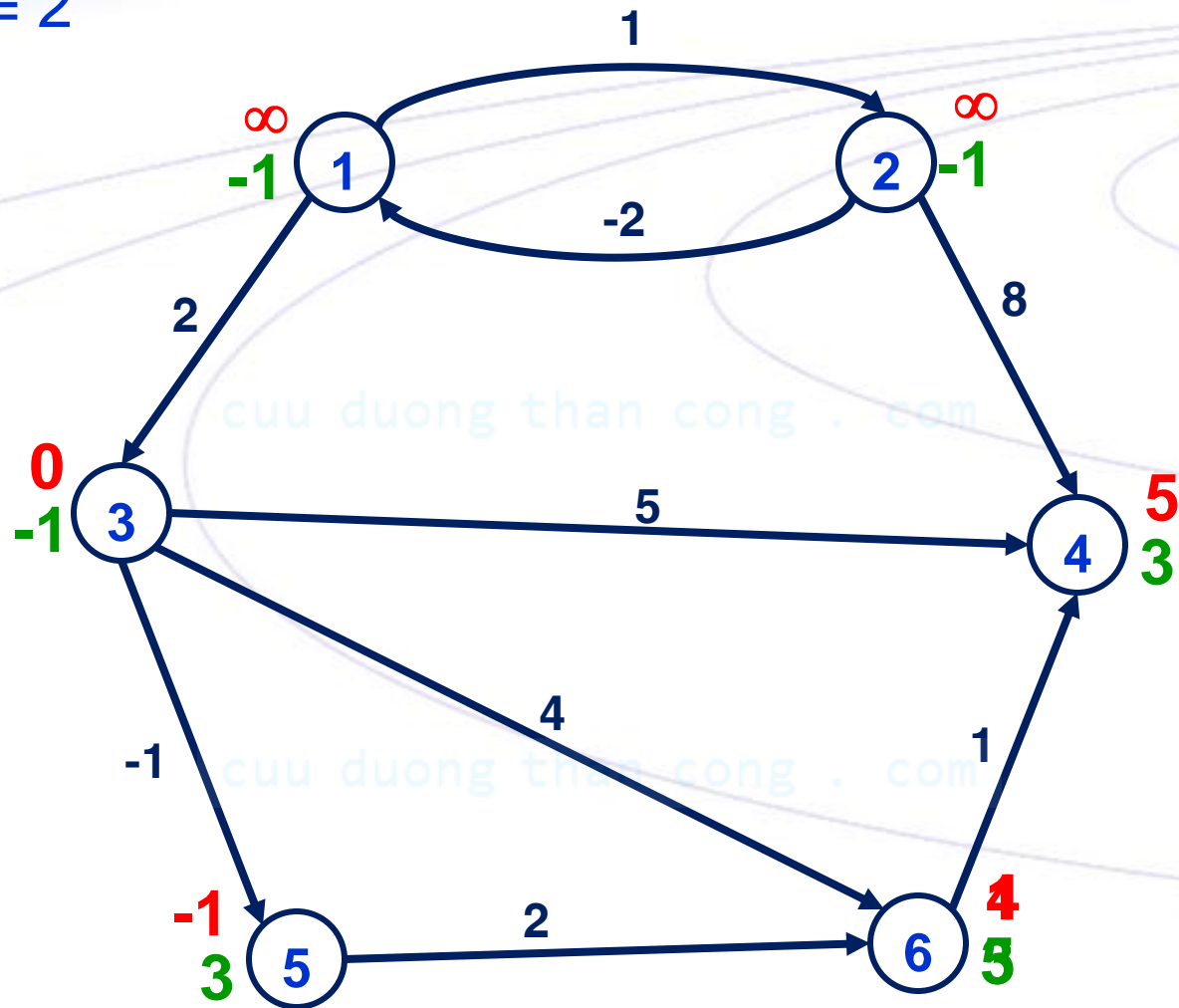
# VÍ DỤ

$k = 1$



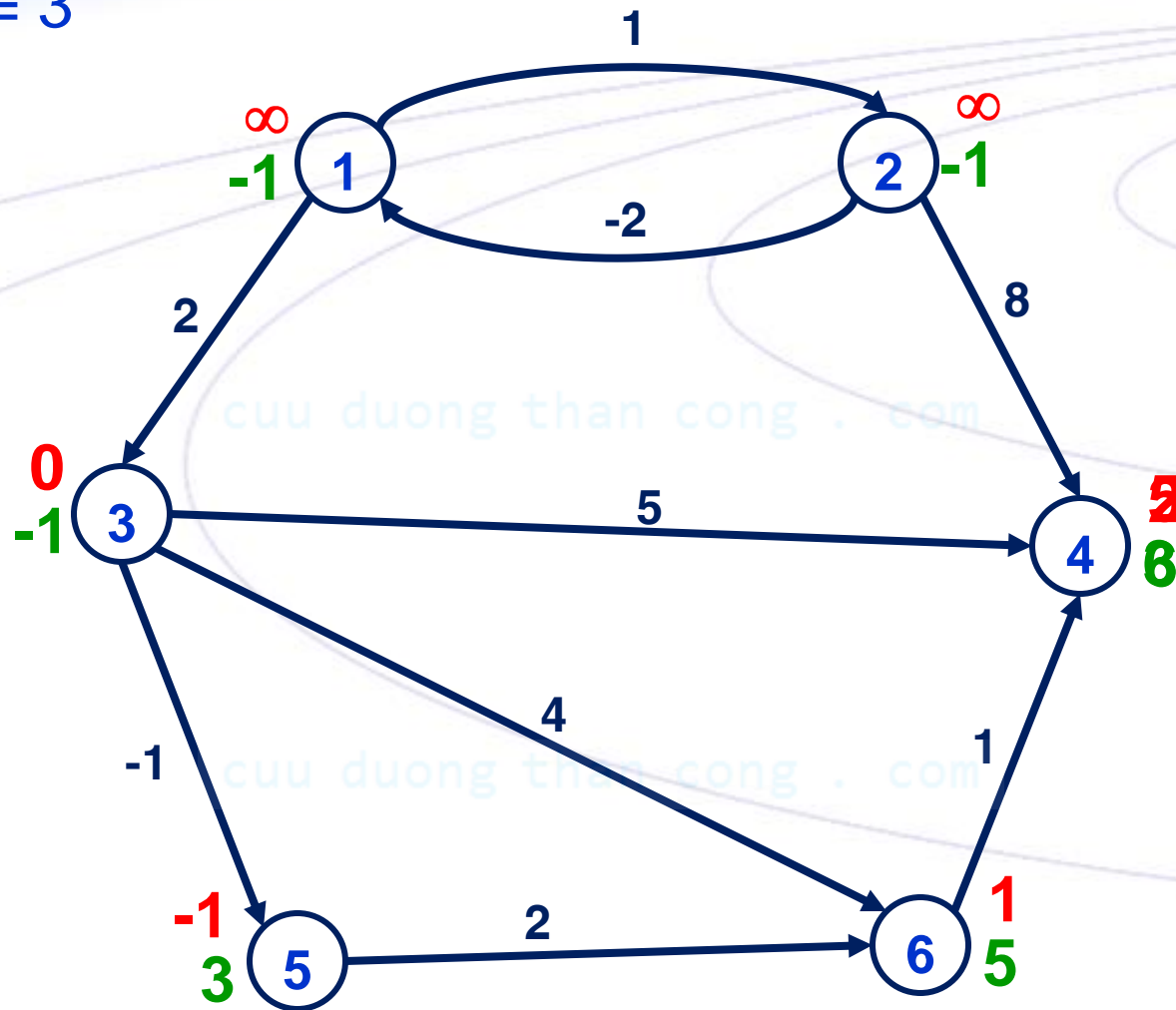
# VÍ DỤ

$k = 2$



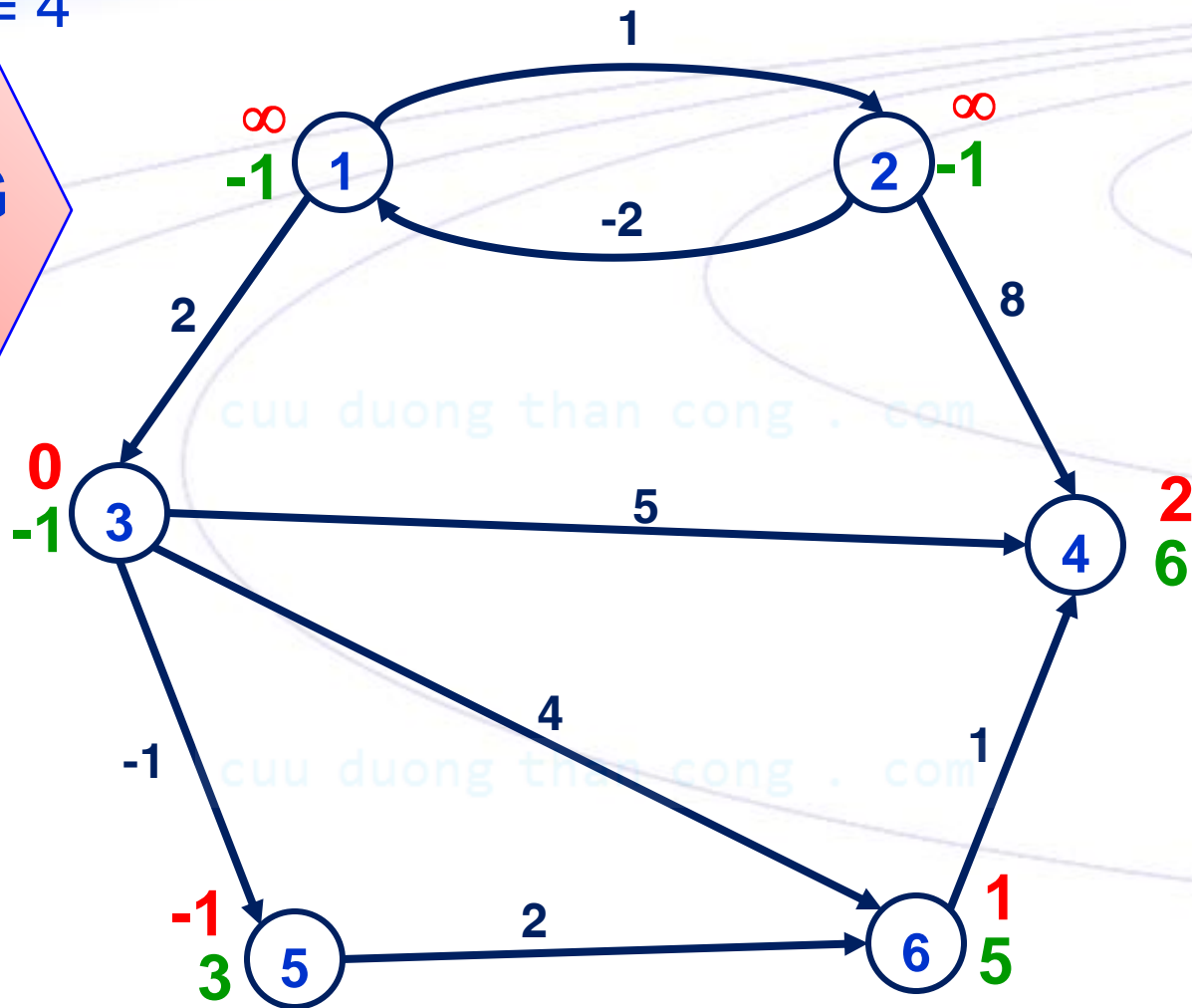
# VÍ DỤ

$k = 3$



# VÍ DỤ

$k = 4$





# GIÁ TRỊ CÁC BIẾN $\pi$ , Labels

$\pi$

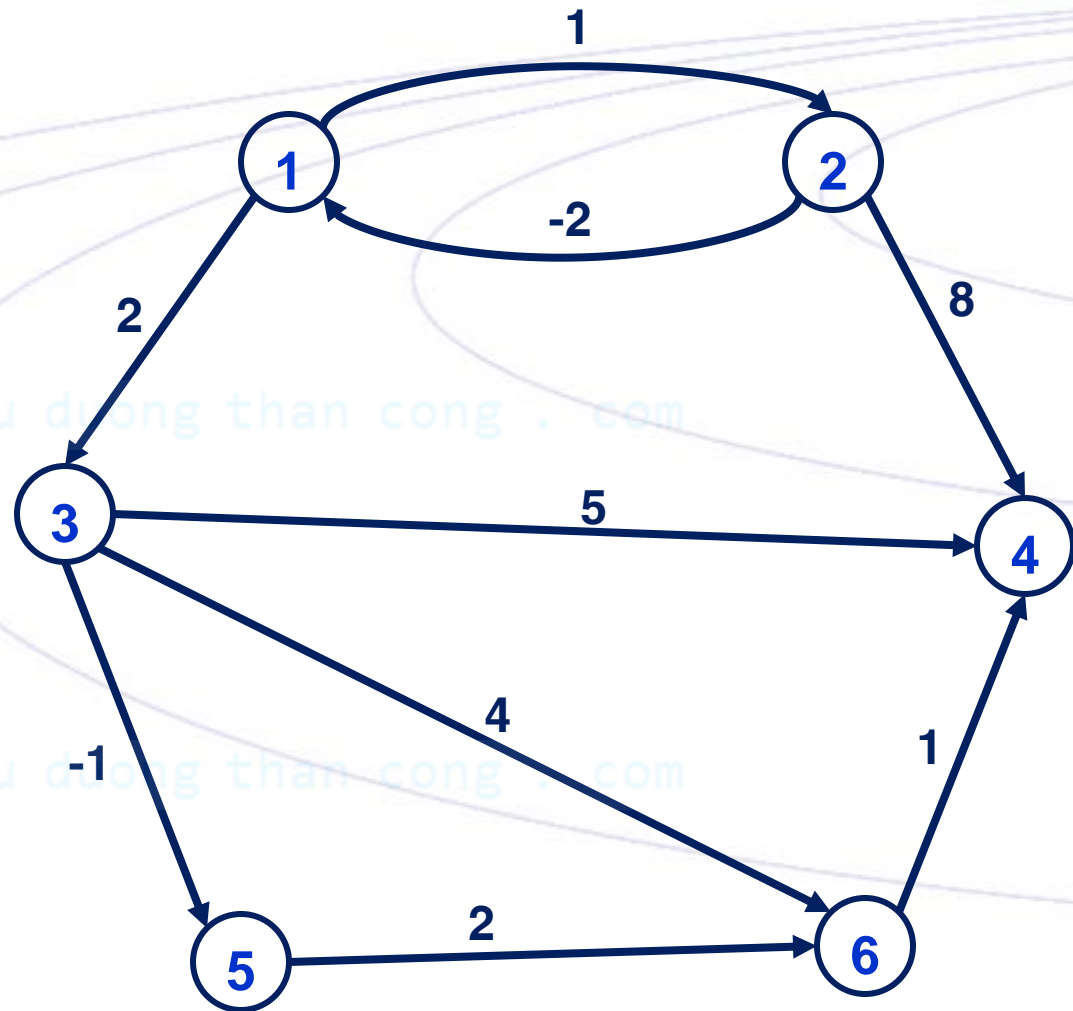
Labels

k/v	1	2	3	4	5	6
0	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	$\infty$	0	5	-1	4
2	$\infty$	$\infty$	0	5	-1	1
3	$\infty$	$\infty$	0	2	-1	1
4	$\infty$	$\infty$	0	2	-1	1

k/v	1	2	3	4	5	6
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	3	3	3
2	-1	-1	-1	3	3	5
3	-1	-1	-1	6	3	5
4	-1	-1	-1	6	3	5

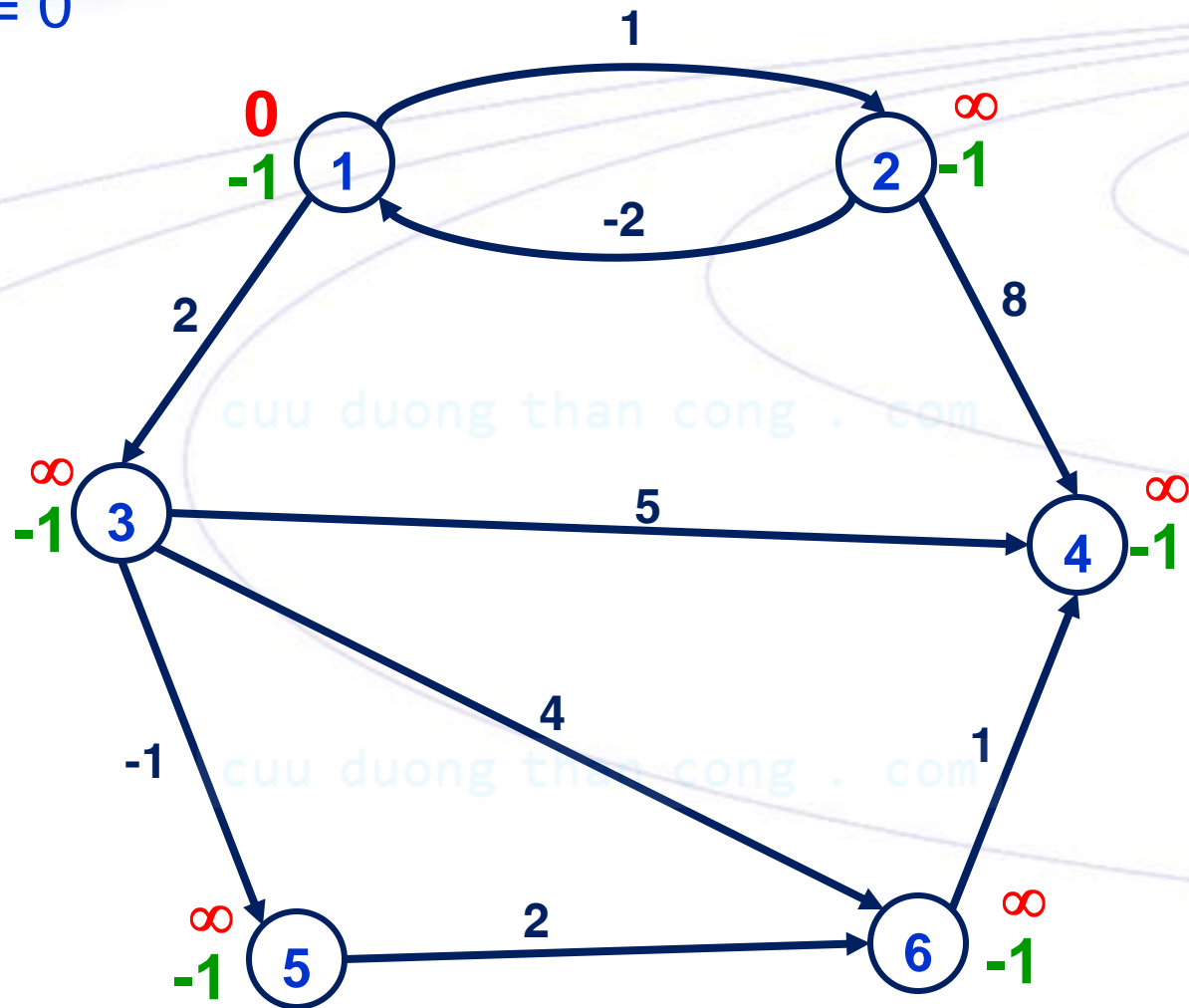
# VÍ DỤ

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại



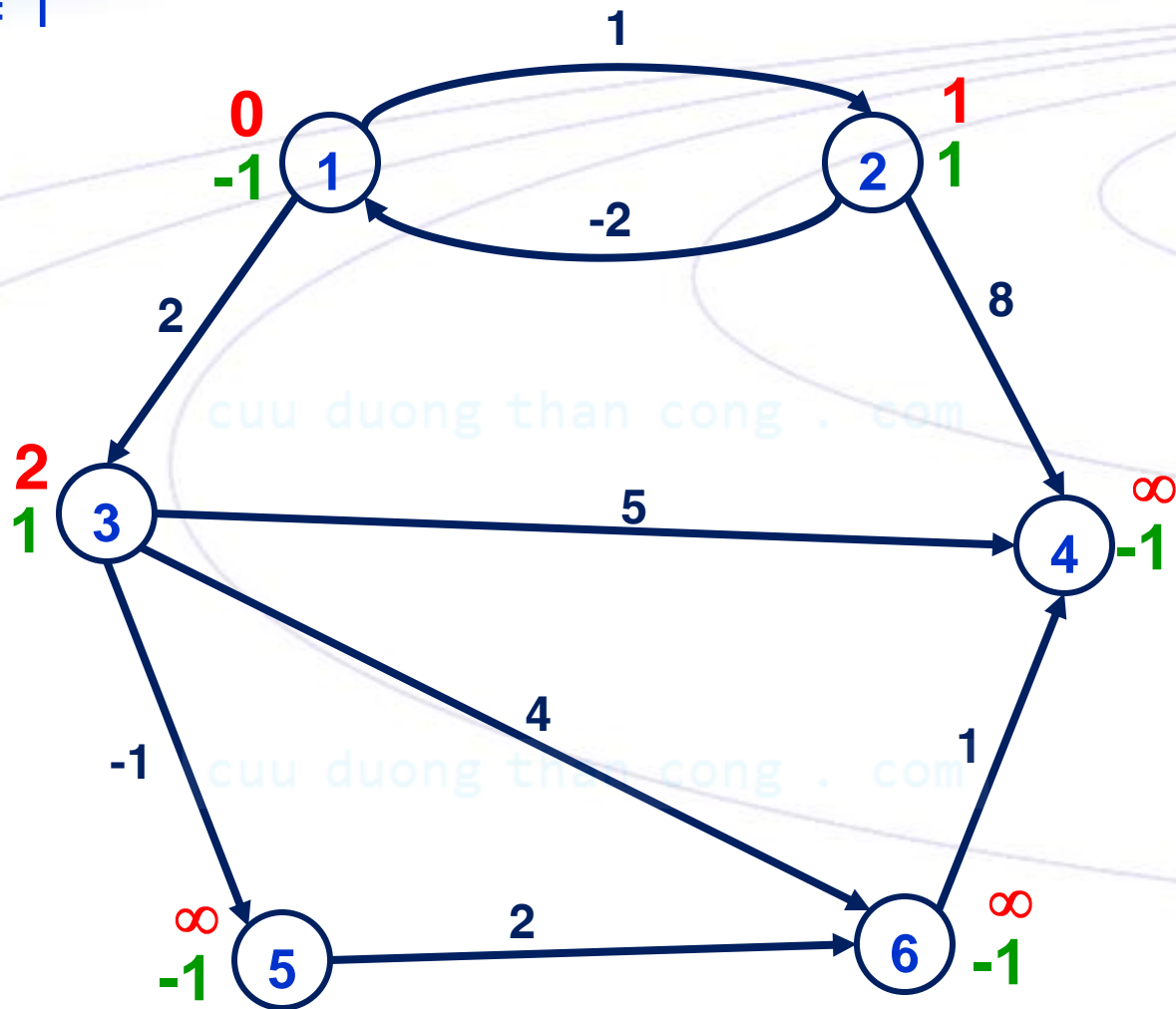
# VÍ DỤ

$k = 0$



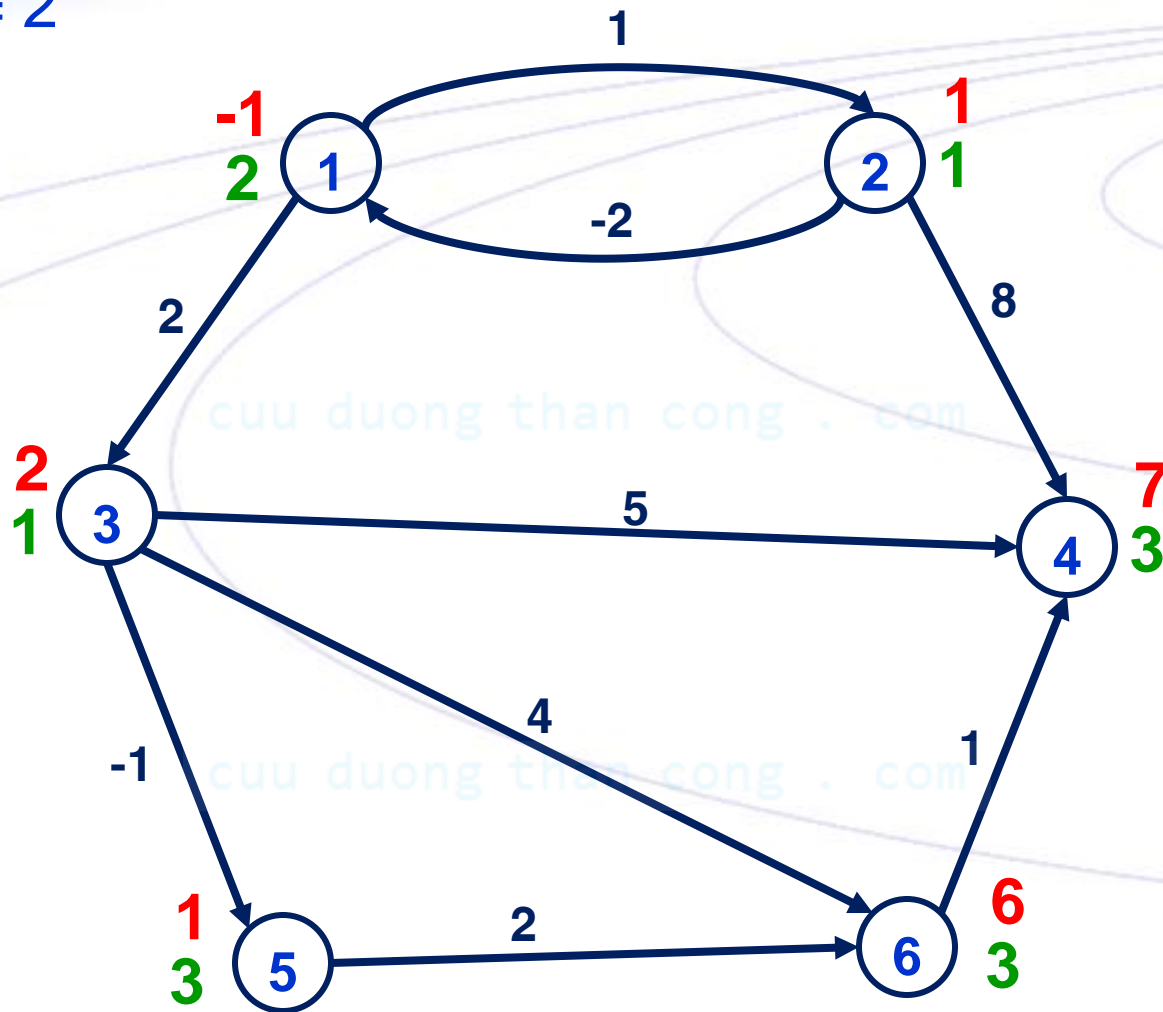
# VÍ DỤ

$k = 1$



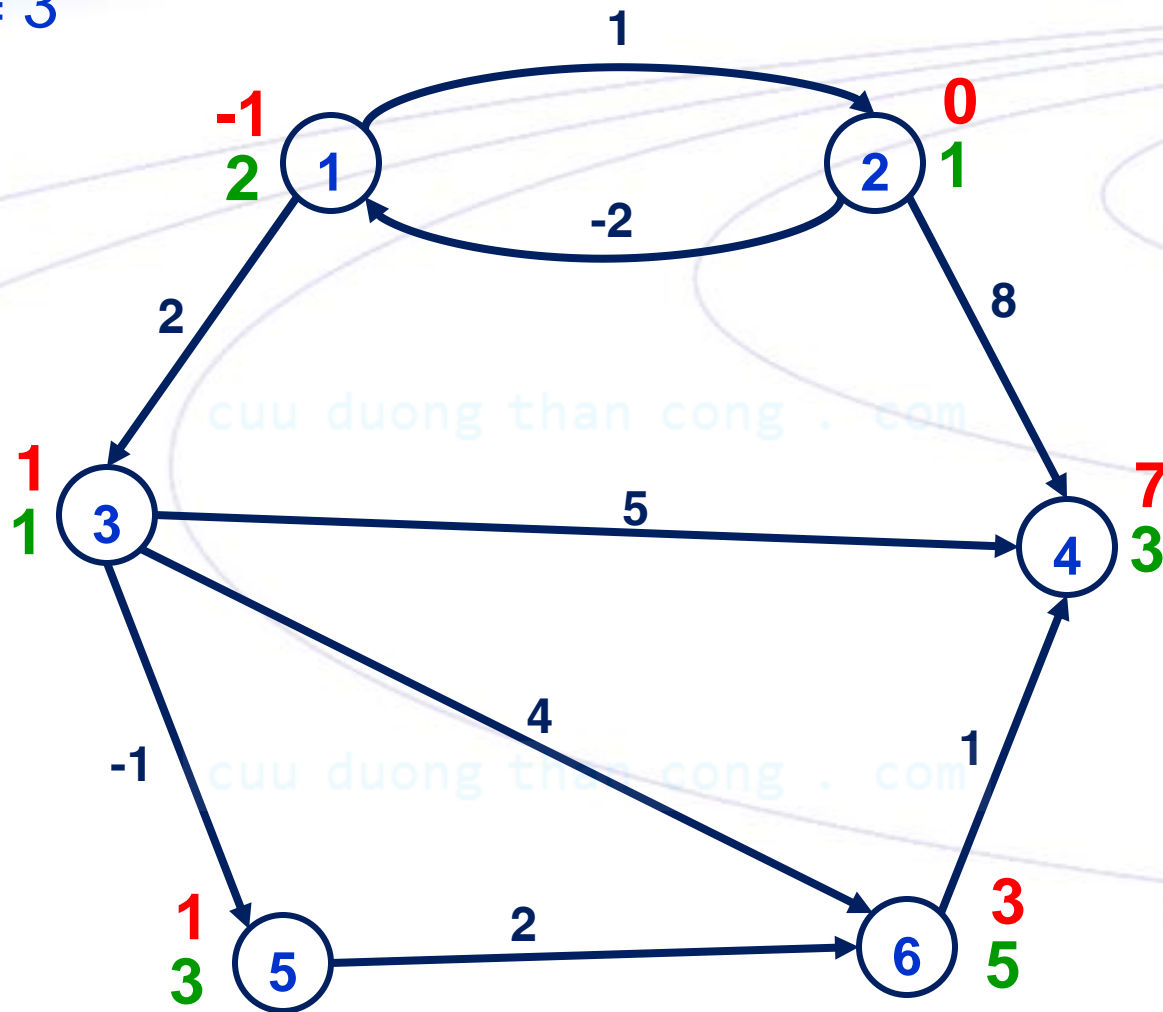
# VÍ DỤ

$k = 2$



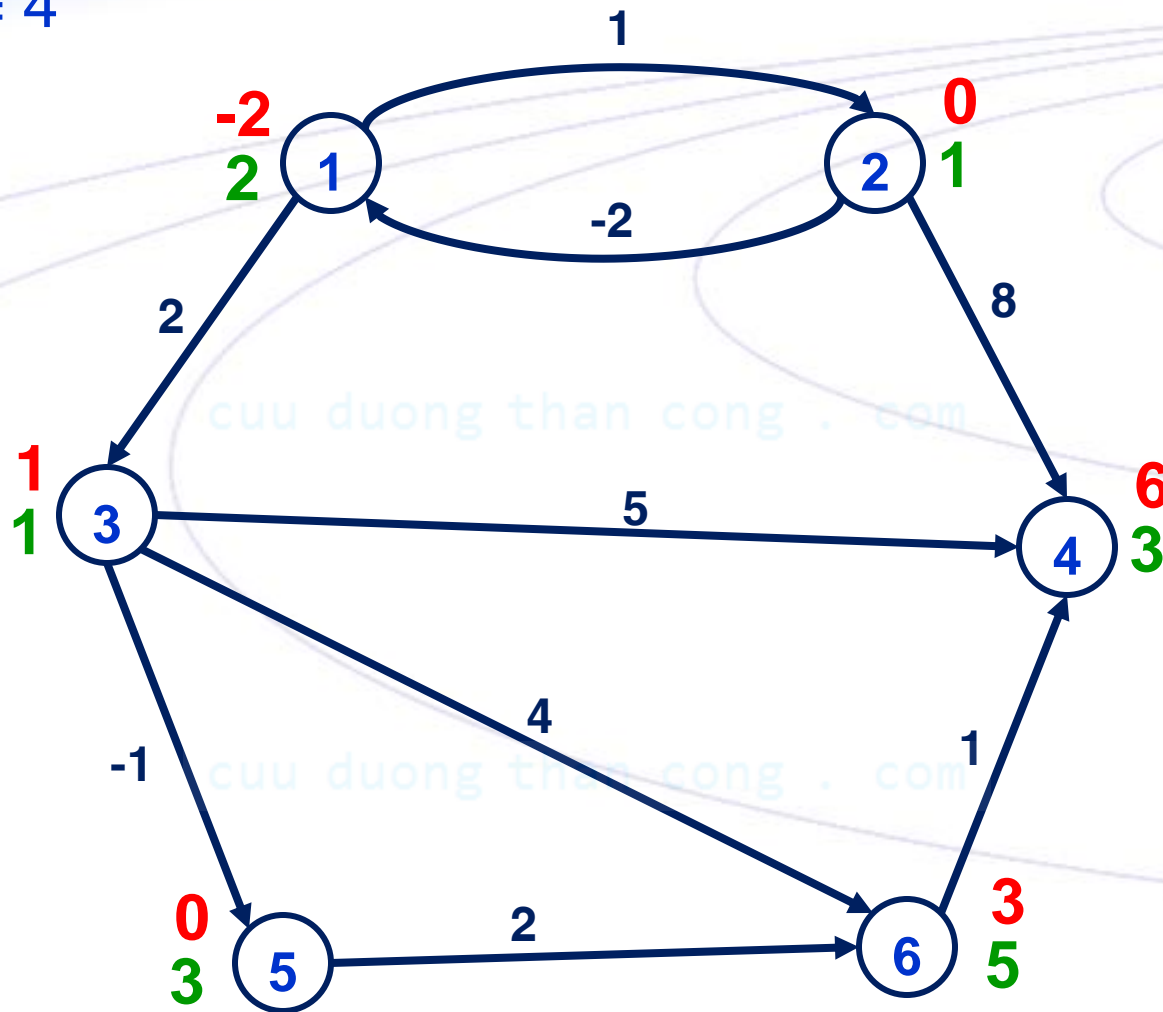
# VÍ DỤ

$k = 3$



# VÍ DỤ

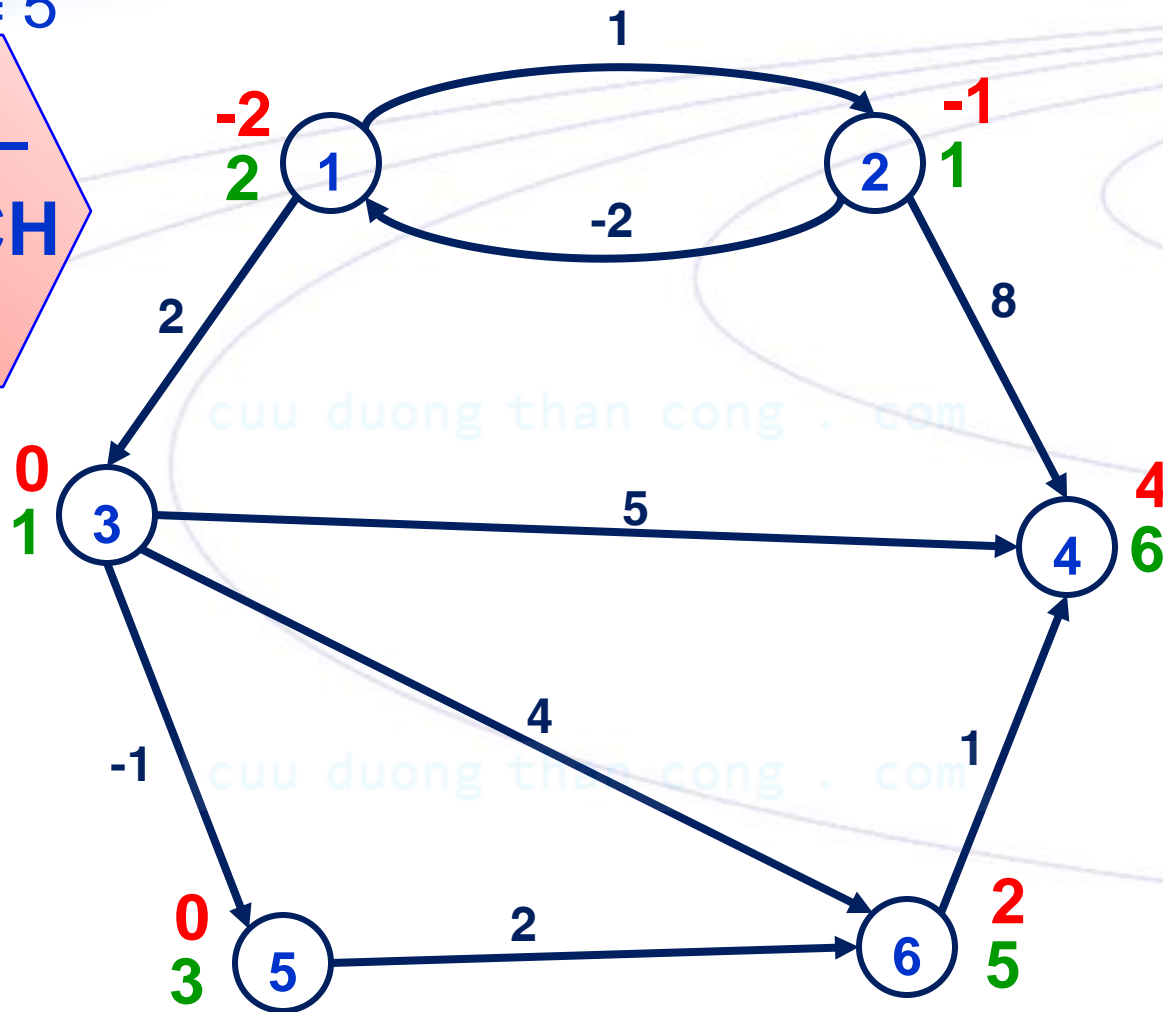
$k = 4$



# VÍ DỤ

$k = 5$

**DỪNG –  
CÓ MẠCH  
ÂM**

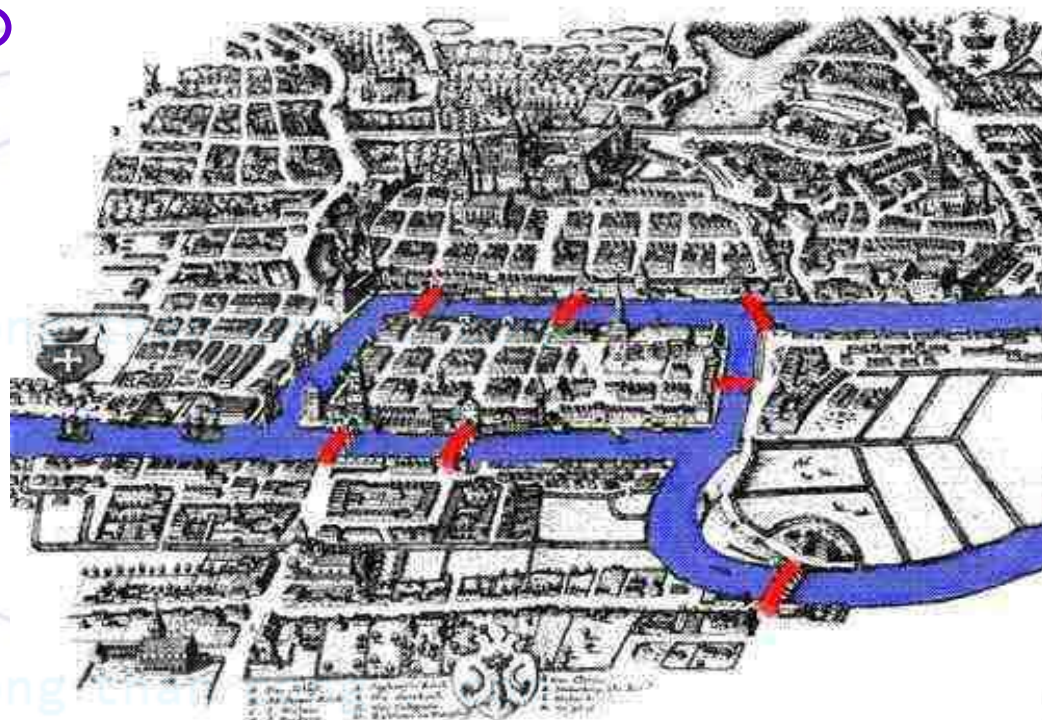




Konigsberg,  
Hmmm



Leonhard Euler  
(1707 – 1783)



# ĐỒ THỊ EULER



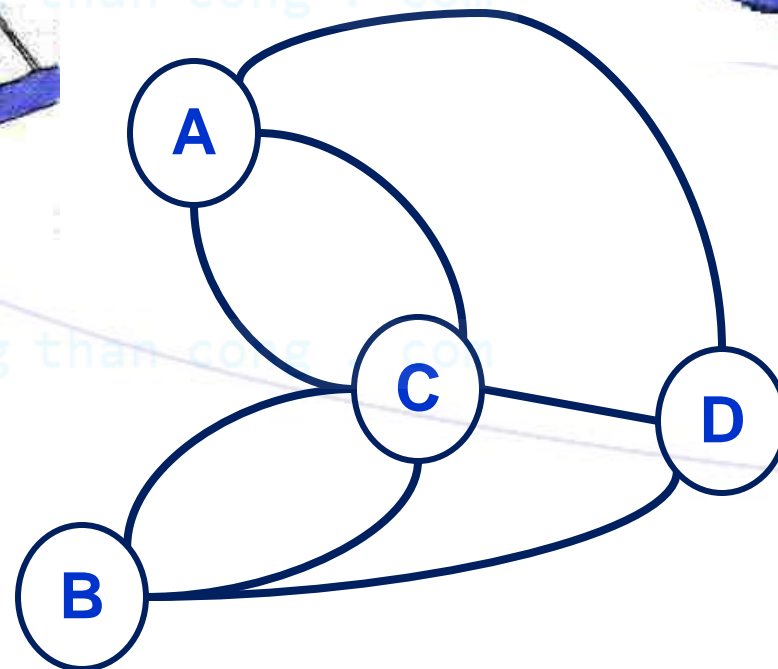
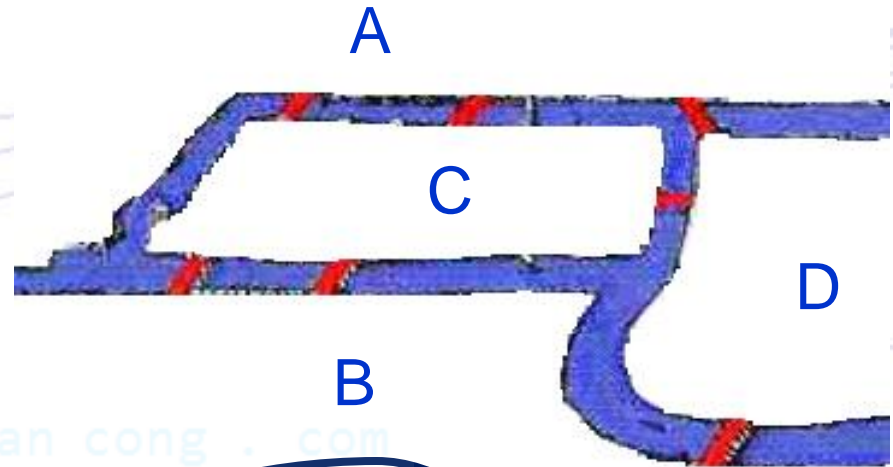
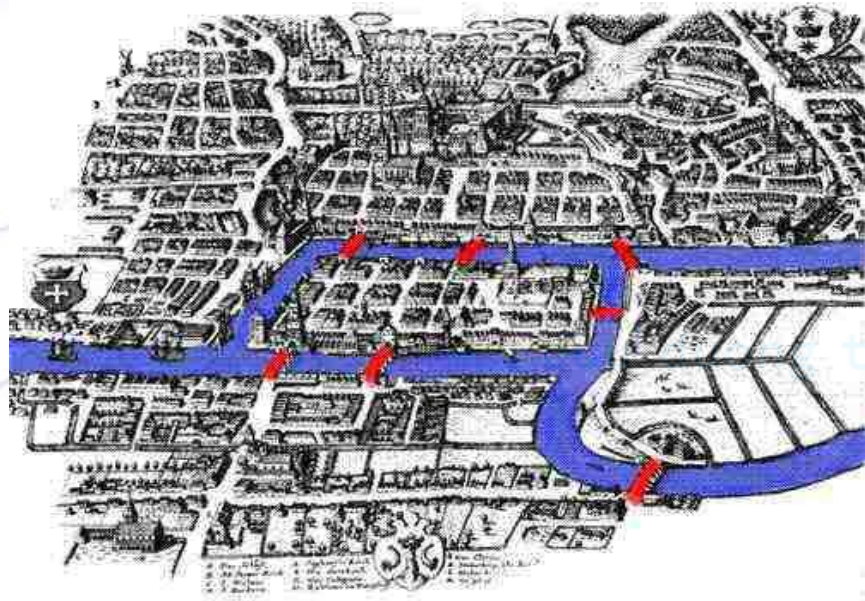
# BÀI TOÁN 7 CHIẾC CẦU

Thành phố Königsberg (Đức) bị chia thành 4 vùng do 2 nhánh của 1 dòng sông. Có 7 chiếc cầu nối những vùng này với nhau.

Bài toán: xuất phát từ một vùng đi dạo qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và trở về nơi xuất phát.

Năm 1736, nhà toán học Euler đã mô hình bài toán này bằng một đồ thị vô hướng với mỗi đỉnh ứng với một vùng, mỗi cạnh ứng với một chiếc cầu

# BÀI TOÁN 7 CHIẾC CẦU



# ĐỊNH NGHĨA

- ✦ **DÂY CHUYỀN EULER:** dây chuyền đi qua tất cả các cạnh trong đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.
- ✦ **CHU TRÌNH EULER:** dây chuyền Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.
- ✦ **ĐƯỜNG ĐI EULER:** đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.
- ✦ **MẠCH EULER:** đường đi Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.
- ✦ **ĐỒ THỊ EULER VÔ HƯỚNG:** đồ thị vô hướng có chứa một chu trình Euler.
- ✦ **ĐỒ THỊ EULER CÓ HƯỚNG:** đồ thị có hướng có chứa một mạch Euler.

# ĐỊNH LÝ EULER

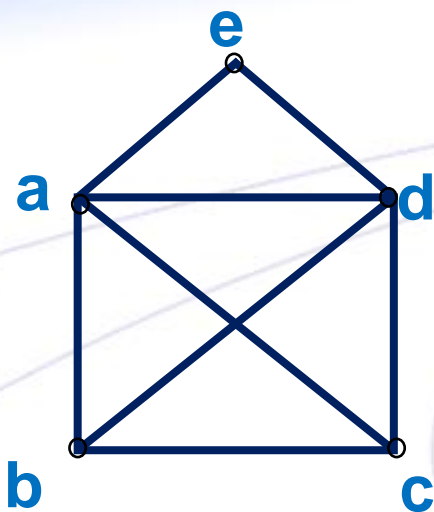
## Đồ thị vô hướng $G=(X, E)$

1.  $G$  là đồ thị Euler  $\Leftrightarrow G$  liên thông và  $d(x)$  chẵn  $\forall x \in X$ .
2.  $G$  có chứa dây chuyền Euler và không chứa chu trình chu trình Euler  $\Leftrightarrow G$  liên thông có chứa đúng hai đỉnh bậc lẻ.

## Đồ thị có hướng $G=(X, E)$

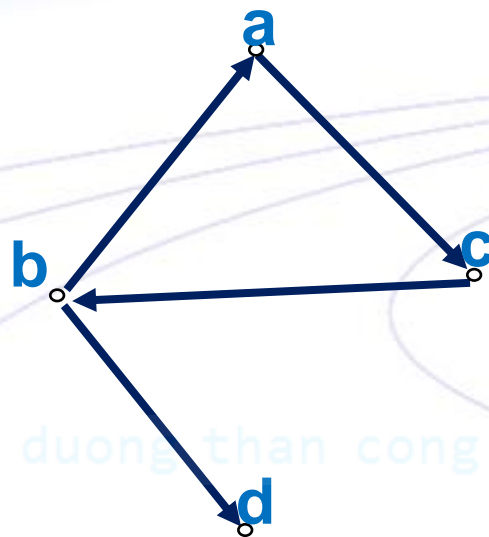
1.  $G$  là đồ thị Euler  $\Leftrightarrow G$  liên thông và  $d^+(x)=d^-(x)$   $\forall x \in X$ .

# VÍ DỤ



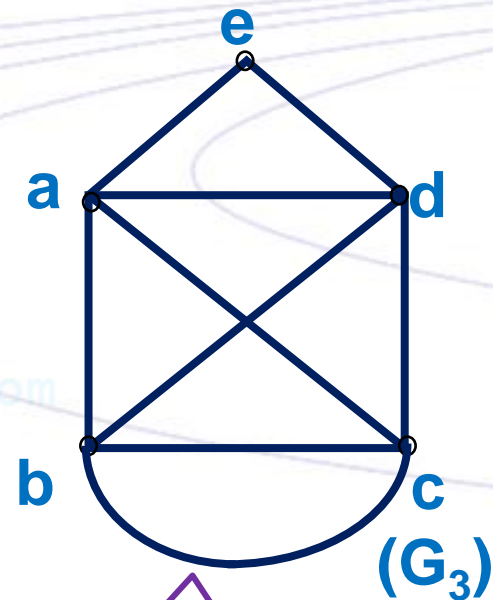
$(G_1)$

Liên thông và có 2  
đỉnh bậc lẻ  $\rightarrow$  có  
dây chuyền Euler:  
**bacdaedbc**



$(G_2)$

có đường đi  
Euler: **bacbd**



$(G_3)$

Liên thông và các  
đỉnh đều có bậc chẵn  
 $\rightarrow$  có chu trình Euler:  
**bacdaedbc**

# GIẢI THUẬT FLEURY

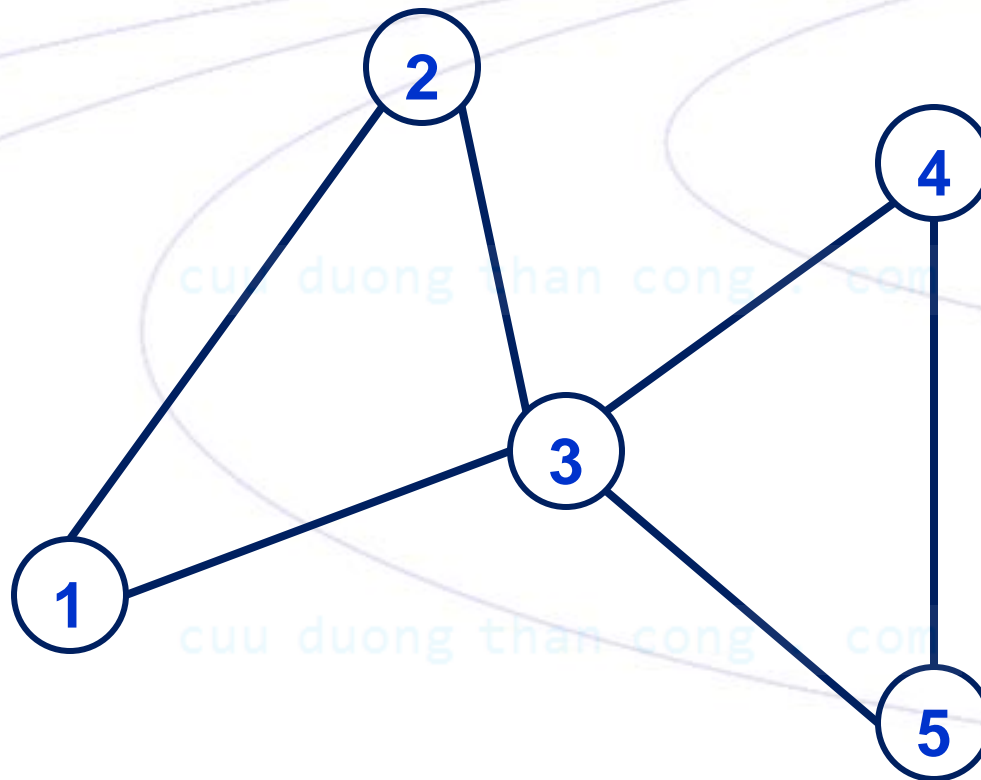
✦ Cạnh  $e$  của đồ thị  $G$  được gọi là **CẦU** nếu xóa  $e$  khỏi đồ thị thì làm tăng số thành phần liên thông của  $G$ .

**Giải thuật** Gọi chu trình cần tìm là  $C$

1. Khởi tạo: Chọn một đỉnh bất kỳ cho vào  $C$ .
2. Lặp trong khi  $G$  vẫn còn cạnh
  1. Chọn cạnh  $e$  nối đỉnh vừa chọn với một đỉnh kề với nó theo nguyên tắc: chỉ chọn cầu nếu không còn cạnh nào khác để chọn.
  2. Bổ sung  $e$  và đỉnh cuối của nó vào  $C$ .
  3. Xóa  $e$  khỏi  $G$ .

# VÍ DỤ

1      2      3      4      5      3      1







# GIẢI THUẬT XÁC ĐỊNH CÁC CHU TRÌNH THÀNH PHẦN

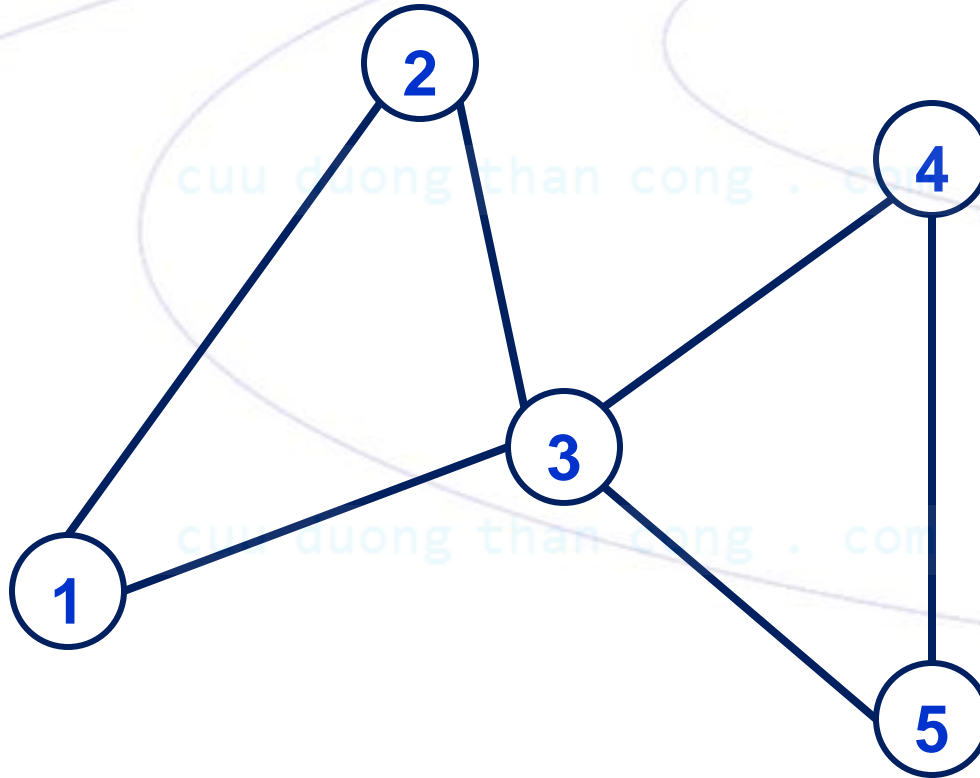
**Input**: đồ thị Euler  $G(X, E)$

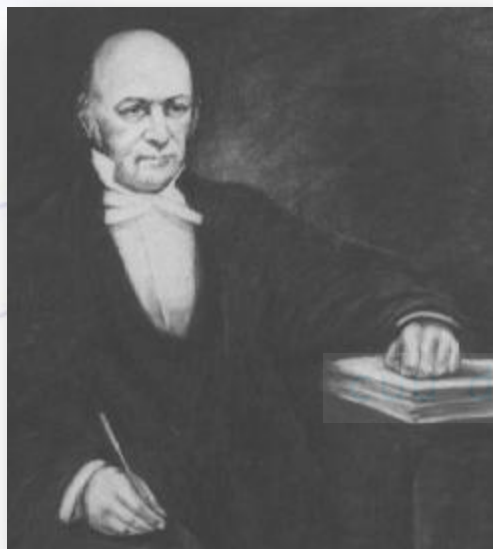
**Output**: chu trình Euler  $C$  của  $G$

1. Chọn đỉnh  $v \in X$ ;  $C = \{v\}$
2. Lặp trong khi  $G$  còn cạnh
  1. Chọn đỉnh  $v \in C$  còn cạnh trong  $G$
  2. Tìm chu trình  $C'$  xuất phát từ  $v$ .
  3. Ghép  $C'$  vào  $C$
  4. Loại bỏ các cạnh của  $C'$  khỏi  $G$

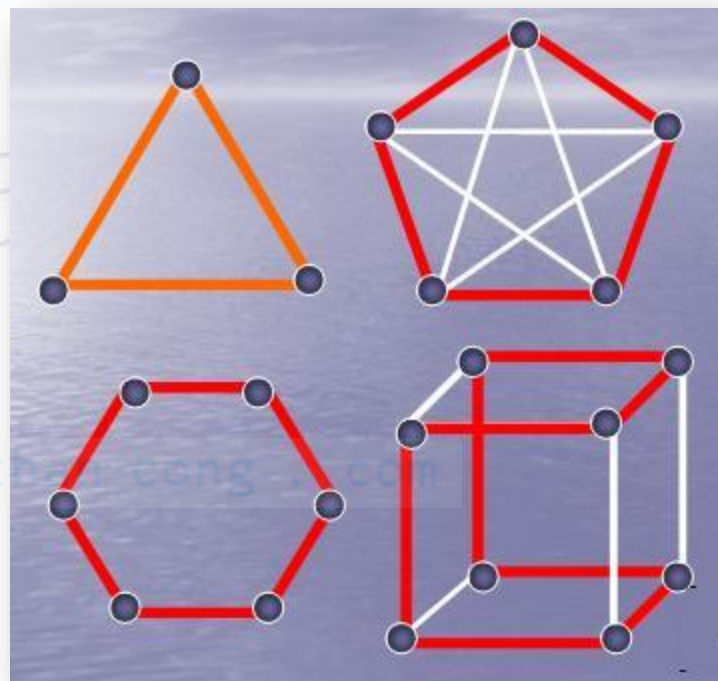
# VÍ DỤ

1	2	3	1
3	4	5	3





Sir William Rowan Hamilton  
(1805-1865)



# ĐỒ THỊ HAMILTON



# BÀI TOÁN KHỞI ĐIỂM

“Xuất phát từ một đỉnh của khối thập nhị diện đều, hãy đi dọc theo các cạnh của khối đó sao cho đi qua tất cả các đỉnh khác, mỗi đỉnh qua đúng một lần, sau đó trở về đỉnh xuất phát”.

Bài toán này được nhà toán học Hamilton đưa ra vào năm 1859



# ĐỊNH NGHĨA

Đồ thị vô hướng  $G(X, E)$

- ✦ **DÂY CHUYỀN HAMILTON:** dây chuyền đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.
- ✦ **CHU TRÌNH HAMILTON:** dây chuyền Hamilton và một cạnh trong đồ thị nối đỉnh đầu của dây chuyền với đỉnh cuối của nó.
- ✦ **ĐỒ THỊ HAMILTON:** đồ thị có chứa một chu trình Hamilton.

# MỘT SỐ KẾT QUẢ

- ✦ Đồ thị đủ luôn là đồ thị Hamilton. Với  $n$  lẻ  $\geq 3$  thì  $K_n$  có  $(n-1)/2$  chu trình Hamilton đôi một không có cạnh chung.
- ✦ Đồ thị lưỡng phân  $G$  với hai tập đỉnh  $X_1, X_2$  và  $|X_1| = |X_2| = n$ . Nếu  $d(x) \geq n/2 \quad \forall x$  của  $G$  thì  $G$  là đồ thị Hamilton.
- ✦ Đồ thị vô hướng đơn  $G$  gồm  $n$  đỉnh và  $m$  cạnh. Nếu  $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$  thì  $G$  là đồ thị Hamilton.

✦ Đồ thị vô hướng đơn  $G$  gồm  $n$  đỉnh với  $n \geq 3$

- ◆ Nếu  $d(x) \geq n/2 \quad \forall x$  của  $G$  thì  $G$  là đồ thị Hamilton.
- ◆ Nếu  $d(x) \geq (n-1)/2 \quad \forall x$  của  $G$  thì  $G$  có dây chuyền Hamilton.
- ◆ Nếu  $d(x) + d(y) \geq n$  với mọi cặp đỉnh  $x, y$  không kề nhau của  $G$  thì  $G$  là đồ thị Hamilton.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

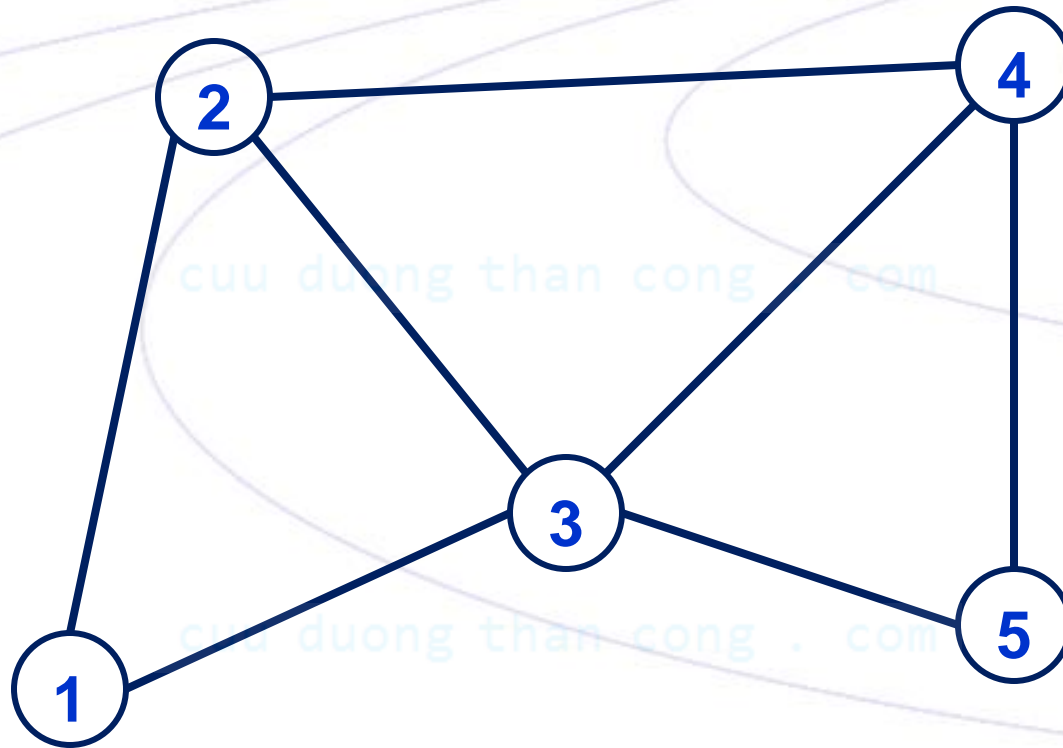


# QUI TẮC XÁC ĐỊNH

1. Nếu  $G$  có đỉnh bậc  $< 2$  thì  $G$  không có chu trình Hamilton
2. Nếu đỉnh có bậc 2 thì 2 cạnh kề với nó phải nằm trong chu trình Hamilton
3. Các cạnh thừa (ngoài 2 cạnh đã chọn trong chu trình Hamilton) phải được bỏ đi trong quá trình xác định chu trình
4. Nếu quá trình xây dựng tạo nên một chu trình con thì đồ thị không có chu trình Hamilton



# VÍ DỤ





# BÀI TẬP

1. Chứng minh nguyên lý Bellman
2. Chứng minh tính đúng đắn của các thuật toán Dijkstra, Floyd, Bellman
3. Cài đặt thuật toán xác định chu trình Euler
4. Xác định các “nét” của Đồ thị K nét.

cuu duong than cong . com