ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
***

NGUYỄN VIẾT ĐÔNG - TRẦN HUYÊN

ĐẠI SỐ ĐỒNG ĐIỀU

(Tái bản có bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH - 2006

Lời nói đầu

"Đại số đồng điều ngày nay đang tràn ngập toàn bộ toán học" (SZE-TSEN-HU). Vì vậy việc giảng dạy môn đại số đồng điều cho sinh viên và học viên cao học ngành Toán thực sự là cần thiết. Sách này dùng làm tài liệu giáo khoa dành cho các đối tượng đó. Nó bao gồm những kiến thức cơ sở của đại số đồng điều. Mục đích chính của cuốn sách là trình bày một cách ngắn gọn các định nghĩa và tính chất cơ bản của các hàm tử $\mathrm{Hom}, \otimes, \mathrm{Tor}_n$ *và* Ext^n. *Sách này gồm bốn chương. Chương I và II trình bày lý thuyết môđun trên vành có đơn vị và các hàm tử* $\mathrm{Hom}, \otimes$. *Những kiến thức của hai chương này có thể sinh viên đã gặp trong các giáo trình trước đây nhưng được chúng tôi trình bày lại theo ngôn ngữ đẹp đẽ của lý thuyết phạm trù và hàm tử. Lý thuyết phạm trù và hàm tử do Eilenberg và MacLane đưa ra ở giữa thế kỷ XX và đã tỏ ra rất có ích cho nhiều ngành toán học. Chương III dành để xây dựng các nhóm đồng điều và đối đồng điều của phức. Như một minh chứng cho lợi ích của các phức, ở phần cuối của chương này chúng ta sẽ mô tả một cách ngắn gọn về đồng điều kỳ dị của các không gian tôpô. Chương cuối của cuốn sách giới thiệu các hàm tử* $\mathrm{Tor}_n, \mathrm{Ext}^n$. *Có nhiều cách để xây dựng những hàm tử này nhưng chúng tôi xây dựng cả hai hàm tử này bằng các phép giải xạ ảnh. Do khuôn khổ của cuốn sách nên nhiều ứng dụng lý thú của hai hàm tử này chưa được trình bày ở đây. Độc giả có thể tìm thấy chúng trong các tài liệu tham khảo cao hơn được liệt kê ở cuối sách.*

Các bài tập ở cuối mỗi chương được lựa chọn cẩn thận nhằm củng cố và nâng cao các kiến thức đã nêu. Vì vậy sinh viên cần giải *một cách cẩn thận mới nắm vững chắc được các kiến thức của môn học.*

Cuốn sách này được tái bản dựa trên cuốn sách cùng tên của chúng tôi được xuất bản bởi Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. HCM, năm 2002. Chúng tôi xin cảm ơn Khoa Toán - Tin học, Phòng Đào tạo, Ban xuất bản Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia TP. HCM và Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. HCM đã tạo điều kiện để cuốn sách được đến tay bạn đọc. Trong lần tái bản này chúng tôi đã bổ sung một số kiến thức mới và sửa chữa những sai sót đã có. Chúng tôi xin đặc biệt cảm ơn anh Phan Thanh Toàn đã giúp chúng tôi chỉnh lý nhiều chỗ trong cuốn sách và đã nhiệt tình soạn thảo toàn bộ cuốn sách bằng LaTeX.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng có thể còn những sai sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự đóng góp của các đồng nghiệp và của tất cả bạn đọc. Mọi ý kiến xin vui lòng gửi về Bộ môn Đại số, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia TP. HCM, 227 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. HCM, email: algebra@mathdep.hcmuns.edu.vn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Chương I
PHẠM TRÙ MÔĐUN

§1. Môđun và đồng cấu

Khái niệm môđun được xem là sự tổng quát hóa khái niệm không gian véctơ. Chúng ta nhắc lại rằng, một không gian véctơ thực là một nhóm cộng $(V, +)$ giao hoán mà trên đó được trang bị một phép nhân ngoài từ trường số thực, tức là với mỗi số thực r và mỗi phần tử $x \in V$ tích rx được xác định là một phần tử của V. Hơn nữa các phép toán trên V thỏa mãn thêm bốn điều kiện là các tiên đề đồng nhất, tiên đề kết hợp hỗn hợp giữa các phép nhân ngoài và phép nhân các số thực, các tiên đề phân phối của phép nhân ngoài đối với phép cộng trong V hay phép cộng các số thực. Để ý rằng trong định nghĩa không gian véctơ, khi ta thay trường số thực bởi bất kỳ một vành R có đơn vị thì các tiên đề nói trên vẫn còn giữ nguyên tính hợp lý của chúng và khi đó chúng ta có được một khái niệm mới với phạm vi rộng hơn. Đó chính là khái niệm môđun trên vành R. Cụ thể hơn, chúng ta có:

1.1. Định nghĩa

Cho vành R có đơn vị (đơn vị của R ký hiệu là 1). Nhóm cộng aben $(X, +)$ sẽ được gọi là *môđun trái trên vành* R nếu trên X ta đã xác định được một tác động trái từ R, tức có ánh xạ $\mu : R \times X \to X$ mà kết quả $\mu(r, x)$ ta ký hiệu là rx và gọi là tích của hệ tử r với phần tử x. Ngoài ra các tiên đề sau cần được thỏa mãn:

$M_1 : 1.x = x$

$M_2 : (rs)x = r(sx)$

$M_3 : r(x + y) = rx + ry$

$M_4 : (r + s)x = rx + sx,$

với mọi $r, s \in R$ và mọi $x, y \in X$.

Tác động trái từ R vào X cũng còn gọi là *phép nhân ngoài* từ R vào X. Vành R cũng được gọi là *vành hệ tử* hay *vành các vô hướng*. Các môđun trái trên R cũng được gọi là các R-môđun trái. Hơn nữa, khi vành hệ tử đã xác định, để đơn giản, ta sẽ gọi các R-môđun trái là các *môđun*. Và cũng như trường hợp không gian véctơ các tiên đề M_1, M_2, M_3, M_4 cũng sẽ được chúng ta gọi là tiên đề đồng nhất, tiên đề kết hợp hỗn hợp của các phép nhân, tiên đề phân phối của phép nhân ngoài với các phép cộng.

1.2. Các ví dụ

a) Vì các khái niệm môđun là sự tổng quát hóa của khái niệm không gian véctơ nên ví dụ hiển nhiên đầu tiên về các môđun chính là các không gian véctơ. Các không gian véctơ thực chính là các môđun trên trường số thực.

b) Cho R là vành có đơn vị 1. Xét iđêan trái I của R. Khi đó $(I, +)$ là nhóm aben và do $RI \subset I$ nên phép nhân trên R có thể xem như phép nhân ngoài từ R vào I. Từ các tính chất của phép nhân trên R dễ dàng kiểm tra phép nhân ngoài từ R vào I thỏa tất cả các tiên đề M_1, M_2, M_3, M_4. Vậy mỗi iđêan trái I của R là mỗi

R-môđun.

Nói riêng, bản thân vành R có thể xem là môđun trên chính nó.

c) Mỗi nhóm cộng giao hoán $(A, +)$ luôn luôn có thể xem là môđun trên vành các số nguyên $\mathbb{Z}$, trong đó tích của hệ tử $n \in \mathbb{Z}$ với phần tử $a \in A$ là bội nguyên n của a, mà ta vẫn quen viết là na. Từ lý thuyết các nhóm aben ta dễ dàng kiểm tra phép nhân ngoài này thỏa các tiên đề từ M_1 đến M_4.

d) Riêng nhóm chỉ duy nhất phần tử 0 luôn luôn có thể xem là môđun trên bất kỳ vành R nào. Ta gọi đó là môđun "không" và ký hiệu nó là 0.

1.3. Vài tính chất đơn giản của các phép toán trên môđun

Để thuận tiện cho việc thực hành tính toán trên các phần tử của môđun ta chứng minh một số "đẳng thức số học" sau đây trong các môđun X:

i) $0x = 0$ và $r0 = 0$,

ii) $(-r)x = -rx$ và $r(-x) = -rx$,

iii) $(r - s)x = rx - sx$,

iv) $r(x - y) = rx - ry$,

với mọi $r, s \in R$ và mọi $x, y \in X$, trong đó $x - y = x + (-y)$.

Thật vậy, $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x + 0$, khi thực hiện giản ước phần tử $0x$ ở cả hai vế đẳng thức ta được $0x = 0$.

Vậy ta có đẳng thức đầu của i).

Đẳng thức thứ hai của i) được suy từ

$$r0 + r0 = r(0 + 0) = r0 + 0.$$

Vì

$$(-r)x + rx = (-r + r)x = 0x = 0,$$

$$r(-x) + rx = r(-x + x) = r0 = 0$$

nên ta có

$$(-r)x = -rx,$$

$$r(-x) = -rx,$$

tức ii) đúng.

Sử dụng tính chất phân phối của phép nhân ngoài với các phép cộng và trên cơ sở định nghĩa các phép trừ ta chứng minh các tính chất iii), iv) như sau:

$$\begin{aligned}(r-s)x &= (r+(-s))x = rx + (-s)x \\ &= rx + (-sx) = rx - sx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r(x-y) &= r(x+(-y)) = rx + r(-y) \\ &= rx + (-ry) = rx - ry\end{aligned}$$

1.4. Môđun con

Trong mục này cũng như về sau ta sẽ sử dụng các định nghĩa sau. Nếu A, B là các tập con của một môđun X và $K \subset R$ (với $A, B, K \neq \emptyset$) thì

$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$,

$KA = \{ra | r \in K, a \in A\}$.

Cho X là môđun, tập $A \neq \emptyset$ trong X được gọi là *bộ phận ổn định* của X nếu $A + A \subset A$ và $RA \subset A$. Hiển nhiên rằng nếu A là bộ phận ổn định của X thì các phép toán trên X khi giới hạn lại trên chỉ các phần tử của A, cảm sinh nên các phép toán trên A. Hơn nữa, ta có:

Định lý 1. *Mỗi bộ phận ổn định A của môđun X, cùng với các phép toán cảm sinh lập thành một R-môđun.*

Chứng minh. Thật vậy với mọi $x, y \in A$ thì $x - y = x + (-y) \in A$ do tính chất ổn định của A đối với phép cộng và phép nhân ngoài. Vậy $(A, +)$ là nhóm con của nhóm $(X, +)$. Vì các tiên đề M_1 đến M_4 là thỏa mãn cho tất cả các phần tử của X, nói riêng chúng cũng được thỏa mãn với các phần tử của $A \subset X$. ■

Vậy A là một R-môđun. Ta gọi nó là *môđun con* của môđun X và viết: $A \triangleleft X$.

Như vậy, $A \triangleleft X$ khi và chỉ khi với mọi $x, y \in A$ thì $x + y \in A$ và với mọi $r \in R$, với mọi $x \in A$ thì $rx \in A$.

Định lý 2. *Cho A, B là các môđun con của môđun X. Khi đó $A + B$ là môđun con của X.*

Chứng minh. Với mọi $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2) \in A + B$ ta có:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \in A + B$$

và với mọi $(a + b) \in A + B$, mọi $r \in R$ ta có:

$$r(a + b) = ra + rb \in A + B.$$

Vậy $A + B$ là ổn định trong môđun X, tức là $(A + B) \triangleleft X$. ■

Nếu vành hệ tử R được xem như là R-môđun thì mỗi iđêan trái I của R là mỗi môđun con của R. Hơn nữa có thể thấy rằng lớp các iđêan trái của R và lớp các môđun con của R là trùng nhau. Các ví dụ khác về môđun con có thể lấy là: nhóm con của nhóm aben xem như $\mathbb{Z}$-môđun con, không gian con của không gian véctơ.

Nói riêng, mỗi môđun X bất kỳ luôn luôn có hai môđun con tầm thường là chính X và môđun 0.

1.5. Môđun con sinh bởi một tập

Định lý 3. *Giao của họ khác rỗng các môđun con của môđun X lại là môđun con của X.*

Chứng minh. Cho $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ là họ không rỗng các môđun con của X. Khi đó: $\forall x, y \in \cap A_\alpha$ thì $x, y \in A_\alpha, \forall\alpha \in I$ nên $x + y \in A_\alpha, \forall\alpha \in I$, tức $x + y \in \cap A_\alpha$ và $\forall r \in R, \forall x \in \cap A_\alpha$ tức $x \in A_\alpha, \forall\alpha$ nên $rx \in A_\alpha, \forall\alpha$, tức $rx \in \cap A_\alpha$.

Vậy $\cap A_\alpha \triangleleft X$. ■

Cho X là môđun và tập $S \subset X$. Xét họ $\mathcal{T}$ tất cả các môđun con của X chứa S. Hiển nhiên họ $\mathcal{T}$ khác rỗng bởi $X \in \mathcal{T}$. Theo định lý 3, giao của họ $\mathcal{T}$ là một môđun con của X, và chứa S. Ta ký hiệu môđun con đó là $< S >$, và gọi nó là *môđun con sinh bởi tập S*. Ta cũng nói S là *tập sinh* (hay *hệ sinh*) của môđun $< S >$.

Từ cách xác định môđun con sinh bởi tập S, dễ dàng nhận thấy $< S >$ là môđun con nhỏ nhất trong X chứa S. Hơn nữa, tính chất nhỏ nhất này cũng là tính chất đặc trưng, đủ để xác định nên $< S >$. Thật vậy, môđun con nhỏ nhất chứa S phải nằm trong mỗi môđun con chứa S và do đó nằm trong giao của họ tất cả các môđun con chứa S. Và để ý rằng trong các thành phần tham gia lấy giao, có mặt môđun con nhỏ nhất chứa S nên môđun con nhỏ nhất đó chính là giao của họ tất cả các môđun con chứa S.

Để mô tả một cách cụ thể môđun con sinh bởi tập $S \neq \emptyset$ (môđun con sinh bởi tập $\emptyset$ là môđun con nhỏ nhất của X chứa $\emptyset$, hiển nhiên là môđun 0) trước hết ta đưa ra khái niệm tổ hợp tuyến tính của S.

Một *tổ hợp tuyến tính* của S là một tổng hữu hạn dạng

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n$$

trong đó $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$.

Định lý 4. *Môđun con sinh bởi tập $S \subset X$ là môđun con gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của S.*

Chứng minh. Dễ thấy rằng tổng của hai tổ hợp tuyến tính của S là một tổ hợp tuyến tính của S, tích của một hệ tử với một tổ hợp tuyến tính của S lại là một tổ hợp tuyến tính của S.

Vậy, tập A tất cả các tổ hợp tuyến tính của S là một bộ phận ổn định của X tức $A \triangleleft X$.

Hiển nhiên rằng $S \subset A$ vì mỗi phần tử $x \in S$ có thể xem là một tổ hợp tuyến tính của S. Hơn nữa, nếu B là môđun con của X chứa S thì mọi tổ hợp tuyến tính của S

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \in B,$$

nhờ tính ổn định của B. Do đó $A \subset B$, tức A là môđun con nhỏ nhất chứa S, hay $A =< S >$. ■

Trong mục trước ta đã xác định được tổng $A + B$ của hai môđun con A và B. Trong trường hợp cho họ bất kỳ các môđun con $\{A_\alpha\}$ của X, để xác định tổng của họ môđun con này, sử dụng khái niệm môđun con sinh bởi một tập, ta định nghĩa: *Tổng của họ $\{A_\alpha\}$ là môđun con sinh bởi tập $\cup A_\alpha$.*

Nếu kí hiệu tổng đó là $\sum\limits_\alpha A_\alpha$ thì

$$\sum_\alpha A_\alpha =< \bigcup_\alpha A_\alpha > .$$

Sử dụng cách mô tả môđun con sinh bởi một tập trong định lý 4, dễ thấy rằng các phần tử của $\cup A_\alpha$ có dạng là tổng hữu hạn $\sum x_\alpha$ trong đó $x_\alpha \in A_\alpha$ và hầu hết các $x_\alpha = 0$ trừ một số hữu hạn.

1.6. Môđun thương

Cho X là môđun và $A \lhd X$. Khi đó $(A, +)$ là nhóm con của nhóm $(X, +)$ và do đó A là nhóm con chuẩn tắc của X. Theo lý thuyết nhóm ta có được nhóm thương $(X/A, +)$ và do X giao hoán nên nhóm cộng X/A cũng giao hoán.

Để biến $X/A = \{x + A : x \in X\}$ thành R-môđun ta xác định trên X/A phép nhân ngoài từ R, như sau:

$\forall r \in R, \forall x + A \in X/A$ thì

$$r(x + A) = rx + A.$$

Có thể thấy rằng phép nhân ngoài định nghĩa như trên không phụ thuộc vào cách lựa chọn các đại diện của các lớp ghép $x + A$. Thật vậy, nếu $x' + A = x + A$ thì tồn tại $a \in A$ sao cho $x' = x + a$, nên

$$\begin{aligned} r(x' + A) &= rx' + A = r(x + a) + A \\ &= rx + ra + A = rx + A. \end{aligned}$$

Việc kiểm tra phép nhân ngoài định nghĩa như trên thỏa mãn các tiên đề $M_1 - M_4$ không mấy khó khăn, bởi các phép toán của X/A được xác định trên các đại diện, vốn đã thỏa mãn các tiên đề này.

Vậy trên tập thương X/A đã xác định được cấu trúc R-môđun. Ta gọi đó là *môđun thương X/A của môđun X theo môđun con A.*

1.7. Đồng cấu môđun

Bởi môđun là sự mở rộng của khái niệm không gian véctơ, nên đồng cấu môđun là sự mở rộng của khái niệm ánh xạ tuyến tính.

a) Định nghĩa. Cho X, Y là các R-môđun. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *R-đồng cấu* nếu với mọi $x, x_1, x_2 \in X$ và với mọi $r \in R$:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$

$$f(rx) = rf(x).$$

Các R-đồng cấu đôi khi cũng được gọi là các ánh xạ tuyến tính. Và cũng như ánh xạ tuyến tính trong lớp các không gian véctơ, các R-đồng cấu có thể được xác định bởi chỉ một đẳng thức hỗn hợp:

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2),$$

với mọi $x_1, x_2 \in X$ và với mọi $r_1, r_2 \in R$.

Để giản tiện về mặt ngôn ngữ, các R-đồng cấu cũng được gọi một cách đơn giản là các *đồng cấu*.

b) Các ví dụ về đồng cấu

Ví dụ 1. Cho $A \triangleleft X$. Khi đó ánh xạ nhúng $j : A \to X$ mà $j(a) = a \in X$ với mọi $a \in A$ là đồng cấu. Thật vậy, $\forall a_1, a_2 \in A, \forall r_1, r_2 \in R$ thì:

$$j(r_1a_1 + r_2a_2) = r_1a_1 + r_2a_2 = r_1j(a_1) + r_2j(a_2).$$

Trường hợp riêng, khi $A = X \triangleleft X$ ta có ánh xạ đồng nhất 1_X là đồng cấu, ta gọi nó là *đồng cấu đồng nhất*.

Ví dụ 2. Cho $A \triangleleft X$ và môđun thương X/A. Ánh xạ chiếu $p : X \to X/A$ mà $\forall x \in X : p(x) = x + A$ cũng là đồng cấu. Thật vậy, với mọi $x_1, x_2 \in X$ và mọi $r_1, r_2 \in R$ thì:

$$\begin{aligned} p(r_1x_1 + r_2x_2) &= (r_1x_1 + r_2x_2) + A \\ &= r_1(x_1 + A) + r_2(x_2 + A) \\ &= r_1p(x_1) + r_2p(x_2). \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Ánh xạ $0 : X \to Y$, biến tất cả các phần tử $x \in X$ thành $0 \in Y$, hiển nhiên là đồng cấu. Ta gọi nó là *đồng cấu tầm thường*.

1.8. Một số tính chất của đồng cấu

Tính chất cơ bản nhất của đồng cấu, đã được sử dụng để định nghĩa đồng cấu là sự bảo toàn các phép toán có trên các môđun.

Ngoài sự bảo toàn các phép toán, các đồng cấu còn bảo toàn được những gì nữa trong các môđun?

a) Để ý rằng vì đồng cấu môđun $f : X \to Y$ bảo toàn phép toán cộng, nên hiển nhiên $f : (X, +) \to (Y, +)$ là đồng cấu nhóm. Và từ các kết quả đã biết trong lý thuyết nhóm aben là các đồng cấu nhóm biến 0 thành 0, biến phần tử đối thành phần tử đối nên ta có:

$$f(0) = 0 \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

Tức đồng cấu $f : X \to Y$ bảo toàn các phần tử đối, phần tử 0.

b) Đồng cấu f còn chuyển môđun con của X thành môđun con của Y và nghịch ảnh qua f một môđun con của Y là môđun con của X.

Thật vậy, nếu $A \lhd X$, thì $f(A)$ là bộ phận ổn định trong Y vì:

$$\begin{aligned} f(a_1) + f(a_2) &= f(a_1 + a_2) \in f(A) \\ rf(a) &= f(ra) \in f(A), \end{aligned}$$

với mọi $a, a_1, a_2 \in A$ và mọi $r \in R$, tức là $f(A) \lhd Y$.

Còn nếu $B \lhd Y$ thì $\forall a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$ ta có $f(a_1), f(a_2) \in B \Rightarrow f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \in B$ nên $a_1 + a_2 \in f^{-1}(B)$, và $\forall a \in f^{-1}(B), \forall r \in R$, do $f(a) \in B \Rightarrow f(ra) = rf(a) \in B$ nên $ra \in f^{-1}(B)$.

Vậy $f^{-1}(B) \lhd X$.

Trường hợp riêng, khi ta chọn $A = X \lhd X$ ta có $\mathrm{Im} f = f(X) \lhd Y$.

Còn trong Y, chọn $B = 0$, ta được

$$\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0) \lhd X.$$

Vậy ảnh của một đồng cấu f là một môđun con của Y và hạt nhân của nó là môđun con của X.

1.9. Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Đồng cấu $f : X \to Y$ được gọi là *đơn cấu* nếu f đồng thời là đơn ánh.

Đồng cấu f được gọi là *toàn cấu* nếu f đồng thời là toàn ánh.

Nếu f vừa đơn cấu vừa toàn cấu thì f được gọi là *đẳng cấu*. Vậy f là *đẳng cấu* nếu f là đồng cấu và là song ánh.

Các kết quả dưới đây liên quan đến khái niệm tích của hai đồng cấu, được xác định như là tích của hai ánh xạ.

Định lý 5. *Tích của hai đồng cấu là một đồng cấu. Hơn nữa, tích của hai đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) là một đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu).*

Chứng minh. Cho $f : X \to Y$ và $f : Y \to Z$ là các đồng cấu. Khi đó với mọi $x_1, x_2 \in X$ và mọi $r_1, r_2 \in R$ ta có

$$\begin{aligned} gf(r_1x_1 + r_2x_2) &= g[r_1f(x_1) + r_2f(x_2)] \\ &= r_1gf(x_1) + r_2gf(x_2). \end{aligned}$$

Vậy, gf là đồng cấu.

Theo lý thuyết tập hợp: tích của hai ánh xạ đơn ánh (toàn ánh, song ánh) là một đơn ánh (toàn ánh, song ánh) và kết hợp với kết quả vừa chứng minh ta có được: tích của hai đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) là một đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu). ■

Định lý 6. *Đồng cấu f là đơn cấu khi và chỉ khi* $\operatorname{Ker} f = 0$.

Chứng minh. Nếu f đơn cấu thì $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ có không quá một phần tử và do tính chất bảo toàn 0 của f, tức $f(0) = 0$, ta suy ra $\operatorname{Ker} f = 0$.

Nếu $\operatorname{Ker} f = 0$ và $f(x_1) = f(x_2)$ thì

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$$

nên $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$. Do đó $x_1 - x_2 = 0$, suy ra $x_1 = x_2$.

Vậy f đơn cấu. ■

Định lý 7. *Nếu đồng cấu $f : X \to Y$ là đẳng cấu thì $f^{-1} : Y \to X$ cũng là đẳng cấu.*

Chứng minh. Vì $f : X \to Y$ là đẳng cấu nên f là song ánh và do vậy tồn tại ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$, với f^{-1} cũng là song ánh. Để chứng minh f^{-1} đẳng cấu thì chỉ cần kiểm tra f^{-1} là đồng cấu.

Thật vậy, $\forall y_1, y_2 \in Y$ và $\forall r_1, r_2 \in R$ nếu gọi $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$ thì:

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1y_1 + r_2y_2.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} f^{-1}(r_1y_1 + r_2y_2) &= r_1x_1 + r_2x_2 \\ &= r_1f^{-1}(y_1) + r_2f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

tức f^{-1} là đồng cấu. ■

Nếu có đẳng cấu môđun $f : X \to Y$ thì ta nói môđun X *đẳng cấu* với môđun Y, và viết $X \overset{f}{\cong} Y$ hay đơn giản: $X \cong Y$.

Tổng kết các kết quả trên đây, liên quan tới quan hệ đẳng cấu, ta có:

- Với mọi môđun X: $X \overset{1_X}{\cong} X$.
- Nếu $X \overset{f}{\cong} Y$ thì $Y \overset{f^{-1}}{\cong} X$.
- Nếu $X \overset{f}{\cong} Y$ và $Y \overset{g}{\cong} Z$ thì $X \overset{gf}{\cong} Z$.

Vậy quan hệ đẳng cấu là một quan hệ tương đương.

Định lý 8. *Cho $f : X \to Y$ là toàn cấu. Khi đó tồn tại và duy nhất một đẳng cấu $\widetilde{f} : X/\operatorname{Ker} f \to Y$ sao cho $f = \widetilde{f}.p$ trong đó $p : X \to X/\operatorname{Ker} f$ là ánh xạ chiếu.*

Chứng minh. Đặt $\operatorname{Ker} f = A$. Xây dựng ánh xạ $\widetilde{f} : X/A \to Y$ mà $\widetilde{f}(x+A) = f(x)$ với mọi $x + A \in X/A$. Hiển nhiên $\widetilde{f}$ được xác định hợp lý, vì nó không phụ thuộc vào cách lựa chọn các đại diện cho các lớp ghép $x + A$. Thật vậy, nếu $x' + A = x + A$ thì $x' = x + a$ với $a \in A = \operatorname{Ker} f$ nên

$$f(x') = f(x + a) = f(x) + f(a) = f(x).$$

Nhờ tính đồng cấu của f, dễ dàng kiểm tra $\widetilde{f}$ là đồng cấu. Nhờ tính toàn cấu của f, dễ thấy $\widetilde{f}$ là toàn ánh. Đồng cấu $\widetilde{f}$ cũng là đơn cấu vì:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \widetilde{f} &= \{x + A | f(x) = 0\} \\ &= \{x + A | x \in \operatorname{Ker} f = A\} \\ &= A = 0_{X/A}. \end{aligned}$$

Vậy $\widetilde{f}$ là đẳng cấu.

Vì với mọi $x \in X : \widetilde{f}p(x) = \widetilde{f}(x + A) = f(x)$ nên $\widetilde{f}p = f$.

Cuối cùng nếu có đẳng cấu $h : X/A \to Y$ có tính chất như $\widetilde{f}$ là $hp = f$ thì:

$$\forall x + A \in X/A : h(x + A) = hp(x) = f(x) = \widetilde{f}(x + A)$$

tức $h = \widetilde{f}$. Vậy $\widetilde{f}$ là duy nhất. ■

Hệ quả 9. *Cho $f : X \to Y$ là đồng cấu. Khi đó tồn tại và duy nhất đơn cấu $\widetilde{f} : X/\operatorname{Ker} f \to Y$ mà $f = \widetilde{f}p$.*

Thật vậy, ta phân tích $f = jf_1$ trong đó $f_1 : X \to \operatorname{Im} f$ (mà $f_1(x) = f(x), \forall x \in X$) là toàn cấu và có $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f$; còn

$j : \mathrm{Im} f \to Y$ là đơn cấu nhúng $\mathrm{Im} f \subset Y$. Theo định lý 8, tồn tại và duy nhất đẳng cấu $\widetilde{f_1} : X/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im} f$ sao cho $f_1 = \widetilde{f_1} p$. Tích hai đồng cấu $j\widetilde{f_1}$ chính là đơn cấu $\widetilde{f}$ duy nhất cần tìm.

1.10. Phạm trù môđun

Để thuận tiện về mặt ngôn ngữ trong các trình bày về sau, trong mục này chúng ta sẽ đưa ra khái niệm về phạm trù.

a) Định nghĩa. Một *phạm trù* $\mathcal{P}$ bao gồm một lớp nào đó các vật $A, B, C, X, Y, \ldots$ sao cho với bất kỳ cặp vật có thứ tự (A, B) xác định được tập $\mathrm{Mor}(A, B)$ các cấu xạ có nguồn là A và đích là B, mà nếu $(A, B) \neq (X, Y)$ thì $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(X, Y) = \emptyset$. Hơn nữa, với bất kỳ bộ ba có thứ tự các vật (A, B, C) một luật lấy tích các cấu xạ được xác định trên $\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C)$ lấy giá trị trong $\mathrm{Mor}(A, C)$; cụ thể là với mọi cặp cấu xạ $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C)$ xác định được tích $\beta\alpha \in \mathrm{Mor}(A, C)$. Ngoài ra các tiên đề sau được thỏa:

• PT1: Với mỗi vật $A \in \mathcal{P}$, tồn tại cấu xạ đồng nhất $1_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$, mà $1_A.\alpha = \alpha$ và $\beta.1_A = \beta$, nếu các tích $1_A.\alpha, \beta.1_A$ là xác định.

• PT2: Luật lấy tích các cấu xạ có tính chất kết hợp, tức là nếu có tích $\alpha(\beta\gamma)$ thì cũng có tích $(\alpha\beta)\gamma$ và: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Nếu cấu xạ $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$ thì ta cũng viết: $\alpha : A \to B$ hay $A \xrightarrow{\alpha} B$, như cách viết quen thuộc của các ánh xạ. Và để ý rằng cách viết tích các cấu xạ trong định nghĩa trên là hoàn toàn tương tự như cách viết tích các ánh xạ. Điều đó tránh cho ta khỏi sự phiền phức khi làm việc với đa số các phạm trù toán học mà các cấu xạ trước hết là các ánh xạ.

b) Các ví dụ về phạm trù

Ví dụ 1. Phạm trù $\mathcal{S}$t các tập hợp và các ánh xạ, với các vật là các tập hợp và các cấu xạ là các ánh xạ. Luật lấy tích các cấu xạ chính là lấy tích các ánh xạ. Dễ dàng kiểm tra $\mathcal{S}$t thỏa mãn tất cả các điều kiện còn lại của định nghĩa phạm trù.

Ví dụ 2. Phạm trù $\mathcal{G}$r các nhóm và các đồng cấu nhóm, với các vật là các nhóm và các cấu xạ là các đồng cấu nhóm. Luật lấy tích các cấu xạ là lấy tích các đồng cấu.

Ví dụ 3. Phạm trù $\mathcal{A}$b các nhóm aben với các vật là các nhóm aben và các cấu xạ là các đồng cấu nhóm. Tích hai cấu xạ là tích hai đồng cấu nhóm.

Ví dụ 4. Lớp các R-môđun trái, ký hiệu là ${}_R$Mod (hay đơn giản là Mod) cũng lập thành một phạm trù với các vật là các môđun và các cấu xạ là các đồng cấu môđun. Từ các kết quả đưa ra ở các mục trên dễ dàng kiểm tra Mod thỏa tất cả các điều kiện trong định nghĩa phạm trù. Ta gọi nó là phạm trù các R-môđun trái, hay đơn giản hơn, là phạm trù các môđun.

Chú ý rằng với $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên thì phạm trù ${}_\mathbb{Z}$Mod chính là phạm trù $\mathcal{A}$b các nhóm aben.

§2. Tổng trực tiếp và tích trực tiếp

Khái niệm tổng trực tiếp, tích trực tiếp có thể xây dựng cho bất kỳ một họ môđun. Tuy nhiên, để tránh sự nặng nề không cần thiết cho hầu hết các độc giả cuốn sách là những người mới bắt đầu làm quen với khái niệm, chúng ta sẽ mở đầu tiết này với trường hợp đơn giản nhất: tổng trực tiếp của họ hai môđun.

2.1. Tổng trực tiếp hai môđun

Cho A, B là các R-môđun. Trên tập tích Descartes $A \times B$ ta đưa vào hai phép toán cộng và nhân ngoài như sau:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$r(a,b) = (ra, rb)$$

$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a, b) \in A \times B, \forall r \in R$

Dễ dàng kiểm tra thấy rằng $A \times B$ với hai phép toán xác định như trên thỏa mãn tất cả các yêu cầu của một R-môđun. Ta gọi đó là *môđun tổng trực tiếp* của hai môđun A và B và viết: $A \oplus B$.

Chú ý rằng phần tử 0 trong $A \oplus B$ là cặp $(0, 0)$ và phần tử đối của cặp (a, b) là $(-a, -b)$.

Tổng trực tiếp hai môđun A và B, đôi khi cũng được gọi là tích trực tiếp, và tương ứng với cách gọi đó là cách ký hiệu $A \times B$.

Từ cách xây dựng tổng trực tiếp hai môđun, dễ dàng thấy rằng với hai môđun tổng trực tiếp: $A \oplus B$ và $A' \oplus B'$, nếu có các đẳng cấu các môđun thành phần: $A \cong A', B \cong B'$ thì ta cũng có: $A \oplus B \cong A' \oplus B'$.

Thật vậy: nếu $f : A \cong A'$ và $g : B \cong B'$ thì $\varphi : A \oplus B \cong A' \oplus B'$ với φ được xác định:

$$\varphi(a, b) = (f(a), g(b))$$

với mọi $(a, b) \in A \oplus B$.

2.2. Đặc trưng của tổng trực tiếp qua nhúng và chiếu

Môđun tổng trực tiếp $A \oplus B$ được liên hệ chặt chẽ với các môđun thành phần A và B thông qua các phép nhúng và chiếu.

Có hai phép nhúng được xác định như sau:

- $j_1 : A \to A \oplus B$ mà $j_1(a) = (a, 0), \forall a \in A$,
- $j_2 : B \to A \oplus B$ mà $j_2(b) = (0, b), \forall b \in B$,

và hai phép chiếu với công thức sau:

- $p_1 : A \oplus B \to A$ mà $p_1(a, b) = a$,

- $p_2 : A \oplus B \to B$ mà $p_2(a,b) = b$,

với mọi $(a,b) \in A \oplus B$.

Hiển nhiên các phép nhúng j_1, j_2 là đơn cấu, nhúng các môđun A, B vào $A \oplus B$ như là các môđun con. Trong khi đó các phép chiếu p_1, p_2 là các toàn cấu, chiếu môđun $A \oplus B$ xuống các môđun thành phần.

Mối liên hệ giữa các phép nhúng và các phép chiếu được mô tả trong các đẳng thức sau:

$$p_1 j_1 = 1_A \text{ và } p_2 j_2 = 1_B \tag{1}$$

$$p_1 j_2 = 0 \text{ và } p_2 j_1 = 0 \tag{2}$$

$$j_1 p_1 + j_2 p_2 = 1_{A \oplus B} \tag{3}$$

Việc chứng minh tính đúng đắn của các đẳng thức (1), (2), (3) có thể tiến hành dễ dàng bằng các tính toán, vì vậy ta bỏ qua không trình bày ở đây.

Các đẳng thức trên, có vẻ khá đơn giản, tuy nhiên chúng lại rất đặc trưng cho môđun tổng trực tiếp. Cụ thể hơn, chúng ta có:

Định lý 1. *Cho các môđun A, B, C. Nếu tồn tại các đồng cấu $j_1 : A \to C; j_2 : B \to C; p_1 : C \to A; p_2 : C \to B$ thỏa đồng thời các đẳng thức (1), (2), (3) nói trên (trong đó đẳng thức (3) ta thay $A \oplus B$ bằng C) thì $C \cong A \oplus B$.*

Chứng minh. Xây dựng ánh xạ $\varphi : C \to A \oplus B$ như sau: $\forall c \in C$ thì

$$\varphi(c) = (p_1(c), p_2(c)).$$

Nhờ p_1, p_2 là các đồng cấu, ta dễ dàng kiểm tra rằng φ là đồng cấu. Để kiểm tra φ đơn cấu ta tính:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{c \in C : p_1(c) = 0, p_2(c) = 0\}.$$

Với mọi $c \in \operatorname{Ker}\varphi$,

$$\begin{aligned} c &= 1_C(c) = (j_1p_1 + j_2p_2)(c) \\ &= j_1[p_1(c)] + j_2[p_2(c)] = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, tức φ đơn cấu.

Nếu $(a, b) \in A \oplus B$ thì $c = j_1(a) + j_2(b) \in C$, mà $\varphi(c) = (p_1(c), p_2(c))$ với

$$p_1(c) = p_1(j_1(a) + j_2(b)) = p_1j_1(a) = a,$$

$$p_2(c) = p_2(j_1(a) + j_2(b)) = p_2j_2(b) = b.$$

Kết hợp lại ta có: φ là đẳng cấu. ■

2.3. Tổng trực tiếp trong

Tổng trực tiếp được xác định trong các mục nói trên đôi khi còn gọi là tổng trực tiếp ngoài để phân biệt với khái niệm tổng trực tiếp trong mà ta sẽ đưa ra dưới đây.

Định lý 2. *Cho A, B là các môđun con của môđun X thỏa các tính chất:*

i) $A \cap B = 0$,

ii) $A + B = X$.

Khi đó ta có đẳng cấu: $X \cong A \oplus B$.

Chứng minh. Xây dựng ánh xạ $\varphi : A \oplus B \to X$ mà

$$\varphi(a, b) = a + b$$

với mọi $(a, b) \in A \oplus B$. Dễ dàng kiểm tra φ là đồng cấu.

Do đẳng thức $A + B = X$ nên $\forall x \in X$ thì $\exists a \in A$ và $b \in B$ mà $a + b = x$. Vậy φ là toàn cấu.

Do $A \cap B = 0$ mà

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \varphi &= \{(a,b) | a+b=0\} \\ &= \{(a,b) | a=-b \in A \cap B\} \\ &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$

nên φ là đơn cấu.

Vậy $\varphi : A \oplus B \cong X$. ■

Thay cho dấu " $\cong$ " trong kết luận của định lý 2, ta có thể viết dấu " $=$ ", tức $X = A \oplus B$, đồng thời trong trường hợp này ta nói: X là *tổng trực tiếp trong* của hai môđun con A, B của X.

Vậy: $X = A \oplus B$ là tổng trực tiếp trong của hai môđun con A, B khi và chỉ khi $A \cap B = 0$ và $A + B = X$.

Định lý 3. *Môđun X là tổng trực tiếp trong của hai môđun con A và B khi và chỉ khi với mỗi $x \in X$ có và chỉ có một cách biểu diễn $x = a + b$ với $a \in A, b \in B$.*

Chứng minh. Nếu $X = A \oplus B$ thì $\forall x \in X, x = a + b \in A + B$. Cách biểu diễn này là duy nhất vì nếu $x = a' + b'$ thì

$$a + b = a' + b' \Rightarrow a - a' = b' - b \in A \cap B = 0$$

nên $a - a' = b' - b = 0$ và do đó $a = a', b = b'$.

Nếu mỗi $x \in X$ có biểu diễn duy nhất: $x = a + b \in A + B$ thì trước hết $X = A + B$. Hơn nữa, từ trường hợp riêng $x = 0$ với cách biểu diễn duy nhất là: $0 = 0 + 0$, nếu $c \in A \cap B$ thì

$$0 = c + (-c) \in A + B$$

nên $c = 0$, tức $A \cap B = 0$.

Vậy: $X = A \oplus B$. ■

Môđun con $A \triangleleft X$ được gọi là một *hạng tử trực tiếp* của X nếu có môđun con $B \triangleleft X$ sao cho $X = A \oplus B$. Khi đó B cũng được gọi là *hạng tử bù trực tiếp* của môđun con A.

Kết quả sau đây cho ta một ví dụ về sự phân tích một môđun thành tổng trực tiếp trong của các môđun con, nó có nhiều ứng dụng về sau.

Định lý 4. *Cho các đồng cấu $f : X \to Y$ và $g : Y \to K$ mà gf là đẳng cấu. Khi đó ta có*

$$Y = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, g.$$

Chứng minh. Trước hết với mọi $y \in Y$ ta có sự phân tích:

$$y = f[(gf)^{-1}g(y)] + y - f[(gf)^{-1}g(y)]$$

trong đó hiển nhiên $f[(gf)^{-1}g(y)] \in \mathrm{Im} f$, còn

$$g(y - f[(gf)^{-1}g(y)]) = 0,$$

tức $y - f[(gf)^{-1}g(y)] \in \mathrm{Ker}\, g$.

Vậy $Y = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker}\, g$.

Nếu $y \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, g$ thì vì $y \in \mathrm{Im} f$ nên $\exists x \in X$ mà $y = f(x)$. Và vì $y \in \mathrm{Ker}\, g$ mà

$$g(y) = gf(x) = 0,$$

nên từ tính chất đẳng cấu của gf ta có $x = 0$.

Vậy $y = f(0) = 0$ và do đó $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, g = 0$.

Kết hợp lại ta được $Y = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, g$. ■

2.4. Tích trực tiếp họ môđun

Để xây dựng khái niệm tích trực tiếp của họ môđun, trước hết ta nhắc lại một vài điều cần thiết về khái niệm tích Descartes của họ tập hợp.

Cho họ không rỗng các tập hợp $\{A_i\}_{i \in I}$. Tích Descartes của họ tập hợp $\{A_i\}$, kí hiệu là $\prod\limits_{i \in I} A_i$, là tập hợp các hàm $x : I \to \cup A_i$ sao cho $x(i) \in A_i, \forall i \in I$.

Bởi mỗi hàm $x \in \prod A_i$ được xác định một cách duy nhất bởi bộ giá trị $(x(i))_{i\in I}$ nên ta có quyền đồng nhất hàm x với bộ giá trị $(x(i))$ của nó. Và ta ký hiệu $x_i = x(i)$ thì phần tử của $\prod A_i$ là bộ $x = (x_i)_{i\in I}$ với điều kiện $x_i \in A_i, \forall i$.

Vậy

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_i \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Về cách viết bộ $x = (x_i)_{i\in I}$, đôi khi để tránh rườm rà ta có thể viết gọn $x = (x_i)$.

Bây giờ, với họ bất kỳ khác rỗng các môđun $\{X_i\}_{i\in I}$ trên cùng vành hệ tử R; ta xác định trên tập tích Descartes $\prod X_i$ các phép toán sau:

- $(x_i) + (x'_i) = (x_i + x'_i)$
- $r.(x_i) = (rx_i)$

với mọi $(x_i), (x'_i) \in \prod X_i$ và mọi $r \in R$.

Dễ thấy rằng, cũng như trường hợp tích trực tiếp hai môđun, các phép toán đưa vào $\prod X_i$ được xác định theo mỗi thành phần thứ i. Và vì các phép toán trên mỗi thành phần X_i là thỏa các yêu cầu của một R-môđun, nên không khó khăn để thấy rằng các phép toán trên $\prod X_i$ cũng thỏa hết các yêu cầu của R-môđun.

Ta gọi môđun được xây dựng ở trên $\prod X_i$ là *môđun tích trực tiếp* của họ $\{X_i\}$. Nó cũng được ký hiệu là: $\prod\limits_{i\in I} X_i$ hay đơn giản hơn: $\prod X_i$. Các môđun X_i được gọi là các môđun thành phần của tích trực tiếp.

Sự liên hệ giữa các môđun thành phần và tích trực tiếp được thực hiện thông qua các phép nhúng và phép chiếu.

Với mỗi $k \in I$ ta có cặp phép nhúng: $j_k : X_k \to \prod X_i$ và phép chiếu: $p_k : \prod X_i \to X_k$ được xác định bởi các công thức sau:

- $j_k(x_k) = ([j_k(x_k)]_i)$ trong đó

$$[j_k(x_k)]_i = \begin{cases} x_k & \text{nếu } i = k \\ 0 & \text{nếu } i \neq k \end{cases}, \text{ với mọi } x_k \in X_k.$$

- $p_k[(x_i)] = x_k$, với mọi $(x_i) \in \prod X_i$.

Hiển nhiên là các phép nhúng j_k là các đơn cấu, nhúng môđun thành phần X_k vào $\prod X_i$ như là môđun con. Và các phép chiếu p_k là các toàn cấu lên môđun thành phần X_k, có giá trị tại bộ (x_i) bất kỳ là thành phần thứ k của bộ đó.

Dễ thấy rằng, mối quan hệ giữa các phép nhúng và phép chiếu có thể mô tả bởi đẳng thức:

$$p_k j_k = 1_{X_k} \text{ và } p_k j_t = 0 \text{ nếu } k \neq t.$$

Hơn nữa, một phần tử bất kỳ $x \in \prod X_i$ là hoàn toàn xác định bởi bộ giá trị chiếu của nó. Cụ thể hơn:

$$x = (p_i(x))_{i \in I}.$$

2.5. Tính phổ dụng của tích trực tiếp

Định lý 5. *Cho họ môđun $\{X_i\}_{i \in I}$ khi đó với bất kỳ môđun X, mỗi họ đồng cấu $\{f_i : X \to X_i\}$ được phân tích một cách duy nhất qua họ các phép chiếu $p_i : \prod X_t \to X_i$. Nói cách khác, tồn tại và duy nhất một đồng cấu $f : X \to \prod X_t$ sao cho $f_i = p_i f$ với mọi $i \in I$.*

Chứng minh. Đồng cấu f được xây dựng theo công thức sau:

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}, \forall x \in X$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod X_t \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

mà hiển nhiên thỏa mãn điều kiện: $p_i f = f_i, \forall i \in I$.

Tính toán sau đây kiểm chứng sự bảo toàn các phép toán của f:

$$\begin{aligned} f(rx + r'x') &= (f_i[rx + r'x'])_{i\in I} \\ &= (rf_i(x) + r'f_i(x'))_{i\in I} \\ &= r(f_i(x))_{i\in I} + r'(f_i(x'))_{i\in I} \\ &= rf(x) + r'f(x') \end{aligned}$$

với mọi $x, x' \in X$ và mọi $r, r' \in R$.

Và nếu có đồng cấu $h : X \to \prod X_t$ sao cho $p_i h = f_i$ thì khi đó với mọi $x \in X$:

$$h(x) = (p_i h(x))_{i\in I} = (f_i(x))_{i\in I} = f(x).$$

Vậy $h = f$, tức f là duy nhất. ■

Tính chất cho phép mỗi họ đồng cấu $\{f_i : X \to X_i\}$ được phân tích một cách duy nhất qua họ các phép chiếu của tích trực tiếp $\{p_i : \prod X_t \to X_i\}$ được gọi là *tính chất phổ dụng của họ các phép chiếu*. Nguồn gốc tên gọi này sẽ được phần nào lý giải ở mục cuối của tiết này, khi chúng ta đưa vào một trong các khái niệm cơ bản của lý thuyết phạm trù: khái niệm về các vật phổ dụng.

Cho các họ môđun có cùng tập chỉ số I: $\{X_i\}, \{Y_i\}$ và họ các đồng cấu $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i\in I}$. Xét mối quan hệ của mỗi đồng cấu f_i với các tích trực tiếp $\prod X_t, \prod Y_t$ trong biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
\prod X_t \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[d, "p_i^X"'] \arrow[dr, "h_i"] & \prod Y_t \arrow[d, "p_i^Y"] \\
X_i \arrow[r, "f_i"] & Y_i
\end{tikzcd}$$

Khi đó với mỗi $i \in I$ có đồng cấu $h_i = f_i p_i^X$ với p_i^X là phép chiếu thứ i từ $\prod X_t$. Sử dụng tính chất phổ dụng của họ các phép chiếu

$$\{p_i^Y : \prod Y_t \to Y_i\}$$

đối với họ đồng cấu

$$\{h_i : \prod X_t \to Y_i\},$$

tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : \prod X_t \to \prod Y_t$ sao cho

$$h_i = p_i^Y f, \forall i \in I.$$

Đồng cấu f đó được gọi là tích trực tiếp của họ đồng cấu đã cho $\{f_i\}$, và được ký hiệu là $f = \prod f_i$.

Dưới đây, ta sẽ cho một sự mô tả cụ thể hơn về tích trực tiếp họ $\{f_i\}$. Từ các công thức

$$p_i^Y f = h = f_i p_i^X, \forall i \in I$$

ta có với mọi $x = (x_i) \in \prod X_t$

$$f(x) = (p_i^Y f(x))_{i \in I} = (f_i p_i^X(x))_{i \in I} = (f_i(x_i))_{i \in I}.$$

Vậy $f[(x_i)_{i \in I}] = (f_i[x_i])_{i \in I}$.

2.6. Tổng trực tiếp của họ môđun

Cho họ không rỗng các môđun $\{X_i\}_{i\in I}$. Xét tập con của $\prod X_i$ gồm các bộ $x = (x_i)$, mà hầu hết các thành phần $x_i = 0$, trừ ra một số hữu hạn. Dễ thấy đó là tập con ổn định trong $\prod X_i$, và do vậy nó là môđun con. Ta gọi nó là *môđun tổng trực tiếp* của họ $\{X_i\}$ và ký hiệu là: $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ hay đơn giản hơn: $\oplus X_i$.

Có thể nhìn nhận $\oplus X_i$ theo một cách khác, đó là môđun con sinh bởi tập hợp $A = \bigcup\limits_{t\in I} j_t(X_t)$ trong $\prod X_i$. Và như vậy theo định nghĩa về tổng của một họ môđun ta có:

$$\bigoplus_{t\in I} X_t =< \bigcup_{t\in I} j_t(X_t) >= \sum_{t\in I} j_t(X_t)$$

hơn nữa với mọi $x = (x_t) \in \oplus X_t$ thì:

$$x = (x_t) = \sum_{t\in I} j_t(x_t).$$

Tổng được viết trong đẳng thức trên, dù được đánh số theo tập chỉ số I, nhưng chỉ có hữu hạn thành phần $x_t \neq 0$, tức chỉ hữu hạn các $j_t(x_t) \neq 0$, nên hoàn toàn có nghĩa.

Bởi mỗi phép nhúng $j_t : X_t \to \prod X_i$ có ảnh $j_t(X_t) \subset \oplus X_i$ vì vậy ta cũng có thể xem j_t như là phép nhúng môđun thành phần X_t vào môđun tổng trực tiếp. Hơn nữa ta vẫn giữ nguyên ký hiệu như đã có trước đây: $j_t : X_t \to \oplus X_i$.

Tương tự như họ các phép chiếu của tích trực tiếp, họ các phép nhúng $\{j_t\}$ của tổng trực tiếp cũng có tính chất phổ dụng. Điều đó được phát biểu cụ thể trong định lý sau:

Định lý 6. *Cho họ không rỗng các môđun $\{X_i\}$. Khi đó với bất kỳ môđun X, mỗi họ các đồng cấu $\{f_t : X_t \to X\}$ luôn được phân tích một cách duy nhất qua họ các phép nhúng $\{j_t : X_t \to \oplus X_i\}_{t \in I}$. Nói cách khác, tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : \oplus X_t \to X$ sao cho $f_t = f j_t$ với mọi $t \in I$.*

Chứng minh. Đồng cấu f được xây dựng như sau:

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[r, "j_t"] \arrow[dr, "f_t"'] & \bigoplus X_i \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\forall x = (x_i) = \sum\limits_{i \in I} j_i(x_i) \in \oplus X_i$:

$$f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i).$$

Hiển nhiên $\forall t \in I : f j_t = f_t$ vì $\forall x_t \in X_t$ thì $f j_t(x_t) = f_t(x_t)$.

Tính chất bảo toàn các phép toán có trên môđun của f có thể kiểm tra dễ dàng.

Hơn nữa, nếu có đồng cấu $g : \oplus X_i \to X$ mà $g j_t = f_t, \forall t \in I$ thì $g = f$, vì khi đó $\forall x = (x_t) = \sum j_t(x_t)$:

$$g(x) = g(\sum j_t(x_t)) = \sum g j_t(x_t) = \sum f_t(x_t) = f(x).$$

Vậy f là duy nhất. ■

Áp dụng định lý 6, ta xây dựng tổng trực tiếp của họ bất kỳ các đồng cấu $\{f_t\}$ mà $f_t : X_t \to Y_t, \forall t \in I$, từ các họ môđun cùng tập chỉ số I: $\{X_t\}, \{Y_t\}$. Xét biểu đồ:

$$\begin{tikzcd}
X_t \arrow[r, "f_t"] \arrow[d, "j_t^X"'] \arrow[dr, "h_t"] & Y_t \arrow[d, "j_t^Y"] \\
\bigoplus X_i \arrow[r, "f"] & \bigoplus Y_i
\end{tikzcd}$$

trong đó $h_t = j_t^Y f_t : X_t \to \oplus Y_i$.

Sử dụng tính chất phổ dụng của họ các phép nhúng

$$\{j_t^X : X_t \to \oplus X_i\}_{t\in I}$$

đối với họ các đồng cấu

$$\{h_t : X_t \to \oplus Y_i\}_{t\in I}$$

tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : \oplus X_i \to \oplus Y_i$ thỏa

$$f j_t^X = h_t, \forall t \in I.$$

Nhờ các công thức: $f j_t^X = h_t = j_t^Y f_t$ ta có thể mô tả f một cách tường minh hơn.

$\forall x = (x_t) = \sum j_t^X(x_t) \in \oplus X_i$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\sum j_t^X(x_t)) = \sum f j_t^X(x_t) \\
&= \sum j_t^Y f_t(x_t) = (f_t(x_t))
\end{aligned}$$

và thấy rằng f chính là sự thu hẹp của $\prod f_t$ trên tổng trực tiếp $\oplus X_i$.

Đồng cấu f nói trên cũng được gọi là *tổng trực tiếp họ các đồng cấu* $\{f_t\}$ và được ký hiệu là: $f = \oplus f_t$.

2.7. Tổng trực tiếp trong họ môđun con

Định lý 7. *Cho họ* $\{X_t\}_{t\in I}$ *các môđun con của môđun* X *thỏa:*

i) $\sum X_t = X$,

ii) $X_t \cap \sum\limits_{i\neq t} X_i = 0, \forall t \in I.$

Khi đó ta có: $X \cong \oplus X_t$.

Chứng minh. Với mỗi $t \in I$, ta có phép nhúng $i_t : X_t \to X$ với

$$i_t(x_t) = x_t, \forall x_t \in X_t.$$

Sử dụng tính phổ dụng của họ các phép nhúng

$$\{j_t : X_t \to \oplus X_i\}_{t\in I}$$

đối với họ các phép nhúng

$$\{i_t : X_t \to X\},$$

tồn tại duy nhất đồng cấu $f : \oplus X_t \to X$, thỏa:

$$fj_t = i_t, \forall t \in I.$$

Công thức f, theo định lý 6 là:

$$f[(x_t)] = \sum_{t\in I} i_t(x_t) = \sum_{t\in I} x_t.$$

Từ điều kiện i) của giả thiết định lý là $\sum X_t = X$, công thức f cho thấy f là toàn cấu.

Nếu $f[(x_t)] = 0$ thì $\sum\limits_{t\in I} x_t = 0$ trong X nên với mọi i:

$$x_i = -\sum_{t\neq i} x_t \in X_i \cap \sum_{t\neq i} X_t = 0 \text{ do điều kiện ii).}$$

Vậy $(x_t) = 0$, tức $\operatorname{Ker} f = 0$ và f là đơn cấu.

Kết hợp lại: $f : X \cong \oplus X_t$. ■

Tương tự trường hợp tổng trực tiếp trong hai môđun con, ở đây ta cũng sẽ thay dấu " $\cong$ " trong định lý 7 bởi dấu " $=$ " và cũng gọi X là *tổng trực tiếp trong* của họ môđun $\{X_t\}$ của nó.

Vậy môđun X là tổng trực tiếp trong của họ môđun con $\{X_t\}$, tức $X = \oplus X_t$, nếu $X = \sum X_t$ và với mọi $t \in I : X_t \cap \sum\limits_{i\neq t} X_i = 0$.

2.8. Vật phổ dụng trong phạm trù

Cho trước phạm trù $\mathcal{P}$.

Vật $A \in \mathcal{P}$ được gọi là *vật đầu* của phạm trù $\mathcal{P}$ nếu với bất kỳ vật $X \in \mathcal{P}$ tập $\operatorname{Mor}(A, X)$ có đúng một phần tử.

Vật $B \in \mathcal{P}$ được gọi là *vật cuối* cuối của $\mathcal{P}$ nếu với bất kỳ vật $X \in \mathcal{P}$, tập $\operatorname{Mor}(X, B)$ cũng có đúng chỉ một phần tử. Các vật đầu, vật cuối của một phạm trù được gọi chung là *vật phổ dụng* của phạm trù.

Để lý giải thuật ngữ "tính phổ dụng của họ các phép chiếu tích trực tiếp" mà ta đã đưa ra và dùng trước đây, từ họ $\{X_i\}$ các môđun cho trước ta xây dựng một phạm trù $\mathcal{K}$ như sau:

• Vật của $\mathcal{K}$ là mỗi họ các đồng cấu $\{f_i : X \to X_i\}$ với môđun X nào đó.

• Cấu xạ từ vật $\{f_i : X \to X_i\}$ tới vật $\{g_i : Y \to X_i\}$ là đồng cấu $\varphi : X \to Y$ sao cho với mọi $i : f_i = g_i\varphi$.

• Luật lấy tích các cấu xạ chính là tích các đồng cấu.

Dễ dàng kiểm tra thấy $\mathcal{K}$ là một phạm trù và trong phạm trù đó, theo kết quả của định lý 5 thì họ các phép chiếu $\{p_i : \prod X_t \to X_i\}$ chính là vật cuối.

Cũng từ họ các môđun $\{X_i\}$ cho trước ta dựng một phạm trù khác, là phạm trù $\mathcal{T}$, được xác định như sau:

• Vật là mỗi họ đồng cấu $\{f_i : X_i \to X\}$ với X là môđun nào đó.

• Cấu xạ từ vật $\{f_i : X_i \to X\}$ tới vật $\{g_i : X_i \to Y\}$ là đồng cấu $\varphi : X \to Y$ sao cho với mọi $i : g_i = \varphi f_i$.

• Luật lấy tích là tích các đồng cấu.

Hiển nhiên $\mathcal{T}$ cũng là một phạm trù, và theo định lý 6 thì trong phạm trù $\mathcal{T}$ họ các phép nhúng $\{j_i : X_i \to \oplus X_t\}$ chính là một vật đầu.

Trở lại phạm trù $\mathcal{P}$, cấu xạ $\alpha : A \to B$ được gọi là *đẳng xạ* nếu tồn tại cấu xạ $\beta : B \to A$ sao cho:

$$\alpha\beta = 1_B \text{ và } \beta\alpha = 1_A.$$

Khi đó ta cũng nói β là *cấu xạ ngược* của α và viết $\beta = \alpha^{-1}$. Hiển nhiên khi đó ta cũng có: $\alpha = \beta^{-1}$.

Hai vật A và B mà có đẳng xạ $\alpha : A \to B$ thì ta nói A, B là hai vật *tương đương*, hay hai vật *đẳng cấu*.

Để ký hiệu A, B là hai vật tương đương ta viết: $A \sim B$ hay $A \cong B$.

Định lý 8. *Nếu trong phạm trù $\mathcal{P}$ có các vật đầu (vật cuối) thì các* *vật đầu (vật cuối) của $\mathcal{P}$ là tương đương.*

Chứng minh. Giả sử A, B là các vật đầu của phạm trù $\mathcal{P}$. Khi đó ta có:

$$\mathrm{Mor}(A, B) = \{\alpha\}, \mathrm{Mor}(B, A) = \{\beta\},$$

$$\mathrm{Mor}(A, A) = 1_A \text{ và } \mathrm{Mor}(B, B) = 1_B.$$

Từ đó ta có $\beta\alpha = 1_A; \alpha\beta = 1_B$ tức $\alpha : A \to B$ là đẳng xạ.

Vậy $A \sim B$.

Việc chứng minh hai vật cuối là tương đương hoàn toàn tương tự.

§3. Dãy khớp

3.1. Định nghĩa.

Dãy các đồng cấu (hữu hạn hay vô hạn)

$$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots \qquad (1)$$

được gọi là *khớp tại môđun* B nếu $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$.

Vậy dãy là khớp tại B nếu ảnh đồng cấu vào tại đó bằng hạt nhân của đồng cấu ra.

Một môđun trong dãy các đồng cấu được gọi là *môđun trung gian*, nếu tại đó vừa có đồng cấu vào, vừa có đồng cấu ra.

Dãy các đồng cấu (1) được gọi là *dãy khớp* nếu nó khớp tại mỗi môđun trung gian.

Ví dụ đầu tiên về dãy khớp là "dãy khớp của đồng cấu $h : X \to Y$" được xác định như sau:

$$0 \to \operatorname{Ker} h \xrightarrow{i} X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{p} Y/\mathrm{Im}h \to 0,$$

trong đó i là phép nhúng và p là phép chiếu mà tính khớp tại các môđun trung gian: $\operatorname{Ker} h, X, Y$ và $Y/\mathrm{Im}h$ gần như là hiển nhiên.

Để ý rằng: đồng cấu h là đẳng cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} h = 0$ và $Y/\mathrm{Im}h = 0$.

Vì vậy, khi sử dụng dãy khớp của một đồng cấu, ta có thêm một tiêu chuẩn để một đồng cấu là đẳng cấu:

• Đồng cấu h là đẳng cấu khi và chỉ khi dãy $0 \to X \xrightarrow{h} Y \to 0$ là khớp.

Trong lớp tất cả các dãy khớp, người ta đặc biệt chú ý tới một lớp các dãy khớp có tên gọi là dãy khớp ngắn được định nghĩa như sau:

• *Dãy khớp ngắn* là dãy khớp có dạng:

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0 \tag{2}$$

Hiển nhiên để kiểm tra tính khớp của dãy (2) ta cần kiểm tra đồng cấu χ là đơn cấu, đồng cấu σ là toàn cấu, và $\operatorname{Ker} \sigma = \mathrm{Im}\chi$.

Ví dụ về các dãy khớp ngắn có thể lấy:

a) Cho $h : X \to Y$ là đơn cấu mà không là đẳng cấu. Khi đó $\operatorname{Ker} h = 0$ và do vậy "dãy khớp của h" là dãy khớp ngắn:

$$0 \to X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{p} Y/\mathrm{Im}h \to 0.$$

Tương tự nếu h là toàn cấu mà không là đẳng cấu thì "dãy khớp của h" cũng là dãy khớp ngắn. Nó có dạng sau:

$$0 \to \operatorname{Ker} h \xrightarrow{i} X \xrightarrow{h} Y \to 0.$$

b) Cho môđun X và $A \triangleleft X$. Khi đó dãy gồm các đồng cấu nhúng: $i : A \to X$ và đồng cấu chiếu $p : X \to X/A$ tạo thành dãy khớp ngắn:

$$0 \to A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/A \to 0.$$

Hơn nữa có thể thấy rằng mỗi dãy khớp ngắn đều có dạng như trên. Thật vậy với dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

do χ đơn cấu nên ta có thể xem $A \triangleleft B$ và do σ toàn cấu mà

$$C \cong B/\mathrm{Ker}\,\sigma = B/\chi(A)$$

với $A \cong \chi(A)$ nên có thể xem $C = B/A$.

3.2. Dãy khớp ngắn chẻ

Dãy khớp các đồng cấu

$$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$$

được gọi là *chẻ ra tại môđun B*, nếu $\mathrm{Im}f$ là một hạng tử trực tiếp của B, tức tồn tại môđun con B_1 sao cho: $B = \mathrm{Im}f \oplus B_1$.

Một dãy khớp được gọi là *chẻ*, nếu nó chẻ tại mỗi môđun trung gian.

Áp dụng định nghĩa trên cho trường hợp các dãy khớp ngắn ta có: dãy khớp ngắn $0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ là chẻ khi và chỉ khi dãy chẻ tại B.

Thật vậy, kiểm tra dãy là chẻ tại A và C là quá tầm thường:

$$A = \mathrm{Im}0 \oplus A \text{ và } C = \mathrm{Im}\sigma \oplus 0$$

Các dãy khớp ngắn sau đây, được sinh bởi tổng trực tiếp $A \oplus B$ có thể xem là các ví dụ điển hình về các dãy khớp chẻ:

$$0 \to A \xrightarrow{j_1} A \oplus B \xrightarrow{p_2} B \to 0,$$

$$0 \to B \xrightarrow{j_2} A \oplus B \xrightarrow{p_1} A \to 0.$$

Nếu nhớ lại các đẳng thức đặc trưng của tổng trực tiếp

$$p_1 j_1 = 1_A, p_2 j_2 = 1_B$$

thì ta có thể nhận xét rằng: trong cả hai dãy khớp ngắn chẻ trên đây, các đồng cấu vào j_1, j_2 đều có nghịch đảo trái, còn các đồng cấu ra p_1, p_2 đều có nghịch đảo phải. Điều này, như sẽ thấy dưới đây không chỉ đúng dưới các dãy khớp ngắn được sinh bởi tổng trực tiếp, mà là đặc trưng chung cho mỗi dãy khớp ngắn chẻ bất kỳ.

Cụ thể, chúng ta có:

Định lý 1. *Đối với mỗi dãy khớp ngắn $0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$, ba phát biểu sau là tương đương:*

i) Dãy là chẻ ra.

ii) Đồng cấu χ có nghịch đảo trái.

iii) Đồng cấu σ có nghịch đảo phải.

Chứng minh. Nếu đồng cấu χ có nghịch đảo trái, tức là tồn tại đồng cấu $p : B \to A$ sao cho $p\chi = 1_A$, thì tích hai đồng cấu:

$$A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{p} A$$

là đẳng cấu. Vậy: $B = \mathrm{Im}\chi \oplus \mathrm{Ker}\, p$, do đó dãy chẻ ra.

Nếu dãy là chẻ ra, tức $B = \mathrm{Im}\chi \oplus B_1$ thì tồn tại phép chiếu

$$p_1 : B = \mathrm{Im}\chi \oplus B_1 \to \mathrm{Im}\chi.$$

Bởi χ là đơn cấu nên χ thực hiện đẳng cấu: $A \cong \text{Im}\chi$ và do đó đồng cấu $\chi_1 : A \to \text{Im}\chi$ (mà $\chi_1(a) = \chi(a), \forall a \in A$) có đồng cấu ngược $\chi_1^{-1} : \text{Im}\chi \to A$.

Chọn $p = \chi_1^{-1}p_1$ thì $p\chi = 1_A$, tức χ có nghịch đảo trái.

Vậy i) tương đương ii).

Một cách tương tự, nếu σ có nghịch đảo phải tức tồn tại đồng cấu q mà $\sigma q = 1_C$ thì tích của hai đồng cấu $C \xrightarrow{q} B \xrightarrow{\sigma} C$ là đẳng cấu. Và do đó

$$B = \text{Im}q \oplus \text{Ker}\,\sigma = \text{Im}q \oplus \text{Im}\chi,$$

tức dãy là chẻ ra.

Còn bây giờ nếu dãy là chẻ ra thì tồn tại môđun con B_1 mà $B = \text{Im}\chi \oplus B_1$. Xét đồng cấu $\sigma_1 = \sigma|_{B_1} : B_1 \to C$. Bởi $B_1 \cap \text{Ker}\,\sigma = 0$ nên σ_1 là đơn cấu. σ_1 cũng là toàn cấu vì: $\forall c \in C$, do σ là toàn cấu nên $\exists b \in B$ mà $\sigma(b) = c$. Vì $B = \text{Im}\chi \oplus B_1$ nên tồn tại $a \in A, b_1 \in B_1$ mà $b = \chi(a) + b_1$. Hiển nhiên $\sigma_1(b_1) = c$.

Vậy $\sigma_1 : B_1 \to C$ là đẳng cấu, do đó tồn tại đẳng cấu ngược: $\sigma_1^{-1} : C \to B_1$.

Chọn $q = j_2\sigma_1^{-1}$ với $j_2 : B_1 \to \text{Im}\chi \oplus B_1$ là phép nhúng thành phần B_1 vào tổng trực tiếp, ta có: $\sigma q = 1_C$, tức σ có nghịch đảo phải.

Vậy i) tương đương với iii). ■

Hệ quả 2. *Nếu dãy khớp* $\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$ *chẻ ra tại* B *thì ta có:*

$$B \cong \text{Im}f \oplus \text{Im}g.$$

Chứng minh. Từ tính khớp và chẻ của dãy tại B ta dựng được dãy khớp ngắn chẻ sau:

$$0 \to \mathrm{Im}f \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g_1} \mathrm{Im}g \to 0$$

trong đó i là phép nhúng $\mathrm{Im}f \subset B$, còn

$$g_1(b) = g(b), \forall b \in B.$$

Bởi i đơn cấu, g_1 toàn cấu, và đồng thời

$$\operatorname{Ker} g_1 = \operatorname{Ker} g = \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}i$$

nên dãy là khớp. Và hiển nhiên $\mathrm{Im}f$ là hạng tử trực tiếp của B nên dãy là chẻ ra. Theo phép chứng minh "iii) $\Rightarrow$ i)" của định lý 1 ta có:

$$B = \mathrm{Im}f \oplus B_1 \text{ trong đó } B_1 \cong \mathrm{Im}g.$$

Vậy $B \cong \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}g$. ■

3.3. Một số bổ đề về dãy khớp

Định lý 3. *(Bổ đề mạnh về bốn đồng cấu)*

Cho biểu đồ giao hoán các đồng cấu:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & D \arrow[d, "\gamma"'] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D'
\end{tikzcd}$$

trong đó hai dòng là khớp, τ là toàn cấu và γ đơn cấu. Khi đó ta có

i) $\operatorname{Ker}\beta = g(\operatorname{Ker}\alpha)$, *ii)* $\mathrm{Im}\alpha = g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta)$.

Chứng minh. Trước hết ta nhắc lại rằng, một biểu đồ các đồng cấu là giao hoán nếu tích của các đồng cấu xuất phát từ một nguồn và tới cùng một đích có kết quả như nhau.

Bây giờ ta chứng minh định lý.

Trước hết do $\beta g = g'\alpha$ mà:

$$\beta g(\mathrm{Ker}\,\alpha) = g'\alpha(\mathrm{Ker}\,\alpha) = g'(0) = 0.$$

Suy ra: $g(\mathrm{Ker}\,\alpha) \subset \mathrm{Ker}\,\beta$.

Để có đẳng thức i) ta còn phải kiểm chứng bao hàm thức: $\mathrm{Ker}\,\beta \subset g(\mathrm{Ker}\,\alpha)$. Điều đó có nghĩa là: với mọi $c \in \mathrm{Ker}\,\beta \subset C$ phải chỉ ra $\exists b \in \mathrm{Ker}\,\alpha$ mà $g(b) = c$.

Phần tử b như vậy được tìm ra nhờ phép săn trên biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
 & & b = b_1 - f(a) \arrow[dr] & & \\
a \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & f(a) \arrow[dr, "\alpha"'] & b_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \arrow[d, "\gamma"'] \\
a' \arrow[rr, "f'"] & & b' \arrow[r, "g'"] & 0 \arrow[r, "h'"] & 0
\end{tikzcd}$$

Mô tả các bước săn:

• Vì $c \in \mathrm{Ker}\,\beta$ nên $\gamma h(c) = h'\beta(c) = 0$. Do γ đơn cấu nên $h(c) = 0$, tức $c \in \mathrm{Ker}\,h$ hay $c \in \mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}\,h$ do dòng khớp. Vậy tồn tại $b_1 \in B$ mà $g(b_1) = c$.

• Vì $g'\alpha(b_1) = \beta g(b_1) = \beta(c) = 0$ nên: $b' = \alpha(b_1) \in \mathrm{Ker}\,g' = \mathrm{Im}f'$ do dòng khớp. Vậy tồn tại $a' \in A'$ mà $f'(a') = b'$.

• Vì τ là toàn cấu nên tồn tại $a \in A$ mà $\tau(a) = a'$. Hiển nhiên là

$$\alpha f(a) = f'\tau(a) = f'(a') = b'.$$

• Chọn $b = b_1 - f(a)$ thì $b \in \operatorname{Ker}\alpha$ vì:

$$\alpha(b) = \alpha(b_1) - \alpha f(a) = b' - b' = 0.$$

Hơn nữa: $g(b) = g(b_1) - gf(a) = c$.

Để chứng minh đẳng thức ii), trước hết, sử dụng $g'\alpha = \beta g$ ta được: $g'(\mathrm{Im}\alpha) = \mathrm{Im}(\beta g) \subset \mathrm{Im}\beta$ và do vậy

$$\mathrm{Im}\alpha \subset g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta).$$

Để kết thúc ta cần phải chứng minh bao hàm thức ngược lại $g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta) \subset \mathrm{Im}\alpha$, tức là $\forall b' \in g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta) \subset B'$ phải $\exists b \in B$ sao cho $\alpha(b) = b'$. Phần tử b này cũng được tìm nhờ phép săn trên biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
 & b = b_1 + f(a) \arrow[dddr] & & & \\
a \arrow[r] \arrow[ddd, "\tau"'] & f(a) \arrow[ddr, "\alpha"'] & b_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & c \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "\beta"'] & 0 \arrow[dd, "\gamma"'] \\
 & & b_1' & & \\
 & & b' \arrow[r, "g'"] & c' \arrow[r, "h'"] & 0 \\
a' \arrow[rr, "f'"] & & b' - b_1' \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Mô tả các bước săn:

• Vì $b' \in g'^{-1}(\mathrm{Im}\beta)$ nên $\exists c \in C$ mà $\beta(c) = g'(b')$.

• Bởi $\gamma h(c) = h'\beta(c) = h'g'(b') = 0$, và γ đơn cấu nên $h(c) = 0$.

Vậy $c \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$, do đó $\exists b_1 \in B$ mà $g(b_1) = c$.

• Đặt $b'_1 = \alpha(b_1)$, vì

$$g'\alpha(b_1) = \beta g(b_1) = \beta(c) = g'(b')$$

nên

$$g'(b' - b'_1) = g'(b') - g'\alpha(b_1) = 0.$$

Vậy: $b' - b'_1 \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$, do đó $\exists a' \in A'$ mà

$$f'(a') = b' - b'_1.$$

• Bởi τ toàn cấu nên $\exists a \in A$ mà $\tau(a) = a'$. Hiển nhiên là:

$$\alpha f(a) = f'\tau(a) = f'(a') = b' - b'_1.$$

• Chọn $b = b_1 + f(a)$ thì:

$$\alpha(b) = \alpha(b_1) + \alpha f(a) = b'_1 + (b' - b'_1) = b'.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Hệ quả 4. *(bổ đề năm đồng cấu)*

Cho biểu đồ giao hoán các đồng cấu sau:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & E \arrow[d, "\alpha_5"'] \\
A' \arrow[r, "f'_1"] & B' \arrow[r, "f'_2"] & C' \arrow[r, "f'_3"] & D' \arrow[r, "f'_4"] & E'
\end{tikzcd}$$

trong đó: các dòng là khớp, α_1 toàn cấu, α_5 đơn cấu. Khi đó nếu α_2 và α_4 đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) thì α_3 cũng là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu).

Thật vậy, nếu α_4 đơn cấu, thì nhờ α_1 toàn cấu mà ta có thể áp dụng bổ đề bốn đồng cấu cho $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ để có:

$$\operatorname{Ker}\alpha_3 = f_2(\operatorname{Ker}\alpha_2) = f_2(0) = 0$$

do $\operatorname{Ker}\alpha_2 = 0$ bởi α_2 đơn cấu.

Vậy nếu α_2, α_4 đơn cấu thì α_3 đơn cấu.

Nếu α_2 toàn cấu thì vì α_5 đơn cấu nên ta áp dụng bổ đề bốn đồng cấu cho $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ta được:

$$\mathrm{Im}\alpha_3 = {f'_3}^{-1}(\mathrm{Im}\alpha_4) = {f'_3}^{-1}(D') = C'$$

do $\mathrm{Im}\alpha_4 = D'$ bởi α_4 toàn cấu.

Vậy nếu α_2, α_4 toàn cấu thì α_3 toàn cấu.

Hiển nhiên, từ các kết quả trên thì từ α_2, α_4 đẳng cấu suy ra α_3 cũng đẳng cấu. ■

Hệ quả sau đây là trường hợp đặc biệt của bổ đề năm đồng cấu với các môđun hai đầu của các dòng là môđun 0 và do vậy các đồng cấu biên cũng là các đồng cấu 0.

Hệ quả 5. *(bổ đề năm ngắn)*

Cho biểu đồ giao hoán các đồng cấu sau, trong đó các dòng là khớp:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Khi đó, nếu α, γ là đơn (toàn, đẳng) cấu thì β cũng là đơn (toàn, đẳng) cấu.

§4. Môđun tự do

Tiết này dành cho việc trình bày về các môđun tự do, là các môđun có nhiều tính chất tương tự như các không gian véctơ.

4.1. Cơ sở môđun

Cơ sở của một không gian véctơ, như đã biết trong đại số tuyến tính là hệ sinh độc lập tuyến tính của không gian. Khái niệm hệ sinh và hệ độc lập tuyến tính cũng được định nghĩa trong các môđun.

Cho môđun X. Tập $S \subset X$ được gọi là *hệ sinh* của X nếu $< S >= X$. Nói cách khác, S là hệ sinh của X nếu với bất kỳ phần tử $x \in X$ thì

$$x = r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n$$

với $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ và $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, tức x biểu thị được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S.

Tập hợp $S \subset X$ được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu phần tử $0 \in X$ chỉ có một cách biểu thị dưới dạng tổ hợp tuyến tính của S, đó là tổ hợp tuyến tính tầm thường với tất cả các hệ tử đều bằng 0. Nói cách khác, S là độc lập tuyến tính nếu

$$r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n = 0$$

thì $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

Khi $S \subset X$ không là tập độc lập tuyến tính, ta nói S là *phụ thuộc tuyến tính*. Như vậy, tập S phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại ít nhất một tổ hợp tuyến tính không tầm thường của S bằng 0. Nói cách khác, tồn tại các phần tử $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ và các hệ tử $r_1, r_2, \ldots, r_k \in R$ không đồng thời bằng 0 mà:

$$r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ks_k = 0.$$

Có thể thấy rằng: trong môđun X bất kỳ luôn luôn tồn tại các hệ sinh; tuy nhiên các hệ độc lập tuyến tính không phải bao giờ cũng tồn tại. Chẳng hạn với nhóm aben A hữu hạn cấp n, xem như $\mathbb{Z}$-môđun, thì $\forall a \in A : na = 0$, nên mọi phần tử là phụ thuộc tuyến tính, do đó không tồn tại bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào trong A.

Một hệ sinh S của môđun X đồng thời là hệ độc lập tuyến tính được gọi là *cơ sở* của môđun X.

Môđun X có cơ sở được gọi là *môđun tự do.*

Các cơ sở của môđun tự do, cũng có các tính chất như cơ sở của không gian véctơ.

Định lý 1. *Tập $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ các phần tử của môđun X là cơ sở của X khi và chỉ khi mỗi phần tử $x \in X$ chỉ có một cách biểu thị tuyến tính qua S.*

Chứng minh. Nếu S là cơ sở của X thì mỗi phần tử $x \in X$ đều biểu thị tuyến tính được qua $S : x = \sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha x_\alpha$ (trong đó hầu hết các $r_\alpha = 0$, trừ một số hữu hạn).

Nếu x còn có cách biểu thị tuyến tính khác qua $S : x = \sum\limits_{\alpha \in I} r'_\alpha x_\alpha$ thì

$$\sum r_\alpha x_\alpha = \sum r'_\alpha x_\alpha \Rightarrow \sum (r_\alpha - r'_\alpha) x_\alpha = 0.$$

Bởi S độc lập tuyến tính nên đẳng thức cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi $r_\alpha - r'_\alpha = 0, \forall \alpha$. Hay cũng vậy: $r_\alpha = r'_\alpha, \forall \alpha$, tức là hai cách biểu thị tuyến tính của x qua S là như nhau.

Nếu $S \subset X$ mà mỗi $x \in X$ có một cách biểu thị tuyến tính qua S thì hiển nhiên S là hệ sinh. Vì cách biểu thị tuyến tính của mỗi $x \in X$ qua S là duy nhất, thì nói riêng phần tử 0 cũng chỉ có một cách biểu thị tuyến tính qua S, nên S là độc lập tuyến tính. Do vậy S là cơ sở. ■

Định lý 2. *Nếu $f : X \to Y$ là đẳng cấu môđun và X là môđun tự do thì Y cũng là môđun tự do. Hơn nữa, nếu S là cơ sở của X thì $f(S)$ là cơ sở của Y.*

Chứng minh. Vì S là cơ sở của X, tức hệ sinh của X nên $f(S)$ là hệ sinh của $\mathrm{Im} f = Y$.

Nếu có tổ hợp tuyến tính của $f(S)$:

$$\sum r_\alpha f(x_\alpha) = 0 \Rightarrow f(\sum r_\alpha x_\alpha) = 0 \Rightarrow \sum r_\alpha x_\alpha = 0$$

do f là đẳng cấu.

Từ tính độc lập tuyến tính của S, đẳng thức cuối cùng $\sum r_\alpha x_\alpha = 0$ cho ta $r_\alpha = 0, \forall \alpha$. Vậy $f(S)$ độc lập tuyến tính và do đó $f(S)$ là cơ sở của môđun Y. ■

4.2. Môđun tự do sinh bởi một tập hợp

Định lý 3. *Tổng trực tiếp của một họ các môđun tự do là môđun tự do.*

Chứng minh. Cho họ $\{X_k\}_{k\in I}$ các môđun tự do. Gọi S_k là cơ sở của môđun X_k. Ta cần chỉ ra $\bigcup\limits_{k\in I} j_k(S_k)$ là cơ sở của $\oplus X_k$, trong đó j_k là phép nhúng X_k vào $\oplus X_k$.

Thật vậy, $\forall x \in \oplus X_k$, x được biểu thị một cách duy nhất $x = \sum\limits_{k\in I} j_k(x_k)$; đồng thời $j_k(x_k)$ được biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua $j_k(S_k)$ vì $j_k(S_k)$ là cơ sở của $j_k(X_k)$. Vậy x được biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua $S = \cup j_k(S_k)$.

Vậy S là cơ sở của $\oplus X_k$, tức $\oplus X_k$ là môđun tự do. ■

Để xây dựng môđun tự do sinh bởi tập hợp S cho trước, trước hết chúng ta lưu ý rằng vành R là môđun tự do trên chính nó với một cơ sở là tập $\{1\}$ chỉ gồm phần tử đơn vị.

Cho tập hợp $S \neq \emptyset$. Với mỗi $s \in S$ ta lấy một bản sao của vành hệ tử R, ký hiệu là $R_s = \{r_s : r \in R\}$. Các phần tử của R_s có thể xem là phần tử $r \in R$ được đánh dấu bởi chỉ số s. Và các phép cộng, phép nhân trên R_s được "chép lại" từ R như sau:

$$\begin{aligned} r_{1s} + r_{2s} &= (r_1 + r_2)_s \\ r_{1s}r_{2s} &= (r_1r_2)_s \end{aligned}$$

Hiển nhiên $R_s \cong R$ và R_s là môđun tự do với cơ sở là tập một phần tử $\{1_s\}$.

Khi đó theo định lý 3, tổng trực tiếp $F(S) = \bigoplus\limits_{s\in S} R_s$ là môđun tự do có cơ sở là

$$S' = \{j_s(1_s) | s \in S\}$$

trong đó $j_s : R_s \to F(S)$ là phép nhúng thứ s. Ta gọi $F(S)$ là môđun tự do sinh bởi tập S. Chú ý rằng, nếu $s \neq t$ là hai phần tử của S thì $j_s(1_s) \neq j_t(1_t)$, bởi vậy ta có thể thực hiện sự đồng nhất tập hợp S với S' nhờ song ánh $\varphi : S \to S'$ mà $\varphi(s) = j_s(1_s)$. Và ta có quyền xem như S là một cơ sở của $F(S)$.

Bây giờ cho S là cơ sở của môđun tự do X. Khi đó $\forall s \in S$ môđun con sinh bởi tập $\{s\}$ là $< s >= Rs$ là một môđun tự do và Rs là một bản sao của vành hệ tử R.

Xét họ các môđun con $\{Rs\}_{s\in S}$ của môđun X, ta thấy:

- $\sum Rs = X$ vì S là hệ sinh.
- $Rs \cap \sum\limits_{t\neq s} Rt = 0$ vì S độc lập tuyến tính.

Vậy: $X = \bigoplus\limits_{s\in S} Rs \cong F(S)$.

Tức mỗi môđun tự do X có cơ sở S có thể xem là môđun tự do sinh bởi tập S.

Kết hợp tất cả các kết quả trên, ta được:

Định lý 4. *R-môđun X là tự do khi và chỉ khi X đẳng cấu với tổng trực tiếp của họ nào đó các bản sao của vành hệ tử R.*

4.3. Xây dựng môđun tự do như là vật phổ dụng của phạm trù.

Ngoài cách xác định một môđun tự do dựa vào sự tồn tại cơ sở, ta còn có thể xác định môđun tự do như là vật phổ dụng của một phạm trù. Cơ sở của phương pháp xác định mới này là tính chất đặc trưng sau đây của một cơ sở môđun.

Định lý 5. *Tập $S \neq \emptyset$ trong môđun X là cơ sở của X khi và chỉ khi với bất kỳ môđun Y, mỗi ánh xạ $f : S \to Y$ đều có thể mở rộng tới một đồng cấu duy nhất $\widetilde{f} : X \to Y$.*

Chứng minh. Nếu $S = \{x_\alpha\}$ là cơ sở của môđun tự do X thì $\forall x \in X : x = \sum r_\alpha x_\alpha$ và do vậy mỗi ánh xạ $f : S \to Y$ có thể mở rộng tới đồng cấu $\widetilde{f} : X \to Y$ theo công thức:

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(\sum r_\alpha x_\alpha) = \sum r_\alpha f(x_\alpha).$$

Ngược lại, nếu $S \subset X$ có tính chất: mỗi ánh xạ $f : S \to Y$ có thể mở rộng tới đồng cấu duy nhất: $\widetilde{f} : X \to Y$ ta cần chứng minh S là cơ sở của X.

Lấy môđun tự do $F(S)$ sinh bởi tập S. Xét ánh xạ nhúng

$$j_S : S \to F(S) \text{ mà } j_S(s) = j_s(1_s), \forall s \in S,$$

trong đó $j_s : R_s \to F(S)$ là phép nhúng thứ s. Theo điều kiện định lý, khi đó j_S có thể mở rộng tới đồng cấu duy nhất $j : X \to F(S)$. Để chứng tỏ S là cơ sở của X ta chỉ cần chỉ j là đẳng cấu.

Bởi j là mở rộng của j_S, mà j_S thực hiện phép song ánh S lên cơ sở $S' \subset F(S)$ nên j là toàn ánh.

Xét $g : S' \to S$ là ánh xạ ngược của j_S, từ cơ sở $S' \subset F(S)$ lên $S \subset X$. Vì S' là cơ sở của $F(S)$ nên g có thể mở rộng tới đồng cấu duy nhất $\widetilde{g} : F(S) \to X$. Khi đó tích các đồng cấu $\widetilde{g}j : X \to X$ thực hiện sự đồng nhất trên tập $S \subset X$ và do đó là mở rộng của phép nhúng $i : S \to X$. Bởi 1_X là một mở rộng của phép nhúng i, và từ tính duy nhất của mở rộng thì ta có $\widetilde{g}j = 1_X$. Từ tính chất đơn cấu của 1_X suy ra j là đơn cấu.

Vậy j là đẳng cấu, tức S là cơ sở của môđun X và X là môđun tự do. ■

Với một tập $S \neq \emptyset$ cho trước, ta xây dựng phạm trù $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ như sau:

• Vật của $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ là các ánh xạ $f : S \to X$, với X là môđun nào đó.

• Cấu xạ giữa hai vật $\{f : S \to X\}$ và $\{g : S \to Y\}$ là đồng cấu $\varphi : X \to Y$ sao cho $g = \varphi f$.

• Luật lấy tích là tích các đồng cấu.

Khi đó, do kết quả của định lý 5, ánh xạ nhúng $j_S : S \to F(S)$ chính là vật phổ dụng của phạm trù $\mathcal{L}(\mathcal{S})$, và $F(S)$ có thể được định nghĩa lại như sau.

Cho tập $S \neq \emptyset$. Môđun tự do sinh bởi tập S là $F(S)$ cùng với ánh xạ $j_S : S \to F(S)$ có tính chất phổ dụng đối với mọi ánh xạ $f : S \to Y$, tức là tồn tại duy nhất đồng cấu $\varphi : F(S) \to Y$ sao cho $f = \varphi j_S$.

Cuối cùng, để kết thúc mục này ta đưa ra một kết quả thường được gọi là ”tính đủ nhiều của các môđun tự do” và là cơ sở cho việc xây dựng phép giải tự do sau này.

Định lý 6. *Mỗi môđun X đẳng cấu với môđun thương của môđun tự do nào đó.*

Chứng minh. Xét môđun tự do $F(X)$ sinh bởi tập X. Khi đó ánh xạ đồng nhất $1_X : X \to X$ có thể mở rộng tới đồng cấu $\varphi : F(X) \to X$. Hiển nhiên φ là toàn cấu và do đó

$$X \cong F(X)/\operatorname{Ker}\varphi.\blacksquare$$

4.4. Môđun tự do trên vành chính.

Ta biết rằng không gian con của không gian véctơ là không gian véctơ, mà các không gian véctơ là các môđun tự do trên trường (vì chúng có cơ sở). Như vậy, với vành R là trường thì mỗi môđun con của môđun tự do là môđun tự do. Tuy nhiên, với vành R bất kỳ thì không phải như vậy: môđun con của R-môđun tự do chưa chắc là môđun tự do. Chẳng hạn nếu R không phải là vành chính thì tồn tại iđêan I của R mà không là iđêan chính; khi đó I là môđun con của R và không là môđun tự do (tất nhiên với giả thiết R giao hoán.)

Trường hợp R là vành chính thì ta lại có:

Định lý 7. *Môđun con của môđun tự do trên vành chính là môđun tự do.*

Chứng minh. Để chứng minh định lý trên, ta sử dụng một kết quả sau đây của lý thuyết tập hợp: "Bất kỳ tập $A \neq \emptyset$ đều được sắp thứ tự tốt theo một cách nào đó."

Cho X là môđun tự do trên vành chính R, và $A \triangleleft X$. Chọn cơ sở của X là $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ với I là tập đã được sắp tốt.

Với mỗi $\alpha \in I$ ta đặt

$$G_\alpha = <\{x_\beta : \beta < \alpha\}> = \bigoplus_{\beta<\alpha} Rx_\beta,$$

$$F_\alpha = <\{x_\beta : \beta \leq \alpha\}> = G_\alpha \oplus Rx_\alpha.$$

Dễ dàng thấy rằng, mỗi $x \in A \cap F_\alpha \subset F_\alpha$ được phân tích một cách duy nhất

$$x = u + rx_\alpha$$

với $u \in G_\alpha$ và $r \in R$.

Lập ánh xạ $\varphi : A \cap F_\alpha \to R$, theo công thức

$$\varphi(u + rx_\alpha) = r.$$

Hiển nhiên φ là đồng cấu và $\operatorname{Ker}\varphi = A \cap G_\alpha$.

Vì ảnh $\operatorname{Im}\varphi = I_\alpha$ là môđun con của R, và vì R là vành chính nên I_α là iđêan chính, tức I_α là R-môđun tự do (hay bằng 0). Ta có dãy khớp ngắn sau đây là chẻ:

$$0 \to A \cap G_\alpha \xrightarrow{i} A \cap F_\alpha \xrightarrow{\varphi^\#} I_\alpha \to 0$$

trong đó $\varphi^\#$ là toàn cấu, thu hẹp φ lên ảnh $\operatorname{Im}\varphi = I_\alpha$. Từ đó, ta được sự phân tích

$$A \cap F_\alpha = A \cap G_\alpha \oplus C_\alpha,$$

với $C_\alpha \subset A \cap F_\alpha$ và $C_\alpha \cong I_\alpha$, tức C_α là môđun tự do hay môđun 0.

Ta sẽ kết thúc chứng minh định lý bằng cách kiểm tra rằng $A = \oplus C_\alpha$, tức là kiểm tra

$$A = \sum_{\alpha \in I} C_\alpha \text{ và } C_\alpha \cap \sum_{\beta \neq \alpha} C_\beta = 0.$$

Bởi $A = \cup(A \cap F_\alpha)$ nên nếu $A \neq \sum C_\alpha$ thì nhờ tính chất sắp tốt của I mà tồn tại chỉ số bé nhất $\beta \in I$ sao cho có phần tử $a \in A \cap F_\beta$ và $a \notin \sum C_\alpha$ (tức $A \cap F_\beta \not\subset \sum C_\alpha$.)

Vì

$$A \cap F_\beta = (A \cap G_\beta) \oplus C_\beta$$

nên phần tử a được viết
$$a = b + d$$
với $d \in C_\beta$, còn $b \in A \cap G_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A \cap F_\alpha$. Hệ thức cuối chỉ ra rằng tồn tại chỉ số $\gamma < \beta$ mà $b \in A \cap F_\gamma$ và hiển nhiên $b \notin \sum C_\alpha$. Điều này mâu thuẫn với việc xác định sự bé nhất của chỉ số β. Vậy
$$A = \sum C_\alpha.$$

Để chứng minh $C_\alpha \cap \sum_{\beta \neq \alpha} C_\beta = 0$ với mỗi $\alpha \in I$, trước tiên ta chứng minh khẳng định, rằng tổng hữu hạn
$$d = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2} + \cdots + d_{\alpha_n} = 0, d_{\alpha_k} \in C_{\alpha_k}$$
khi và chỉ khi $d_{\alpha_1} = d_{\alpha_2} = \cdots = d_{\alpha_n} = 0$. Ta tiến hành qui nạp theo số n các hạng tử của tổng d.

Khẳng định là đúng hiển nhiên với $n = 1$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k - 1$, và tổng
$$d = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2} + \cdots + d_{\alpha_k} = 0.$$
Nhờ I sắp tốt, nên ta có thể xem như $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$, do đó
$$d = (d_{\alpha_1} + \cdots + d_{\alpha_{k-1}}) + d_{\alpha_k} \in A \cap F_{\alpha_k} = (A \cap G_{\alpha_k}) \oplus C_{\alpha_k}.$$

Hiển nhiên là $d_{\alpha_1} + \cdots + d_{\alpha_{k-1}} \in A \cap G_{\alpha_k}$ và $d_{\alpha_k} \in C_{\alpha_k}$ nên đồng thời $d_{\alpha_k} = 0$ và $d_{\alpha_1} + \cdots + d_{\alpha_{k-1}} = 0$. Sử dụng giả thiết qui nạp cho hệ thức cuối cùng ta có: $d_{\alpha_1} = \cdots = d_{\alpha_{k-1}} = 0$. ■

Hệ quả 8. *Mọi nhóm con của nhóm aben tự do là nhóm aben tự do.*

Thật vậy, vì các nhóm aben tự do là các $\mathbb{Z}$-môđun tự do và như đã biết: $\mathbb{Z}$ là vành chính, nên kết luận của hệ quả được suy ra từ định lý 7. ■

Bài tập

Bài 1.1 Cho R là vành có đơn vị 1, X là nhóm cộng giao hoán và $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, X)$ là vành các tự đồng cấu của nhóm X. Chứng minh rằng X là R-môđun trái khi và chỉ khi tồn tại đồng cấu $\varphi : R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, X)$ sao cho $\varphi(1) = 1_X$, với 1_X là đồng cấu đồng nhất của nhóm X.

Bài 1.2 Chứng minh rằng trong tám tiên đề về định nghĩa R-môđun trái, gồm 4 tiên đề về nhóm cộng giao hoán và 4 tiên đề $M_1 - M_4$, ta có thể bỏ đi tiên đề giao hoán của phép cộng. Nói cách khác, tiên đề đó có thể được suy ra từ bảy tiên đề còn lại.

Bài 1.3 Cho X là R-môđun và K là iđêan hai phía của R. Chứng minh rằng với $x \in X$ thì $Kx = \{rx : r \in K\}$ là môđun con của X.

Bài 1.4 Cho R là miền nguyên và X là R-môđun. Phần tử $x \in X$ được gọi là phần tử xoắn nếu tồn tại $r \in R \setminus \{0\}$ sao cho $rx = 0$. Đặt $\tau(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử xoắn của X. Nếu $\tau(X) = 0$ thì X được gọi là môđun không xoắn, nếu $\tau(X) = X$ thì X được gọi là môđun xoắn.

Chứng minh rằng

a) $\tau(X)$ là môđun con của X.

b) Mọi môđun con của môđun xoắn trên R đều là môđun xoắn trên R.

c) Mọi môđun con của môđun không xoắn trên R cũng là môđun không xoắn trên R.

d) môđun thương $X/\tau(X)$ có phải là môđun không xoắn hay không?

e) $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ có phải là môđun xoắn không ?

Bài 1.5 Cho R là miền nguyên và X là R-môđun. Phần tử $x \in X$ gọi là chia được nếu với mọi $\lambda \in R \setminus \{0\}$, tồn tại phần tử $y \in X$ sao cho $x = \lambda y$. Đặt $\delta(X)$ là tập hợp tất cả các phần tử chia được của X. Nếu $\delta(X) = X$ thì X được gọi là môđun chia được. Chứng minh rằng:

a) $\delta(X)$ là môđun con của X.

b) môđun thương của môđun chia được là môđun chia được.

c) Các $\mathbb{Z}$-môđun $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ đều là các môđun chia được.

Bài 1.6 Chứng minh rằng mỗi đồng cấu $f : X \to Y$ là duy nhất xác định bởi giá trị của f trên một hệ sinh S nào đó của X.

Tuy nhiên không phải mỗi ánh xạ $g : S \to Y$ có thể mở rộng thành đồng cấu từ X vào Y. Hãy tìm điều kiện cho g để g có thể mở rộng thành đồng cấu trên X.

Bài 1.7 Cho $f, g : X \to Y$ là các đồng cấu từ cùng môđun X vào môđun Y. Gọi $A \subset X$ là tập các $x \in X$ mà $f(x) = g(x)$. Chứng minh rằng $A \lhd X$.

Bài 1.8 Môđun X được gọi là môđun đơn nếu X chỉ có hai môđun con là 0 và X. Cho đồng cấu $f : X \to Y$ với X là môđun đơn. Chứng minh rằng

a) Imf là môđun con đơn của Y.

b) Nếu $Imf \neq 0$ thì f là một đơn cấu.

Bài 1.9 Cho A và B là các môđun con của môđun X. Chứng minh rằng
$$(A + B)/A \cong B/(A \cap B).$$

Bài 1.10 Cho môđun X và các môđun con M, N mà $N \subset M$. Chứng minh rằng

$$(X/N)/(M/N) \cong X/M.$$

Bài 1.11 Cho $h : X \to X$ là tự đồng cấu của môđun X thỏa mãn điều kiện $h^2 = h$. Chứng minh rằng

$$X = \mathrm{Im} h \oplus \mathrm{Ker}\, h.$$

Bài 1.12 Chứng minh rằng, trong ba đặc trưng (1), (2), (3) của tổng trực tiếp hai môđun (được nói tới trong mục 2.2), ta có thể bỏ đi đẳng thức (2). Nói cách khác, nếu ba môđun A, B, C nói trong định lý $1, \S 2$ chỉ cần thỏa hai đẳng thức (1), (3) thì $C \cong A \oplus B$.

Bài 1.13 Cho X là tổng trực tiếp của họ các môđun $\{X_i\}_{i \in I}$. Chứng minh rằng

a) $\tau(X) = \sum\limits_{i \in I} \tau(X_i)$.

Từ đó suy ra

b) Tổng trực tiếp các môđun xoắn là môđun xoắn.

c) Tổng trực tiếp các môđun không xoắn là môđun không xoắn.

Bài 1.14 Cho $X = \prod X_i$. Hãy chứng minh: môđun con chia được của $X : \delta(X) = \prod \delta(X_i)$. Từ đó suy ra: Tích trực tiếp các môđun chia được là môđun chia được.

Tổng trực tiếp các môđun chia được có là môđun chia được không?

Bài 1.15 Môđun X được gọi là hữu hạn sinh, nếu trong X có một hệ sinh hữu hạn. Cho X là tổng trực tiếp của họ môđun $\{X_i\}$. Chứng minh rằng:

a) Môđun thương của môđun hữu hạn sinh là môđun hữu hạn sinh.

b) Môđun tổng trực tiếp X là hữu hạn sinh khi và chỉ khi mỗi X_i là hữu hạn sinh và hầu hết $X_i = 0$, trừ ra một số hữu hạn.

Bài 1.16 Chứng minh rằng tổng trực tiếp của họ các đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) là đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu). Kết luận tương tự có đúng cho tích trực tiếp họ các đồng cấu không?

Bài 1.17 Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r] & 0 \\ & X & & \end{tikzcd}$$

trong đó $hf = 0$, dòng là khớp. Hãy chứng minh rằng tồn tại và duy nhất đồng cấu $\varphi : C \to X$ sao cho $h = \varphi g$.

Bài 1.18 Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

trong đó dòng là khớp và $gh = 0$. Hãy chứng minh rằng tồn tại và duy nhất đồng cấu $\psi : X \longrightarrow A$ sao cho $f\psi = h$.

Bài 1.19 Cho dãy khớp $0 \to A \to X \to C \to 0$, trong đó A và C là các môđun hữu hạn sinh. Chứng minh rằng X cũng là môđun hữu hạn sinh.

Bài 1.20 Cho X là môđun và X_1, X_2 là các môđun con của X mà $X_1 + X_2$ và $X_1 \cap X_2$ là các môđun con hữu hạn sinh. Chứng minh rằng X_1, X_2 cũng là các môđun con hữu hạn sinh.

Bài 1.21 Cho biểu đồ

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & \\ & & Y \arrow[d, "\beta"] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \\ & & Y' & \end{tikzcd}$$

trong đó dòng và cột là khớp. Chứng minh rằng $\beta'\alpha$ là đơn cấu khi và chỉ khi $\alpha'\beta$ là đơn cấu.

Bài 1.22 Cho biểu đồ

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] & & \\ X \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & X' \arrow[r] & 0 \\ & Y' \arrow[d] & & \\ & 0 & & \end{tikzcd}$$

trong đó dòng và cột là khớp. Chứng minh rằng $\beta'\alpha$ toàn cấu khi và chỉ khi $\alpha'\beta$ là toàn cấu.

Bài 1.23 Cho biểu đồ 3×3, trong đó 3 cột là khớp:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_1 & \to & B_1 & \to & C_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_2 & \to & B_2 & \to & C_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A_3 & \to & B_3 & \to & C_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Chứng minh rằng nếu 2 dòng liên tiếp là khớp thì dòng còn lại cũng là khớp. Hơn nữa, nếu dòng 1 và dòng 3 khớp và dòng 2 nửa khớp thì dòng 2 cũng sẽ khớp.

Bài 1.24 Cho X_1, X_2 là các môđun con của môđun X. Chứng minh dãy sau đây là khớp:

$$0 \to X_2/(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\varphi} X/X_1 \xrightarrow{\psi} X/(X_1 + X_2) \to 0.$$

Bài 1.25 Chứng minh rằng môđun con A của môđun X là hạng tử trực tiếp của X nếu môđun thương X/A là tự do.

Bài 1.26 Cho X, Y là các môđun trên vành chính, hơn nữa Y là môđun tự do. Chứng minh rằng: $X \cong \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, với mọi đồng cấu $f : X \to Y$.

Bài 1.27 Chứng minh rằng mọi môđun tự do trên miền nguyên R là môđun không xoắn.

Nếu X là môđun không xoắn trên miền nguyên R thì có thể kết luận X là môđun tự do không.

Chương II
CÁC HÀM TỬ HOM VÀ TENXƠ

§1. Các hàm tử Hom

Các hàm tử Hom là những hàm tử đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết môđun và đại số đồng điều. Để phù hợp với độc giả của cuốn sách là những người mới bắt đầu làm quen, ở đây chúng ta chỉ trình bày chủ yếu về các hàm tử một biến. Một khi đã tích lũy đầy đủ các tri thức về các hàm tử Hom một biến, thì việc tìm hiểu về song hàm tử Hom sẽ không khó khăn gì.

1.1. Cấu trúc nhóm trên $\mathrm{Hom}(X,Y)$

Cho X, Y là các R-môđun. Trên tập tất cả các đồng cấu từ môđun X tới môđun Y, ký hiệu là $\mathrm{Hom}(X, Y)$, ta đưa vào phép toán cộng như sau:

Với cặp đồng cấu bất kỳ $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ tổng $(f + g)$ là ánh xạ từ X tới Y xác định theo công thức:

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Dễ thấy phép cộng trong $\mathrm{Hom}(X, Y)$ là phép cộng trên từng điểm $x \in X$; và bởi vì mỗi f, g là các đồng cấu nên hiển nhiên $f+g$ là đồng cấu, tức là phép toán cộng được xác định hợp lý trên $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

Phép cộng đưa vào ở trên, xác định cho ta cấu trúc nhóm trên $\mathrm{Hom}(X, Y)$, với phần tử 0 là đồng cấu tầm thường và phần tử đối của đồng cấu f là $(-f)$ được xác định:

$$(-f)(x) = -f(x), \forall x \in X.$$

Hiển nhiên $(-f)$ cũng là đồng cấu.

Hơn nữa $\mathrm{Hom}(X, Y)$ là nhóm cộng giao hoán. Trường hợp đặc biệt khi R là vành giao hoán thì còn có thể biến $\mathrm{Hom}(X, Y)$ thành R-môđun với phép nhân ngoài, được xác định theo cách sau:

$$\forall r \in R, \forall f \in \mathrm{Hom}(X, Y), (rf)(x) = rf(x), \forall x \in X.$$

Bây giờ cho đồng cấu $\alpha : A \to B$ và X là môđun cố định. Ta xét các ánh xạ cảm sinh từ α là α_* và α^* được xác định theo các công thức sau:

$$\alpha_* : \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

mà $\alpha_*(f) = \alpha f, \forall f \in \mathrm{Hom}(X, A)$,

$$\alpha^* : \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$$

mà $\alpha^*(g) = g\alpha, \forall g \in \mathrm{Hom}(B, X)$.

Có thể thấy các ánh xạ cảm sinh α_*, α^* là các đồng cấu nhóm. Ta kiểm tra, chẳng hạn với α_*:

$\forall x \in X, \forall f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(X, A)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_*(f_1 + f_2)(x) &= \alpha(f_1 + f_2)(x) = \alpha[f_1(x) + f_2(x)] \\
&= \alpha f_1(x) + \alpha f_2(x) = [\alpha f_1 + \alpha f_2](x) \\
&= [\alpha_*(f_1) + \alpha_*(f_2)](x).
\end{aligned}$$

Vậy: $\alpha_*(f_1 + f_2) = \alpha_*(f_1) + \alpha_*(f_2)$.

Việc kiểm tra tính chất đồng cấu nhóm của α^* được tiến hành tương tự.

1.2. Khái niệm về hàm tử

Cho các phạm trù $\mathcal{P}$ và $\mathcal{C}$.

Hàm tử $F : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ là một quy luật, tương ứng mỗi vật $A \in \mathcal{P}$ với một vật $F(A) \in \mathcal{C}$ và tương ứng mỗi cấu xạ $\alpha : A \to B$ trong phạm trù $\mathcal{P}$ với một cấu xạ $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ trong phạm trù $\mathcal{C}$. Hơn nữa, các tiên đề sau phải được thỏa mãn:

HT1: Với mỗi vật $A \in \mathcal{P} : F(1_A) = 1_{F(A)}$.

HT2: $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ với mỗi cặp cấu xạ (α, β) trong $\mathcal{P}$ mà xác định được tích $\beta\alpha$.

Như vậy, mỗi hàm tử $F : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ được xác định bởi các ánh xạ: ánh xạ từ lớp các vật của $\mathcal{P}$ tới lớp các vật của $\mathcal{C}$ và ánh xạ từ lớp các cấu xạ của $\mathcal{P}$ tới lớp các cấu xạ của $\mathcal{C}$ thỏa $F[\mathrm{Mor}(A, B)] \subset \mathrm{Mor}(F(A), F(B))$. Hơn nữa ánh xạ các cấu xạ phải bảo toàn các cấu xạ đồng nhất và tích các cấu xạ.

Các hàm tử đôi khi được gọi là *hàm tử hiệp biến*, để phân biệt với các *phản hàm tử* hay *hàm tử phản biến* được định nghĩa như sau:

Phản hàm tử $G : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ là qui luật tương ứng mỗi vật $A \in \mathcal{P}$ với một vật $G(A) \in \mathcal{C}$ và tương ứng mỗi cấu xạ $\alpha : A \to B$ trong $\mathcal{P}$ với một cấu xạ $G(\alpha) : G(B) \to G(A)$ trong phạm trù $\mathcal{C}$. Hơn nữa, các tiên đề sau phải được thỏa mãn:

HT1': Với mỗi vật $A \in \mathcal{P} : G(1_A) = 1_{G(A)}$,

HT2': $G(\beta\alpha) = G(\alpha)G(\beta)$ với mỗi cặp (α, β) các cấu xạ trong

$\mathcal{P}$ mà tích $\beta\alpha$ là xác định.

Như vậy mỗi phản hàm tử G cũng được xác định bởi hai ánh xạ: ánh xạ từ lớp các vật của $\mathcal{P}$ tới lớp các vật của $\mathcal{C}$, ánh xạ từ lớp các cấu xạ của $\mathcal{P}$ tới lớp các cấu xạ của $\mathcal{C}$. Tuy nhiên, nếu các hàm tử chuyển mỗi cấu xạ $A \xrightarrow{\alpha} B$ tới cấu xạ cùng chiều $F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B)$, thì các phản hàm tử chuyển mỗi cấu xạ α tới cấu xạ ngược chiều $G(B) \xrightarrow{G(\alpha)} G(A)$. Và vì vậy ánh xạ cấu xạ của phản hàm tử G ngoài tính bảo toàn cấu xạ đồng nhất còn bảo toàn tích các cấu xạ theo thứ tự ngược.

Ta đưa ra sau đây vài ví dụ về các hàm tử và phản hàm tử.

Cho phạm trù $\mathcal{P}$ và vật $X \in \mathcal{P}$.

Hàm tử $\mathrm{Mor}(X, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$t, từ phạm trù $\mathcal{P}$ tới phạm trù các tập hợp $\mathcal{S}$t được xác định như sau:

• Mỗi vật $A \in \mathcal{P}$ được tương ứng với tập hợp $\mathrm{Mor}(X, A) \in \mathcal{S}$t.

• Mỗi cấu xạ $\alpha : A \to B$ được tương ứng với ánh xạ $\alpha_* : \mathrm{Mor}(X, A) \to \mathrm{Mor}(X, B)$ mà $\alpha_*(\beta) = \alpha\beta, \forall \beta \in \mathrm{Mor}(X, A)$. Hiển nhiên $\mathrm{Mor}(X, -)$ thỏa mãn các tiên đề về hàm tử. Thật vậy, với mỗi vật $A \in \mathcal{P}$ ta có $(1_A)_* : \mathrm{Mor}(X, A) \to \mathrm{Mor}(X, A)$ là ánh xạ đồng nhất, bởi $(1_A)_*(\beta) = 1_A\beta = \beta, \forall \beta \in \mathrm{Mor}(X, A)$, tức là $\mathrm{Mor}(X, -)$ thỏa tiên đề HT1.

Nếu $\alpha : A \to B, \beta : B \to C$ là các cấu xạ trong $\mathcal{P}$ thì $(\beta\alpha)_* = \beta_*\alpha_*$ bởi với mọi $u \in \mathrm{Mor}(X, A)$:

$$(\beta\alpha)_*(u) = (\beta\alpha)u = \beta(\alpha u) = \beta_*(\alpha_*(u)),$$

tức là $\mathrm{Mor}(X, -)$ thỏa tiên đề HT2.

Vậy, $\mathrm{Mor}(X, -) : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$t là hàm tử hiệp biến.

Từ phạm trù $\mathcal{P}$ và vật $X \in \mathcal{P}$ ta cũng xác định được một phản hàm tử trên $\mathcal{P}$ là $\mathrm{Mor}(-, X) : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$t như sau:

• Tương ứng mỗi vật $A \in \mathcal{P}$ với tập $\mathrm{Mor}(A, X)$,

• Tương ứng mỗi cấu xạ $\alpha : A \to B$ với ánh xạ $\alpha^* : \mathrm{Mor}(B, X) \to \mathrm{Mor}(A, X)$ theo qui tắc: $\alpha^*(\beta) = \beta\alpha, \forall \beta \in \mathrm{Mor}(B, X)$. Bằng cách tính toán tương tự như đối với hàm tử $\mathrm{Mor}(X, -)$, độc giả có thể dễ dàng kiểm tra $\mathrm{Mor}(-, X)$ thỏa các tiên đề HT1' và HT2'. Do đó, $\mathrm{Mor}(-, X)$ thực sự là một hàm tử phản biến.

1.3. Các hàm tử Hom

Xét phạm trù các R-môđun trái, mà ta vẫn ký hiệu là Mod và môđun $X \in$ Mod. Hàm tử $\mathrm{Hom}(X, -)$: Mod $\to \mathcal{A}$b, từ phạm trù Mod tới phạm trù $\mathcal{A}$b các nhóm aben đặt mỗi môđun $A \in$ Mod tương ứng với nhóm $\mathrm{Hom}(X, A)$ và đặt mỗi R-đồng cấu $\alpha : A \to B$ với đồng cấu nhóm $\alpha_* : \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$ theo qui tắc (đã được biết ở mục 1.1): $\alpha_*(\beta) = \alpha\beta, \forall \beta \in \mathrm{Hom}(X, A)$.

Tính hàm tử của $\mathrm{Hom}(X, -)$ được kiểm tra hoàn toàn tương tự như hàm tử $\mathrm{Mor}(X, -)$ trong mục 1.2.

Phản hàm tử $\mathrm{Hom}(-, X)$: Mod $\to \mathcal{A}$b, từ phạm trù Mod tới phạm trù $\mathcal{A}$b, đặt mỗi môđun $A \in$ Mod tương ứng với nhóm aben $\mathrm{Hom}(A, X)$ và đặt mỗi R-đồng cấu $\alpha : A \to B$ với đồng cấu nhóm $\alpha^* : \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X)$ theo qui tắc: $\alpha^*(\beta) = \beta\alpha, \forall \beta \in \mathrm{Hom}(B, X)$.

Tính phản biến hàm tử của $\mathrm{Hom}(-, X)$ hiển nhiên cũng được kiểm tra một cách tương tự như phản hàm tử $\mathrm{Mor}(-, X)$ trong mục trên.

Như vậy, với mỗi môđun X, ta có thể xác định được một hàm tử $\mathrm{Hom}(X, -)$ và một phản hàm tử $\mathrm{Hom}(-, X)$. Ta gọi chung các hàm tử và phản hàm tử đó là các hàm tử Hom.

1.4. Tính khớp của hàm tử Hom

Định lý 1. *Với mỗi môđun X và với bất kỳ dãy khớp ngắn*

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

các dãy sau đây là khớp:

$$0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \xrightarrow{\chi_*} \mathrm{Hom}(X,B) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{Hom}(X,C)$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,X) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Hom}(B,X) \xrightarrow{\chi^*} \mathrm{Hom}(A,X)$$

Chứng minh. Để chứng minh tính khớp của dãy thứ nhất ta cần kiểm tra χ_* đơn cấu và $\mathrm{Im}\chi_* = \mathrm{Ker}\,\sigma_*$.

Tính đơn cấu của χ_* được suy ra từ tính đơn cấu của χ vì

$$\chi_*(u) = \chi_*(v) \Leftrightarrow \chi u = \chi v \Rightarrow u = v,$$

do đơn cấu χ có thể giản ước trái.

Bởi $\sigma\chi = 0$ nên $\sigma_*\chi_* = (\sigma\chi)_* = 0$, tức $\mathrm{Im}\chi_* \subset \mathrm{Ker}\,\sigma_*$. Vậy ta chỉ còn phải chứng minh: $\mathrm{Ker}\,\sigma_* \subset \mathrm{Im}\chi_*$ tức là ta cần chỉ ra với mỗi $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\sigma_*$, tồn tại $\beta : X \to A$ sao cho $\chi_*(\beta) = \chi\beta = \alpha$. Xét biểu đồ các đồng cấu:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "\alpha"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & B \arrow[r, "\sigma"] & C \end{tikzcd}$$

Vì $\sigma_*(\alpha) = \sigma\alpha = 0$, nên $\mathrm{Im}\alpha \subset \mathrm{Im}\chi$. Điều đó cho phép ta xác định đồng cấu

$$\alpha^{\#} : X \to \mathrm{Im}\chi$$

mà

$$\alpha^{\#}(x) = \alpha(x) \in \mathrm{Im}\chi, \forall x \in X.$$

Vì χ đơn cấu nên thu hẹp χ trên $\mathrm{Im}\chi$ là đẳng cấu $\chi^{\#} : A \to \mathrm{Im}\chi$, do đó ta có đẳng cấu ngược

$$(\chi^{\#})^{-1} : \mathrm{Im}\chi \to A.$$

Đồng cấu $\beta : X \to A$ được xác định bởi công thức

$$\beta = (\chi^{\#})^{-1}\alpha^{\#}$$

chính là đồng cấu cần tìm để thỏa $\chi\beta = \alpha$.

Để chứng minh tính khớp của dãy thứ hai ta cần kiểm tra σ^* đơn cấu và $\mathrm{Im}\sigma^* = \mathrm{Ker}\,\chi^*$. Bởi các toàn cấu luôn luôn có thể giản ước bên phải nên

$$\sigma^*(u) = \sigma^*(v) \Leftrightarrow u\sigma = v\sigma \Rightarrow u = v,$$

tức là σ^* là đơn cấu nhờ σ là toàn cấu.

Bởi $\sigma\chi = 0$ nên $\chi^*\sigma^* = (\sigma\chi)^* = 0$ nên ta lại có $\mathrm{Im}\sigma^* \subset \mathrm{Ker}\,\chi^*$.

Vậy ta chỉ còn phải kiểm tra sự đúng đắn của bao hàm thức: $\mathrm{Ker}\,\chi^* \subset \mathrm{Im}\sigma^*$, tức là với mỗi $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\chi^*$ phải chỉ ra sự tồn tại $\beta : C \to X$ thỏa $\sigma^*(\beta) = \beta\sigma = \alpha$. Xét biểu đồ các đồng cấu sau:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\chi} & B & \xrightarrow{\sigma} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \\ & & X & & & & \end{array}$$

Vì dòng trên khớp và $\alpha\chi = 0$ nên $\mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Im}\chi \subset \mathrm{Ker}\,\alpha$.

Áp dụng định lý Noether cho toàn cấu $\sigma : B \to C$ ta được đẳng cấu

$$\widetilde{\sigma} : B/\mathrm{Im}\chi = B/\mathrm{Ker}\,\sigma \to C,$$

từ đó ta có đẳng cấu ngược

$$(\widetilde{\sigma})^{-1} : C \to B/\mathrm{Im}\chi.$$

Vì $\mathrm{Im}\chi \subset \mathrm{Ker}\,\alpha$ nên ta có thể xác định đồng cấu

$$\varphi : B/\mathrm{Im}\chi \to B/\mathrm{Ker}\,\alpha$$

theo công thức:

$$\varphi(b + \mathrm{Im}\chi) = b + \mathrm{Ker}\,\alpha, \forall b + \mathrm{Im}\chi.$$

Áp dụng hệ quả định lý Noether cho đồng cấu $\alpha : B \to X$ ta được đơn cấu

$$\widetilde{\alpha} : B/\mathrm{Ker}\,\alpha \to X,$$

thỏa $\widetilde{\alpha}p = \alpha$ với $p : B \to B/\mathrm{Ker}\,\alpha$ là phép chiếu. Đồng cấu β cần tìm được xác định nhờ công thức

$$\beta = \widetilde{\alpha}\varphi(\widetilde{\sigma})^{-1},$$

mà việc kiểm tra $\beta\sigma = \alpha$ có thể thực hiện dễ dàng bằng việc tính toán các phần tử của B. ■

Kết quả của định lý 1 có thể tóm lược một cách vắn tắt: các hàm tử $\mathrm{Hom}(X, -)$ và $\mathrm{Hom}(-, X)$ chuyển mỗi dãy khớp ngắn thành một dãy khớp chỉ về bên trái.

Tính chất đó của các hàm tử Hom được gọi là tính khớp trái, và định lý 1 là định lý về tính khớp trái của các hàm tử Hom.

Định lý 2. *Với mỗi môđun X, nếu dãy khớp ngắn*

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

là chẻ thì các dãy sau đây là khớp và chẻ:

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{\chi_*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{Hom}(X, C) \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Hom}(B, X) \xrightarrow{\chi^*} \mathrm{Hom}(A, X) \to 0.$$

Chứng minh. Do tính khớp trái của các hàm tử Hom, để chứng minh các dãy trên là khớp và chẻ ta chỉ cần kiểm tra các đồng cấu σ_*, χ^* là toàn cấu và cả hai đều có nghịch phải. Và bởi vì mỗi đồng cấu có nghịch phải thì là toàn cấu nên để chứng minh định lý thực ra ta chỉ cần chỉ ra các nghịch phải của σ_* và χ^*. Bởi dãy $0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ là chẻ ra nên χ có nghịch trái p và σ có nghịch phải q, tức là $p\chi = 1_A$ và $\sigma q = 1_C$. Từ đó ta có

$$\sigma_* q_* = (\sigma q)_* = (1_C)_* = 1_{\mathrm{Hom}(X,C)},$$

$$\chi^* p^* = (p\chi)^* = (1_A)^* = 1_{\mathrm{Hom}(A,X)}.$$

Các đẳng thức sau cùng chứng tỏ điều ta muốn có: các đồng cấu σ_* và χ^* có nghịch phải. ■

Kết quả của định lý 2 chỉ ra rằng: các hàm tử Hom bảo toàn tính khớp và chẻ của các dãy khớp ngắn và chẻ. Bởi mỗi dãy khớp ngắn, chẻ $0 \to A \to B \to C \to 0$ cho ta đẳng cấu $B \cong A \oplus C$ nên kết quả của định 2 cho chúng ta các đẳng cấu sau

$$\mathrm{Hom}(X, A \oplus C) \cong \mathrm{Hom}(X, A) \oplus \mathrm{Hom}(X, C),$$

$$\mathrm{Hom}(A \oplus C, X) \cong \mathrm{Hom}(A, X) \oplus \mathrm{Hom}(C, X).$$

§2. Môđun xạ ảnh, môđun nội xạ

Trong tiết trước, chúng ta biết rằng với mỗi môđun X bất kỳ, các hàm tử $\mathrm{Hom}(X, -)$ và $\mathrm{Hom}(-, X)$ nói chung chỉ là các hàm tử khớp về bên trái. Vậy với những điều kiện nào cho các môđun X thì các hàm tử đó cũng khớp cả về bên phải, tức chúng là các hàm tử khớp? Tiết này ta sẽ xét tới các môđun X mà các hàm tử $\mathrm{Hom}(X, -)$ hay phản hàm tử $\mathrm{Hom}(-, X)$ là hàm tử khớp, tức là các hàm tử chuyển mỗi dãy khớp ngắn thành một dãy khớp ngắn.

2.1. Môđun xạ ảnh

Định nghĩa vắn tắt nhất về môđun xạ ảnh là: Môđun P là môđun xạ ảnh nếu hàm tử $\mathrm{Hom}(P, -)$ là hàm tử khớp.

Như vậy, môđun P là môđun xạ ảnh khi và chỉ khi với bất kỳ dãy khớp ngắn

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0 \tag{1}$$

dãy các nhóm aben:

$$0 \to \mathrm{Hom}(P, A) \xrightarrow{\chi_*} \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow{\sigma_*} \mathrm{Hom}(P, C) \to 0$$

là dãy khớp.

Bởi mỗi hàm tử Hom luôn là hàm tử khớp bên trái, nên đòi hỏi dãy sau cùng khớp là tương đương với đòi hỏi σ_* là toàn cấu. Vì dãy khớp (1) có thể xem như là dãy khớp của toàn cấu σ, và mỗi toàn cấu σ đều sinh ra dãy khớp ngắn dạng (1) nên đòi hỏi về tính khớp của $\mathrm{Hom}(P, -)$ tương đương với đòi hỏi là $\mathrm{Hom}(P, -)$ chuyển mỗi toàn cấu $\sigma : B \to C$ thành toàn cấu $\sigma_* : \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(P, C)$.

Để ý rằng tính toàn cấu của σ_* có nghĩa là với mọi đồng cấu $f : P \to C$, tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to B$ sao cho $\sigma\varphi = f$ thì ta có một định nghĩa chi tiết hơn và thông dụng hơn sau đây về môđun xạ ảnh:

Định nghĩa. Môđun P được gọi là *môđun xạ ảnh* nếu với mọi toàn cấu $\sigma : B \to C$, mỗi đồng cấu $f : P \to C$, tồn tại một đồng cấu $\varphi : P \to B$ sao cho $f = \sigma\varphi$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists\varphi"'] \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\sigma"] & C \end{tikzcd}$$

Theo ngôn ngữ biểu đồ, thì P là xạ ảnh nếu với biểu đồ bất kỳ gồm ba đỉnh P, B và C với mũi tên toàn cấu $B \xrightarrow{\sigma} C$ và mũi tên đồng cấu $f : P \to C$, luôn luôn có thể bổ sung mũi tên $\varphi : P \to B$ để biểu đồ giao hoán.

Ví dụ về các môđun xạ ảnh, ta có:

Định lý 1. *Mỗi môđun tự do X đều là môđun xạ ảnh.*

Chứng minh. Cho $\sigma : B \to C$ là toàn cấu và $f : X \to C$ là đồng cấu. Ta cần chứng minh tồn tại đồng cấu $\varphi : X \to B$ mà $f = \sigma\varphi$.

Gọi $S \subset X$ là cơ sở của môđun tự do X. Vì σ là toàn cấu nên với mọi $x \in S$, tồn tại phần tử $\varphi(x) \in \sigma^{-1}(f(x)) \neq \emptyset$. Như vậy, ta có ánh xạ $\varphi : S \to B$, ánh xạ này có thể mở rộng tới đồng cấu trên X mà để tiện lợi ta cũng ký hiệu là $\varphi : X \to B$. Để chứng minh $f = \sigma\varphi$, ta chỉ cần kiểm tra đẳng thức đúng trên hệ sinh S của X. Hiển nhiên là với mọi $x \in S$ do $\varphi(x) \in \sigma^{-1}(f(x))$ nên $\sigma\varphi(x) = f(x)$.

Vậy môđun tự do X là môđun xạ ảnh. ■

Từ kết quả của định lý 1, và từ tính đủ nhiều của lớp các môđun tự do, ta suy ra tính đủ nhiều của lớp các môđun xạ ảnh.

2.2. Tính chất của môđun xạ ảnh.

Định lý 2. *Tổng trực tiếp của họ môđun $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ là xạ ảnh khi và chỉ khi mỗi môđun thành phần P_i là xạ ảnh.*

Chứng minh. Cho $P = \oplus P_i$ là môđun xạ ảnh, $\sigma : B \to C$ là toàn cấu, $f : P_k \to C$ là đồng cấu. Để chứng minh thành phần P_k xạ ảnh ta cần chỉ ra sự tồn tại của đồng cấu $\varphi : P_k \to B$ sao cho $f = \sigma\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& P = \oplus P_i \arrow[d, shift left, "p_k"] \arrow[ddl, "\psi"'] \\
& P_k \arrow[u, shift left, "j_k"] \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\sigma"] & C
\end{tikzcd}$$

Nối kết tổng trực tiếp $P = \oplus P_i \to C$ bởi tích hai đồng cấu fp_k, trong đó p_k là phép chiếu lên thành phần thứ k. Sử dụng tính chất xạ ảnh của P, tồn tại đồng cấu $\psi : P \to B$ sao cho $\sigma\psi = fp_k$.

Chọn $\varphi = \psi j_k$ trong đó $j_k : P_k \to \oplus P_i$ là phép nhúng thứ k thì hiển nhiên:

$$\sigma\varphi = \sigma(\psi j_k) = (fp_k)j_k = f.$$

Vậy nếu tổng trực tiếp $P = \oplus P_i$ là môđun xạ ảnh thì mỗi thành phần P_i là xạ ảnh.

Bây giờ nếu mỗi thành phần P_k là xạ ảnh, $\sigma : B \to C$ là toàn cấu, $f : \oplus P_i \to C$ là đồng cấu. Để chứng minh $P = \oplus P_i$ là xạ ảnh ta cần chứng tỏ sự tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to B$ sao cho $f = \sigma\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
& P_k \arrow[d, "j_k"] \arrow[ddl, "\varphi_k"'] \\
& \oplus P_i = P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "\sigma"] & C
\end{tikzcd}$$

Với mỗi $k \in I$, nối kết $P_k \to C$ bởi tích các đồng cấu fj_k

trong đó j_k là phép nhúng thứ k, và sử dụng tính xạ ảnh của P_k tồn tại đồng cấu $\varphi_k : P_k \to B$ mà $\sigma\varphi_k = fj_k$. Sử dụng tính chất phổ dụng của họ các phép nhúng $\{j_k : P_k \to \oplus P_i\}_{k\in I}$ đối với họ các đồng cấu $\{\varphi_k : P_k \to B\}_{k\in I}$, tồn tại duy nhất đồng cấu $\varphi : \oplus P_i \to B$ thỏa $\varphi j_k = \varphi_k, \forall k \in I$. Ta kiểm tra: $\sigma\varphi = f$. Thật vậy, $\forall \sum j_k(x_k) \in \oplus P_k$:

$$\begin{aligned}\sigma\varphi(\sum j_k(x_k)) &= \sum \sigma(\varphi j_k)(x_k) = \sum \sigma\varphi_k(x_k)\\ &= \sum fj_k(x_k) = f(\sum j_k(x_k)).\end{aligned}$$

■

Định lý 3. *Đối với mỗi môđun P, ba phát biểu sau là tương đương:*

a) *P là môđun xạ ảnh.*

b) *Mỗi dãy khớp $0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} P \to 0$ là chẻ ra.*

c) *P đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của một môđun tự do.*

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b): Cho P là xạ ảnh, khi đó với dãy khớp ngắn bất kỳ:

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} P \to 0$$

do $\sigma : B \to P$ là toàn cấu nên đồng cấu đồng nhất $1_P : P \to P$ được nâng lên tới đồng cấu $h : P \to B$ sao cho $\sigma h = 1_P$. Vậy σ có nghịch phải là h, do đó dãy khớp ngắn đã cho là chẻ ra.

b) $\Rightarrow$ c): Nếu mỗi dãy khớp ngắn với môđun P đứng cuối là chẻ thì nói riêng dãy sau đây cũng chẻ ra:

$$0 \to \operatorname{Ker}\pi \xrightarrow{i} F(P) \xrightarrow{\pi} P \to 0 \qquad (2)$$

trong đó $F(P)$ là môđun tự do sinh bởi P còn π là đồng cấu mở rộng lên toàn $F(P)$ của ánh xạ đồng nhất $1_P : P \to P$, xem như ánh xạ từ cơ sở $P \subset F(P)$ tới môđun P.

Tính chẻ của dãy khớp (2) cho ta đẳng cấu:

$$F(P) \cong \mathrm{Ker}\,\pi \oplus P,$$

tức là P đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của môđun tự do $F(P)$.

c) $\Rightarrow$ a): Hiển nhiên, theo định lý 1 và định lý 2.

Vậy ba phát biểu trong định lý 3 là tương đương với nhau. ■

Theo định lý 1, mỗi môđun tự do là môđun xạ ảnh, tuy nhiên có những môđun xạ ảnh mà không là môđun tự do. Chẳng hạn xét vành $R = \mathbb{Z}_{21}$ và các iđêan A, B của nó với:

$A = \{\overline{0}, \overline{7}, \overline{14}\}$,

$B = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$.

Hiển nhiên $A + B = \mathbb{Z}_{21}$ và $A \cap B = \overline{0}$, tức là $\mathbb{Z}_{21} = A \oplus B$. Vì vậy A và B đều là các hạng tử trực tiếp của $\mathbb{Z}_{21}$. Vì $\mathbb{Z}_{21}$ là một $\mathbb{Z}_{21}$-môđun tự do nên A, B là các $\mathbb{Z}_{21}$-môđun xạ ảnh. Tuy nhiên cả A và B đều không là $\mathbb{Z}_{21}$-môđun tự do, bởi chúng không thể là tổng trực tiếp của họ nào đó các bản sao của vành hệ tử $\mathbb{Z}_{21}$.

Trường hợp đặc biệt, khi R là vành chính: mỗi môđun con của R-môđun tự do là môđun tự do. Kết hợp với kết quả c) của định lý 3 ta được:

Định lý 4. *Khi R là vành chính, môđun P là xạ ảnh khi và chỉ khi P là môđun tự do.* ■

2.3. Môđun nội xạ

Tương tự khái niệm môđun xạ ảnh, khái niệm môđun nội xạ có thể được định nghĩa vắn tắt như sau:

Môđun J được gọi là môđun nội xạ nếu hàm tử $\mathrm{Hom}(-, J)$ là hàm tử khớp.

Như vậy, J là môđun nội xạ khi và chỉ khi hàm tử $\mathrm{Hom}(-, J)$

chuyển mỗi dãy khớp ngắn:

$$0 \to A \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

thành dãy khớp các nhóm aben:

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, J) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Hom}(B, J) \xrightarrow{\chi^*} \mathrm{Hom}(A, J) \to 0.$$

Để ý rằng vì hàm tử $\mathrm{Hom}(-, J)$ là khớp trái nên tính khớp của dãy sau cùng tương đương với đòi hỏi đồng cấu:

$$\chi^* : \mathrm{Hom}(B, J) \to \mathrm{Hom}(A, J)$$

là toàn cấu nếu χ là đơn cấu. Và tính chất toàn cấu của χ^* có nghĩa là: với mọi đồng cấu $f \in \mathrm{Hom}(A, J)$, tồn tại đồng cấu $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}(B, J)$ sao cho $\chi^*(\widetilde{f}) = \widetilde{f}\chi = f$.

Tổng hợp những phân tích trên cho một định nghĩa chi tiết và thông dụng hơn về môđun nội xạ như sau:

Định nghĩa. Môđun J là *môđun nội xạ* khi và chỉ khi với mỗi đơn cấu $\chi : A \to B$, mỗi đồng cấu $f : A \to J$, tồn tại đồng cấu $\widetilde{f} : B \to J$ sao cho $f = \widetilde{f}\chi$.

Bởi χ là đơn cấu nên ta có thể xem như $A \subset B$, và do vậy $\widetilde{f}$ có thể xem như là sự mở rộng của f trên B. Vì lý do đó có khi người ta xem môđun nội xạ J là môđun cho phép sự mở rộng của bất kỳ đồng cấu $f : A \to J$ thành đồng cấu $\widetilde{f} : B \to J$, trên mỗi môđun $B \supset A$.

Ví dụ đơn giản nhất về các môđun nội xạ có thể lấy là các không gian véctơ. Để có những ví dụ phức tạp hơn, trước hết chúng ta tìm cách giảm thiểu các điều kiện trong định nghĩa môđun nội xạ, bằng tiêu chuẩn Baer sau đây:

Định lý 5. *R-môđun J là nội xạ khi và chỉ khi với bất kỳ iđêan trái I của R và bất kỳ đồng cấu $f : I \to J$, luôn luôn tồn tại phần tử $q \in J$ sao cho với mọi $\lambda \in I$, ta có: $f(\lambda) = \lambda q$.*

Nói cách khác, mọi đồng cấu $f : I \to J$ đều có thể mở rộng được tới đồng cấu $\widetilde{f} : R \to J$.

Chứng minh. Trước hết, nếu J là môđun nội xạ thì với bất kỳ iđêan trái $I \subset R$ và bất kỳ đồng cấu $f : I \to J$, tồn tại đồng cấu $\widetilde{f}$ là mở rộng của f từ I lên toàn R. Lấy $q = \widetilde{f}(1)$, thì với mọi $\lambda \in I$ ta có: $f(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda.1) = \lambda\widetilde{f}(1) = \lambda q$.

Để chứng minh điều ngược lại, ta cần sử dụng tới một kết quả của lý thuyết tập hợp, được biết dưới tên gọi ”Bổ đề Zorn”, sau đây:

Bổ đề Zorn. *Nếu trong tập hợp sắp thứ tự mà mỗi tập con sắp toàn phần của nó đều có cận trên thì trong tập hợp đó có phần tử tối đại.*

Cho A, B là các môđun mà $A \subset B$ và $f : A \to J$ là đồng cấu. Để chứng tỏ tính nội xạ của J ta chỉ ra sự tồn tại mở rộng $\widetilde{f} : B \to J$.

Xét họ $\mathcal{D}$ các cặp (D, f_D) trong đó D là môđun con của B, $D \supset A$ và $f_D : D \to J$ là mở rộng của $f : A \to J$. Hiển nhiên họ $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Ta sắp thứ tự $\mathcal{D}$ theo quan hệ sau:

$$(D, f_D) \geq (C, f_C) \Leftrightarrow C \subset D \text{ và } f_D \text{ là mở rộng của } f_C.$$

Ta chỉ ra rằng họ $\mathcal{D}$ với quan hệ thứ tự trên là thỏa mãn điều kiện của bổ đề Zorn. Thật vậy, nếu ξ là bộ phận khác rỗng và được sắp toàn phần của $\mathcal{D}$, khi đó môđun con $E = \bigcup\limits_{D \in \xi} D$ và $f_E : E \to J$ mà trên mỗi $D \in \xi$ thì f_E trùng với f_D, lập thành cặp (E, f_E) là cận trên của ξ.

Theo bổ đề Zorn, trong $\mathcal{D}$ tồn tại phần tử tối đại (G, f_G) mà ta sẽ chứng tỏ rằng $G = B$ và do đó f_G là $\widetilde{f}$ cần tìm.

Ta giả sử ngược lại, khi đó $B \setminus G \neq \emptyset$ và do đó tồn tại $x_0 \in B \setminus G$. Lập môđun con

$$H = G + Rx_0 = \{a + rx_0 | a \in G, r \in R\} \subset B$$

ta có $H \supset G$ và $H \neq G$.

Xét tập
$$I = \{\lambda \in R | \lambda x_0 \in G\}$$
dễ thấy I là iđêan trái của R. Đồng thời ánh xạ $h : I \to J$, xác định theo công thức
$$h(\lambda) = f_G(\lambda x_0), \lambda \in I,$$
là đồng cấu. Do đó, theo điều kiện của tiêu chuẩn Baer ắt có phần tử $q \in J$ mà $h(\lambda) = \lambda q$.

Bây giờ ta xây dựng ánh xạ $f_H : H \to J$ như sau: với mỗi $x = a + rx_0 \in H$ thì:

$$f_H(x) = f_G(a) + rq.$$

Tính hợp lý của f_H được suy ra từ cách xác định phần tử q. Thật vậy, nếu phần tử $x \in H$ có hai cách biểu diễn

$$x = a_1 + r_1x_0 = a_2 + r_2x_0$$

thì
$$a_1 - a_2 = (r_2 - r_1)x_0 \in G.$$
Do đó:

$$f_G(a_1 - a_2) = f_G[(r_2 - r_1)x_0] = h(r_2 - r_1) = (r_2 - r_1)q.$$

Vậy
$$f_G(a_1) + r_1q = f_G(a_2) + r_2q,$$
tức $f_H(x)$ là duy nhất không phụ thuộc vào cách biểu diễn của $x \in H = G + Rx_0$.

Dễ dàng kiểm tra f_H là đồng cấu. Và như vậy ta có cặp $(H, f_H) \in \mathcal{D}$, đồng thời (H, f_H) thực sự lớn hơn cặp (G, f_G). Điều đó mâu thuẫn với tính tối đại của cặp (G, f_G) trong $\mathcal{D}$ và do vậy buộc phải có $G = B$, tức $f_D = \widetilde{f}$ cần tìm. ■

2.4. Môđun nội xạ và môđun chia được

Áp dụng tiêu chuẩn Baer ta sẽ chỉ ra một lớp các môđun nội xạ đặc biệt, có tên gọi là các môđun chia được như sau:

Cho R là miền nguyên, môđun X trên R gọi là môđun chia được nếu với mọi $x \in X$ và mọi $\lambda \in R \setminus \{0\}$ luôn luôn tồn tại phần tử $y \in X$ sao cho $\lambda y = x$.

Định lý 6. *Nếu R là vành chính thì mọi R-môđun chia được X đều nội xạ.*

Chứng minh. Cho X là môđun chia được, $I \triangleleft R$ và $f : I \to X$ là đồng cấu. Để chỉ ra X là nội xạ, ta cần chứng tỏ có phần tử $q \in X$ mà với mỗi $\lambda \in I$ thì $f(\lambda) = \lambda q$.

Bởi R là vành chính, tức mỗi iđêan của R là iđêan chính, nói riêng tồn tại $a \in R$ mà $I = aR$. Khi đó chọn $q \in X$ là phần tử mà $f(a) = aq$, do X là môđun chia được, thì với mỗi $\lambda \in I, \lambda = ra$ ta có:

$$f(\lambda) = f(ra) = rf(a) = r(aq) = \lambda q.$$

Vậy theo tiêu chuẩn Baer, X là môđun nội xạ. ■

Trường hợp đặc biệt, vì vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là vành chính nên các $\mathbb{Z}$-môđun hay các nhóm aben chia được đều là các $\mathbb{Z}$-môđun nội xạ. Nói riêng, nhóm cộng các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ và các nhóm thương của $\mathbb{Q}$ đều là các $\mathbb{Z}$-môđun nội xạ.

Tương quan giữa các môđun nội xạ và các môđun chia được còn được thể hiện trong định lý sau.

Định lý 7. *Nếu R là miền nguyên thì mọi R-môđun nội xạ X đều chia được.*

Chứng minh. Ta cần chỉ ra với mọi $x \in X$, mọi $\lambda \in R \setminus \{0\}$, tồn tại $y \in X$ mà $x = \lambda y$. Xét iđêan $I = \lambda R$, sinh bởi phần tử λ. Bởi R là miền nguyên nên I là môđun tự do với cơ sở chính là tập một phần tử $\{\lambda\}$. Ánh xạ $\varphi : \{\lambda\} \to X$ mà $\varphi(\lambda) = x$ có thể mở rộng tới đồng cấu $\varphi : I \to X$. Vì X nội xạ nên theo tiêu chuẩn Baer, tồn tại phần tử $y \in X$ sao cho với mọi $r \in I$ thì $\varphi(r) = ry$. Nói riêng, khi $r = \lambda$:

$$x = \varphi(\lambda) = \lambda y.$$

Vậy X là môđun chia được. ∎

2.5. Tính chất của môđun nội xạ

Định lý 8. *Tích trực tiếp họ môđun* $J = \prod_{k \in K} J_k$ *là nội xạ khi và chỉ khi mỗi môđun thành phần* J_k *là nội xạ.*

Chứng minh. Trước hết, nếu $J = \prod J_k$ là môđun nội xạ, ta cần chứng tỏ mọi thành phần J_t đều là nội xạ, theo tiêu chuẩn Baer.

Giả sử $f : I \to J_t$ là đồng cấu từ iđêan trái $I \lhd R$ vào J_t. Nối kết f với phép nhúng $j_t : J_t \to \prod J_k$ ta được đồng cấu:

$$j_t f : I \to J.$$

Bởi J là môđun nội xạ nên tồn tại phần tử $x \in J$ mà với mọi $\lambda \in I : j_t f(\lambda) = \lambda x$. Khi đó với phần tử $x_t = p_t(x) \in J_t$, ta có:

$$f(\lambda) = p_t[j_t f](\lambda) = p_t(\lambda x) = \lambda p_t(x) = \lambda x_t,$$

với mỗi $\lambda \in I$.

Vậy J_t thỏa mãn tiêu chuẩn Baer, tức J_t là môđun nội xạ.

Bây giờ nếu mọi môđun thành phần J_k là nội xạ và $f : I \to J = \prod J_k$ là đồng cấu từ iđêan trái $I \lhd R$ vào J. Khi đó với mọi $k \in K$, đồng cấu $f_k = p_k f : I \to J_k$, do J_k là môđun nội xạ nên tồn tại phần tử $x_k \in J_k$ sao cho với mỗi $\lambda \in I : f_k(\lambda) = \lambda x_k$. Chọn phần tử $x = (x_k)_{k \in K}$ của $J = \prod J_k$, ta có:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (p_k f(\lambda)) = (f_k(\lambda)) = (\lambda x_k) \\ &= \lambda(x_k) = \lambda x, \forall \lambda \in I. \end{aligned}$$

Vậy J thỏa mãn tiêu chuẩn Baer, tức J là môđun nội xạ. ■

Định lý sau đây thường được biết dưới tên gọi "tính đủ nhiều của các môđun nội xạ" mà do tính phức tạp của chứng minh, ta tạm thời thừa nhận. Độc giả có thể tham khảo chứng minh trong các tài liệu chuyên sâu hơn.

Định lý 9. *Mỗi môđun X có thể nhúng vào một môđun nội xạ $N(X)$ nào đó, xem như là môđun con của $N(X)$.*

Kết quả sau đây có thể xem là tương tự với kết quả trong định lý 3, phát biểu về các môđun xạ ảnh.

Định lý 10. *Đối với bất kỳ môđun J, ba phát biểu sau là tương đương:*

a) *J là môđun nội xạ.*

b) *Mọi dãy khớp $0 \to J \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$ là chẻ ra.*

c) *J đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của môđun nội xạ nào đó.*

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b): Cho J là môđun nội xạ và dãy

$$0 \to J \xrightarrow{\chi} B \xrightarrow{\sigma} C \to 0$$

là khớp. Khi đó, đồng cấu đồng nhất $1_J : J \to J$ có thể mở rộng tới đồng cấu $\varphi : B \to J$, tức $\varphi\chi = 1_J$. Vậy đồng cấu χ có nghịch đảo trái, tức dãy là chẻ ra.

b) $\Rightarrow$ c): Theo định lý 9, môđun J có thể nhúng vào môđun nội xạ $N(J)$ nào đó. Khi đó, ánh xạ nhúng $j : J \to N(J)$ sinh ra dãy khớp ngắn

$$0 \to J \xrightarrow{j} N(J) \xrightarrow{p} N(J)/J \to 0$$

mà theo b), dãy này chẻ ra. Và ta có đẳng cấu $N(J) \cong J \oplus \mathrm{Im}p$, tức J đẳng cấu với hạng tử trực tiếp của môđun nội xạ $N(J)$.

c) $\Rightarrow$ a): Nếu J là hạng tử trực tiếp của môđun nội xạ nào đó, thì theo định lý 8 hiển nhiên J là môđun nội xạ. ■

§3. Các hàm tử tenxơ

3.1. Ánh xạ song tuyến tính

Trước khi định nghĩa ánh xạ song tuyến tính, ta cần xác định khái niệm về các R-môđun phải.

Cho R là vành có đơn vị là 1. Một nhóm cộng giao hoán X sẽ được gọi là R-môđun phải nếu trên X đã xác định được một *tác động phải* từ vành R, tức là có hàm $\mu' : X \times R \to X$ mà kết quả của μ' trên cặp $(x, r) \in X \times R$ ta cũng gọi là tích của phần tử x và hệ tử r và viết: $\mu'(x, r) = xr$.

Ngoài ra, bốn tiên đề sau cần được thỏa:

M1': $x1 = x, \forall x \in X$,

M2': $x(rs) = (xr)s, \forall r, s \in R, \forall x \in X$,

M3': $x(r + s) = xr + xs, \forall r, s \in R, \forall x \in X$,

M4': $(x + y)r = xr + yr, \forall r \in R, \forall x, y \in X$.

Tác động phải từ vành R vào X cũng được gọi là *phép nhân ngoài*. Vành R cũng được gọi là *vành các hệ tử*, hay *vành vô hướng*.

Có thể thấy rằng, khái niệm R-môđun phải hoàn toàn có thể nhận được từ khái niệm R-môđun trái chỉ bởi một thay đổi đơn giản chuyển phép nhân ngoài từ bên trái các phần tử $x \in X$ sang bên phải. Và do đó tất cả các kết quả mà ta đã trình bày về các R-môđun trái trước đây đều có thể chuyển sang một cách tương tự cho các R-môđun phải với lưu ý: trong mỗi biểu thức, trước đây các hệ tử luôn đứng bên trái thì giờ đây sẽ được chuyển sang đứng về bên phải.

Các môđun phải trên vành R, hiển nhiên cũng lập thành một phạm trù, ta gọi nó là phạm trù Mod_R để phân biệt với phạm trù ${}_R\mathrm{Mod}$ - các R-môđun trái. Và nếu $X \in \mathrm{Mod}_R$, đôi khi ta cũng viết là X_R.

Cho R là vành có đơn vị, X_R và ${}_RY$ lần lượt là các R-môđun phải và R-môđun trái, G là nhóm aben. Ánh xạ $\varphi : X \times Y \to G$ được gọi là ánh xạ *song tuyến tính* nếu thỏa:

a) φ là *song cộng tính*, tức là:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, y) &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y), \\ \varphi(x, y_1 + y_2) &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2), \end{aligned}$$

với mọi $x, x_1, x_2 \in X$ và mọi $y, y_1, y_2 \in Y$.

b) φ là kết hợp trong đối với phép nhân ngoài trên X và Y, tức là:

$$\varphi(xr, y) = \varphi(x, ry)$$

với mọi $r \in R$ và mọi $x \in X, y \in Y$.

Có thể thấy các phép nhân ngoài trên các R-môđun chính là các ví dụ về ánh xạ song tuyến tính. Cụ thể hơn:

• Cho ${}_RX$ là môđun trái, còn R_R xem như môđun phải. Khi đó, phép nhân ngoài trái:

$$\mu : R \times X \to X \text{ mà } \mu(r, x) = rx,$$

hiển nhiên thỏa tất cả các đòi hỏi về ánh xạ song tuyến tính nhờ các tiên đề M2, M3, M4.

• Cho X_R là môđun phải, còn ${}_RR$ xem như môđun trái. Khi đó phép nhân ngoài phải:

$$\mu' : X \times R \to X \text{ mà } \mu'(x, r) = xr,$$

cũng đương nhiên thỏa tất cả các đòi hỏi về ánh xạ song tuyến tính.

3.2. Tích tenxơ hai môđun

Cho X_R và ${}_RY$ là các môđun phải và môđun trái trên cùng vành hệ tử R. *Tích tenxơ* của các môđun X và Y là các nhóm aben, mà ta sẽ ký hiệu là $X \otimes Y$, sao cho có ánh xạ song tuyến tính $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$ có tính chất phổ dụng đối với bất kỳ ánh xạ song tuyến tính $\varphi : X \times Y \to G$, tức là với mỗi ánh xạ song tuyến tính φ đó, tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : X \otimes Y \to G$ thỏa mãn:

$$\varphi = f\tau.$$

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"] & X \otimes Y \arrow[dl, "\exists! f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Theo ngôn ngữ biểu đồ: tích tenxơ của hai môđun X, Y được biểu thị cùng với ánh xạ song tuyến tính phổ dụng τ, thuộc vào bất cứ biểu đồ ba đỉnh nào, trong đó mũi tên $\varphi : X \times Y \to G$ là ánh xạ song tuyến tính, luôn luôn có thể bổ sung mũi tên đồng cấu duy nhất $f : X \otimes Y \to G$ để biểu đồ giao hoán.

Ánh xạ song tuyến tính τ nói trên còn được gọi là *ánh xạ tenxơ*. Thuật ngữ phổ dụng được dùng cho ánh xạ tenxơ có nguồn gốc từ sự kiện tích tenxơ hai môđun X, Y có thể xem như là vật đầu của phạm trù $\mathcal{K}$ sau:

• Vật của $\mathcal{K}$ là các ánh xạ song tuyến tính $\varphi : X \times Y \to G$ với G là nhóm aben.

• Cấu xạ từ vật $\varphi : X \times Y \to G$ tới vật $\psi : X \times Y \to G'$ là đồng cấu nhóm $f : G \to G'$ sao cho $\psi = f\varphi$.

• Luật lấy tích các cấu xạ là luật lấy tích các đồng cấu nhóm.

Hiển nhiên rằng, theo định nghĩa tích tenxơ hai môđun X, Y thì ánh xạ song tuyến tính $\tau : X \times Y \to X \otimes Y$, tức ánh xạ tenxơ, là vật đầu của phạm trù này.

Các ví dụ về tích tenxơ hai môđun

a) Cho X là R-môđun trái, còn R xem như môđun phải. Khi đó, nhóm cộng $(X, +)$ có thể xem là $R \otimes X$. Thật vậy, ánh xạ tenxơ $\tau : R \times X \to X$ chính là phép nhân ngoài, tức $\tau(r, x) = rx$ với mọi cặp $(r, x) \in R \times X$. Ánh xạ này có tính chất phổ dụng đối với bất kỳ ánh xạ song tuyến tính $\varphi : R \times X \to G$, điều này được suy ra từ sự tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : (X, +) \to G$ mà $\varphi = f\tau$, với công thức xác định f là:

$$f(x) = \varphi(1, x), \forall x \in X.$$

b) Cho X là R-môđun phải, còn R xem như môđun trái. Khi đó, nhóm cộng giao hoán $(X, +)$ cũng có thể xem như $X \otimes R$ với ánh xạ tenxơ $\tau : X \times R \to X$ cũng chính là phép nhân ngoài, tức $\tau(x, r) = xr, \forall (x, r) \in X \times R$. Bởi với mọi ánh xạ song tuyến tính $\varphi : X \times R \to G$, tồn tại và duy nhất đồng cấu $f : X \to G$ thỏa điều kiện $\varphi = f\tau$, với công thức xác định f là:

$$f(x) = \varphi(x, 1), \forall x \in X.$$

3.3. Sự tồn tại tích tenxơ

Định lý 1. *Cho X_R và $_RY$ là các môđun phải và môđun trái trên cùng vành hệ tử R. Khi đó tích tenxơ $X \otimes Y$ là tồn tại và duy nhất xê xích một đẳng cấu.*

Chứng minh. Bởi tích tenxơ $X \otimes Y$ nếu tồn tại, được xem như vật đầu của phạm trù $\mathcal{K}$ nói trên, mà các vật đầu, như đã biết là đẳng xạ với nhau. Mà các đẳng xạ trong phạm trù $\mathcal{A}$b chính là các đẳng cấu. Vì vậy, tích tenxơ $X \otimes Y$ nếu tồn tại là duy nhất xê xích một đẳng cấu.

Vấn đề còn lại, ta cần chứng minh sự tồn tại của nhóm $X \otimes Y$.

Xét nhóm aben tự do $F(X \times Y)$ sinh bởi tập tích Descartes $X \times Y$ và ánh xạ nhúng phổ dụng $j : X \times Y \to F(X \times Y)$. Gọi $\mathcal{D}$ là nhóm con của $F(X \times Y)$ sinh bởi tập tất cả các phần tử có dạng sau:

$$j(x_1 + x_2, y) - j(x_1, y) - j(x_2, y),$$

$$j(x, y_1 + y_2) - j(x, y_1) - j(x, y_2),$$

$$j(xr, y) - j(x, ry),$$

với mọi $x, x_1, x_2 \in X$, mọi $y, y_1, y_2 \in Y$ và mọi $r \in R$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng, nhóm thương $F(X \times Y)/\mathcal{D}$ chính là $X \otimes Y$, với ánh xạ tenxơ $\tau : X \times Y \to F(X \times Y)/\mathcal{D}$ được cho bởi hệ thức: $\tau = pj$, trong đó p là phép chiếu tự nhiên nhóm $F(X \times Y)$ lên nhóm thương $F(X \times Y)/\mathcal{D}$.

Hiển nhiên $\tau = pj$ là ánh xạ song tuyến tính. Ta kiểm tra, chẳng hạn, τ thỏa hệ thức cộng tính:

$$\tau(x_1 + x_2, y) = \tau(x_1, y) + \tau(x_2, y).$$

Thật vậy,

$$\tau(x_1 + x_2, y) - \tau(x_1, y) - \tau(x_2, y)$$

$$= pj(x_1 + x_2, y) - pj(x_1, y) - pj(x_2, y)$$

$$= p[j(x_1 + x_2, y) - j(x_1, y) - j(x_2, y)]$$

$$= \mathcal{D} = 0.$$

Vậy τ cộng tính theo biến thứ nhất. Các hệ thức cộng tính theo biến thứ hai, hệ thức kết hợp trong của các phép nhân ngoài của ánh xạ τ được kiểm tra tương tự.

Để chứng minh tính chất phổ dụng của ánh xạ τ, ta xét biểu đồ sau, trong đó $\varphi : X \times Y \to G$ là ánh xạ song tuyến tính:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "i"] & F(X \times Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & F(X \times Y)/\mathcal{D} \arrow[r] \arrow[dl, "f"'] & 0 \\
X \times Y \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "\varphi"] & G & &
\end{tikzcd}$$

Do tính chất phổ dụng của ánh xạ nhúng $j : X \times Y \to F(X \times Y)$ đối với ánh xạ φ, tồn tại và duy nhất đồng cấu $h : F(X \times Y) \to G$ thỏa điều kiện $hj = \varphi$.

Sử dụng hệ thức sau cùng, dễ dàng kiểm tra được rằng $h(\mathcal{D}) = 0$. Thật vậy, với bất kỳ phần tử sinh nào của $\mathcal{D}$, qua h cũng biến vào 0, chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
&h[j(x, y_1 + y_2) - j(x, y_1) - j(x, y_2)] \\
&= hj(x, y_1 + y_2) - hj(x, y_1) - hj(x, y_2) \\
&= \varphi(x, y_1 + y_2) - \varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2) = 0,
\end{aligned}$$

nhờ φ là ánh xạ song tuyến tính.

Chú ý đến bộ phận của biểu đồ trên gồm dòng trên cùng và nhóm G ta có: dòng trên là khớp và $hi = 0$ do $h(\mathcal{D}) = 0$.

Theo bài tập 17 chương I, tồn tại và duy nhất đồng cấu

$$f : F(X \times Y)/\mathcal{D} \to G$$

thỏa điều kiện $fp = h$. Khi nhân j vào hai vế của đẳng thức này ta thu được:

$$f\tau = f(pj) = hj = \varphi.$$

Đồng cấu f là duy nhất thỏa $f\tau = \varphi$, bởi nếu có đồng cấu $g : F(X \times Y)/\mathcal{D} \to G$ cũng thỏa $g\tau = \varphi$ thì ta có $f\tau = g\tau$ tức là $fpj = gpj \Rightarrow fp = gp$ do tính chất phổ dụng của ánh xạ nhúng j.

Do tính chất duy nhất của đồng cấu f thỏa điều kiện $fp = h$ mà từ đẳng thức $gp = fp = h$ ta suy ra $g = f$. ■

Chú ý rằng cơ sở của nhóm aben tự do $F(X \times Y)$ là tập $j(X \times Y)$, tất cả các phần tử dạng $j(x, y)$ với $(x, y) \in X \times Y$. Do phép chiếu p là toàn cấu nên ảnh qua p của hệ sinh $j(X \times Y)$ là hệ sinh của nhóm thương $X \otimes Y = F(X \times Y)/\mathcal{D}$. Vậy hệ sinh của $X \otimes Y$ là tập tất cả các phần tử có dạng:

$$\tau(x, y) = pj(x, y), \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Để tiện lợi, ta ký hiệu các phần tử sinh $\tau(x, y)$ là $x \otimes y$. Từ tính chất song tuyến tính của τ mà các phần tử sinh $x \otimes y$ được liên hệ với nhau theo các đẳng thức:

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$

$$xr \otimes y = x \otimes ry.$$

Nói riêng ta có

$$x \otimes 0 = 0 = 0 \otimes x,$$

$$(-x) \otimes y = -(x \otimes y) = x \otimes (-y).$$

Hơn nữa, khi m là số nguyên và mx là bội nguyên m của phần tử x trong nhóm $(X, +)$ thì từ tính chất song cộng tính của ánh xạ tenxơ ta thu được kết quả:

$$mx \otimes y = m(x \otimes y) = x \otimes my.$$

Kết quả này giúp ta thu gọn hơn công thức tổng quát mô tả phần tử $z \in X \otimes Y$:

$$z = \sum m_i(x_i \otimes y_i) = \sum m_i x_i \otimes y_i = \sum x_i' \otimes y_i$$

hay

$$z = \sum m_i(x_i \otimes y_i) = \sum x_i \otimes m_i y_i = \sum x_i \otimes y_i'.$$

Như vậy, các công thức trên cho ta thấy: nếu $z \in X \otimes Y$ thì z là tổng hữu hạn nào đó các phần tử sinh; đồng thời mỗi phần tử z có thể biểu thị tuyến tính qua hệ sinh theo nhiều cách khác nhau. Bởi vậy, hệ sinh $\tau(X \times Y)$ chỉ là hệ sinh mà không là cơ sở.

3.4. Liên hệ giữa tích tenxơ và tổng trực tiếp

Định lý 2. *Cho họ $\{X_t\}_{t\in I}$ là họ các R-môđun phải và $\{Y_k\}_{k\in K}$ là họ các R-môđun trái. Khi đó ta có:*

$$\left(\bigoplus_{t\in I} X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_{k\in K} Y_k\right) \cong \bigoplus_{(t,k)\in I\times K} (X_t \otimes Y_k).$$

Chứng minh. Để chứng minh hệ thức đẳng cấu trên, ta sẽ xây dựng các đồng cấu f từ nhóm bên trái sang nhóm bên phải, đồng cấu g theo chiều ngược lại sao cho các tích fg và gf là đồng cấu đồng nhất.

Trong phần tổng trực tiếp họ các môđun, ta biết rằng các phần tử dạng $j_t(x_t)$, theo hết mọi $x_t \in X_t$, mọi phép nhúng j_t lập thành một hệ sinh của $\bigoplus_{t\in I} X_t$. Và mỗi phần tử $x \in \oplus X_t$ có thể viết dưới dạng:

$$x = \sum_{t\in I} j_t(x_t).$$

Tương tự, các phần tử dạng $j_k(y_k)$, theo hết mọi $y_k \in Y_k$, mọi phép nhúng j_k lập thành hệ sinh của $\bigoplus\limits_{k\in K} Y_k$. Và mỗi phần tử của tổng trực tiếp họ $\{Y_k\}$ được viết

$$y = \sum_{k\in K} j_k(y_k).$$

Ta đã biết rằng hệ sinh của $X_t \otimes Y_k$ gồm các phần tử dạng $x_t \otimes y_k$, và do vậy tập tất cả các phần tử dạng $j_{tk}(x_t \otimes y_k)$, theo hết mọi cặp chỉ số $(t,k) \in I \times K$, lập thành hệ sinh của $\bigoplus\limits_{(t,k)\in I\times K} (X_t \otimes Y_k)$. Và hiển nhiên rằng mỗi phần tử của tổng trực tiếp này có dạng

$$z = \sum_{(t,k)\in I\times K} j_{tk}(x_t \otimes y_k).$$

Bây giờ để xây dựng nên đồng cấu f, ta xây dựng ánh xạ song tuyến tính

$$\varphi : \left(\bigoplus_{t\in I} X_t\right) \times \left(\bigoplus_{k\in K} Y_k\right) \to \bigoplus_{(t,k)\in I\times K} (X_t \otimes Y_k)$$

theo công thức sau

$$\varphi\left(\sum_I j_t(x_t), \sum_K j_k(y_k)\right) = \sum_{I\times K} j_{tk}(x_t \otimes y_k).$$

Độc giả có thể tự tính toán lấy để thấy rằng φ thỏa mãn tất cả các đòi hỏi của một ánh xạ song tuyến tính. Và do vậy, khi sử dụng tính chất phổ dụng của ánh xạ tenxơ

$$\tau : \left(\bigoplus_I X_t\right) \times \left(\bigoplus_K Y_k\right) \to \left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right)$$

ta thu được đồng cấu

$$f : \left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right) \to \bigoplus_{I\times K} (X_t \otimes Y_k)$$

thỏa điều kiện $f\tau = \varphi$.

Giá trị của f tại phần tử sinh $j_t(x_t) \otimes j_k(y_k)$ là

$$\begin{aligned} f(j_t(x_t) \otimes j_k(y_k)) &= \varphi(j_t(x_t), j_k(y_k)) \\ &= j_{tk}(x_t \otimes y_k). \end{aligned} \tag{1}$$

Để xây dựng đồng cấu ngược g, ta sẽ xây dựng họ các ánh xạ song tuyến tính

$$\psi_{tk} : X_t \times Y_k \to \left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right)$$

mà $\psi_{tk}(x_t, y_k) = j_t(x_t) \otimes j_k(y_k)$, theo hết mọi cặp chỉ số $(t, k) \in I \times K$.

Việc kiểm tra tính chất song tuyến tính của mỗi ánh xạ ψ_{tk} đơn thuần chỉ là tính toán nên được bỏ qua. Khi sử dụng tính chất phổ dụng của các ánh xạ tenxơ

$$\tau_{tk} : X_t \times Y_k \to X_t \otimes Y_k$$

đối với các ánh xạ song tuyến tính ψ_{tk} ta được họ các đồng cấu

$$g_{tk} : X_t \otimes Y_k \to \left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right)$$

thỏa điều kiện $g_{tk}\tau_{tk} = \psi_{tk}$.

Nói riêng

$$g_{tk}(x_t \otimes y_k) = j_t(x_t) \otimes j_k(y_k) \tag{2}$$

Sử dụng tính chất phổ dụng của họ các phép nhúng

$$\{j_{tk} : X_t \otimes Y_k \to \bigoplus_{I\times K} X_t \otimes Y_k\}_{I\times K}$$

đối với họ các đồng cấu $\{g_{tk}\}$, tồn tại và duy nhất đồng cấu

$$g : \bigoplus_{I\times K}(X_t \otimes Y_k) \to \left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right)$$

thỏa điều kiện $gj_{tk} = g_{tk}, \forall (t, k) \in I \times K$.

Để kết thúc chứng minh ta còn phải kiểm tra các tích fg và gf là các đồng cấu đồng nhất.

Vì các phần tử $j_t(x_t)$ là hệ sinh của $\oplus X_t$ và các phần tử $j_k(y_k)$ là hệ sinh của $\oplus Y_k$ nên ta có thể chọn một hệ sinh của tích tenxơ $\left(\bigoplus_I X_t\right) \otimes \left(\bigoplus_K Y_k\right)$ là các phần tử dạng $j_t(x_t) \otimes j_k(y_k)$ theo hết mọi cặp chỉ số $(t, k) \in I \times K$ và mọi $x_t \in X_t$, mọi $y_k \in Y_k$. Dễ dàng kiểm tra rằng đồng cấu gf thực hiện sự đồng nhất trên hệ sinh này. Thật vậy, do (1) ta có:

$$f[j_t(x_t) \otimes j_k(y_k)] = j_{tk}(x_t \otimes y_k)$$

và do (2)

$$g[j_{tk}(x_t \otimes y_k)] = g_{tk}(x_t \otimes y_k) = j_t(x_t) \otimes j_k(y_k).$$

Hiển nhiên, khi đồng cấu gf đồng nhất trên hệ sinh thì nó là đồng cấu đồng nhất.

Độc giả có thể tiến hành một cách tương tự để kiểm tra rằng fg thực hiện sự đồng nhất trên hệ sinh gồm các phần tử dạng $j_{tk}(x_t \otimes y_k)$ của $\bigoplus\limits_{I\times K} X_t \otimes Y_k$, và do vậy là đồng cấu đồng nhất trên nhóm này.

Vậy các đồng cấu g, f là nghịch đảo lẫn nhau do đó chúng là các đẳng cấu. Từ đó ta có được hệ thức đẳng cấu trong định lý 2. ■

3.5. Tích tenxơ hai đồng cấu

Cho $f : X_R \to X'_R$ là đồng cấu R-môđun phải và $g :_R Y \to_R Y'$ là đồng cấu các R-môđun trái. Xét biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & X' \times Y' \arrow[d, "\tau'"] \\
X \otimes Y \arrow[r, "h"] & X' \otimes Y'
\end{tikzcd}$$

trong đó τ, τ' là các ánh xạ tenxơ, ánh xạ $\varphi : X \times Y \to X' \times Y'$ được cho bởi công thức:

$$\varphi(x, y) = (f(x), g(y)), \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Dễ thấy rằng $\tau'\varphi$ là ánh xạ song tuyến tính. Từ đó sử dụng tính chất phổ dụng của ánh xạ tenxơ τ, tồn tại và duy nhất đồng cấu $h : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ thỏa điều kiện: $h\tau = \tau'\varphi$.

Đồng cấu h đó được gọi là *tích tenxơ của hai đồng cấu* f và g, được ký hiệu là:

$$h = f \otimes g.$$

Dưới đây, ta sẽ cho một mô tả cụ thể $f \otimes g$ trên hệ sinh $X \otimes Y$. Với mỗi phần tử sinh $x \otimes y$,

$$\begin{aligned} f \otimes g(x \otimes y) &= h\tau(x, y) = \tau'\varphi(x, y) \\ &= \tau'(f(x), g(y)) = f(x) \otimes g(y). \end{aligned}$$

Sử dụng công thức này, ta dễ dàng chứng minh được một số tính chất sau đây của tích tenxơ hai đồng cấu.

• **Tính chất 1.** Nếu $1_X : X_R \to X_R$ và $1_Y :_R Y \to_R Y$ là các đồng cấu đồng nhất, thì $1_X \otimes 1_Y : X \otimes Y \to X \otimes Y$ là đồng cấu đồng nhất. Nói vắn tắt: tích tenxơ của hai đồng cấu đồng nhất là đồng cấu đồng nhất.

Thật vậy, với mọi phần tử sinh $x \otimes y \in X \otimes Y$ ta có:

$$1_X \otimes 1_Y(x \otimes y) = 1_X(x) \otimes 1_Y(y) = x \otimes y.$$

Vậy $1_X \otimes 1_Y$ thực hiện sự đồng nhất trên hệ sinh của $X \otimes Y$, tức nó là đồng cấu đồng nhất.

• **Tính chất 2.** Nếu $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} C$ là các đồng cấu R-môđun phải và $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{g'} Z$ là các đồng cấu R-môđun trái thì:

$$(f'f) \otimes (g'g) = (f' \otimes g')(f \otimes g).$$

Thật vậy, với mọi phần tử sinh $a \otimes x \in A \otimes X$, ta có:

$$\begin{aligned} (f'f \otimes g'g)(a \otimes x) &= f'f(a) \otimes g'g(x) \\ &= (f' \otimes g')(f(a) \otimes g(x)) \\ &= (f' \otimes g')(f \otimes g)(a \otimes x). \end{aligned}$$

Vậy $f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ trên hệ sinh của $A \otimes X$, tức chúng bằng nhau.

Chúng tôi dành lại cho bạn đọc, bằng cách tính toán tương tự, hãy kiểm tra tiếp tính chất sau.

• **Tính chất 3.** Cho $f, f_1, f_2 : X \to X'$ là các đồng cấu R-môđun phải và $g, g_1, g_2 : Y \to Y'$ là các đồng cấu R-môđun trái. Khi đó ta có:

$$(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g,$$

$$f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2.$$

Nói cách khác, phép lấy tích tenxơ hai đồng cấu có tính chất phân phối cả hai phía đối với phép cộng các đồng cấu.

Định lý 3. *Cho $f : X \to X'$ và $g : Y \to Y'$ là các toàn cấu R-môđun phải và R-môđun trái. Khi đó, tích tenxơ $f \otimes g : X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ là toàn cấu nhóm, đồng thời hạt nhân $\operatorname{Ker}(f \otimes g)$ là nhóm con của $X \otimes Y$ được sinh bởi các phần tử $x \otimes y$ trong đó hoặc $x \in \operatorname{Ker} f$, hoặc $y \in \operatorname{Ker} g$.*

Chú ý rằng cả hai kết luận trong định lý 3 nói chung sẽ không đúng nếu cả f và g không phải là toàn cấu.

Chứng minh. Trước hết nếu $x' \otimes y'$ là phần tử sinh của $X' \otimes Y'$ thì do f, g là các toàn cấu nên tồn tại $x \in f^{-1}(x'), y \in g^{-1}(y')$. Và $f \otimes g(x \otimes y) = f(x) \otimes g(x) = x' \otimes y'$.

Vậy $f \otimes g$ thực hiện sự toàn ánh lên hệ sinh của miền đích $X' \otimes Y'$, tức $f \otimes g$ là một toàn cấu.

Để tính hạt nhân $\operatorname{Ker} f \otimes g$, ta đặt:

$$K =< \{x \otimes y | x \in \operatorname{Ker} f \text{ hoặc } y \in \operatorname{Ker} g\} >$$

tức K là nhóm con sinh bởi các phần tử $x \otimes y$, trong đó hoặc $x \in \operatorname{Ker} f$, hoặc $y \in \operatorname{Ker} g$.

Hiển nhiên $(f \otimes g)(x \otimes y) = 0$ trên mỗi phần tử sinh $x \otimes y \in K$ nên $K \subset \operatorname{Ker} f \otimes g$. Bao hàm thức này cảm sinh một cách tự nhiên toàn cấu các nhóm thương

$$\pi : X \otimes Y/K \to X \otimes Y/\operatorname{Ker} f \otimes g$$

theo công thức

$$\pi(z + K) = z + \operatorname{Ker} f \otimes g$$

với mỗi $z + K \in X \otimes Y/K$.

Để chứng minh $K = \operatorname{Ker} f \otimes g$ ta cần chứng tỏ rằng π là đẳng cấu.

Xét dãy đồng cấu

$$X \otimes Y/K \xrightarrow{\pi} X \otimes Y/\operatorname{Ker} f \otimes g \xrightarrow{h} X' \otimes Y'$$

trong đó đẳng cấu $h = f \widetilde{\otimes} g$ được sinh ra từ toàn cấu $f \otimes g$ do định lý Noether. Công thức của tích $h\pi$ cho trên mỗi phần tử sinh $x \otimes y + K$ của $X \otimes Y/K$ là

$$h\pi(x \otimes y + K) = f(x) \otimes g(y).$$

Ta sẽ chứng minh π là đẳng cấu bằng cách xây dựng một đồng cấu ngược $k : X' \otimes Y' \to X \otimes Y/K$.

Để có được k ta xây dựng ánh xạ song tuyến tính $\varphi : X' \times Y' \to X \otimes Y/K$ bằng cách sau.

Với mỗi cặp $(x', y') \in X' \times Y'$, do f, g là toàn cấu, ắt tồn tại $x \in f^{-1}(x') \subset X$ và $y \in g^{-1}(y') \subset Y$. Ta đặt

$$\varphi(x', y') = x \otimes y + K.$$

Ánh xạ φ hiển nhiên là được xác định hợp lý, không phụ thuộc vào cách chọn các phần tử đại diện của $f^{-1}(x')$ và $g^{-1}(y')$. Thật vậy, nếu ta chọn các phần tử khác $x + x_f \in f^{-1}(x')$ và $y + y_g \in g^{-1}(y')$, với $x_f \in \operatorname{Ker} f$ và $y_g \in \operatorname{Ker} g$ thì

$$\begin{aligned}(x + x_f) \otimes (y + y_g) + K &= x \otimes y + [x \otimes y_g + x_f \otimes (y + y_g) + K] \\ &= x \otimes y + K.\end{aligned}$$

Tính chất song tuyến tính của φ sẽ được kiểm tra bằng cách chọn lựa một cách có dụng ý các phần tử đại diện của các nghịch ảnh. Chẳng hạn để chứng minh đẳng thức

$$\varphi(x'_1 + x'_2, y') = \varphi(x'_1, y') + \varphi(x'_2, y')$$

ta chọn $x_1 \in f^{-1}(x'_1), x_2 \in f^{-1}(x'_2), y \in g^{-1}(y')$ và khi đó $x_1 + x_2 \in f^{-1}(x'_1 + x'_2)$ và ta được

$$\begin{aligned}\varphi(x'_1 + x'_2, y') &= (x_1 + x_2) \otimes y + K \\ &= (x_1 \otimes y + K) + (x_2 \otimes y + K) \\ &= \varphi(x'_1, y') + \varphi(x'_2, y').\end{aligned}$$

Các đẳng thức còn lại được kiểm tra tương tự. Sử dụng tính chất phổ dụng của ánh xạ tenxơ $\tau : X' \times Y' \to X' \otimes Y'$ đối với ánh xạ song tuyến tính φ ta thu được đồng cấu $k : X' \otimes Y' \to X \otimes Y/K$ thỏa: $k\tau = \varphi$.

Công thức của k trên mỗi phần tử sinh $x' \otimes y' \in X' \otimes Y'$ là

$$k(x' \otimes y') = x \otimes y + K$$

với $x \in f^{-1}(x')$ và $y \in g^{-1}(y')$.

Bây giờ ta chứng tỏ các đồng cấu $h\pi$ và k là ngược lẫn nhau.

Xét tích $k(h\pi) : X \otimes Y/K \to X \otimes Y/K$, với mỗi phần tử sinh $x \otimes y + K$ ta có

$$\begin{aligned}k(h\pi)(x \otimes y + K) &= k[f(x) \otimes g(y)] \\ &= x \otimes y + K.\end{aligned}$$

Vậy $k(h\pi)$ là đồng nhất trên hệ sinh của $X \otimes Y/K$, tức nó là đồng cấu đồng nhất.

Kiểm tra tương tự ta cũng được $(h\pi)k$ là đồng cấu đồng nhất trên $X' \otimes Y'$, tức $(h\pi)$ và k là các đồng cấu nghịch đảo lẫn nhau, có nghĩa chúng là các đẳng cấu. Và bởi $\pi = h^{-1}(h\pi)$ là tích của các đẳng cấu nên π cũng là đẳng cấu, từ đó ta được $\mathrm{Ker}\, f \otimes g = K$. ■

3.6. Các hàm tử tenxơ

Với mỗi R-môđun phải A, ta xây dựng một hàm tử

$$\tau_A^1 = A \otimes - :_R\mathrm{Mod} \to \mathcal{A}\mathrm{b}$$

như sau

• Đặt mỗi vật $X \in_R \mathrm{Mod}$ tương ứng với nhóm $A \otimes X$.

• Đặt mỗi đồng cấu $\alpha : X \to Y$ tương ứng với đồng cấu nhóm $1_A \otimes \alpha : A \otimes X \to A \otimes Y$.

Từ các tính chất 1, tính chất 2 của tích tenxơ hai đồng cấu ta có

$$\tau_A^1(1_X) = 1_A \otimes 1_X = 1_{A \otimes X}, \forall X \in_R \mathrm{Mod}$$

$$\tau_A^1(\beta\alpha) = 1_A \otimes \beta\alpha = (1_A \otimes \beta)(1_A \otimes \alpha) = \tau_A^1(\beta)\tau_A^1(\alpha)$$

với mọi cặp (α, β) mà tích $\beta\alpha$ xác định.

Vậy, $\tau_A^1 = A \otimes -$ là một hàm tử hiệp biến.

Một cách tương tự, với mỗi môđun trái B trên vành R, ta xây dựng được một hàm tử $\tau_B^2 = - \otimes B : \mathrm{Mod}_R \to \mathcal{A}\mathrm{b}$ mà

• Đặt mỗi môđun $X \in \mathrm{Mod}_R$ với nhóm aben $X \otimes B$.

• Đặt mỗi đồng cấu $\alpha : X \to Y$ với đồng cấu nhóm $\alpha \otimes 1_B : X \otimes B \to Y \otimes B$.

Hiển nhiên, cũng từ các tính chất của tích tenxơ hai đồng cấu dễ dàng kiểm tra rằng, hàm tử $\tau_B^2 = - \otimes B$ là hàm tử hiệp biến.

Định lý 4. *Các hàm tử $(A \otimes -)$ và $(- \otimes B)$ là các hàm tử khớp về bên phải.*

Chứng minh. Cho A là R-môđun phải và dãy khớp các R-môđun trái:

$$0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0. \tag{1}$$

Ta cần chứng minh dãy sau là khớp

$$A \otimes X \xrightarrow{1_A \otimes \chi} A \otimes Y \xrightarrow{1_A \otimes \sigma} A \otimes Z \to 0. \tag{2}$$

Hiển nhiên vì $1_A, \sigma$ là toàn cấu nên $1_A \otimes \sigma$ là toàn cấu. Hơn nữa:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} 1_A \otimes \sigma &= < \{a \otimes y | a \in \operatorname{Ker} 1_A \text{ hoặc } y \in \operatorname{Ker} \sigma\} > \\
&= < \{a \otimes y | a \in A \text{ và } y \in \operatorname{Ker} \sigma\} > \\
&= < \{a \otimes y | a \in A \text{ và } y \in \operatorname{Im}\chi\} > \\
&= < \{1_A(a) \otimes \chi(x) | a \in A \text{ và } x \in X\} > \\
&= \operatorname{Im} 1_A \otimes \chi.
\end{aligned}$$

Vậy dãy (2) là khớp, tức các hàm tử $(A \otimes -)$ chuyển mỗi dãy khớp ngắn thành dãy khớp về bên phải, tức các hàm tử $(A \otimes -)$ là hàm tử khớp phải.

Bằng cách tương tự, ta có thể kiểm tra rằng nếu B là R-môđun trái và dãy khớp sau gồm các R-môđun phải:

$$0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0. \tag{1'}$$

thì dãy sau cũng là khớp:

$$X \otimes B \xrightarrow{\chi \otimes 1_B} Y \otimes B \xrightarrow{\sigma \otimes 1_B} Z \otimes B \to 0, \tag{2'}$$

tức các hàm tử $(-\otimes B)$ cũng là hàm tử khớp phải. ■

Xem xét kết quả của định lý 4, hiển nhiên một câu hỏi được đặt ra là: với những điều kiện bổ sung nào thì các dãy nhóm tenxơ của một dãy khớp ngắn cũng là dãy khớp ngắn. Hướng bổ sung thứ nhất là thêm điều kiện chẻ cho các dãy khớp ngắn (1) và (1'). Khi đó ta được

Định lý 5. *Các hàm tử tenxơ* $(A\otimes -)$ *và* $(-\otimes B)$ *bảo toàn tính khớp - chẻ cho các dãy khớp ngắn và chẻ.*

Chứng minh. Giả sử dãy khớp ngắn (1) là chẻ, nói riêng đồng cấu χ có nghịch trái p. Để chứng minh dãy

$$0 \to A\otimes X \xrightarrow{1_A\otimes\chi} A\otimes Y \xrightarrow{1_A\otimes\sigma} A\otimes Z \to 0$$

là khớp chẻ, do định lý 4, ta chỉ còn phải kiểm tra rằng $1_A\otimes\chi$ là đơn cấu, đồng thời có nghịch đảo trái. Bởi χ có nghịch trái p, tức $p\chi = 1_X$ nên $1_A\otimes p$ chính là nghịch trái của $1_A\otimes\chi$. Tính đơn cấu của $1_A\otimes\chi$ là hệ quả của sự kiện tồn tại nghịch trái của $1_A\otimes\chi$.

Việc chứng minh tính bảo toàn các dãy khớp ngắn chẻ của hàm tử $(-\otimes B)$ được tiến hành tương tự, xin được nhường lại cho độc giả. ■

Hướng bổ sung thứ hai dẫn ta tới khái niệm mới: khái niệm về các môđun dẹt.

R-môđun phải A được gọi là môđun *dẹt phải* nếu hàm tử $(A\otimes -)$ là hàm tử khớp. Nói cách khác A là môđun dẹt phải nếu với mỗi dãy khớp ngắn các R-môđun trái:

$$0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0,$$

dãy các nhóm tenxơ sau đây là khớp:

$$0 \to A\otimes X \xrightarrow{1_A\otimes\chi} A\otimes Y \xrightarrow{1_A\otimes\sigma} A\otimes Z \to 0$$

R-môđun trái B gọi là môđun *dẹt trái* nếu hàm tử $(-\otimes B)$ là hàm tử khớp. Như vậy B là môđun dẹt trái nếu hàm tử $(-\otimes B)$ chuyển mỗi dãy khớp các R-môđun phải thành dãy khớp các nhóm tenxơ. Ví dụ đơn giản nhất về các môđun dẹt là:

Định lý 6. *Mỗi vành hệ tử R, xem như là môđun trên chính nó, là môđun dẹt trái và cũng là môđun dẹt phải.*

Chứng minh. Trong mục 3.2, phần trình bày các ví dụ về tích tenxơ, ta đã chứng tỏ rằng nếu X là R- môđun trái thì có thể xem nhóm $(X,+)$ là tích tenxơ $R\otimes X$. Chính xác hơn, ta có: $R\otimes X\cong(X,+)$ với đẳng cấu $\varphi_X : R\otimes X\to(X,+)$ mà $\varphi_X(r\otimes x)=rx$ với mọi phần tử sinh $r\otimes x\in R\otimes X$.

Cho dãy khớp ngắn các R-môđun trái

$$0\to X\xrightarrow{\chi}Y\xrightarrow{\sigma}Z\to 0.$$

Xét biểu đồ sau

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R\otimes X \arrow[r, "1\otimes\chi"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & R\otimes Y \arrow[r, "1\otimes\sigma"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & R\otimes Z \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_Z"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (X,+) \arrow[r, "\chi"] & (Y,+) \arrow[r, "\sigma"] & (Z,+) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dễ dàng kiểm tra các hình vuông của biểu đồ là giao hoán. Ví dụ ở hình vuông thứ nhất với mọi phần tử sinh $r\otimes x\in R\otimes X$:

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(1\otimes\chi)(r\otimes x) &= \varphi_Y(r\otimes\chi(x))=r\chi(x)\\
&= \chi(rx)=\chi\varphi_X(r\otimes x).
\end{aligned}$$

Vậy $\varphi_Y(1\otimes\chi)=\chi\varphi_X$.

Tính chất giao hoán của hình vuông thứ hai được kiểm tra tương tự.

Từ tính chất giao hoán của biểu đồ, tính chất đẳng cấu của các ánh xạ $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z$ và tính khớp của dòng dưới, dễ dàng suy ra rằng dòng trên:

$$0 \to R \otimes X \to R \otimes Y \to R \otimes Z \to 0$$

cũng là khớp, tức R là môđun dẹt phải.

Việc kiểm tra R là môđun dẹt trái cũng được tiến hành tương tự.

■

Bài tập

Bài 2.1 Cho các họ môđun $\{X_i\}_{i\in I}$ và $\{Y_j\}_{j\in J}$. Hãy chứng minh tồn tại đẳng cấu các nhóm aben:

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_I X_i, \prod_J Y_j) \cong \prod_{I\times J} \mathrm{Hom}(X_i, Y_j).$$

Bài 2.2 Cho X là R-môđun, $F(S)$ là môđun tự do sinh bởi tập S. Chứng minh các đẳng cấu:

a) $\mathrm{Hom}(R, X) \cong (X, +)$.

b) $\mathrm{Hom}(F(S), X) \cong \prod_{s\in S}(X, +)$.

Bài 2.3 Cho biểu đồ các đồng cấu các R-môđun:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

trong đó P là môđun xạ ảnh, dòng là khớp, $gh = 0$. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to A$ mà $f\varphi = h$.

Bài 2.4 Cho biểu đồ các đồng cấu

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{k} & Y \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

trong đó hình vuông giao hoán, dòng dưới là khớp, $kh = 0$ và P là môđun xạ ảnh. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to A$ để hình vuông trái cũng là giao hoán.

Bài 2.5 Chứng minh rằng môđun xạ ảnh trên miền nguyên là môđun không xoắn. Điều ngược lại: mỗi môđun không xoắn trên miền nguyên có phải là môđun xạ ảnh không?

Bài 2.6 Chứng minh rằng mỗi dãy khớp ngắn các đồng cấu:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

có thể nhúng được vào biểu đồ giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X & \to & Y & \to & V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P_1 & \to & P_2 & \to & P_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

trong đó ba dòng, ba cột đều khớp, dòng giữa chẻ ra gồm các môđun xạ ảnh; hơn nữa các cột biên trái và biên phải có thể chọn trước tùy ý.

Bài 2.7 Cho biểu đồ các đồng cấu:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
 & & J & &
\end{array}$$

trong đó J nội xạ, dòng là khớp, $hf = 0$. Chứng minh rằng tồn tại đồng cấu $\varphi : C \to J$ sao cho: $\varphi g = h$.

Bài 2.8 Cho biểu đồ các đồng cấu:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{k} & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & J \end{array}$$

trong đó hình vuông là giao hoán, dòng trên là khớp, $gf = 0$ và J là môđun nội xạ. Chứng minh rằng, tồn tại đồng cấu $\varphi : C \to J$ sao cho hình vuông bên phải cũng là giao hoán.

Bài 2.9 Chứng minh rằng mọi môđun X không xoắn trên miền nguyên R là nội xạ nếu X là môđun chia được.

Bài 2.10 Chứng minh rằng mỗi dãy khớp ngắn các đồng cấu:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

đều có thể nhúng được vào biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N_1 & \to & N_2 & \to & N_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X & \to & Y & \to & Z & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

trong đó ba dòng, ba cột là khớp, dòng giữa chẻ ra gồm các môđun nội xạ; hơn nữa các cột biên trái và biên phải có thể tùy ý chọn trước.

Bài 2.11 Chứng minh rằng môđun P là xạ ảnh khi và chỉ khi với mọi đơn cấu $f : P \to C$ và mọi toàn cấu $\sigma : J \to C$ từ môđun nội xạ J, tồn tại đồng cấu $\varphi : P \to J$ sao cho $\sigma\varphi = f$.

Bài 2.12 Chứng minh rằng môđun J là nội xạ khi và chỉ khi, với mọi toàn cấu $f : A \to J$ và mọi đơn cấu $j : A \to P$ trong đó P là môđun xạ ảnh, tồn tại đồng cấu $\widetilde{f} : P \to J$ sao cho $\widetilde{f}j = f$.

Bài 2.13 Chứng minh rằng trong phạm trù các $\mathbb{Z}$-môđun một ánh xạ $\varphi : X \times Y \to C$ là song tuyến tính khi và chỉ khi φ là song cộng tính.

Bài 2.14 Gọi $\mathbb{Q}$ là nhóm cộng các số hữu tỉ xem như là $\mathbb{Z}$-môđun. Chứng minh rằng:

a) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

c) Nếu A là môđun xoắn thì $\mathbb{Q} \otimes A = 0$.

Bài 2.15 Chứng minh rằng: $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$ trong đó $d = (m, n)$. Từ đó suy ra rằng, nếu $(m, n) = 1$ thì $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$.

Bài 2.16 Chứng minh rằng: tích tenxơ của hai nhóm aben hữu hạn sinh là nhóm hữu hạn sinh.

Bài 2.17 Xét nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ và nhóm con $2\mathbb{Z}$ gồm các số chẵn. Khi đó, đồng cấu bào hàm $j : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ là đơn cấu. Gọi A là nhóm cyclic cấp 2, với phần tử sinh a, tức $A =< a >$. Chứng minh rằng: $2\mathbb{Z} \otimes A$ là nhóm cyclic cấp hai với phần tử sinh là $2 \otimes a$, tuy nhiên tích tenxơ $j \otimes 1_A$ là đồng cấu 0 và do vậy không là đơn cấu.

Bài 2.18 Cho A là hạng tử trực tiếp của R-môđun phải X, còn B là hạng tử trực tiếp của R-môđun trái Y và $i : A \to X, j : B \to Y$ là các phép nhúng. Chứng minh rằng:

$$i \otimes j : A \otimes B \to X \otimes Y$$

cũng là một phép nhúng.

Bài 2.19 Chứng minh rằng: tích tenxơ của hai đẳng cấu là một đẳng cấu.

Bài 2.20 Chứng minh rằng: tổng trực tiếp các môđun dẹt là môđun dẹt và ngược lại nếu tổng trực tiếp là môđun dẹt thì mỗi thành phần đều dẹt.

Bài 2.21 Chứng minh rằng mọi môđun tự do đều là môđun dẹt.

Bài 2.22 Chứng minh rằng mỗi môđun xạ ảnh là môđun dẹt, tuy nhiên có những môđun dẹt mà không là xạ ảnh, chẳng hạn nhóm các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Chương III
ĐỒNG ĐIỀU

§1. Phức và đồng điều

1.1. Phạm trù các phức

Khái niệm phức các đồng cấu là khái niệm cơ bản của đại số đồng điều. Trước khi định nghĩa về phức, ta cần xác định một khái niệm bổ trợ, đó là khái niệm dãy nửa khớp.

Dãy các đồng cấu $\cdots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \cdots$ được gọi là *dãy nửa khớp* nếu tại mỗi môđun trung gian của dãy, ảnh của đồng cấu vào được chứa trong hạt nhân của đồng cấu ra.

Như vậy, một dãy các đồng cấu là nửa khớp nếu tích của hai đồng cấu liên tiếp của dãy luôn luôn là đồng cấu 0.

Một phức các đồng cấu là một dãy nửa khớp đánh số theo tập tất cả các số nguyên.

Nếu phức mà chiều tăng của chỉ số cùng chiều với các mũi tên đồng cấu trong phức thì được gọi là *phức tiến*. Vậy các phức tiến có dạng

$$K : \cdots \to K_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} K_n \overset{\partial_n}{\to} K_{n+1} \to \cdots .$$

Nếu chiều tăng của các chỉ số trong phức ngược lại với chiều các mũi tên đồng cấu thì phức được gọi là *phức lùi*. Vậy các phức lùi có dạng

$$X : \cdots \leftarrow X_{n-1} \overset{\partial_n}{\leftarrow} X_n \overset{\partial_{n+1}}{\leftarrow} X_{n+1} \leftarrow \cdots . \qquad (1)$$

Thực ra, khi thực hiện một phép đổi biến về chỉ số: thay n bởi $(-n)$, ta có thể chuyển một phức lùi thành một phức tiến và ngược lại chuyển một phức tiến thành một phức lùi. Vì vậy kết quả nghiên cứu về một loại phức (tiến hay lùi) đều có thể chuyển sang cho loại phức kia, bằng một phép lấy đối xứng các chỉ số. Do đó trong mục này ta chỉ xem xét về các phức lùi, và để đơn giản ta gọi chúng là các phức. Các phức thường được ký hiệu bằng một chữ hoa, đôi khi cũng có thể biểu diễn bởi họ các môđun và đồng cấu tạo nên phức. Chẳng hạn phức (1) có thể viết đơn giản là phức X hay phức $X = \{X_n, \partial_n\}$. Còn các đồng cấu ∂_n được gọi là các *đồng cấu vi phân*.

Ví dụ tầm thường nhất về các phức là phức mà tất cả các đồng cấu đều là đồng cấu 0. Mỗi dãy khớp vô hạn về cả hai đầu đều có thể thực hiện một sự đánh số để trở thành một phức. Một dãy khớp không vô hạn ở cả hai đầu, bằng cách bổ sung các môđun 0 và các đồng cấu 0 để trở thành dãy vô hạn, cũng được xem là phức theo một các đánh số nào đó. Ở đây ta cần có sự phân biệt rõ khái niệm phức và khái niệm dãy nửa khớp. Một phức là một dãy nửa khớp, tuy nhiên một dãy nửa khớp theo các cách đánh số khác nhau có thể tạo thành các phức khác nhau.

Cho $X = \{X_n, \partial_n\}$ và $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$ là các phức. *Một biến đổi dây chuyền* $f : X \to X'$ là họ các đồng cấu $\{f_n : X_n \to X'_n\}$ sao cho $\partial'_n f_n = f_{n-1}\partial_n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Điều kiện sau cùng tương đương với điều kiện biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc} X: \cdots \leftarrow & X_{n-1} & \overset{\partial_n}{\leftarrow} & X_n & \overset{\partial_{n+1}}{\leftarrow} & X_{n+1} & \leftarrow \cdots \\ & \Big\downarrow {\scriptstyle f_{n-1}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle f_n} & & \Big\downarrow {\scriptstyle f_{n+1}} & \\ X': \cdots \leftarrow & X'_{n-1} & \overset{\partial'_n}{\leftarrow} & X'_n & \overset{\partial'_{n+1}}{\leftarrow} & X'_{n+1} & \leftarrow \cdots \end{array}$$

Về sau này, đôi khi để giản tiện chúng ta không viết các chỉ số các đồng cấu, như vậy các $\partial_n, \partial'_n, f_n$ có thể được viết một cách đơn giản là ∂, ∂', f. Tuy nhiên, trong mỗi một hệ thức đồng cấu, chúng ta phải ngầm định là chúng phải được đánh số theo các chỉ số nào.

Nếu $f = \{f_n\} : X \to X'$ và $g = \{g_n\} : X' \to X''$ thì tích $gf = \{g_n f_n : X_n \to X''_n\}$ là một biến đổi dây chuyền từ phức X tới phức X''. Như vậy, tích của hai biến đổi dây chuyền là một biến đổi dây chuyền. Hiển nhiên rằng, tích các biến đổi dây chuyền có tính chất kết hợp.

Để ý thêm rằng với mỗi phức $X = \{X_n, \partial_n\}$, họ các đồng cấu đồng nhất $1_X = \{1_{X_n} : X_n \to X_n\}$ là một biến đổi dây chuyền có tính chất $1_X f = f$ và $g 1_X = g$ nếu các tích $1_X f, g 1_X$ là xác định. Do đó, lớp tất cả các phức lập thành một phạm trù với các cấu xạ là các biến đổi dây chuyền.

1.2. Đồng luân dây chuyền

Cho các biến đổi dây chuyền $f, g : X \to X'$ từ phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ tới phức $X' = \{X'_n, \partial'_n\}$. Họ các đồng cấu

$$s = \{s_n : X_n \to X'_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

được gọi là một *đồng luân dây chuyền* giữa hai biến đổi dây chuyền f, g nếu thỏa

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1} \partial_n = f_n - g_n.$$

Khi đó, ta viết: $s : f \simeq g$.

Có thể thấy rằng quan hệ đồng luân dây chuyền giữa các biến đổi dây chuyền từ phức X tới phức X' là một quan hệ tương đương.

Thật vậy, với mỗi biến đổi dây chuyền $f : X \to X$ thì họ các đồng cấu $\{0 : X_n \to X_{n+1}\}$ chính là một đồng luân dây chuyền $0 : f \simeq f$. Còn nếu họ $s = \{s_n\} : f \simeq g$ thì họ $\{-s_n\} : g \simeq f$. Cuối cùng nếu $s = \{s_n\} : f \simeq g$ và $t = \{t_n\} : g \simeq h$ thì $s + t = \{s_n + t_n\} : f \simeq h$. Thật vậy, vì $s : f \simeq g$ và $t : g \simeq h$ nên theo định nghĩa ta có

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n,$$

$$\partial'_{n+1} t_n + t_{n-1}\partial_n = g_n - h_n.$$

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$\partial'_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})\partial_n = f_n - h_n.$$

Vậy $s + t : f \simeq h$.

Định lý 1. *Nếu $s : f \simeq g$ là đồng luân dây chuyền giữa $f, g : X \to X'$ và $s' : f' \simeq g'$ là đồng luân dây chuyền giữa $f', g' : X' \to X''$ thì ánh xạ $f's + s'g : f'f \simeq g'g$ là đồng luân dây chuyền giữa $f'f, g'g : X \to X''$.*

Chứng minh. Xem biểu đồ:

$$\begin{tikzcd}
X : \cdots & X_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, "s_{n-1}"] & X_n \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dr, "s_n"] & X_{n+1} \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[l] \\
X' : \cdots & X'_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, "s'_{n-1}"] & X'_n \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, shift right, "f'"'] \arrow[d, shift left, "g'"] \arrow[dr, "s'_n"] & X'_{n+1} \arrow[l, "\partial'"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \cdots \arrow[l] \\
X'' : \cdots & X''_{n-1} \arrow[l] & X''_n \arrow[l, "\partial''"'] & X''_{n+1} \arrow[l, "\partial''"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Theo giả thiết $s = \{s_n\} : f \simeq g$ nên ta có

$$\partial' s_n + s_{n-1}\partial = f - g, \tag{2}$$

và $s' = \{s'_n\} : f' \simeq g'$ nên:

$$\partial'' s'_n + s'_{n-1}\partial' = f' - g'. \tag{3}$$

Nhân f' vào bên trái hai vế đẳng thức (2), nhân g vào bên phải hai vế đẳng thức (3), rồi cộng các kết quả lại ta được:

$$\begin{aligned} f'f - g'g &= f'\partial' s_n + f's_{n-1}\partial + \partial'' s'_n g + s'_{n-1}\partial' g \\ &= \partial'' f' s_n + f' s_{n-1}\partial + \partial'' s'_n g + s'_{n-1} g\partial \\ &= \partial''[f's_n + s'_n g] + [f's_{n-1} + s'_{n-1}g]\partial. \end{aligned}$$

Hệ thức cuối cùng có nghĩa là họ các đồng cấu $f's + s'g = \{f's_n + s'_n g\}$ là đồng luân dây chuyền giữa $f'f$ và $g'g$, tức ta có:

$$f's + s'g : f'f \simeq g'g. \blacksquare$$

Cho X, X' là các phức. Biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ được gọi là một *tương đương dây chuyền* nếu tồn tại biến đổi dây chuyền $h : X' \to X$ và các đồng luân dây chuyền $s : hf \simeq 1_X$ và $t : fh \simeq 1_{X'}$.

Hai phức X và X' mà có một tương đương dây chuyền giữa chúng $f : X \to X'$, được gọi là hai phức *tương đương đồng luân* với nhau và ta viết: $X \simeq X'$.

1.3. Các hàm tử đồng điều

Xét phức

$$X : \cdots \leftarrow X_{n-1} \overset{\partial_n}{\leftarrow} X_n \overset{\partial_{n+1}}{\leftarrow} X_{n+1} \leftarrow \cdots .$$

Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, vì $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ nên ta có $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_n$, từ đó ta có môđun thương

$$H_n(X) = \mathrm{Ker}\,\partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}.$$

Môđun thương $H_n(X)$ được gọi là *môđun đồng điều thứ* n của phức X.

Các phần tử của môđun con $C_n(X) = \mathrm{Ker}\,\partial_n$ được gọi là các *chu trình* n-chiều, còn các phần tử của $B_n(X) = \mathrm{Im}\partial_{n+1} = \partial_{n+1}X_{n+1}$ được gọi là các *bờ* n-chiều. Các phần tử của môđun X_n cũng được gọi là các *dây chuyền* n-chiều.

Theo cách gọi trên thì $H_n(X) = C_n/B_n$ là môđun thương của môđun các chu trình n-chiều theo môđun các bờ n-chiều. Phần tử của $H_n(X)$ là các lớp ghép của các chu trình $c \in C_n$, thường được viết là $\mathrm{cls}c$ hay $\{c\}$. Vậy $\mathrm{cls}c = \{c\} = c + B_n$.

Hiển nhiên, hai chu trình c và c' thuộc cùng một lớp đồng điều trong $H_n(X)$, tức $\{c\} = \{c'\}$ khi và chỉ khi $c - c' \in B_n(X) = \partial X_{n+1}$. Khi hai chu trình c, c' thuộc cùng một lớp đồng điều thì ta cũng nói c và c' là *đồng điều với nhau* và viết: $c \sim c'$.

Cho các phức $X = \{X_n, \partial\}, X' = \{X'_n, \partial'\}$ và $f : X \to X'$ là một biến đổi dây chuyền.

Do biểu đồ giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc}
X : \cdots \leftarrow & X_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n} & X_n & \xleftarrow{\partial_{n+1}} & X_{n+1} & \leftarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\
X' : \cdots \leftarrow & X'_{n-1} & \xleftarrow{\partial'_n} & X'_n & \xleftarrow{\partial'_{n+1}} & X'_{n+1} & \leftarrow \cdots
\end{array}$$

nên $f(\mathrm{Ker}\,\partial_n) \subset \mathrm{Ker}\,\partial'_n$ và $f(\mathrm{Im}\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Im}\partial'_{n+1}$ từ đó f cảm sinh, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ đồng cấu

$$f_* = H_n(f) : H_n(X) \to H_n(X')$$

mà

$$H_n(f)[c + \partial X_{n+1}] = f_n(c) + \partial' X'_{n+1}.$$

Dễ dàng kiểm tra để thấy rằng, các đồng cấu cảm sinh này thỏa các hệ thức

$$H_n(1_X) = 1_{H_n(X)},$$

$$H_n(gf) = H_n(g).H_n(f).$$

Do vậy, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, H_n là một hàm tử hiệp biến từ phạm trù các phức và các biến đổi dây chuyền tới phạm trù các môđun, tương ứng mỗi phức X với môđun đồng điều $H_n(X)$ và tương ứng mỗi biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ với đồng cấu môđun $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(X')$. Ta gọi chúng là các *hàm tử đồng điều.*

Định lý 2. *Nếu $f, g : X \to X'$ là các biến đổi đồng luân dây chuyền từ phức X tới phức X' thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có:*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(X) \to H_n(X').$$

Chứng minh. Theo giả thiết định lý, tồn tại đồng luân dây chuyền $s = \{s_n\} : f \simeq g$, thỏa:

$$\partial' s_n + s_{n-1}\partial = f_n - g_n.$$

Nếu c là chu trình của X_n thì $\partial_n c = 0$, do vậy:

$$f_n c - g_n c = \partial' s_n c + s_{n-1}\partial c = \partial' s_n c$$

tức

$$f_n c - g_n c \in \mathrm{Im}\partial'_{n+1}.$$

Điều đó có nghĩa là $f_n c$ và $g_n c$ là đồng điều với nhau, nên $\mathrm{cls}(f_n c) = \mathrm{cls}(g_n c)$ trong $H_n(X')$.

Vậy $f_*(\mathrm{cls}c) = g_*(\mathrm{cls}c)$ với mọi chu trình c của X_n, tức $H_n(f) = H_n(g)$. ■

Hệ quả 3. *Nếu $f : X \to X'$ là một tương đương dây chuyền thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, đồng cấu $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(X')$ là đẳng cấu.*

Chứng minh. Bởi f là tương đương dây chuyền nên tồn tại biến đổi dây chuyền $g : X' \to X$ sao cho $gf : X \to X$ và $fg : X' \to X'$ là đồng luân dây chuyền với các biến đổi đồng nhất $1_X : X \to X$ và $1_{X'} : X' \to X'$. Theo định lý 2, khi đó với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$H_n(g).H_n(f) = H_n(gf) = H_n(1_X) = 1_{H_n(X)},$$

$$H_n(f).H_n(g) = H_n(fg) = H_n(1_{X'}) = 1_{H_n(X')}.$$

Các hệ thức này chứng tỏ rằng $H_n(f)$ là đẳng cấu. ■

1.4. Đối đồng điều

Phức $X = \{X_n, \partial\}$ được gọi là phức dương nếu $X_n = 0$ khi $n < 0$.

Phức X được gọi là phức âm nếu $X_n = 0$ khi $n > 0$.

Các phức thường gặp trong thực tế hoặc là phức dương hoặc là phức âm. Để tiện lợi về mặt ký hiệu, các phức âm với chỉ số dưới thường dùng:

$$X : \cdots \leftarrow X_{-n-1} \overset{\partial_{-n}}{\leftarrow} X_{-n} \overset{\partial_{-n+1}}{\leftarrow} X_{-n+1} \leftarrow \cdots \leftarrow X_{-1} \overset{\partial_0}{\leftarrow} X_0 \leftarrow 0$$

được viết lại thành phức chỉ số trên theo phép đổi biến $(-n)$ thay bởi n. Khi đó, X_{-n} được viết là X^n, còn $\partial_{-n} : X_{-n} \to X_{-n-1}$ được viết là $\delta^n : X^n \to X^{n+1}$. Và do đó, phức âm được viết lại là:

$$X : 0 \to X^0 \overset{\delta^0}{\to} X^1 \to \cdots \to X^{n-1} \overset{\delta^{n-1}}{\to} X^n \overset{\delta^n}{\to} X^{n+1} \to \cdots .$$

Như vậy, các phức âm có thể chuyển đổi cách viết để trở thành phức dương theo chỉ số trên.

Môđun đồng điều của phức theo chỉ số trên $X = \{X^n, \delta^n\}$, hiển nhiên được xác định theo công thức:

$$H^n(X) = \mathrm{Ker}\,\delta^n / \mathrm{Im}\delta^{n-1}.$$

Đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền $f, g : X \to Y$ của các phức chỉ số trên là họ các đồng cấu $s = \{s^n : X^n \to Y^{n-1}\}$ sao cho:

$$\delta s + s\delta = f - g.$$

Các phức dương theo chỉ số trên còn được gọi là *phức phải* hay *phức đối dây chuyền* và các đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền của các phức phải cũng còn được gọi là *đồng luân đối dây chuyền.*

Cho phức $X = \{X_n, \partial_n\}$ các R-môđun và G là một R-môđun. Tác động hàm tử phản biến $\mathrm{Hom}(-, G)$ lên phức X ta thu được phức chỉ số trên, gồm các nhóm aben:

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(X_{n-1}, G) \overset{\delta^{n-1}}{\to} \mathrm{Hom}(X_n, G) \overset{\delta^n}{\to} \mathrm{Hom}(X_{n+1}, G) \to \cdots$$

trong đó đồng cấu $\delta^n : \mathrm{Hom}(X_n, G) \to \mathrm{Hom}(X_{n+1}, G)$ được xác định theo công thức:

$$\delta^n(f) = (-1)^{n+1}\partial^*_{n+1}(f) = (-1)^{n+1} f\partial_{n+1}.$$

Phức thu được theo cách trên được ký hiệu là $\mathrm{Hom}(X, G)$ và các nhóm $\mathrm{Hom}(X_n, G)$ có thể được viết lại là $\mathrm{Hom}^n(X, G)$ để phù hợp với thông lệ của một phức chỉ số trên.

Đồng điều của phức $\mathrm{Hom}(X, G)$ được gọi là *đối đồng điều* của phức X với hệ số trong G. Đó là các nhóm aben được đánh số theo chỉ số trên

$$H^n(X, G) = H^n(\mathrm{Hom}(X, G)) = \mathrm{Ker}\, \delta^n / \mathrm{Im}\delta^{n-1}.$$

Các phần tử của $\mathrm{Ker}\, \delta^n$ được gọi là *đối chu trình* n-chiều, còn các phần tử của $\mathrm{Im}\delta^{n-1}$ được gọi là *đối bờ* n-chiều. Các phần tử của nhóm $\mathrm{Hom}^n(X, G) = \mathrm{Hom}(X_n, G)$ cũng được gọi là các *đối dây chuyền* n-chiều. Như vậy, một đối chu trình n-chiều là một đồng cấu $h : X_n \to G$ sao cho $h\partial = 0$.

Cho X, X' là các phức và $f : X \to X'$ là biến đổi dây chuyền. Dưới sự tác động của hàm tử $\mathrm{Hom}(-, G)$ biến đổi dây chuyền f cảm sinh nên biến đổi dây chuyền

$$f^* : \mathrm{Hom}(X', G) \to \mathrm{Hom}(X, G).$$

Và có thể kiểm tra một cách dễ dàng để thấy rằng $\mathrm{Hom}(-, G)$ khi đặt mỗi phức X tương ứng với phức $\mathrm{Hom}(X, G)$, đặt mỗi biến đổi dây chuyền f với biến đổi dây chuyền f^*, là một hàm tử phản biến từ phạm trù các phức chỉ số dưới tới phạm trù các phức chỉ số trên. Từ đó, có thể thấy rằng, với mỗi $n \in \mathbb{Z}, H^n = H^n(-, G)$ là hàm tử phản biến từ phạm trù các phức và các biến đổi dây chuyền tới phạm trù các nhóm aben. Ta gọi các phản hàm tử này là các *hàm tử đối đồng điều*.

Cuối cùng để kết thúc mục này, ta chú ý rằng, nếu $s : f \simeq g$ là một đồng luân dây chuyền giữa hai biến đổi dây chuyền $f, g : X \to X'$, tức là

$$\partial'_{n+1} s_n + s_{n-1}\partial_n = f_n - g_n,$$

thì khi tác động $\mathrm{Hom}(-, G)$ vào đẳng thức trên ta được

$$s_n^* \partial'^*_{n+1} + \partial_n^* s_{n-1}^* = f_n^* - g_n^*.$$

Đẳng thức cuối cùng cho phép chúng ta chọn họ $t = \{t^n\}$ mà $t^n = (-1)^n s_{n-1}^*$ là đồng luân đối dây chuyền giữa các biến đổi:

$$f^*, g^* : \mathrm{Hom}(X', G) \to \mathrm{Hom}(X, G),$$

tức là $t : f^* \simeq g^*$.

Nói cách khác, hàm tử $\mathrm{Hom}(-, G)$ bảo toàn quan hệ đồng luân dây chuyền của hai phép biến đổi. Nói riêng, $\mathrm{Hom}(-, G)$ chuyển mỗi tương đương dây chuyền trong phạm trù các phức chỉ số dưới thành một tương đương dây chuyền trong phạm trù các phức chỉ số trên. Do vậy, nếu $X \simeq X'$ là hai phức tương đương đồng luân thì các phức nhóm aben sau cũng tương đương đồng luân:

$$\mathrm{Hom}(X, G) \simeq \mathrm{Hom}(X', G).$$

Và do vậy, nếu $X \simeq X'$ thì với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có đẳng cấu nhóm giữa các nhóm đối đồng điều: $H^n(X, G) \cong H^n(X', G)$.

§2. Dãy đồng điều khớp

2.1. Dãy khớp các phức

Tương tự như đối với các môđun, ta cũng xác định được các phức con và phức thương của một phức X cho trước.

Phức $K = \{K_n, \partial_K\}$ được gọi là *phức con* của phức $X = \{X_n, \partial\}$ nếu với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, K_n là môđun con của X_n và vi phân ∂_K là vết của vi phân ∂_n trên K_n.

Như vậy phức K là phức con của X, nếu $K_n \triangleleft X_n$ với mỗi n, và bộ các phép nhúng $i = \{i_n : K_n \to X_n\}$ là một phép biến đổi dây chuyền, tức ta có biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccccc}
K : \cdots \leftarrow & K_{n-1} & \overset{\partial_K}{\leftarrow} & K_n & \overset{\partial_K}{\leftarrow} & K_{n+1} & \leftarrow \cdots \\
 & {\scriptstyle i_{n-1}}\downarrow & & {\scriptstyle i_n}\downarrow & & {\scriptstyle i_{n+1}}\downarrow & \\
X : \cdots \leftarrow & X_{n-1} & \overset{\partial}{\leftarrow} & X_n & \overset{\partial}{\leftarrow} & X_{n+1} & \leftarrow \cdots
\end{array}$$

Cho $K = \{K_n, \partial_K\}$ là phức con của phức $X = \{X_n, \partial\}$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, bởi $K_n \triangleleft X_n$ nên ta có môđun thương X_n/K_n. Do biểu đồ giao hoán trên: $\partial K_n \subset K_{n-1}$, nên với mỗi n, vi phân ∂_n cảm sinh đồng cấu: $\partial'_n : X_n/K_n \to X_{n-1}/K_{n-1}$ theo công thức:

$$\partial'_n(x + K_n) = \partial_n(x) + K_{n-1}.$$

Do $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ nên dễ dàng suy ra $\partial'_n\partial'_{n+1} = 0$. Vì vậy, họ các môđun thương và các đồng cấu cảm sinh: $X/K = \{X_n/K_n, \partial'_n\}$ lập thành một phức mới. Ta gọi nó là *phức thương của phức X theo phức con K*.

Dễ dàng thấy rằng, họ tất cả các phép chiếu $\{p_n : X_n \to X_n/K_n\}$ lập thành một biến đổi dây chuyền từ phức X tới phức thương X/K.

Cho dãy các phức và các biến đổi dây chuyền:

$$\cdots \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \cdots . \qquad (1)$$

Dãy được gọi là *khớp tại phức* Y nếu với mỗi $n : \mathrm{Im} f_n = \mathrm{Ker}\, g_n$.

Dãy được gọi là *khớp* nếu nó khớp tại bất kỳ phức trung gian nào của dãy. Như vậy, dãy (1) các phức và các biến đổi dây chuyền là khớp khi và chỉ khi với mỗi n, dãy:

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{f_n} Y_n \xrightarrow{g_n} Z_n \to \cdots$$

là dãy khớp.

Cho $X = \{X_n, \partial\}$, $K = \{K_n, \partial_K\}$ là các phức trong đó K là phức con của X, và X/K là phức thương của X theo phức con K. Theo cách xác định phức con, phức thương của phức X đã trình bày ở mục trên, hiển nhiên với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ ta có dãy:

$$0 \to K_n \xrightarrow{i_n} X_n \xrightarrow{p_n} X_n/K_n \to 0$$

là dãy khớp. Và do vậy dãy các phức sau đây là ví dụ đầu tiên về dãy khớp các phức:

$$0 \to K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X/K \to 0$$

trong đó $i = \{i_n\}, p = \{p_n\}$ là các biến đổi dây chuyền nhúng phức con K vào phức X và chiếu phức X xuống phức thương X/K. Còn hai đầu của dãy là các phức 0. Hiển nhiên là các biến đổi dây chuyền từ một phức 0 hay tới một phức 0 luôn gồm toàn các đồng cấu 0.

Ví dụ tiếp theo về dãy khớp các phức, có tên gọi là *dãy khớp của biến đổi dây chuyền* $f : X \to Y$.

Ta đã biết rằng mỗi biến đổi dây chuyền $f = \{f_n\} : X \to Y$ cho ta biểu đồ giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \leftarrow & X_{n-1} & \overset{\partial}{\leftarrow} & X_n & \overset{\partial}{\leftarrow} & X_{n+1} & \leftarrow \cdots \\
& \Big\downarrow f_{n-1} & & \Big\downarrow f_n & & \Big\downarrow f_{n+1} & \\
\cdots \leftarrow & Y_{n-1} & \overset{\partial}{\leftarrow} & Y_n & \overset{\partial}{\leftarrow} & Y_{n+1} & \leftarrow \cdots
\end{array}$$

Từ tính giao hoán của biểu đồ mà với mỗi n, ta có: $\partial \mathrm{Ker}\, f_n \subset \mathrm{Ker}\, f_{n-1}$ và như vậy ta có thể lập nên một phức con của phức X, gồm các môđun con $\mathrm{Ker}\, f_n$ và vi phân của nó chính là vết của vi phân phức X để lại trên mỗi $\mathrm{Ker}\, f_n$. Ta gọi phức con đó là *phức hạt nhân của biến đổi dây chuyền* f, và ký hiệu là $\mathrm{Ker}\, f$. Vậy phức $\mathrm{Ker}\, f$ có dạng:

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Ker}\, f_{n-1} \overset{\partial}{\leftarrow} \mathrm{Ker}\, f_n \overset{\partial}{\leftarrow} \mathrm{Ker}\, f_{n+1} \leftarrow \cdots .$$

Cũng từ tính giao hoán của biểu đồ mà với mỗi n, ta có: $\partial \mathrm{Im} f_n \subset \mathrm{Im} f_{n-1}$, và như vậy ta có phức con của phức Y, gồm các môđun con $\mathrm{Im} f_n$ với vi phân là vết của vi phân phức Y để lại trên mỗi $\mathrm{Im} f_n$. Ta gọi nó là *phức ảnh của biến đổi dây chuyền* f và ký hiệu là $\mathrm{Im} f$. Vậy phức $\mathrm{Im} f$ có dạng:

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Im} f_{n-1} \overset{\partial}{\leftarrow} \mathrm{Im} f_n \overset{\partial}{\leftarrow} \mathrm{Im} f_{n+1} \leftarrow \cdots .$$

Ta xây dựng phức thương của phức Y theo phức con $\mathrm{Im} f$ và được phức $Y/\mathrm{Im} f$ gồm các môđun thương $Y_n/\mathrm{Im} f_n$ và các đồng cấu vi phân ∂'_n cảm sinh từ các đồng cấu vi phân ∂_n của phức Y.

Theo phần lý thuyết môđun, với mỗi đồng cấu $f_n : X_n \to Y_n$ dãy sau đây là khớp:

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f_n \overset{i_n}{\to} X_n \overset{f_n}{\to} Y_n \overset{p_n}{\to} Y_n/\mathrm{Im} f_n \to 0$$

(dãy này như chúng ta từng biết, là dãy khớp của đồng cấu f_n). Từ tính khớp của tất cả các dãy trên mà dãy các phức sau đây là dãy khớp:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Y/\operatorname{Im} f \to 0$$

Ta gọi nó là dãy khớp của biến đổi dây chuyền f.

Cũng tương tự như các dãy khớp môđun, dãy khớp các phức có dạng:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

được gọi là *dãy khớp ngắn*.

Ví dụ về các dãy khớp ngắn, có thể lấy dãy khớp phức con - phức thương của phức X cho trước, hay dãy khớp của biến đổi dây chuyền $f : X \to Y$ trong trường hợp các f_n đơn cấu (hoặc các f_n toàn cấu).

2.2. Dãy đồng điều khớp

Cho dãy khớp ngắn các phức:

$$E : \ 0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0. \tag{2}$$

Khi đó với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, tác động hàm tử đồng điều thứ n vào dãy khớp trên ta được dãy các đồng cấu:

$$H_n(X) \xrightarrow{\chi_*} H_n(Y) \xrightarrow{\sigma_*} H_n(Z)$$

trong đó

$$\chi_*(x + \partial X_{n+1}) = \chi(x) + \partial Y_{n+1},$$
$$\sigma_*(y + \partial Y_{n+1}) = \sigma(y) + \partial Z_{n+1},$$

với mọi chu trình $x \in X_n$, mọi chu trình $y \in Y_n$. Hơn nữa, ta có:

Định lý 1. *Cho dãy khớp ngắn (2) các phức. Khi đó, với mỗi n, dãy các môđun đồng điều*

$$H_n(X) \xrightarrow{\chi_*} H_n(Y) \xrightarrow{\sigma_*} H_n(Z) \tag{3}$$

là dãy khớp.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng, $\sigma_*\chi_* = 0$, nên $\mathrm{Im}\chi_* \subset \mathrm{Ker}\,\sigma_*$. Vậy để chứng tỏ tính chất khớp của dãy (3), ta chỉ còn phải kiểm tra tính đúng đắn của bao hàm thức: $\mathrm{Ker}\,\sigma_* \subset \mathrm{Im}\chi_*$, tức cần phải chỉ ra với mỗi chu trình $y \in Y_n$ mà σy là bờ trong Z_n, (tức $\sigma y \in \partial Z_{n+1}$) ắt tồn tại chu trình $x \in X_n$ mà $\chi_*(\mathrm{cls}x) = \mathrm{cls}y$.

Xét biểu đồ giao hoán sau, với các dòng khớp:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & X_{n+1} & \overset{\chi_{n+1}}{\to} & Y_{n+1} & \overset{\sigma_{n+1}}{\to} & Z_{n+1} & \to 0 \\
& \partial\Big\downarrow & & \partial\Big\downarrow & & \partial\Big\downarrow & \\
0 \to & X_n & \overset{\chi_n}{\to} & Y_n & \overset{\sigma_n}{\to} & Z_n & \to 0 \\
& \partial\Big\downarrow & & \partial\Big\downarrow & & \partial\Big\downarrow & \\
0 \to & X_{n-1} & \overset{\chi_{n-1}}{\to} & Y_{n-1} & \overset{\sigma_{n-1}}{\to} & Z_{n-1} & \to 0
\end{array}$$

Bởi $y \in Y_n$ là chu trình mà $\sigma_n y$ là bờ trong Z_n, ắt tồn tại $z \in Z_{n+1}$ mà

$$\partial z = \sigma_n y.$$

Do σ_{n+1} là toàn cấu nên tồn tại $y' \in Y_{n+1}$ mà

$$\sigma_{n+1}(y') = z.$$

Từ tính giao hoán của hình vuông góc trên bên phải, ta suy ra

$$y - \partial y' \in \mathrm{Ker}\,\sigma_n.$$

Do tính khớp của dòng giữa mà $\mathrm{Ker}\,\sigma_n = \mathrm{Im}\chi_n$, ắt tồn tại phần tử $x \in X_n$ mà

$$\chi_n(x) = y - \partial y'.$$

Bởi

$$\partial(y - \partial y') = \partial y - \partial\partial y' = 0,$$

do y là chu trình, nên

$$\chi_{n-1}\partial(x) = \partial\chi_n(x) = \partial(y - \partial y') = 0.$$

Và bởi χ_{n-1} đơn cấu nên $\partial(x) = 0$, tức x là chu trình. Vì

$$\chi_n(x) = y - \partial y'$$

nên

$$\chi_*(\mathrm{cls}x) = \mathrm{cls}(y - \partial y') = \mathrm{cls}y. \blacksquare$$

Bây giờ ta tìm cách nối các dãy khớp dạng (3) lại với nhau bằng cách, với mỗi $n \in \mathbb{Z}$ xây dựng đồng cấu nối

$$\partial_E : H_{n+1}(Z) \to H_n(X).$$

Nếu $z \in Z_{n+1}$ là chu trình (hãy xem biểu đồ giao hoán đã dùng trong chứng minh định lý 1), trước hết do σ_{n+1} toàn cấu, ắt tồn tại phần tử $y \in Y_{n+1}$ mà

$$\sigma_{n+1}y = z.$$

Khi đó

$$\sigma_n(\partial y) = \partial(\sigma_{n+1}y) = \partial z = 0,$$

tức $\partial y \in \mathrm{Ker}\,\sigma_n$.

Do dòng giữa khớp $\mathrm{Ker}\,\sigma_n = \mathrm{Im}\chi_n$, ắt tồn tại $x \in X_n$ mà

$$\chi_n x = \partial y.$$

Bởi

$$\chi_{n-1}\partial(x) = \partial\chi_n(x) = \partial\partial y = 0$$

và χ_{n-1} đơn cấu nên $\partial(x) = 0$, tức x là chu trình của X_n. Ta mô tả các điều lập luận trên bằng biểu đồ sau:

$$
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[r, "\sigma_{n+1}"] \arrow[d, "\partial"'] & z \in Z_{n+1} \arrow[d, "\partial"'] \\
X_n \ni x \arrow[r, "\chi_n"] \arrow[d, "\partial"'] & \partial y \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \\
0 \arrow[r, "\chi_{n-1}"] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ta đặt $\partial_E(\text{cls}z) = \text{cls}x$.

Xem như là bài tập, việc chứng minh ∂_E được xác định một cách hợp lý và đồng thời là đồng cấu, xin được dành lại cho độc giả.

Định lý 2. *(Dãy đồng điều khớp) Đối với mỗi dãy khớp ngắn các phức:*

$$E: \ 0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0$$

dãy vô tận các môđun đồng điều sau đây là dãy khớp

$$\cdots H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\partial_E} H_n(X) \xrightarrow{\chi_*} H_n(Y) \xrightarrow{\sigma_*} H_n(Z) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

(trong đó ∂_E là đồng cấu nối, $\chi_* = H_n(\chi)$ và $\sigma_* = H_n(\sigma)$).

Chứng minh. Theo định lý 1, dãy các môđun đồng điều cho trong định lý 2 khớp tại $H_n(Y)$ với mỗi n. Vậy ta chỉ còn phải chứng minh dãy là khớp tại $H_n(X)$ và $H_n(Z)$.

Trước hết với mỗi $\text{cls}z \in H_{n+1}(Z)$ ta có

$$\chi_*\partial_E(\text{cls}z) = \chi_*(\text{cls}x) = \text{cls}\chi(x) = \text{cls}\partial y = 0.$$

Vậy $\text{Im}\partial_E \subset \text{Ker}\,\chi_*$.

Đồng thời với mỗi $\text{cls}y \in H_n(Y)$, ta có

$$\partial_E\sigma_*(\text{cls}y) = \partial_E(\text{cls}\sigma y) = \text{cls}(\chi^{-1}\partial y) = 0$$

(xem biểu đồ xây dựng đồng cấu nối, nếu $z = \sigma y$ với $y \in Y_{n+1}$ là chu trình thì $\partial y = 0$). Vậy $\mathrm{Im}\sigma_* \subset \mathrm{Ker}\,\partial_E$, bởi $\partial_E\sigma_* = 0$.

Để kết thúc chứng minh, ta còn phải chứng tỏ hai bao hàm thức sau là đúng:

$$\mathrm{Ker}\,\chi_* \subset \mathrm{Im}\partial_E, \tag{4}$$

$$\mathrm{Ker}\,\partial_E \subset \mathrm{Im}\sigma_* \tag{5}$$

Lấy chu trình $x \in X_n$ mà $\mathrm{cls}x \in \mathrm{Ker}\,\chi_*$, tức $\chi(x) \in \partial Y_{n+1}$. Khi đó tồn tại $y \in Y_{n+1}$ mà $\chi(x) = \partial y$. Theo biểu đồ xây dựng đồng cấu nối ∂_E, hệ thức cuối cùng cho ta: $\partial_E(\mathrm{cls}\sigma y) = \mathrm{cls}x$, với $\mathrm{cls}\sigma y \in H_{n+1}(Z)$. Điều đó kết thúc chứng minh bao hàm thức (4).

Còn bây giờ nếu $z \in Z_n$ là chu trình mà $\mathrm{cls}z \in \mathrm{Ker}\,\partial_E$, tức $\partial_E(\mathrm{cls}z) = \mathrm{cls}x = 0$ với x được xác định theo biểu đồ xây dựng đồng cấu nối với chỉ số giảm đi 1:

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \chi(x') \arrow[dr] & y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & z \in Z_n \arrow[d] \\
x \arrow[rr, "\chi"] & & \partial y \arrow[r, "\sigma"] & 0
\end{tikzcd}$$

Vì $\mathrm{cls}x = 0$ nên $x \in \partial X_n$, ắt tồn tại $x' \in X_n$ mà $x = \partial x'$. Khi đó dễ thấy rằng $y - \chi x'$ là chu trình của Y_n mà $\sigma(y - \chi(x')) = \sigma y = z$. Và do vậy

$$\sigma_*(\mathrm{cls}(y - \chi(x'))) = \mathrm{cls}z$$

với $\mathrm{cls}(y - \chi(x')) \in H_n(Y)$. Bao hàm thức (5) đã được chứng minh. ■

Để tiện lợi cho nhiều ứng dụng về sau, chúng ta sẽ chuyển các kết quả đã chứng minh sang cho các phức chỉ số trên. Trước hết chúng ta lưu ý rằng các khái niệm phức con, phức thương, dãy khớp các phức chỉ số trên đều có được từ các khái niệm tương ứng đối với các phức chỉ số dưới, thông qua một phép biến đổi chỉ số thay $(-n)$

bởi n. Và từ đó chúng ta cũng có dãy đối đồng điều khớp cho dãy khớp ngắn các phức chỉ số trên.

Định lý 2'. *Đối với các dãy khớp ngắn các phức chỉ số trên*

$$E : 0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0,$$

dãy vô tận các môđun đồng điều sau là dãy khớp:

$$\cdots \to H^{n-1}(Z) \xrightarrow{\delta^E} H^n(X) \xrightarrow{\chi^*} H^n(Y) \xrightarrow{\sigma^*} H^n(Z) \xrightarrow{\delta^E} H^{n+1}(X) \to \cdots$$

trong đó $\chi^* = H^n(\chi), \sigma^* = H^n(\sigma)$ còn δ^E là đồng cấu nối được xác định tương tự đồng cấu nối ∂_E. ■

Nói cách khác biểu đồ xác định đồng cấu nối δ^E sẽ có được từ biểu đồ xác định ∂_E bằng cách giữ nguyên chỉ số n và thay chỉ số $(n+1)$ bởi $(n-1)$, và đương nhiên phải thay các vi phân ∂ bởi các đối vi phân δ.

2.3. Các ví dụ về dãy đồng điều khớp

Ví dụ đầu tiên về dãy đồng điều khớp mà ta đưa ra dưới đây được sinh ra từ dãy khớp ngắn của cái gọi là "nón ánh xạ của biến đổi dây chuyền". Cho $f : X \to X'$ là một biến đổi dây chuyền, ta xây dựng phức $M = M(f)$ được gọi là nón ánh xạ của biến đổi f, bằng cách đặt

$$M_n = X_{n-1} \oplus X'_n, \text{ với mỗi } n \in \mathbb{Z},$$

$$\partial(x, x') = (-\partial x, \partial' x' + fx), \text{ với mỗi cặp } (x, x') \in M_n.$$

Hiển nhiên, $\partial : M_n \to M_{n-1}$ là đồng cấu, và bởi vì với mọi $(x, x') \in M_n$ thì

$$\begin{aligned}
\partial\partial(x, x') &= \partial(-\partial x, \partial' x' + fx) \\
&= (\partial\partial x, \partial'\partial' x' + \partial' fx - f\partial x) \\
&= (0, 0)
\end{aligned}$$

tức $\partial\partial = 0$, nên ∂ là đồng cấu vi phân.

Vậy $M = (M_n, \partial)$ là một phức.

Đồng thời phép nhúng $i : X' \to M$ mà

$$i = \{i_n : X'_n \to M_n\}$$

là một biến đổi dây chuyền. Phép chiếu $\pi : M \to X^+$ mà

$$\pi = \{\pi_n : M_n \to X_n^+ = X_{n-1}\}$$

với $\pi_n(x, x') = x$ cũng là một phép biến đổi dây chuyền.

Phức $X^+ = \{X_n^+, \partial^+\}$ là phức X được đẩy lên một đơn vị về chiều ($X_n^+ = X_{n-1}$) đồng thời đổi dấu vi phân ($\partial_{X^+} = -\partial_X$). Kết cục là ta có được dãy khớp ngắn các phức:

$$E_f : 0 \to X' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} X^+ \to 0.$$

Từ đó chúng ta có

Định lý 3. *Biến đổi dây chuyền $f : X \to X'$ cùng nón ánh xạ $M(f)$ xác định nên dãy khớp sau:*

$$\cdots \to H_n(X') \xrightarrow{i_*} H_n(M) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(X') \to \cdots,$$

trong đó $H_n(X^+) = H_{n-1}(X)$.

Như vậy để có được dãy khớp nói trong định lý 3, ta cần chỉ ra $\partial_{E_f} = f_*$.

Thật vậy, nếu $x \in X_n^+ = X_{n-1}$ là chu trình, ta có thể chọn $\partial_{E_f}(\mathrm{cls}x)$ theo biểu đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
& M_n \ni (x,0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\partial"] & x \in X_{n-1} \arrow[d, "\partial"] \\
f(x) \arrow[r, "i"] & (-\partial x, f(x)) \arrow[r] & 0 \quad (\text{do } \partial x = 0)
\end{tikzcd}$$

tức

$$\partial_{E_f}(\text{cls}x) = \text{cls}f(x) = f_*(\text{cls}x).$$

Vậy $\partial_{E_f} = f_*$. ■

Để trình bày ví dụ tiếp theo ta cần bổ sung khái niệm dãy khớp ngắn chẻ các phức. Ta nói rằng dãy khớp ngắn các phức

$$E : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

là chẻ nếu với mỗi n, dãy các môđun

$$0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0$$

là chẻ.

Chẳng hạn nếu trong dãy E, phức Z gồm tất cả các môđun xạ ảnh hay phức X gồm tất cả các môđun nội xạ thì dãy E là dãy chẻ.

Định lý 4. *Cho G là môđun và E là dãy khớp ngắn chẻ các phức. Khi đó ta có dãy khớp các nhóm đối đồng điều sau:*

$$\cdots \to H^n(Z,G) \xrightarrow{\sigma^*} H^n(Y,G) \xrightarrow{\chi^*} H^n(X,G) \xrightarrow{\delta E^*} H^{n+1}(Z,G) \to \cdots .$$

Chứng minh. Tác động hàm tử $\text{Hom}(-,G)$ vào dãy khớp ngắn chẻ các phức:

$$E : 0 \to X \xrightarrow{\chi} Y \xrightarrow{\sigma} Z \to 0$$

ta được dãy khớp ngắn chẻ các phức nhóm aben:

$$E^* : 0 \to \text{Hom}(Z,G) \to \text{Hom}(Y,G) \to \text{Hom}(X,G) \to 0$$

bởi với mỗi n, dãy:

$$0 \to \mathrm{Hom}(Z_n, G) \to \mathrm{Hom}(Y_n, G) \to \mathrm{Hom}(X_n, G) \to 0$$

là khớp và chẻ, do hàm tử $\mathrm{Hom}(-, G)$ bảo toàn tính khớp chẻ của dãy

$$0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0.$$

Áp dụng định lý 2' về dãy đối đồng điều khớp cho dãy khớp ngắn các phức E^* ta được dãy khớp các nhóm đối đồng điều:

$$\cdots \to H^n(Z, G) \xrightarrow{\sigma^*} H^n(Y, G) \xrightarrow{\chi^*} H^n(X, G) \xrightarrow{\delta E^*} H^{n+1}(Z, G) \to \cdots.$$

■

Ví dụ tiếp theo là dãy đối đồng điều khớp được sinh ra từ dãy khớp ngắn "các môđun hệ số" sau:

$$S : 0 \to G' \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\tau} G'' \to 0. \tag{6}$$

Định lý 5. *Nếu $X = \{X_n, \partial\}$ là phức mà với mỗi n, các môđun X_n là xạ ảnh, còn S là dãy khớp ngắn (6) gồm các môđun. Khi đó, chúng ta có dãy khớp sau của các nhóm đối đồng điều:*

$$\cdots \to H^n(X, G') \xrightarrow{\lambda_*} H^n(X, G) \xrightarrow{\tau_*} H^n(X, G'') \xrightarrow{\delta_S} H^{n+1}(X, G') \to \cdots$$

Chứng minh. Vì mỗi môđun X_n là xạ ảnh nên với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, dãy các môđun sau là khớp:

$$0 \to \mathrm{Hom}(X_n, G') \to \mathrm{Hom}(X_n, G) \to \mathrm{Hom}(X_n, G'') \to 0.$$

Do vậy dãy các phức nhóm aben:

$$S_* : 0 \to \mathrm{Hom}(X, G') \to \mathrm{Hom}(X, G) \to \mathrm{Hom}(X, G'') \to 0$$

là dãy khớp.

Áp dụng định lý 2 về dãy đồng điều khớp cho dãy khớp S_* ta được dãy khớp các nhóm đối đồng điều nói trong định lý, trong đó $\delta_S = \partial_{S_*}$ ■

2.4. Phép biến đổi tự nhiên các hàm tử

Cho hai hàm tử $F, G : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$, từ phạm trù $\mathcal{P}$ tới phạm trù $\mathcal{P}'$.

Một phép biến đổi tự nhiên $\varphi : F \to G$ là họ các cấu xạ $\varphi = \{\varphi(X) : F(X) \to G(X)\}$ với mọi $X \in \mathcal{P}$ thỏa điều kiện: với bất kỳ cấu xạ $\alpha : X \to Y$ ta luôn luôn có $\varphi(Y)F(\alpha) = G(\alpha)\varphi(X)$. Nói cách khác, biểu đồ sau là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle G(\alpha)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

Khái niệm về phép biến đổi tự nhiên giữa hai phản hàm tử $F, G : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ cũng được định nghĩa một cách tương tự.

Một phép biến đổi tự nhiên giữa hai hàm tử (hay hai phản hàm tử) được gọi là *một tương đương tự nhiên* nếu mỗi cấu xạ $\varphi(X)$ là đẳng xạ.

Các hàm tử tương đương tự nhiên với nhau có những tính chất gần như nhau. Chẳng hạn, nếu hai hàm tử F, G giữa các phạm trù môđun là tương đương tự nhiên thì F là khớp khi và chỉ khi G là khớp.

Ví dụ về các hàm tử tương đương tự nhiên: Cho $F :_R\text{Mod} \to \mathcal{A}\text{b}$ là hàm tử chùi cấu trúc nhân ngoài trên mỗi môđun X, để lại $F(X) = (X, +)$; xóa tính chất bảo toàn nhân ngoài của mỗi R-đồng

cấu $\alpha : X \to Y$ để còn lại
$$F(\alpha) = \alpha : (X, +) \to (Y, +)$$
chỉ là đồng cấu nhóm. Còn $G = (R \otimes -) : {}_R\text{Mod} \to \mathcal{A}\text{b}$.

Sử dụng kết quả của phần các hàm tử tenxơ ta thấy ngay rằng F, G là các hàm tử tương đương tự nhiên với nhau. Và vì F là hàm tử khớp nên G cũng là hàm tử khớp.

Bây giờ ta xét phạm trù ξ gồm các dãy khớp ngắn các phức. Cấu xạ từ $E \to E'$ của phạm trù này là bộ ba biến đổi dây chuyền (f, g, h) làm biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccccccc} E : 0 \to & X & \xrightarrow{\chi} & Y & \xrightarrow{\sigma} & Z & \to 0 & & \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & & (*) \\ E' : 0 \to & X' & \xrightarrow{\chi'} & Y' & \xrightarrow{\sigma'} & Z' & \to 0 & & \end{array}$$

Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{Z} : H_n(X), H_n(Y), H_n(Z)$ là các hàm tử từ ξ vào phạm trù Mod.

Định lý 6. *Đối với mỗi dãy $E \in \xi$ các đồng cấu nối $\partial_E : H_{n+1}(Z) \to H_n(X)$ lập thành một phép biến đổi tự nhiên từ các hàm tử $H_{n+1}(Z)$ tới các hàm tử $H_n(X)$.*

Nói cách khác, với mỗi bộ cấu xạ (f, g, h) theo biểu đồ $(*)$, ta có biểu đồ sau là giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(Z) & \xrightarrow{\partial_E} & H_n(X) \\ \downarrow {\scriptstyle H_{n+1}(h)} & & \downarrow {\scriptstyle H_n(f)} \quad (**) \\ H_{n+1}(Z') & \xrightarrow{\partial_{E'}} & H_n(X') \end{array}$$

Chứng minh. Cho $z \in Z_{n+1}$ là chu trình, ảnh $\partial_E(\text{cls} z) = \text{cls} x$ với $x \in X_n$ được tìm theo biểu đồ sau:

$$\begin{array}{ccccc} & & y & \xrightarrow{\sigma} & z \in Z_{n+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ X_n \ni x & \xrightarrow{\chi} & \partial y & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Vậy $H_n(f)\partial_E(\mathrm{cls}z) = \mathrm{cls}f(x)$.

Để tính ảnh $\partial_{E'}H_{n+1}(h)(\mathrm{cls}z) = \partial_{E'}(\mathrm{cls}h(z))$ ta dựa vào biểu đồ tìm x ở trên và tính giao hoán của biểu đồ $(*)$ để tìm $x' \in X'_n$ mà $\partial_{E'}(\mathrm{cls}h(z)) = \mathrm{cls}x'$, theo biểu đồ:

$$\begin{array}{ccccc} & g(y) & \xrightarrow{\quad\sigma'\quad} & h(z) \in Z'_{n+1} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) \rightarrow & \chi' f(x) = g\partial(y) = \partial' g(y) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

trong đó $\sigma' g(y) = h\sigma(y) = h(z)$ và $\chi(x) = \partial y$ nên

$$g\partial y = g\chi(x) = \chi' f(x),$$

tức $x' = f(x)$.

Vậy với mỗi $\mathrm{cls}z \in H_{n+1}(Z)$,

$$H_n(f)\partial_E(\mathrm{cls}z) = \partial_{E'}H_{n+1}(h)(\mathrm{cls}z),$$

tức biểu đồ $(**)$ giao hoán. ■

§3. Đồng điều kỳ dị

Để minh chứng cho ích lợi của các phức, trong tiết này chúng ta cho một mô tả ngắn gọn về đồng điều kỳ dị của các không gian tôpô. Để có được các nhóm đồng điều kỳ dị, ta cần xây dựng các phức kỳ dị cho mỗi không gian tôpô từ lớp tất cả các đơn hình kỳ dị của nó.

3.1. Đơn hình kỳ dị

Chúng ta bắt đầu với khái niệm *đơn hình afin n-chiều.*

Cho $E = \mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n-chiều đã được trang bị tích vô hướng.

$$< a, b >= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

với mỗi $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và mỗi $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Tích vô hướng đó biến E trở thành không gian mê tríc với khoảng cách thông thường giữa hai điểm được đo bằng:

$$d(u, v) = \sqrt{< u - v, u - v >}$$

và do đó E là không gian tôpô.

Tập con C của không gian E được gọi là *tập hợp lồi* nếu với mọi cặp điểm $x, y \in C$ thì tập hợp tất cả các điểm $\xi = \lambda x + (1 - \lambda)y$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ cũng thuộc C.

Tập các điểm $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ còn được gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm x, y. Do vậy tập C là lồi nếu C chứa bất kỳ đoạn thẳng nào có hai đầu mút thuộc nó.

Cho $u_0, u_1, \ldots, u_m$ là $m + 1$ điểm của không gian E; khi đó dễ dàng kiểm tra rằng tập hợp tất cả các điểm:

$$u = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m \tag{1}$$

với $\sum_{i=0}^{m} x_i = 1$ và $x_i \geq 0$ là một tập hợp lồi chứa các điểm $u_0, \ldots, u_m$.

Hơn nữa, đó chính là tập hợp lồi bé nhất chứa các điểm $u_0, \ldots, u_m$ đã cho. Ta gọi nó là *bao lồi* của các điểm $u_0, u_1, \ldots, u_m$.

Ta nói rằng các điểm $u_0, u_1, \ldots, u_m \in E$ là *độc lập afin* nếu hệ véctơ

$$\{u_1 - u_0, u_2 - u_0, u_m - u_0\}$$

là hệ độc lập tuyến tính. Trường hợp hệ $m+1$ điểm $u_0, u_1, \ldots, u_m$ là độc lập afin thì mỗi điểm thuộc bao lồi của nó chỉ có một cách biểu diễn dưới dạng (1). Nói cách khác, nếu u là điểm thuộc bao lồi của hệ, thì tồn tại duy nhất bộ các số thực $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ mà $\sum x_i = 1$ và $x_i \geq 0$ sao cho $u = x_0u_0 + x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$. Bộ số thực $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ được gọi là *tọa độ hướng tâm* của điểm u đối với hệ độc lập afin: $u_0, u_1, \ldots, u_m$.

Ta gọi bao lồi của $m+1$ điểm độc lập afin trong không gian Euclide E là *đơn hình afin m-chiều* . Các điểm này gọi là các *đỉnh của đơn hình.* Như vậy đơn hình 0-chiều là một điểm, đơn hình 1-chiều là đoạn thẳng, đơn hình 2-chiều là tam giác, đơn hình 3-chiều là tứ diện...

Với mỗi số nguyên không âm n, ta chọn trước một đơn hình afin n-chiều làm *đơn hình mẫu* và ký hiệu nó là Δ^n, đồng thời đánh số các đỉnh của nó thành bộ sắp thứ tự $(0, 1, 2, \ldots, n)$. Chẳng hạn, có thể chọn một đơn hình mẫu trong không gian $E = \mathbb{R}^n$ với đỉnh 0 là gốc tọa độ, các đỉnh còn lại là các điểm đơn vị $e_1, e_2, \ldots, e_n$ với $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Cho X là không gian tôpô. Một *đơn hình kỳ dị n-chiều* trong X là một ánh xạ liên tục bất kỳ $T : \Delta^n \to X$, từ đơn hình mẫu n-chiều vào không gian X. Ví dụ, đơn hình kỳ dị 0-chiều trong X là điểm nào đó của X, chính xác hơn đó là ánh xạ đưa điểm Δ^0 vào điểm nào đó trong X.

Trong các đơn hình kỳ dị của các không gian tôpô, ta chú ý tới một lớp các đơn hình đóng một vai trò quan trọng trong việc xây dựng nên các toán tử vi phân của phức kỳ dị sau này, đó là các đơn hình kỳ dị trong các tập hợp lồi của không gian E.

Cho $A : E \to E$ là phép biến đổi tuyến tính của không gian E và

a là phần tử cố định trong E. Hàm $f : E \to E$ được xác định theo công thức:

$$f(u) = a + A(u), \forall u \in E$$

được gọi là *phép biến đổi afin* của E. Vì f là hợp thành của một phép biến đổi tuyến tính và một phép tịnh tiến, đều là các ánh xạ liên tục, nên hiển nhiên f cũng là ánh xạ liên tục. Và do đó các biến đổi afin của không gian E, khi hạn chế lại trên các đơn hình afin m-chiều ($m \leq n$) cho ta các đơn hình kỳ dị m-chiều trong không gian E. Hơn thế nữa, ta có

Định lý 1. *Nếu $u_0, u_1, \ldots, u_n$ là $n+1$ điểm độc lập afin của không gian Euclide n-chiều E và $v_0, v_1, \ldots, v_n \in E$. Khi đó, tồn tại và duy nhất một phép biến đổi afin $f : E \to E$ sao cho $f(u_i) = v_i, i = 0, \ldots, n$.*

Chứng minh. Bởi $u_0, u_1, \ldots, u_n$ độc lập afin nên hệ n véctơ: $\{u_1 - u_0, u_2 - u_0, \ldots, u_n - u_0\}$ là độc lập tuyến tính và là cơ sở của không gian E. Khi đó, tồn tại và duy nhất một phép biến đổi tuyến tính $A : E \to E$ sao cho

$$A(u_i - u_0) = v_i - v_0, i = 0, \ldots, n.$$

Xét biến đổi afin $f : E \to E$ mà

$$f(u) = A(u - u_0) + v_0.$$

Dễ thấy $f(u_i) = v_i, i = 0, \ldots, n$. Hơn nữa, có thể kiểm tra không khó khăn đó là phép biến đổi afin duy nhất cần tìm. ■

Biến đổi afin f khi hạn chế trên đơn hình afin n-chiều gồm các đỉnh $u_0, u_1, \ldots, u_n$ có công thức trong tọa độ hướng tâm như sau:

$$f(x_0u_0 + x_1u_1 + \cdots + x_nu_n) = x_0v_0 + x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

với $x_i \geq 0$ và $\sum x_i = 1$. Thật vậy, theo công thức đã tìm thấy ở định lý 1 ta có:

$$\begin{aligned} f(\sum x_i u_i) &= v_0 + A(\sum x_i u_i - u_0) \\ &= v_0 + A[\sum x_i(u_i - u_0)] \\ &= v_0 + \sum x_i A[u_i - u_0] \\ &= v_0 + \sum x_i(v_i - v_0) \\ &= \sum x_i v_i. \end{aligned}$$

Trường hợp riêng, khi $v_0, v_1, \ldots, v_n$ là tập sắp thứ tự các điểm của một tập lồi C, biến đổi afin duy nhất $f : E \to E$ chuyển đỉnh thứ i của đơn hình mẫu Δ^n vào điểm v_i với mỗi i, cho ta ánh xạ liên tục từ Δ^n vào tập lồi C. Ta ký hiệu ánh xạ đó như sau:

$$(v_0, v_1, \ldots, v_n)_C : \Delta^n \to C,$$

và gọi nó là *đơn hình kỳ dị afin n-chiều*. Nếu $v_0, v_1, \ldots v_n$ cũng độc lập afin thì ánh xạ này là phép đồng phôi của đơn hình mẫu Δ^n lên đơn hình với các đỉnh v_i. Nói riêng, đơn hình kỳ dị afin: $J_n = (0, 1, 2, \ldots, n)_{\Delta^n}$ là phép đồng nhất đơn hình mẫu Δ^n lên chính nó. Khi $v_0, v_1, \ldots, v_n$ là hệ điểm phụ thuộc (tức không độc lập afin) thì ta nói ánh xạ $(v_0, v_1, \ldots, v_n)_C$ là *phép co rút* đơn hình mẫu vào đơn hình có số chiều bé hơn.

3.2. Các toán tử bờ

Bây giờ chúng ta sẽ mô tả các bờ, hay còn gọi là các biên của các đơn hình kỳ dị n-chiều mà thực chất chúng là các đơn hình kỳ dị $(n-1)$-chiều nào đó.

Hãy bắt đầu với các đơn hình mẫu. Các biên của tam giác $\Delta^2 = (0, 1, 2)$, chẳng hạn, là các cạnh biểu diễn bởi các đoạn thẳng

$(1,2),(0,2),(0,1)$ mà hiển nhiên có thể xem là ba ánh xạ liên tục: $(1,2)_{\Delta^2},(0,2)_{\Delta^2},(0,1)_{\Delta^2}$ của đơn hình Δ^1 vào Δ^2, tức là các đơn hình kỳ dị afin 1-chiều.

Như vậy, có thể thấy đơn hình mẫu Δ^n có $n+1$ biên mà biên thứ i là đơn hình kỳ dị afin $(n-1)$-chiều, ta ký hiệu nó là ε_n^i, hay đơn giản là ε^i. Vậy, với mỗi $i = 0,\dots,n$

$$\varepsilon^i = \varepsilon_n^i = (0,1,\dots,\hat{i},\dots,n)_{\Delta^n} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n.$$

(ký hiệu $\hat{i}$ chỉ rằng i bị khuyết).

Đối với đơn hình kỳ dị bất kỳ trong không gian tôpô X, $T : \Delta^n \to X$, $(n+1)$ biên của T được xác định trên cơ sở các biên của Δ^n. Cụ thể nếu gọi d_iT là biên thứ i của T thì

$$d_iT = T\varepsilon_n^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n \to X. \tag{2}$$

Như vậy d_iT chính là ánh xạ nhận được bằng cách hạn chế T trên biên thứ i của đơn hình Δ^n, và được xét như là ánh xạ đi từ Δ^{n-1}. Nói riêng khi $T = J_n : \Delta^n \to \Delta^n$ thì

$$d_iT = J_n\varepsilon_n^i = \varepsilon_n^i,$$

và do đó công thức (2) có thể viết dưới dạng mới, tiện lợi hơn cho các chứng minh về sau

$$d_iT = T\varepsilon_n^i = T(d_iJ_n). \tag{3}$$

Trường hợp các đơn hình kỳ dị afin $(v_0,v_1,\dots,v_n)_C$, các biên thứ i của nó hiển nhiên nhận được bằng cách loại bỏ đỉnh thứ i, tức:

$$d_i(v_0,v_1,\dots,v_n)_C = (v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n)_C : \Delta^{n-1} \to C.$$

Có thể dễ dàng nhận thấy rằng, các toán tử lấy biên các đơn hình kỳ dị thỏa mãn hệ thức:

$$d_id_jT = d_{j-1}d_iT, \qquad \text{với } i<j. \tag{4}$$

Thật vậy, do công thức (3) mà ta chỉ cần khẳng định công thức (4) đúng với $T = J_n$, và trong trường hợp này thì sự đúng đắn của hệ thức gần như là hiển nhiên vì bước đầu loại bỏ đỉnh j, sau đó tới đỉnh i cũng như là bước đầu loại bỏ đỉnh i, sau đó loại bỏ đỉnh $j-1$ (vì $j > i$ nên sau khi bỏ i và đánh số lại thì j được chuyển thành $j-1$).

3.3. Phức và đồng điều kỳ dị

Bây giờ ta tiến hành xây dựng phức kỳ dị $S(X)$ cho không gian tôpô X bất kỳ. Với mỗi $n \geq 0$, ta chọn $S_n(X)$ là nhóm aben tự do sinh bởi tập tất cả các đơn hình kỳ dị n-chiều của không gian X. Khi đó, mỗi toán tử lấy biên thứ i của các đơn hình kỳ dị n-chiều sẽ xác định một đồng cấu từ nhóm aben $S_n(X)$ tới nhóm $S_{n-1}(X)$ mà ta ký hiệu là $d_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$. Hiển nhiên, nếu $T \in S_n(X)$ thì $d_iT \in S_{n-1}(X), \forall i = 0, 1, \ldots, n$ là một đơn hình kì dị n-chiều. Toán tử vi phân $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ được xác định là tổng đan dấu của các đồng cấu biên d_i. Cụ thể là

$$\partial T = d_0T - d_1T + \ldots + (-1)^n d_nT = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_iT, \qquad (n > 0)$$

với mỗi phần tử sinh $T \in S_n(X)$. Hiển nhiên ∂ được xác định một cách duy nhất vì $S_n(X)$ là môđun tự do và mỗi đồng cấu trên môđun tự do là hoàn toàn xác định khi biết ảnh cơ sở.

Ta còn phải chứng minh $\partial\partial = 0$. Thật vậy, với bất kỳ đơn hình kỳ dị $T \in S_n(X)$ ta có

$$\begin{aligned}
\partial\partial T &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}d_id_jT + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}d_id_jT \\
&= \sum_{j-1\geq i}(-1)^{i+(j-1)+1}d_{j-1}d_iT + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}d_id_jT.
\end{aligned}$$

Nếu ký hiệu lại các biến cho tổng thứ nhất, ta dễ dàng nhận thấy, các số hạng của hai tổng trên là như nhau, tuy nhiên chúng sai khác về dấu. Vậy $\partial\partial T = 0$, tức $\partial\partial = 0$.

Và như vậy, ta có quyền nói tới các *nhóm đồng điều của phức* $S(X)$, đó là

$$H_n(X) = H_n(S(X)).$$

Ta gọi $H_n(X)$ là *nhóm đồng điều kỳ dị n-chiều* của không gian tôpô X.

Định lý 2. *Với mỗi $n > 0$, đồng điều kỳ dị $H_n(X)$ là hàm tử hiệp biến từ phạm trù các không gian tôpô tới phạm trù các nhóm aben.*

Chứng minh. Hiển nhiên H_n đặt mỗi không gian tôpô X với nhóm $H_n(X) = H_n(S(X))$. Cho $f : X \to Y$ là các ánh xạ liên tục. Khi đó với mỗi đơn hình kỳ dị $T \in S_n(X)$, ánh xạ $fT : \Delta^n \to X \to Y$ là một đơn hình kỳ dị của Y, tức $fT \in S_n(Y)$. Tương ứng: $T \to fT$ xác định trên tập cơ sở của $S_n(X)$ sinh ra đồng cấu $S(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$. Hơn nữa, từ hệ thức

$$d_i(fT) = fT\varepsilon_n^i = f(d_iT)$$

ta suy ra $\partial S(f)T = S(f)\partial(T)$ với mỗi phần tử sinh $T \in S_n(X)$, do đó

$$\partial S(f) = S(f)\partial.$$

Vậy $S(f)$ là phép biến đổi dây chuyền, $S(f) : S(X) \to S(Y)$ và cảm sinh đồng cấu

$$H_n(S(f)) : H_n(X) \to H_n(Y).$$

Xem như bài tập, việc kiểm tra $H_n(X)$ thỏa các tiên đề HT1 và HT2, xin nhường lại cho độc giả. ■

Ta cũng có thể xây dựng các *nhóm đối đồng điều kỳ dị* của không gian tôpô X lấy hệ số trong nhóm aben cho trước G. Bằng cách tác động phản hàm tử $\mathrm{Hom}(-, G)$ lên phức kỳ dị $S(X)$ ta được phức chỉ số trên $\mathrm{Hom}(S(X), G)$. Khi đó, các nhóm đối đồng điều của phức $\mathrm{Hom}(S(X), G)$ là $H^n(S(X), G)$ chính là các nhóm đối đồng điều kỳ dị của không gian X lấy hệ số trong G.

Để ý rằng phức $S(X)$ được xác định ở trên có một chút không rõ ràng tại nhóm $S_0(X)$, để khắc phục khiếm khuyết đó ta có thể bổ sung đồng cấu $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$, chuyển các đơn hình kỳ dị 0-chiều vào phần tử đơn vị $1 \in \mathbb{Z}$, xem như là sự làm đầy $S(X)$ (dĩ nhiên các đồng cấu sau $\mathbb{Z}$ là đồng cấu 0).

Dễ dàng kiểm tra $\varepsilon\partial : S_1(X) \to \mathbb{Z}$ là đồng cấu 0, do vậy dãy bổ sung của $S(X)$:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} S_0(X) \xleftarrow{\partial} S_1(X) \leftarrow \cdots \leftarrow S_n(X) \leftarrow \cdots$$

quả là một phức. Hơn nữa, đồng cấu ε cảm sinh nên đồng cấu $\varepsilon_* : H_0(X) \to Z$ là một toàn cấu.

3.4. Đồng luân

Mục này trình bày một cách vắn tắt, không chứng minh, một số kết quả liên quan tới khái niệm đồng luân của các ánh xạ liên tục trong phạm trù $\mathcal{T}$p các không gian tôpô và khái niệm đồng luân dây chuyền các phức.

Ta nói rằng, hai ánh xạ liên tục f, g từ không gian X vào không gian Y là *đồng luân* nếu có thể biến dạng liên tục ánh xạ f tới ánh xạ g. Chính xác hơn:

Định nghĩa: Hai ánh xạ liên tục $f, g : X \to Y$ được gọi là *đồng luân* nếu tồn tại ánh xạ liên tục $F : X \times [0, 1] \to Y$ sao cho

$$F(x, 0) = f(x) \text{ và } F(x, 1) = g(x), \forall x.$$

Khi đó ta viết: $F : f \simeq g : X \to Y$.

Như vậy, đồng luân bắt đầu khi $t = 0$ với ánh xạ f, trải theo tất cả các t thuộc đoạn $[0, 1]$ và kết thúc khi $t = 1$ với ánh xạ g.

Định lý 3. *Nếu $f \simeq g : X \to Y$ là các ánh xạ liên tục đồng luân với nhau thì các biến đổi dây chuyền cảm sinh $S(f), S(g) : S(X) \to S(Y)$ là đồng luân dây chuyền với nhau.* ■

Từ kết quả trên đây của định lý 3, kết hợp với các kết quả đã biết về các đồng luân dây chuyền, ta có

Hệ quả 4. *Nếu các ánh xạ liên tục $f, g : X \to Y$ là đồng luân với nhau thì các đồng cấu cảm sinh $H_n(f), H_n(g) : H_n(X) \to H_n(Y)$ của các nhóm đồng điều kì dị là bằng nhau.* ■

Bài tập

Bài 3.1 Ta gọi phức S là q-biệt lập nếu $S_n = 0$ khi $n \notin \{q, q+1\}$ và đồng cấu $\partial : S_{q+1} \to S_q$ là đơn cấu. Chứng minh rằng mỗi phức X của các nhóm aben tự do X_n là tổng trực tiếp của các phức q-biệt lập (theo với mỗi chỉ số q, có chỉ một hạng tử).

Bài 3.2 Ta gọi phức q-biệt lập S các nhóm aben là phức sơ cấp nếu $S_{q+1} = S_q = \mathbb{Z}$ hay $S_q = \mathbb{Z}$ và $S_{q+1} = 0$. Chứng minh rằng mỗi phức q-biệt lập S mà S_q và S_{q+1} là các nhóm aben tự do hữu hạn sinh, là tổng trực tiếp các phức sơ cấp.

Bài 3.3 Chứng minh rằng: mỗi một phức X với các X_n là nhóm aben tự do hữu hạn sinh là tổng trực tiếp các phức sơ cấp.

Bài 3.4 Mỗi mô đun A có thể xem như phức tầm thường với $A_0 = A$ và $A_n = 0$ khi $n \neq 0$. Cho phức dương X và biến đổi dây chuyền $\varepsilon : X \to A$. Đồng luân co rút đối với ε là biến đổi dây chuyền $f : A \to X$ sao cho $\varepsilon f = 1_A$ và đồng luân dây chuyền $s : 1 \simeq f\varepsilon$. Chứng minh rằng: nếu biến đổi dây chuyền $\varepsilon : X \to A$ có đồng luân co rút thì ta có các nhóm đồng điều $H_n(X) = 0$ khi $n > 0$ và $\varepsilon_* : H_0(X) \cong A$.

Bài 3.5 Chứng minh tính chất hợp lý của công thức xác định đồng cấu nối $\partial_E : H_{n+1}(Z) \to H_n(X)$ trong mục 2.2 về "dãy đồng điều khớp". Chứng minh tính chất đồng cấu của ∂_E.

Bài 3.6 Hãy mô tả cụ thể đồng cấu nối $\delta^E : H^n(X, G) \to H^{n+1}(Z, G)$ giữa các nhóm đối đồng điều, sinh ra bởi dãy khớp các phức nhóm aben có được khi tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(-, G)$ vào dãy khớp ngắn chẻ các phức $E : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$, trong định lý 4 mục 2.3.

Bài 3.7 Cho dãy khớp ngắn chẻ các phức: $E : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$, và G là mô đun. Hãy viết dãy đối đồng điều khớp của dãy khớp các phức được tạo ra khi tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(G, -)$ vào dãy E.

Bài 3.8 Cho dãy khớp ngắn chẻ các R-mô đun $0 \to A \to B \to C \to 0$, và phức $X = \{X_n, \partial\}$. Hãy viết các dãy đối đồng điều khớp của các dãy khớp các phức sau:

a) $0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to 0.$

b) $0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B) \to \mathrm{Hom}(X, C) \to 0.$

Bài 3.9 Cho dãy khớp ngắn các R-mô đun và phức $X = \{X_n, \partial\}$, gồm các mô đun nội xạ. Chứng minh rằng dãy các phức sau là khớp, và viết dãy đối đồng điều khớp của nó:

$$0 \to \mathrm{Hom}(C, X) \to \mathrm{Hom}(B, X) \to \mathrm{Hom}(A, X) \to 0.$$

(dãy khớp ngắn các mô đun là: $0 \to A \to B \to C \to 0$).

Bài 3.10 Cho các biến đổi dây chuyền $f \simeq g : X \to X'$. Chứng minh rằng các dãy đồng điều khớp tương ứng với các nón ánh xạ $M(f)$ và $M(g)$ là đẳng cấu với nhau.

Bài 3.11 Cho biểu đồ giao hoán các R-mô đun:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & \end{tikzcd}$$

trong đó các dòng là khớp. Sử dụng định lý dãy đồng điều khớp, chứng minh rằng từ biểu đồ trên, ta có dãy khớp sau:

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \to \mathrm{Ker}\,\beta \to \mathrm{Ker}\,\gamma \to A'/\mathrm{Im}\alpha \to B'/\mathrm{Im}\beta \to C'/\mathrm{Im}\gamma.$$

Bài 3.12 Cho G là bao lồi của các điểm độc lập afin: $u_0, u_1, \ldots, u_m$. Chứng minh rằng điểm $u \in G$ là trùng với một trong các điểm u_i khi và chỉ khi u luôn luôn là một trong hai đầu mút của đoạn thẳng bất kỳ nằm trong G, chứa u.

Bài 3.13 Hãy tính các nhóm đồng điều kỳ dị $H_n(X)$ của không gian tôpô X chỉ gồm một điểm duy nhất.

Bài 3.14 Hãy sử dụng tọa độ hướng tâm của điểm u bất kỳ thuộc đơn hình mẫu Δ^n để biểu diễn công thức của đơn hình kỳ dị n-chiều T bất kỳ: $T(u) = T(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Sử dụng công thức này để mô tả công thức của toán tử lấy biên thứ i của đơn hình kỳ dị T. Từ đó sử dụng các công thức đó để chứng minh hệ thức: $d_i d_j T = d_{j-1} d_i T, i < j$.

Bài 3.15 Cho X là không gian tôpô liên thông đường. Chứng minh rằng nhóm đồng điều kỳ dị $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Bài 3.16 Ta nói không gian tôpô X là co rút vào điểm $x_0 \in X$ nếu các ánh xạ đồng nhất 1_X và ánh xạ hằng X vào x_0 là đồng luân với nhau. Chứng minh rằng:

a) Mỗi tập lồi C trong không gian Euclide là co rút vào bất kỳ điểm $w \in C$.

b) Nếu X là không gian tôpô co rút vào điểm $x_0 \in X$ thì các nhóm đồng điều kỳ dị $H_n(X) = 0$ khi $n > 0$ và $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Chương IV

CÁC HÀM TỬ TOR$_n$ VÀ EXT^n

§1. Phép giải

Có những cách khác nhau để xây dựng các hàm tử Tor_n và Ext^n (hai trụ cột của đại số đồng điều). Tuy nhiên chúng tôi sẽ trình bày trong chương này phép dựng hai hàm tử này bằng các phép giải xạ ảnh. Vì vậy chúng ta bắt đầu bằng các khái niệm và tính chất về phép giải xạ ảnh.

1.1. Định nghĩa

Cho A là một R-môđun phải tùy ý. Ta gọi *phép giải* của A là một dãy khớp các R-môđun và các đồng cấu

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0. \tag{1}$$

Nói riêng, nếu X_n là môđun tự do (tương ứng môđun xạ ảnh) trên R với mọi $n \geq 0$ thì (1) được gọi là một *phép giải tự do* (tương ứng *phép giải xạ ảnh*) của môđun A.

Định lý sau đây khẳng định sự tồn tại của phép giải xạ ảnh.

Định lý 1. *Mọi môđun A trên R đều có một phép giải tự do.*

Chứng minh. Ta đã biết rằng mọi môđun A đều đẳng cấu với một môđun thương của một môđun tự do. Do đó tồn tại một dãy khớp ngắn

$$0 \to X_0 \overset{\alpha_0}{\to} F_0 \overset{\beta_0}{\to} A \to 0$$

trong đó F_0 là môđun tự do trên R. Lại vì môđun X_0 đẳng cấu với một môđun thương của môđun tự do nên ta cũng có dãy khớp ngắn

$$0 \to X_1 \overset{\alpha_1}{\to} F_1 \overset{\beta_1}{\to} X_0 \to 0$$

trong đó F_1 là môđun tự do trên R. Như vậy bằng phép qui nạp toán học ta thu được các dãy khớp ngắn

$$0 \to X_n \overset{\alpha_n}{\to} F_n \overset{\beta_n}{\to} X_{n-1} \to 0$$

với mọi số nguyên $n > 0$, ở đó F_n là môđun tự do trên R.

Bây giờ ta lập dãy

$$\cdots \to F_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} F_n \overset{\partial_n}{\to} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \overset{\partial_1}{\to} F_0 \overset{\partial_0}{\to} A \to 0 \qquad (2)$$

trong đó F_n là các môđun tự do xây dựng như trên, còn

$$\partial_n = \begin{cases} \beta_0 & \text{nếu } n = 0 \\ \alpha_{n-1}\beta_n & \text{nếu } n \geq 1 \end{cases}$$

Để chứng minh (2) là phép giải tự do của A ta chỉ còn phải chứng minh nó là dãy khớp. Thật vậy, do tính chất của dãy khớp ngắn ta có α_n là đơn cấu và β_n là toàn cấu với mọi $n \geq 0$ nên ta có $\mathrm{Im}\partial_{n+1} = \mathrm{Im}\alpha_n = \mathrm{Ker}\,\beta_n = \mathrm{Ker}\,\partial_n$, tức là $\mathrm{Im}\partial_{n+1} = \mathrm{Ker}\,\partial_n$ với mọi $n \geq 0$. Đó là điều cần phải chứng minh. ■

Ở trên chúng ta đã chứng minh được sự tồn tại phép giải xạ ảnh của môđun A. Trong phần còn lại của tiết này chúng ta sẽ chứng tỏ tính duy nhất của phép giải xạ ảnh theo nghĩa hai phép giải xạ ảnh bất kỳ của cùng một môđun A đều tương đương đồng luân.

Trước hết ta thiết lập mệnh đề sau

Mệnh đề 2. *Cho $h : A \to B$ là đồng cấu của môđun A vào môđun B bất kỳ và*

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial} X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{\partial} A \to 0$$

là một phép giải xạ ảnh bất kỳ của A,

$$Y : \cdots \to Y_{n+1} \xrightarrow{\partial'} Y_n \xrightarrow{\partial'} Y_{n-1} \to \cdots \to Y_0 \xrightarrow{\partial'} B \to 0$$

là một phép giải xạ ảnh bất kỳ của B. Khi đó, tồn tại các đồng cấu

$$f_n : X_n \to Y_n, \qquad n \geq 0$$

sao cho biểu đồ sau đây là giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \to & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \to \cdots \to & X_0 & \xrightarrow{\partial_0} & A & \to 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle h} & \\
\cdots \to & Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{\partial'_n} & Y_{n-1} & \to \cdots \to & Y_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & B & \to 0
\end{array}$$

Các đồng cấu $f_n, n \geq 0$ và h lập thành phép biến đổi dây chuyền $X \to Y$.

Chứng minh. Vì X_0 là môđun xạ ảnh và $\partial' : Y_0 \to B$ là một toàn cấu nên theo định nghĩa của môđun xạ ảnh, tồn tại đồng cấu $f_0 : X_0 \to Y_0$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{\partial_0} & A & \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle h} & \\ Y_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & B & \to 0 \end{array}$$

tức là $\partial' f_0 = h\partial$.

Giả sử với mọi $0 \leq m < n$ đã xây dựng được các đồng cấu $f_m : X_m \to Y_m$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{\partial} & X_{m-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f_m} & & \downarrow{\scriptstyle f_{m-1}} \\ Y_m & \xrightarrow{\partial'} & Y_{m-1} \end{array}$$

trong đó $f_{-1} = h$.

Xét biểu đồ

$$\begin{array}{ccccc} X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & X_{n-2} \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-2}} \\ Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-2} \end{array}$$

Vì X_n xạ ảnh và các dòng là khớp nên theo bài tập 4 chương II suy ra tồn tại đồng cấu $f_n : X_n \to Y_n$ sao cho biểu đồ trên đây là giao hoán. ■

Như thế, ta đã hoàn thành phép xây dựng các đồng cấu của phép biến đổi dây chuyền: $X \to Y$. Hơn thế nữa, chúng ta còn có kết quả sau

Mệnh đề 3. *Cho X, Y là các phép giải xạ ảnh của các môđun A, B như trong mệnh đề 2 và $f = \{f_n, h | n \geq 0\}, g = \{g_n, h | n \geq 0\}$ là các phép biến đổi dây chuyền: $X \to Y$. Khi đó, f đồng luân với g.*

Chứng minh. Ta phải xây dựng các đồng cấu

$$k_n : X_n \to Y_{n+1}$$

sao cho $\partial' k_n + k_{n-1}\partial = f_n - g_n$ với mọi n.

Trước hết ta đặt $k_{-1} = 0 : A \to Y_0$.

Giả sử $n \geq 0$ và giả thiết đã dựng được các đồng cấu

$$k_m : X_m \to Y_{m+1}, \qquad 0 \leq m < n$$

sao cho

$$\partial' k_m + k_{m-1}\partial = f_m - g_m.$$

Xét biểu đồ

$$\begin{array}{ccccc} & & X_n & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial'} & Y_n & \xrightarrow{\partial'} & Y_{n-1} \end{array}$$

trong đó j là đồng cấu

$$j = f_n - g_n - k_{n-1}\partial$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \partial' j &= \partial' f_n - \partial' g_n - \partial' k_{n-1}\partial \\ &= \partial' f_n - \partial' g_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - k_{n-2}\partial)\partial \\ &= (\partial' f_n - f_{n-1}\partial) - (\partial' g_n - g_{n-1}\partial) + k_{n-2}\partial\partial \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vì X_n xạ ảnh và dòng là khớp nên theo bài tập 3 chương II tồn tại đồng cấu

$$k_n : X_n \to Y_{n+1}$$

sao cho

$$\partial' k_n = j = f_n - g_n - k_{n-1}\partial.$$

Suy ra

$$\partial' k_n + k_{n-1}\partial = f_n - g_n.$$

Mệnh đề được chứng minh. ■

Từ các mệnh đề 2 và 3 ta thu được định lý sau

Định lý 4. *Hai phép giải xạ ảnh bất kỳ của cùng một môđun A là tương đương đồng luân.*

Chứng minh. Giả sử

$$X : \cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0,$$

và

$$X' : \cdots \to X'_{n+1} \to X'_n \to X'_{n-1} \to \cdots \to X'_0 \to A \to 0,$$

là hai phép giải xạ ảnh của cùng môđun A.

Khi đó, tồn tại các phép biến đổi dây chuyền

$$f = \{f_n : X_n \to X'_n | n \geq -1\},$$

$$g = \{g_n : X'_n \to X_n | n \geq -1\}$$

trong đó $X_{-1} = A = X'_{-1}$ và f_{-1} và g_{-1} là tự đồng cấu đồng nhất của A.

Khi đó gf đồng luân với tự đồng cấu đồng nhất của X, fg đồng luân với tự đồng cấu đồng nhất của X'. ■

§2. Hàm tử xoắn

Trong tiết này chúng ta sẽ định nghĩa tích xoắn của các môđun và nghiên cứu một số tính chất căn bản của nó.

2.1. Định nghĩa

Cho A là R-môđun phải và

$$X : \cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$$

là phép giải xạ ảnh bất kỳ của A.

Phức thu gọn tương ứng với phép giải xạ ảnh X là

$$\overline{X} : \cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to 0.$$

Nghĩa là $\overline{X}$ là phức có được bằng cách thay A bởi môđun 0 trong phép giải xạ ảnh X của A. Với mỗi R-môđun trái B chúng ta có dãy nửa khớp

$$\overline{X}\otimes B : \cdots \to X_{n+1}\otimes B \xrightarrow{\partial_*} X_n\otimes B \xrightarrow{\partial_*} X_{n-1}\otimes B \to \cdots \to X_0\otimes B \to 0$$

trong đó ∂_* là tích tenxơ $\partial \otimes i$ của đồng cấu ∂ và tự đồng cấu đồng nhất i của môđun B. Với mỗi $n \geq 0$ ta định nghĩa $H_n(\overline{X} \otimes B)$ là *tích xoắn n-chiều trên R của các môđun A và B* và ký hiệu là

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B).$$

Khi vành R đã được chỉ rõ, chúng ta sẽ viết gọn là

$$\mathrm{Tor}_n(A, B).$$

Trong trường hợp $n = 1$ chúng ta sử dụng ký hiệu

$$\mathrm{Tor}(A, B)$$

và gọi nó là *tích xoắn* trên R của các môđun A và B đã cho.

Nhận xét rằng khi $n = 0$ thì

$$\mathrm{Tor}_0(A, B) = H_0(\overline{X} \otimes B) = (X_0 \otimes B)/\mathrm{Im}\partial_*.$$

Vì dãy

$$X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

là dãy khớp và hàm tử $(- \otimes B)$ là hàm tử khớp phải nên dãy sau cũng khớp

$$X_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_*} X_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

Suy ra

$$(X_0 \otimes B)/\mathrm{Im}\partial_* \cong A \otimes B.$$

Như vậy

$$\mathrm{Tor}_0(A, B) \cong A \otimes B.$$

Đương nhiên chúng ta cần phải chứng tỏ rằng định nghĩa trên là tốt, nghĩa là tích xoắn n-chiều của A và B

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(\overline{X} \otimes B)$$

không phụ thuộc vào phép giải xạ ảnh của môđun A.

Định lý 1. *Cho A là R-môđun phải và*

$$X : \cdots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0,$$

$$X' : \cdots \to X'_{n+1} \to X'_n \to X'_{n-1} \to \cdots \to X'_0 \to A \to 0$$

là các phép giải xạ ảnh bất kỳ của môđun A. Với mọi R-môđun trái B và mọi $n \geq 0$ ta có

$$H_n(\overline{X} \otimes B) \cong H_n(\overline{X'} \otimes B)$$

trong đó $\overline{X}$ và $\overline{X'}$ lần lượt là các phức thu gọn tương ứng với các phép giải xạ ảnh X và X' của A.

Chứng minh. Theo định lý 4 của của bài 1, hai phép giải xạ ảnh bất kỳ của môđun A đều tương đương đồng luân, nghĩa là tồn tại các phép biến đổi dây chuyền giữa hai phức X và X'

$$f = \{f_n : X_n \to X'_n | n \geq -1\},$$

$$g = \{g_n : X'_n \to X_n | n \geq -1\}$$

(trong đó $X_{-1} = A = X'_{-1}$ và f_{-1}, g_{-1} là tự đồng cấu đồng nhất của

môđun A) sao cho các phép biến đổi dây chuyền hợp thành

$$gf = \{g_n f_n : X_n \to X_n | n \geq -1\},$$

$$fg = \{f_n g_n : X'_n \to X'_n | n \geq -1\}$$

là đồng luân với các phép biến đổi dây chuyền đồng nhất của các dãy X và X'. Không mấy khó khăn, độc giả có thể kiểm chứng được rằng khi đó các phép biến đổi dây chuyền giữa hai phức $\overline{X}$ và $\overline{X'}$

$$\{f_n : X_n \to X'_n | n \geq 0\},$$

$$\{g_n : X'_n \to X_n | n \geq 0\},$$

mà để đơn giản ta vẫn gọi

$$f = \{f_n : X_n \to X'_n | n \geq 0\},$$

$$g = \{g_n : X'_n \to X_n | n \geq 0\},$$

thỏa gf, fg đồng luân với các phép biến đổi dây chuyền đồng nhất giữa hai phức $\overline{X}$ và $\overline{X'}$. Khi đó, ta có các phép biển đổi dây chuyền

$$f \otimes i = \{f_n \otimes i : X_n \otimes B \to X'_n \otimes B | n \geq 0\},$$

$$g \otimes i = \{g_n \otimes i : X'_n \otimes B \to X_n \otimes B | n \geq 0\}$$

giữa $\overline{X} \otimes B$ và $\overline{X'} \otimes B$. Chúng cảm ứng ra các đồng cấu

$$f_* : H_n(\overline{X} \otimes B) \to H_n(\overline{X'} \otimes B),$$

$$g_* : H_n(\overline{X'} \otimes B) \to H_n(\overline{X} \otimes B).$$

Rõ ràng $(g \otimes i)(f \otimes i)$ và $(f \otimes i)(g \otimes i)$ là đồng luân với các phép biến đổi dây chuyền đồng nhất của $\overline{X} \otimes B$ và $\overline{X'} \otimes B$. Do đó $g_* f_*$ và $f_* g_*$ là những đẳng cấu đồng nhất của $H_n(\overline{X} \otimes B)$ và $H_n(\overline{X'} \otimes B)$. Do đó f_* và g_* là các đẳng cấu. Định lý được chứng minh. ■

2.2. Tính chất của tích xoắn

Định lý 2. *Nếu A hay B là môđun xạ ảnh thì*

$$\operatorname{Tor}_n(A, B) = 0, n \geq 1$$

Chứng minh.

a) Trường hợp A là môđun phải xạ ảnh và B là môđun trái tùy ý.

Do A là môđun xạ ảnh nên tồn tại phép giải xạ ảnh

$$X : \cdots \to X_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} X_n \overset{\partial_n}{\to} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \overset{\partial_0}{\to} A \to 0,$$

trong đó $X_n = 0$ với mọi $n \geq 1$, còn $X_0 = A$ và $\partial_n = 0$ với mọi $n \geq 1$, ∂_0 là tự đồng cấu đồng nhất của môđun A. Khi đó

$$\operatorname{Tor}_n(A, B) = H_n(\overline{X} \otimes B) = 0, n \geq 1.$$

b) Trường hợp B là môđun trái xạ ảnh và A là môđun phải tùy ý.

Với A là môđun phải tùy ý, tồn tại phép giải xạ ảnh

$$X : \cdots \to X_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} X_n \overset{\partial_n}{\to} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \overset{\partial_0}{\to} A \to 0.$$

Theo bài tập 21 chương III thì mỗi môđun xạ ảnh là môđun dẹt. Do đó, B là môđun dẹt. Suy ra hàm tử $(- \otimes B)$ chuyển mỗi dãy khớp ngắn thành dãy khớp ngắn. Và do đó $(- \otimes B)$ chuyển mỗi dãy khớp bất kỳ thành dãy khớp. Như vậy, dãy $X \otimes B$ là dãy khớp. Do đó, $\overline{X} \otimes B$ khớp tại $X_n \otimes B$ với mọi $n \geq 1$. Vì vậy,

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) = H_n(\overline{X} \otimes B) = 0, n \geq 1. \blacksquare$$

Định lý 3. *Cho A là R-môđun phải và*

$$0 \to M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \to 0$$

là dãy khớp ngắn tùy ý trong đó P là R-môđun phải xạ ảnh. Khi đó ta có

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(M, B), n > 1,$$
$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Ker}\,(f \otimes i)$$

với mọi R-môđun trái B.

Chứng minh. Gọi X là phép giải xạ ảnh tùy ý của M

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0.$$

Do ∂_0 là toàn cấu và f là đơn cấu nên ta có

$$\mathrm{Ker}\,(f\partial_0) = \mathrm{Ker}\,\partial_0,$$
$$\mathrm{Im}(f\partial_0) = \mathrm{Im}(f).$$

Ta xây dựng được phép giải xạ ảnh X^* của A như sau

$$X_n^* = \begin{cases} X_{n-1} & \text{nếu } n > 0 \\ P & \text{nếu } n = 0 \\ A & \text{nếu } n = -1 \end{cases}$$

và

$$\partial_n^* = \begin{cases} \partial_{n-1} & \text{nếu } n > 1 \\ f\partial_0 & \text{nếu } n = 1 \\ g & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$$

nghĩa là

$$X^* : \cdots \to X^*_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} X^*_n \to \cdots \to X^*_2 \xrightarrow{\partial_1} X^*_1 \xrightarrow{f\partial_0} P \xrightarrow{g} A \to 0.$$

Khi đó, với mọi $n > 1$ ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_n(A, B) &\cong \mathrm{Ker}\,(\partial^*_n \otimes i)/\mathrm{Im}(\partial^*_{n+1} \otimes i) \\ &\cong \mathrm{Ker}\,(\partial_{n-1} \otimes i)/\mathrm{Im}(\partial_n \otimes i) \\ &\cong \mathrm{Tor}_{n-1}(A, B). \end{aligned}$$

Để kết thúc chứng minh của định lý ta còn phải chứng minh đẳng cấu thứ hai, ứng với $n = 1$. Theo tính chất khớp phải của tích tenxơ, từ tính chất khớp của dãy

$$X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

suy ra dãy

$$X_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_1 \otimes i} X_0 \otimes B \xrightarrow{\partial_0 \otimes i} M \otimes B \to 0$$

cũng khớp. Vì vậy ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}(A, B) &= \mathrm{Ker}\,(\partial^*_1 \otimes i)/\mathrm{Im}(\partial^*_2 \otimes i) \\ &= \mathrm{Ker}\,(f\partial_0 \otimes i)/\mathrm{Im}(\partial_1 \otimes i) \\ &= \mathrm{Ker}\,(f\partial_0 \otimes i)/\mathrm{Ker}\,(\partial_0 \otimes i). \end{aligned}$$

Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Ker}\,(f\partial_0 \otimes i) &\to \mathrm{Ker}\,(f \otimes i) \\ x &\mapsto (\partial_0 \otimes i)(x). \end{aligned}$$

Vì $(\partial_0 \otimes i)$ là đồng cấu nên dễ dàng suy ra φ cũng là đồng cấu. Hơn nữa,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,(\partial_0 \otimes i).$$

Do đó ta có đẳng cấu

$$\mathrm{Ker}\,(f\partial_0 \otimes i)/\mathrm{Ker}\,(\partial_0 \otimes i) \cong \mathrm{Ker}\,(f \otimes i).$$

Và như vậy ta được

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Ker}\,(f \otimes i).$$

Định lý được chứng minh. ■

2.3. Tích xoắn của các đồng cấu

Cho $h : A \to A'$ là đồng cấu của các R-môđun phải và $k : B \to B'$ là đồng cấu của các R-môđun trái. Giả sử X và X' là các phép giải xạ ảnh của các môđun A và A' tương ứng. Khi đó, tồn tại phép biến đổi dây chuyền giữa X và X'

$$f = \{f_n : X_n \to X'_n | n \geq -1\}$$

sao cho $f_{-1} = h$. Xét

$$\{f_n : X_n \to X'_n | n \geq 0\}$$

là phép biến đổi dây chuyền giữa $\overline{X}$ và $\overline{X'}$ mà để đơn giản ta vẫn gọi là

$$f = \{f_n : X_n \to X'_n | n \geq 0\}$$

Bằng cách lấy tích tenxơ với đồng cấu k ta có phép biến đổi dây chuyền

$$f \otimes k = \{f_n \otimes k : X_n \otimes B \to X'_n \otimes B | n \geq 0\}$$

của $\overline{X} \otimes B$ vào $\overline{X'} \otimes B$. Vì thế $f \otimes k$ cảm sinh ra các đồng cấu

$$(f \otimes k)_{*n} : \mathrm{Tor}_n(A, B) \to \mathrm{Tor}_n(A, B'), n \geq 0.$$

Dễ thấy rằng các đồng cấu $(f \otimes k)_{*n}$ không phụ thuộc vào phép biến đổi dây chuyền f mà chỉ phụ thuộc vào các đồng cấu h và k.

Đồng cấu $(f \otimes k)_{*n}$ được gọi là *tích xoắn n-chiều* trên R của các đồng cấu h, k và được ký hiệu là

$$\mathrm{Tor}_n(h, k) : \mathrm{Tor}_n(A, B) \to \mathrm{Tor}_n(A, B')$$

Với $n = 1$, ta còn sử dụng ký hiệu

$$\mathrm{Tor}(h, k) : \mathrm{Tor}(A, B) \to \mathrm{Tor}(A, B')$$

và gọi là *tích xoắn* trên R của các đồng cấu h và k.

Với $n = 0$, ta có

$$\mathrm{Tor}_0(h, k) = h \otimes k.$$

Từ các kết quả trên ta thu được định lý sau đây

Định lý 4. Tor_n *là hàm tử hiệp biến của hai biến,* $n \geq 0$. *Nói riêng,* $\mathrm{Tor}_n(-, B)$ *(tương ứng* $\mathrm{Tor}_n(A, -)$*) là các hàm tử hiệp biến từ phạm trù Mod$_R$ (tương ứng phạm trù $_R$Mod) tới phạm trù $\mathcal{A}$b, với mọi môđun trái B (tương ứng mọi môđun phải A).* ∎

2.4. Các dãy khớp của hàm tử xoắn

Giả sử A là R-môđun phải và

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R-môđun trái. A có phép giải xạ ảnh là

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

Theo tính chất của môđun xạ ảnh ta có các dãy khớp ngắn

$$0 \to X_n \otimes B' \to X_n \otimes B \to X_n \otimes B'' \to 0$$

với mọi $n \geq 0$. Vậy ta được dãy khớp ngắn các phức

$$0 \to \overline{X} \otimes B' \to \overline{X} \otimes B \to \overline{X} \otimes B'' \to 0.$$

Do đó ta được dãy đồng điều khớp

$$\cdots \to H_{n+1}(\overline{X} \otimes B'') \xrightarrow{\partial} H_n(\overline{X} \otimes B') \xrightarrow{f_*} H_n(\overline{X} \otimes B)$$

$$\xrightarrow{g_*} H_n(\overline{X} \otimes B'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\overline{X} \otimes B') \to \cdots$$

trong đó f_* và g_* được xác định bởi các phép biến đổi dây chuyền $i \otimes f$ và $i \otimes g$ và ∂ là đồng cấu nối như đã nói trong bài 2 chương II.

Theo định nghĩa

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) = H_n(\overline{X} \otimes B), n \geq 0$$

do đó ta có định lý sau

Định lý 5. *Với mọi R-môđun phải A và mọi dãy khớp ngắn bất kỳ các R-môđun trái:*

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

ta có dãy khớp

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n(A, B') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Tor}_n(A, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Tor}_n(A, B'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{n-1}(A, B)$$

$$\to \cdots \to \mathrm{Tor}(A, B'') \xrightarrow{\partial} A \otimes B' \xrightarrow{i \otimes f} A \otimes B \xrightarrow{i \otimes g} A \otimes B'' \to 0$$

trong đó $f_* = \mathrm{Tor}_n(i, f), g_* = \mathrm{Tor}_n(i, g)$. ■

Bằng cách lập luận tương tự như trên đây chúng ta dễ dàng thu được định lý sau

Định lý 6. *Với mọi R-môđun trái B và mọi dãy khớp ngắn*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

của các R-môđun phải, ta có dãy khớp

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_n(A', B) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Tor}_n(A, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Tor}_n(A'', B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}_{n-1}(A', B)$$

$$\to \cdots \to \mathrm{Tor}(A'', B) \xrightarrow{\partial} A' \otimes B \xrightarrow{f \otimes i} A \otimes B \xrightarrow{g \otimes i} A'' \otimes B \to 0.$$

■

§3. Hàm tử mở rộng

3.1. Định nghĩa

Cho A và B là các R-môđun trái và

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial} X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to A \to 0$$

là phép giải xạ ảnh của A. Phức thu gọn tương ứng với X là

$$\overline{X} : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial} X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \to 0$$

Xét dãy nửa khớp

$$\mathrm{Hom}(\overline{X}, B) : 0 \to \mathrm{Hom}(X_0, B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(X_1, B) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(X_n, B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(X_{n+1}, B) \to \cdots$$

trong đó các đồng cấu $\delta = \mathrm{Hom}(\partial, i)$, với i là tự đồng cấu đồng nhất của môđun B. Với mỗi số nguyên dương n, nhóm đối đồng điều $H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B))$ được gọi là *tích mở rộng n-chiều* trên R của các môđun A và B đã cho và được ký hiệu là

$$\mathrm{Ext}_R^n(A, B).$$

Khi vành R đã được chỉ rõ, ta sử dụng ký hiệu đơn giản hơn

$$\mathrm{Ext}^n(A, B).$$

Với $n = 1$, ta dùng ký hiệu

$$\mathrm{Ext}(A, B)$$

và gọi nó là *tích mở rộng* của các môđun A và B.

Trường hợp $n = 0$ ta có

$$\mathrm{Ext}^0(A, B) = H^0(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) = \mathrm{Ker}\,(\delta^0)$$

với $\delta^0 : \mathrm{Hom}(X_0, B) \to \mathrm{Hom}(X_1, B)$

Vì dãy

$$X_1 \to X_0 \to A \to 0$$

là dãy khớp và hàm tử $\mathrm{Hom}(-, B)$ là hàm tử khớp trái nên dãy sau cũng khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(X_0, B) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}(X_1, B)$$

Suy ra

$$\mathrm{Ker}\,(\delta^0) \cong \mathrm{Hom}(A, B).$$

Và như vậy ta có đẳng cấu

$$\mathrm{Ext}^0(A, B) \cong \mathrm{Hom}(A, B).$$

Để chứng tỏ rằng định nghĩa tích mở rộng như trên là hợp lý ta còn phải chứng minh rằng các nhóm đối đồng điều $H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B))$ không phụ thuộc vào cách chọn phép giải xạ ảnh của môđun A, nghĩa là nếu X' cũng là phép giải xạ ảnh của A thì

$$H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) \cong H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X'}, B)).$$

Bạn đọc có thể dễ dàng thiết lập được phép chứng minh bằng cách "lấy đối ngẫu" phép chứng minh của định lý 1 trong tiết 2. Sau đây chúng ta cũng nêu lên vài tính chất đơn giản của tích mở rộng.

3.2. Tính chất của tích mở rộng

Định lý 1. *Nếu môđun trái A là xạ ảnh thì*

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$$

với mọi số nguyên dương n và với mọi R-môđun trái B.

Chứng minh. Vì A là R-môđun trái xạ ảnh nên có phép giải xạ ảnh

$$X : \cdots \to 0 \xrightarrow{\partial_n} 0 \to \cdots \to 0 \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

trong đó $\partial_n = 0$ với mọi $n \geq 1$, ∂_0 là tự đồng cấu đồng nhất của môđun A. Do đó với $n \geq 1$ thì

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) = 0.$$

Định lý được chứng minh. ■

Định lý 2. *Nếu B là R-môđun trái nội xạ thì*

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$$

với mọi số nguyên dương n và mọi R-môđun trái A.

Chứng minh. Gọi X là một phép giải xạ ảnh bất kỳ của A. Vì X là dãy khớp và B là môđun nội xạ nên ta suy ra dãy $\mathrm{Hom}(X, B)$ cũng là dãy khớp. Vậy ta có

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) = H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) = H^n(\mathrm{Hom}(X, B)) = 0$$

với mọi số nguyên dương n. ■

Định lý 3. *Cho A và B là các R-môđun trái tùy ý,*

$$0 \to M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} A \to 0$$

là một dãy khớp ngắn tùy ý, trong đó P là môđun trái xạ ảnh trên R. Khi đó ta có

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}(M, B), n > 1,$$

$$\mathrm{Ext}(A, B) \cong \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(f, i)].$$

Chứng minh. Xét phép giải xạ ảnh của M

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0.$$

Ta xây dựng phép giải xạ ảnh X^* của môđun A như sau:

$$X^* : \cdots \to X^*_{n+1} \xrightarrow{\partial_n} X^*_n \to \cdots \to X^*_2 \xrightarrow{\partial_1} X^*_1 \xrightarrow{f\partial_0} P \xrightarrow{g} A \to 0$$

trong đó

$$X^*_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{nếu } n \geq 1 \\ P & \text{nếu } n = 0 \end{cases}.$$

Ta dễ dàng kiểm tra tính chất khớp tại X_1 và P của dãy X^*. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(f\partial_0) &= \mathrm{Ker}\,(\partial_0) \quad (\text{do } f \text{ là đơn cấu}) \\ &= \mathrm{Im}(\partial_1) \quad (\text{do } X \text{ khớp}). \\ \mathrm{Im}(f\partial_0) &= \mathrm{Im} f \quad (\text{do } \partial_0 \text{ là toàn cấu}) \\ &= \mathrm{Ker}\, g \quad (\text{do tính chất khớp của dãy khớp ngắn}). \end{aligned}$$

Do đó X^* khớp tại X_1, P và vì vậy X^* là một phép giải xạ ảnh của môđun A.

Theo định nghĩa của tích mở rộng, với mọi $n > 1$ ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^n(A, B) &= H^n(\operatorname{Hom}(\overline{X^*}, B)) \\
&= H^n(\operatorname{Hom}(X^*, B)) \\
&= \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(\partial_n^*, i))/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(\partial_{n-1}^*, i)) \\
&= \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(\partial_{n-1}, i))/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(\partial_{n-2}, i)) \\
&= \operatorname{Ext}^{n-1}(M, B).
\end{aligned}$$

Theo tính chất khớp trái của hàm tử $\operatorname{Hom}(-, B)$, từ tính chất khớp của dãy

$$X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

suy ra dãy sau cũng khớp

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\partial_0, i)} \operatorname{Hom}(X_0, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(\partial_1, i)} \operatorname{Hom}(X_1, B).$$

Do đó, ta có $\operatorname{Hom}(\partial_0, i)$ là đơn cấu và $\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(\partial_0, i)) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(\partial_1, i))$.

Vì vậy ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}(A, B) &= \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(\partial_2^*, i))/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(\partial_1^*, i)) \\
&= \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(\partial_1, i))/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(f\partial_0, i)) \\
&= \operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(\partial_0, i)/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(f\partial_0, i)) \\
&\cong \operatorname{Hom}(M, B)/\operatorname{Im}(\operatorname{Hom}(f, i)) \\
&= \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}(f, i)).
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. ■

3.3. Tích mở rộng của các đồng cấu

Xét các đồng cấu

$$h : A' \to A, k : B \to B'$$

của các môđun trái trên R.

Giả sử X và X' là các phép giải xạ ảnh của các môđun A và A' tương ứng. Khi đó, chúng ta có phép biến đổi dây chuyền giữa của X' vào X

$$f = \{f_n : X'_n \to X_n | n \geq -1\}$$

sao cho $f_{-1} = h$. Khi đó

$$\{f_n : X'_n \to X_n | n \geq 0\}$$

mà để đơn giản chúng ta vẫn gọi

$$f = \{f_n : X'_n \to X_n | n \geq 0\}$$

là một phép biến đổi dây chuyền của $\overline{X'}$ vào $\overline{X}$. Theo tính chất của hàm tử Hom chúng ta cũng có phép biến đổi dây chuyền

$$\mathrm{Hom}(f, k) = \{\mathrm{Hom}(f_n, k) : \mathrm{Hom}(X_n, B) \to \mathrm{Hom}(X'_n, B') | n \geq 0\}$$

của dãy $\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)$ vào dãy $\mathrm{Hom}(\overline{X'}, B')$.

Gọi đồng cấu cảm sinh

$$\mathrm{Hom}(f, k)^{*n} : \mathrm{Ext}^n(A, B) \to \mathrm{Ext}^n(A', B')$$

là *tích mở rộng n-chiều* trên R của các đồng cấu h, k và ký hiệu là

$$\mathrm{Ext}^n(h, k) : \mathrm{Ext}^n(A, B) \to \mathrm{Ext}^n(A', B').$$

Khi $n = 1$, ta cũng dùng ký hiệu

$$\mathrm{Ext}(h, k) : \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A', B')$$

và gọi nó là *tích mở rộng* của các đồng cấu h, k.

Đặt biệt khi $n = 0$ ta có

$$\mathrm{Ext}^0(h, k) = \mathrm{Hom}(h, k).$$

Độc giả có thể kiểm tra dễ dàng rằng tích mở rộng n-chiều các đồng cấu được chúng ta định nghĩa như trên hoàn toàn không phụ thuộc vào sự lựa chọn các phép giải xạ ảnh của A và A' cũng như cách chọn phép biến đổi dây chuyền $f : X' \to X$. Như vậy, ta thu được định lý sau

Định lý 4. *Tích mở rộng n-chiều Ext^n là hàm tử của hai biến, phản biến theo biến thứ nhất và hiệp biến theo biến thứ hai. Nói riêng, $\mathrm{Ext}^n(-, B)$ (tương ứng $\mathrm{Ext}^n(A, -)$) là các hàm tử phản biến (tương ứng hiệp biến) từ phạm trù các môđun và các đồng cấu tới phạm trù $\mathcal{A}b$ các nhóm aben, với mọi môđun A (tương ứng mọi môđun B).* ∎

3.4. Các dãy khớp của hàm tử mở rộng

Cho A là môđun trái tùy ý trên R và

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

là một dãy khớp ngắn bất kỳ của các môđun trái trên R.

Giả sử

$$X : \cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \to \cdots \to X_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$$

là một phép giải xạ ảnh của A. Theo tính chất của môđun xạ ảnh ta có các dãy khớp ngắn

$$0 \to \mathrm{Hom}(X_n, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i_n, f)} \mathrm{Hom}(X_n, B)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Hom}(i_n, g)} \mathrm{Hom}(X_n, B'') \to 0$$

trong đó, như thường lệ i_n là đồng cấu đồng nhất của môđun X_n. Từ đó, chúng ta thu được dãy khớp ngắn các phức

$$0 \to \mathrm{Hom}(\overline{X}, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,f)} \mathrm{Hom}(\overline{X}, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,g)} \mathrm{Hom}(\overline{X}, B'') \to 0.$$

Dãy khớp này cảm sinh ra dãy đối đồng điều khớp

$$\cdots \to H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B')) \xrightarrow{f^*} H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) \xrightarrow{g^*}$$

$$\xrightarrow{g^*} H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B'')) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B')) \to \cdots$$

Lại vì $H^n(\mathrm{Hom}(\overline{X}, B)) \cong \mathrm{Ext}^n(A, B)$ nên ta có định lý sau

Định lý 5. *Nếu A là môđun trái trên vành R và*

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

là một dãy khớp ngắn các môđun trái trên R, thì ta có một dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,f)} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(i,g)} \mathrm{Hom}(A, B'')$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(A, B') \to \cdots \to \mathrm{Ext}^n(A, B') \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^n(A, B)$$

$$\xrightarrow{g^*} \mathrm{Ext}^n(A, B'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{n+1}(A, B') \to \cdots .$$

■

Định lý 6. *Nếu B là môđun trái trên R và*

$$0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$$

là dãy khớp ngắn những môđun trái trên R, thì ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'', B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,i)} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,i)} \mathrm{Hom}(A', B)$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(A'', B) \to \cdots \to \mathrm{Ext}^n(A'', B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Ext}^n(A, B)$$

$$\xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}^n(A', B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{n+1}(A'', B) \to \cdots .$$

■

Bài tập

Bài 4.1 Ta định nghĩa phép giải nội xạ của một môđun trái A trên vành R là dãy khớp

$$X : 0 \to A \to X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^{n-1} \to X^n \to X^{n+1} \to \cdots$$

những môđun trái trên R, sao cho X^n là môđun nội xạ với mọi $n \geq 0$. Hãy chứng minh rằng mọi môđun trái A trên R đều có phép giải nội xạ và bất kỳ hai phép giải nội xạ nào của cùng một môđun A đều tương đương đồng luân.

Bài 4.2 Chứng minh rằng mọi môđun A trên vành chính R đều có một phép giải tự do X với $X_n = 0$ với mọi $n > 1$.

Bài 4.3 Chứng minh rằng với mọi R-môđun phải A, mọi phép giải xạ ảnh Y của R-môđun trái B ta có

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong H_n(A \otimes Y).$$

Bài 4.4 Cho

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R-môđun phải và

$$0 \to B' \xrightarrow{g} Q \to B \to 0$$

là dãy khớp ngắn của các R-môđun trái trong đó P và Q là các môđun xạ ảnh. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) \cong \mathrm{Tor}_{n-2}(A', B')$$

với mọi $n > 2$ và

$$\mathrm{Tor}_2(A, B) \cong \mathrm{Ker}\,(f \otimes g).$$

Bài 4.5 Cho A là R-môđun phải bất kỳ với i là đồng cấu đồng nhất của nó. Chứng minh rằng các phát biểu sau là tương đương

a) $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ với mọi môđun trái B trên R.

b) $\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0$ với mọi $n > 0$ và mọi môđun trái B trên R.

c) Nếu $f : X \to Y$ là đơn cấu của các môđun trái trên R thì $i \otimes f$ cũng vậy.

d) Mọi dãy khớp những môđun trái trên R vẫn còn khớp dưới phép nhân tenxơ với A.

e) Với mọi môđun trái B trên R và mọi dãy khớp ngắn các môđun phải trên R

$$0 \to A' \to A'' \to A \to 0$$

dãy sau bao giờ cũng khớp

$$0 \to A' \otimes B \to A'' \otimes B \to A \otimes B \to 0.$$

Bài 4.6 Xét trường hợp vành R là vành $\mathbb{Z}$ tất cả các số nguyên. Với hai nhóm aben bất kỳ A và B. Đặt S là tập con của tích Descartes $W = A \times B \times \mathbb{Z}$ gồm tất cả các phần tử $(x, y, n) \in W$ sao cho $nx = 0$ trong A và $ny = 0$ trong B. Gọi F là nhóm aben tự do sinh ra bởi tập S và G là nhóm con nhỏ nhất của F chứa tất cả các phần tử dạng

$$(x_1 + x_2, y, n) - (x_1, y, n) - (x_2, y, n),$$

$$(x, y_1 + y_2, n) - (x, y_1, n) - (x, y_2, n),$$

$$(x, y, mn) - (mx, y, n),$$

$$(x, y, mn) - (x, my, n),$$

với mỗi bộ ba trong dấu ngoặc là các phần tử của S. Hãy chứng minh rằng

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong F/G.$$

Từ đó suy ra rằng $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ nếu A hoặc B không xoắn.

Bài 4.7 Chứng minh rằng với hai môđun bất kỳ A và B trên một miền iđêan chính R ta có

$$\mathrm{Tor}_n(A, B) = 0 \text{ với mọi } n > 1,$$

$$\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Ker}\,(f \otimes i),$$

trong đó $f \otimes i$ là tích tenxơ của đồng cấu $f : A' \to F$ trong một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to A' \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} A \to 0$$

với đồng cấu đồng nhất i của B. Ở đây F là môđun tự do bất kỳ trên R.

Bài 4.8 Chứng minh rằng với mỗi môđun phải A bất kỳ trên một miền iđêan chính R và một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

những môđun trái trên R, ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, B') \to \mathrm{Tor}(A, B) \to \mathrm{Tor}(A, B'')$$

$$\xrightarrow{\partial} A \otimes B' \to A \otimes B \to A \otimes B'' \to 0.$$

Ở đây ∂ là đồng cấu nối, còn các đồng cấu khác là tích xoắn và tích tenxơ của đồng cấu đồng nhất $i : A \to A$ và các đồng cấu f và g tương ứng.

Bài 4.9 Nếu A và B là các nhóm aben hữu hạn, chứng minh rằng

$$A \otimes B \cong \mathrm{Tor}(A, B).$$

Bài 4.10 Cho A và B là các môđun trái trên R. Chọn phép giải nội xạ bất kỳ Y của B. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$H^n[\mathrm{Hom}(A, Y)] \cong \mathrm{Ext}^n(A, B).$$

Bài 4.11 Cho A và B là các môđun trái trên R và một dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B \to J \to B' \to 0$$

với một môđun nội xạ J trên R. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}(A, B'), n > 1$$
$$\mathrm{Ext}(A, B) \cong \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(i, g)].$$

Bài 4.12 Cho các dãy khớp ngắn

$$0 \to A' \xrightarrow{f} P \to A \to 0,$$
$$0 \to B \to J \xrightarrow{g} B' \to 0$$

những môđun trái trên R, trong đó P là môđun xạ ảnh và J là môđun nội xạ. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \cong \mathrm{Ext}^{n-2}(A', B'), n > 2$$
$$\mathrm{Ext}^2(A, B) \cong \mathrm{Coker}[\mathrm{Hom}(f, g)].$$

Bài 4.13 Chứng minh rằng với mỗi môđun trái bất kỳ A trên vành R, các phát biểu sau đây là tương đương

a) A là xạ ảnh.

b) $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ với mọi môđun trái B trên R.

c) $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ với mọi $n > 0$ và mọi môđun trái B trên R.

Bài 4.14 Chứng minh rằng với một môđun trái bất kỳ B trên R các phát biểu sau đây là tương đương

a) B là nội xạ.

b) $\mathrm{Ext}(A, B) = 0$ với mọi môđun trái A trên R.

c) $\mathrm{Ext}^n(A, B) = 0$ với mọi $n > 0$ và mọi môđun trái A trên R.

Bài 4.15 Chứng minh rằng với mỗi môđun A bất kỳ trên miền iđêan chính R và mỗi dãy khớp ngắn bất kỳ

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

những môđun trái trên R, ta có dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B') \to \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, B'')$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}(A, B') \to \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}(A, B'') \to 0$$

trong đó δ là đồng cấu nối còn các đồng cấu khác là các Hom và tích mở rộng của đồng cấu đồng nhất $i : A \to A$ và các đồng cấu f và g tương ứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, N.J, 1956.

[2] Hu S.-T., *Introduction to Homological Algebra*, Holden - Day, San Francisco, 1968.

[3] Mac Lane, S., *Homology*, Springer - Verlag, Berlin · Gottingen · Heidelberg, 1963.

[4] Mitchell, B., *Theory of Categories*, Academic Press, NewYork, 1965.