# BIẾN NGẪU NHIÊN

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

## Outline



## Outline

1 Biến ngẫu nhiên
2 Phân phối xác suất
3 Phân loại
4 Hàm của một biến ngẫu nhiên
5 Một số tính chất
- Kỳ vọng
- Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
- Phương sai
- Độ lệch chuẩn, Mode
- Trung vị

## Biến ngẫu nhiên

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

thỏa $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ với mọi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ được gọi là một biến ngẫu nhiên. Trong đó $\mathcal{F}$ là $\sigma$-đại số trên $\Omega$.

# Biến ngẫu nhiên



**Ví dụ 2**

Tung hai đồng xu, gọi $X$ là số mặt ngửa xuất hiện.

(a) Xác định $X$.

(b) $X$ có phải là biến ngẫu nhiên hay không khi $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$?

(c) Tương tự câu (b) với $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$?

Giải.

# Outline





# Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên



**Ký hiệu**

$$(X \in B) = \{\omega \colon X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$$
$$(X \le a) = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \le a\}$$
$$(a \le X \le b) = \{\omega \in \Omega \colon a \le X(\omega) \le b\}$$

**Định nghĩa 3**

Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X$ là một độ đo cảm sinh trên $\mathbb{R}$, được xác định như sau:

$$\begin{aligned} P_X \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B &\longmapsto P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B) \end{aligned}$$

# Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên



**Ví dụ 4**

Với biến ngẫu nhiên $X$ trong ví dụ 2, hãy so sánh phân phối xác suất của $X$ trên 2 khoảng $[0, 1]$ và $[1, 2]$?

Giải.

## Hàm phân phối xác suất



**Định nghĩa 5 (Hàm phân phối xác suất)**

Cho biến ngẫu nhiên $X$, hàm thực

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto P(X \le x) \end{aligned}$$

được gọi là hàm phân phối xác suất của $X$.

## Hàm phân phối xác suất

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Ví dụ 6 (Tiếp tục ví dụ 2)**

Tìm hàm phân phối xác suất của $X$.

- $x < 0$ :

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\omega : X(\omega) \le x) = P(\emptyset) = 0$$

- $0 \le x < 1$ :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(\omega \in \Omega : X(\omega) \le x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0) \\ &= P(\{SS\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

## Hàm phân phối xác suất ...

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

- $1 \le x < 2$ :

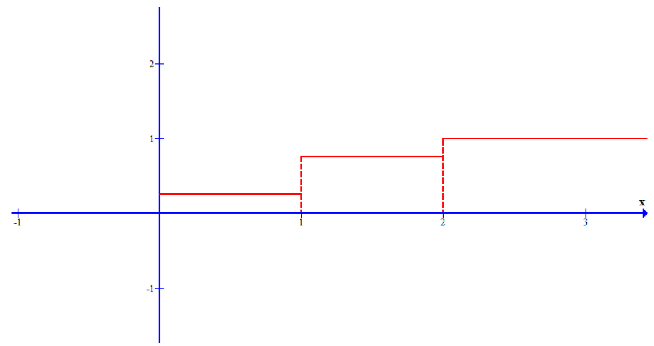
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \le x) \\ &= P\left(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0 \text{ hoặc } X(\omega) = 1\right) \\ &= P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0) + P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- $x \ge 2$ :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P((X = 0) \cup (X = 1) \cup (X = 2)) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

## Hàm phân phối xác suất ...

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị



## Hàm phân phối xác suất

**Ví dụ 7**

Tìm hàm phân phối xác suất của số nốt xuất hiện khi tung 1 con xúc sắc.

Giải.

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

## Hàm phân phối xác suất

**Mệnh đề 8**

*Hàm phân phối xác suất $F_X$ của biến ngẫu nhiên $X$ có một số tính chất sau:*

(i) *Hàm $F_X$ không giảm*

(ii) *$F_X$ liên tục phải. Nghĩa là với $x_0$ bất kì và mọi dãy giảm $(x_n)$ hội tụ về $x_0$ thì $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x_0)$.*

(iii) $F_X(+\infty) \overset{\text{đặt}}{=} \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

$F_X(-\infty) \overset{\text{đặt}}{=} \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

(iv) $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$ *với mọi $a < b$.*

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

## Chứng minh.

(i) Giả sử $x_1 \le x_2$, ta chứng minh $F(x_1) \le F(x_2)$. Thật vậy, do $(X \le x_1) = \{\omega\colon X(\omega) \le x_1\} \subset \{\omega\colon X(\omega) \le x_2\} = (X \le x_2)$, nên $F_X(x_1) = P(X \le x_1) \le P(X \le x_2) = F_X(x_2)$.

(ii) Nếu $\{x_n\}$ là một dãy giảm hội tụ về $x_0$ thì $\{(X \le x_n)\}$ là một dãy giảm các biến cố và $\lim_{n\to\infty}(X \le x_n) = \cap_{n=1}^{\infty}(X \le x_n) = (X \le x_0)$. Do đó, theo tính liên tục của xác suất, $\lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = P(X \le x_0)$, nghĩa là $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x_0)$. Vậy $F_X$ liên tục phải.

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

## Chứng minh (tt).

(iii) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy tăng đến $\infty$. Khi đó, $\{(X \le x_n)\}$ là một dãy tăng các biến cố và $\lim_{n\to\infty}(X \le x_n) = \cup_{n=1}^{\infty}(X \le x_n) = \Omega$. Do đó, theo tính liên tục của xác suất, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = P(\Omega) = 1$.
Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy giảm đến $-\infty$. Khi đó, $\{(X \le x_n)\}$ là một dãy giảm các biến cố và $\lim_{n\to\infty}(X \le x_n) = \cap_{n=1}^{\infty}(X \le x_n) = \emptyset$. Do đó, theo tính liên tục của xác suất, $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = P(\emptyset) = 0$.

(iv) Với mọi $a < b$, ta viết biến cố $(X \le b)$ thành tổng hai biến cố xung khắc nhau, $(X \le b) = (X \le a) + (a < X \le b)$. Do đó, $P(X \le b) = P(X \le a) + P(a < X \le b)$, tức là, $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$.

## Hàm phân phối xác suất



**Mệnh đề 9**

(i) $P(X < x) = \lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$

(ii) $P(X = x) = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$

**Chứng minh**

(i) Vì $\left\{\left(X \le x - \frac{1}{n}\right)\right\}$ là một dãy tăng các biến cố và $\lim_{n\to\infty}\left(X \le x - \frac{1}{n}\right) = \cup_{n=1}^{\infty}\left(X \le x - \frac{1}{n}\right) = (X < x)$. Do đó, theo tính liên tục của xác suất,

$$P(X < x) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \le x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

(ii) $P(X = x) = P(X \le x) - P(X < x) = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$.

## Outline





## Phân loại biến ngẫu nhiên



**Định nghĩa 10 (Biến ngẫu nhiên rời rạc)**

Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là rời rạc nếu nó chỉ nhận hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các giá trị.
Giả sử $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$
Đặt

$$\begin{aligned} f_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & , x \in \{x_i : i \in I\} \\ 0 & , x \notin \{x_i : i \in I\} \end{cases} \end{aligned}$$

Hàm $f_X$ được gọi là hàm xác suất (probability mass function - p.m.f) của biến ngẫu nhiên rời rạc $X$.

## Phân loại biến ngẫu nhiên



**Mệnh đề 11**

*Cho $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm xác suất $f_X$ thì:*

(i) $F_X(x) = \sum\limits_{x_i \le x} f_X(x_i) = \sum\limits_{x_i \le x} p_i$

(ii) $\sum\limits_{i\in I} f_X(x_i) = \sum\limits_{i \in I} p_i = 1$

(iii) $P(a \le X \le b) = \sum\limits_{a \le x_i \le b} f_X(x_i) = \sum\limits_{a \le x_i \le b} p_i$

**Chứng minh.**

Dễ dàng có được. □

### Ví dụ 12

Cho $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối xác suất như sau:

| $X$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1/8 | 2/8 | 2/8 | 2/8 | 1/8 |

(a) Xác định hàm phân phối xác suất $F$ của $X$.
(b) Tính $P(-1.5 \leq X \leq 1.5)$.

Phân loại biến ngẫu nhiên

Giải Ví dụ 12



Phân loại biến ngẫu nhiên

### Định nghĩa 13 (Biến ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối)

Biến ngẫu nhiên X được gọi là biến ngẫu nhiên liên tục (hoặc liên tục tuyệt đối - absolutely continuous) nếu tồn tại hàm $f_X$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Hàm $f_X$ được gọi là hàm mật độ xác suất (probability density function - p.d.f) của biến ngẫu nhiên liên tục $X$.

Phân loại biến ngẫu nhiên

### Lưu ý 14

Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ $f_X$ thì:

(i) $P(X = a) = 0$, $a$ là một hằng số.

(ii) $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) =$
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$$

(iii) $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx$

(iv) Nếu $f_X$ liên tục tại $x$ thì
$$f_X(x) = \frac{d}{dx}(F_X(x)) = F'_X(x)$$

(v) Mọi hàm $f$ không âm và thỏa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ đều là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $X$ nào đó.

**Chứng minh.**

(i) Chọn $B = [a, a]$.
(ii) Áp dụng câu (i) và chọn $B = [a, b]$.
(iii) Chọn $B = (-\infty, a]$.
(iv) Áp dụng (iii) bằng cách lấy đạo hàm của $F_X(x)$.
(v) Ta công nhận mà không chứng minh.

$\square$

## Phân loại biến ngẫu nhiên

**Ví dụ 15**

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} ax(x-2) & , x \in (0,2) \\ 0 & , x \notin (0,2) \end{cases}$$

(a) Xác định $f_X(x)$.
(b) Xác định $F_X$ và tính $P(-1.5 \le X \le 1.5)$

## Phân loại biến ngẫu nhiên
### Giải Ví dụ 15

## Phân loại biến ngẫu nhiên
### Giải Ví dụ 15 (tt)

# Phân loại biến ngẫu nhiên

**Ví dụ 16**

Hàm phân phối của bnn $X$ được cho bởi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

(a) Vẽ đồ thị hàm $F$. (lưu ý vị trí dấu "=")
(b) Tính $P(X < 3)$, $P(X = 1)$, $P(X > 1/2)$, $P(2 < X \leq 4)$.

# Phân loại biến ngẫu nhiên
## Giải Ví dụ 16

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

# Phân loại biến ngẫu nhiên
## Giải Ví dụ 16 (tt)

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

# Outline



BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Ví dụ 17 (Tiếp tục Ví dụ 12)**

| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 1/8 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/8 |

Xét $Y = f(X) = X^2$

| Y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 1/8 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/8 |

| Y | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |





**Ví dụ 18 (Tiếp tục Ví dụ 15)**

Cho

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x(x-2) & x \in (0,2) \\ 0 & x \notin (0,2) \end{cases}$$

Hãy tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.

## Gợi ý



Hàm phân phối của $Y$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right)$$

- Nếu $y < 0$ : $F_Y(y) = 0$ nên $f_Y(y) = F_Y'(y) = 0$.
- Nếu $0 < y < 4$ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(X^2 \le y\right) \\ &= P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

## Gợi ý (tt)



Do đó,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= [F_Y(y)]' \\ &= [F_X(\sqrt{y})]' - [F_X(-\sqrt{y})]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} F_X'(\sqrt{y}) - \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) F_X'(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[F_X'(\sqrt{y}) + F_X'(-\sqrt{y})\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[-\frac{3}{4}\sqrt{y}(\sqrt{y}-2) + 0\right] \\ &= -\frac{3}{8}(\sqrt{y}-2) \end{aligned}$$

## Gợi ý (tt)



- Nếu $y > 4$ thì $F_Y(y) = 1$ nên $f_Y(y) = F'_Y(y) = 0$.

Vậy

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{3}{8}(\sqrt{y} - 2) & \text{nếu } 0 < y < 4 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Định lí 19**

*Cho $X$ có hàm phân phối $F_X(x)$, đặt $Y = g(X)$, và $\mathcal{X} = \{x : f_X(x) > 0\}$, $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X})$.*

(i) *Nếu $g$ là một hàm tăng ngặt trên $\mathcal{X}$, thì $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ với mọi $y \in \mathcal{Y}$*

(ii) *Nếu $g$ là một hàm giảm ngặt trên $\mathcal{X}$ và $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục, thì $F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$ với mọi $y \in \mathcal{Y}$.*

**Chứng minh**

## Hàm của một biến ngẫu nhiên . . .

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

(i) Ta có

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ &= P(X \le g^{-1}(y)) \quad \text{(vì } g \text{ là hàm tăng ngặt)} \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \quad \text{với mọi } y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

(ii) Tương tự,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(g(X) \le y) \\ &= P(X \ge g^{-1}(y)) \quad \text{(vì } g \text{ là hàm giảm ngặt)} \\ &= 1 - P(X < g^{-1}(y)) \\ &= 1 - P(X \le g^{-1}(y)) \quad \text{(vì } X \text{ là biến ngẫu nhiên liên tục)} \\ &= 1 - F_X(g^{-1}(y)) \quad \text{với mọi } y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Định lí 20**

*Cho $X$ có hàm mật độ xác suất $f_X(x)$ và đặt $Y = g(X)$, với $g$ là một hàm đơn điệu ngặt. Gọi $\mathcal{X} = \{x : f(x) > 0\}$ và $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X})$. Giả sử rằng $f_X(x)$ liên tục trên $\mathcal{X}$ và $g^{-1}(y)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathcal{Y}$. Khi đó hàm mật độ xác suất của $Y$ được xác định bởi*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & \text{nếu } y \in \mathcal{Y} \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

**Chứng minh**

Từ định lí 19, ta có
Với mọi $y \in \mathcal{Y}$,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y) & \text{nếu } g \text{ tăng ngặt} \\ -f_X[g^{-1}(y)]\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y) & \text{nếu } g \text{ giảm ngặt} \end{cases}$$

Bởi vì

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \geq 0 \quad \text{nếu } g \text{ tăng ngặt,}$$

$$\frac{d}{dy}g^{-1}(y) \leq 0 \quad \text{nếu } g \text{ giảm ngặt}$$

nên

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

Hơn nữa, $P(Y \notin \mathcal{Y}) = P(X \notin \mathcal{X}) = 0$. Do đó, ta có thể đặt $f_Y(y) = 0$ với mọi $y \notin \mathcal{Y}$.

**Ví dụ 21**

Làm lại Ví dụ 18.

Gợi ý.
Hàm mật độ xác suất của $X$,

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x\,(x-2) & x \in (0,2) \\ 0 & x \notin (0,2) \end{cases}$$

và

$$\begin{aligned} g\colon (0,2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Ta có,

- $\mathcal{X} = (0,2)$
- $\mathcal{Y} = g(\mathcal{X}) = (0,4)$
- $f$ liên tục trên $(0,2)$
- $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ có đạo hàm liên tục trên $(0,4)$

Do đó, theo định lí 20, hàm mật độ xác suất của $Y$ là

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\dfrac{d}{dy}(g^{-1}(y)) & \text{nếu } y \in (0,4) \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{3}{4}\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{nếu } y \in (0,4) \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{3}{8}\left(\sqrt{y}-2\right) & \text{nếu } y \in (0,4) \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \end{aligned}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên

Trong nhiều trường hợp, hàm $g$ có thể không tăng ngặt hoặc giảm ngặt; do đó ta không thể áp dụng định lí 20 ở trên được. Tuy nhiên, thông thường $g$ sẽ đơn điệu ngặt trên các khoảng nào đó và trong trường hợp này ta có thể giải quyết được như trong ví dụ sau.

**Ví dụ 22 (Phép biến đổi bình phương)**

Giả sử $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục. Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = X^2$?

## Hàm của một biến ngẫu nhiên
### Gợi ý.



Cho $y > 0$, hàm phân phối của $Y = X^2$ là

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

Bởi vì $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục, ta có thể bỏ đi dấu bằng khỏi điểm biên trái và được

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên
### Gợi ý (tt)

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

Hàm mật độ xác suất của $Y$ bây giờ có thể đạt được từ hàm phân phối bằng cách lấy vi phân:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dy}[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Do đó, hàm mật độ của $Y$ là

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$$

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

Một kết quả tổng quát của định lí 20 được trình bày bên dưới mà không chứng minh.

**Định lí 23**

*Cho $X$ có hàm mật độ $f_X(x)$ và đặt $Y = g(X)$. Giả sử tồn tại một phân hoạch, $A_0, A_1, \ldots, A_k$, của $\mathcal{X} = \{x\colon f_X(x) > 0\}$ sao cho $P(X \in A_0) = 0$ và $f_X(x)$ liên tục trên mọi $A_i$. Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại các hàm $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, tương ứng, xác định trên $A_1, \ldots, A_k$, thỏa*

(i) *$g(x) = g_i(x)$ với mọi $x \in A_i$*

(ii) *$g_i(x)$ đơn điệu ngặt trên $A_i$*

(iii) *Tập $\mathcal{Y} = g_i(A_i)$ là giống nhau với mọi $i = 1, \ldots, k$ và*

(iv) *$g_i^{-1}(y)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathcal{Y}$ với mọi $i = 1, \ldots, k$.*

*Khi đó*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_X(g_i^{-1}(y)) \left|\dfrac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right| & \text{nếu } y \in \mathcal{Y} \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên
### Mối quan hệ chuẩn - chi bình phương

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

Cho $X$ có phân phối chuẩn tắc,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Xét $Y = X^2$. Hàm $g(x) = x^2$ đơn điệu ngặt trên $(-\infty, 0)$ và trên $(0, \infty)$. Tập $\mathcal{Y} = (0, \infty)$. Áp dụng định lí 23, ta lấy

$$\begin{aligned} &A_0 = \{0\}; \\ &A_1 = (-\infty, 0), \quad g_1(x) = x^2, \quad g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y} \\ &A_2 = (0, \infty), \quad g_2(x) = x^2, \quad g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \end{aligned}$$

## Hàm của một biến ngẫu nhiên ...
### Mối quan hệ chuẩn - chi bình phương



Hàm mật độ của $Y$ là

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-\sqrt{y})^2/2} \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-\sqrt{y})^2/2} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}, \quad 0 < y < \infty \end{aligned}$$

Biến ngẫu nhiên $Y$ có hàm mật độ như trên được gọi là biến ngẫu nhiên chi bình phương với 1 bậc tự do.



**Ví dụ 24**

Cho $\lambda > 0$ và hàm $f$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

(i) Chứng tỏ $f$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên nào đó.

(ii) Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f$. Hãy xác định hàm mật độ của $Y = |X|$.

## Giải Ví dụ 24
### (i)



## Giải Ví dụ 24
### (ii)

# Giải Ví dụ 24
(ii)

BIẾN NGẪU NHIÊN

Nguyễn Văn Thìn

Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

# Outline



# Kỳ vọng
Trường hợp rời rạc

**Định nghĩa 25**

Cho $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối xác suất:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ |

Nếu chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$ thì kỳ vọng của $X$ là đại lượng được xác định bởi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Nếu chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = \infty$, ta nói kỳ vọng của $X$ không tồn tại.

# Kỳ vọng
Trường hợp rời liên tục

**Định nghĩa 26**

Cho $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ $f_X$. Nếu $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$ thì kỳ vọng của $X$ là đại lượng được xác định bởi

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Nếu $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = \infty$, ta nói kỳ vọng của $X$ không tồn tại.

**Ví dụ 27 (Trung bình phân phối Poison)**

Cho biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối xác suất

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Tính $\mathbb{E}(X)$.

**Ví dụ 28 (Trung bình phân phối mũ)**

Giả sử $X$ có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$, tức là $X$ có hàm mật độ như sau

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \in (0, \infty) \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

**Ví dụ 29 (Trung bình phân phối Cauchy)**

Một ví dụ kinh điển về một biến ngẫu nhiên không có kỳ vọng là *biến ngẫu nhiên Cauchy*, tức là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

## Giải Ví dụ 29

### Mệnh đề 30

(i) *Nếu $X$ là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một trong các giá trị $\{x_i, i \in I\}$ với xác suất tương ứng $p_i$, và $g$ là một hàm thực bất kì, thì $g(X)$ có kỳ vọng và $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i$ nếu và chỉ nếu*

$$\sum_i |g(x_i)|p_i < \infty$$

(ii) *Nếu $X$ là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ $f_X(x)$, và $g$ là một hàm thực bất kì, thì $g(X)$ có kỳ vọng và $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$ nếu và chỉ nếu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f_X(x)dx < \infty$$





### Ví dụ 31

Cho $X$ là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tính $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.





### Định lí 32

*Cho $X$ là một biến ngẫu nhiên và cho $a, b$ và $c$ là các hằng số. Khi đó với các hàm $g_1(x)$ và $g_2(x)$ bất kì có các kỳ vọng tồn tại,*

(i) $\mathbb{E}(ag_1(X) + bg_2(X) + c) = a\mathbb{E}g_1(X) + b\mathbb{E}g_2(X) + c$

(ii) *Nếu $g_1(x) \geq 0$ với mọi $x$, thì $\mathbb{E}g_1(X) \geq 0$.*

(iii) *Nếu $g_1(x) \geq g_2(x)$ với mọi $x$, thì $\mathbb{E}g_1(X) \geq \mathbb{E}g_2(X)$.*

(iv) *Nếu $a \leq g_1(x) \leq b$ với mọi $x$, thì $a \leq \mathbb{E}g_1(X) \leq b$.*

### Chứng minh.

Dễ dàng có được. □





### Định nghĩa 33 (Phương sai)

Cho $X$ là biến ngẫu nhiên với kỳ vọng $\mathbb{E}(X)$. Nếu $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ tồn tại, ta nói đó là phương sai của $X$ và ký hiệu là $\mathbb{V}ar(X)$.

### Ví dụ 34 (Phương sai phân phối mũ)

Cho $X$ có phân phối mũ với tham số $\lambda > 0$ như trong ví dụ 28. Tính phương sai của $X$.

## Phương sai



**Định lí 35**

*Nếu $X$ là một biến ngẫu nhiên với phương sai hữu hạn, thì với các hằng số $a$ và $b$ bất kì,*

$$\mathbb{V}ar(aX+b) = a^2\mathbb{V}arX$$

**Chứng minh.**

Từ định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(aX+b) &= \mathbb{E}((aX+b)-\mathbb{E}(aX+b))^2 \\ &= \mathbb{E}(aX-a\mathbb{E}X)^2 \qquad (\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}X+b) \\ &= a^2\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 \\ &= a^2\mathbb{V}arX\end{aligned}$$

□

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Lưu ý 36**

Trong tính toán chúng ta hay sử dụng công thức sau

$$\mathbb{V}ar\,(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}arX &= E(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2] \\ &= \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 \\ &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2\end{aligned}$$

trong đó ta đã sử dụng $\mathbb{E}(X\mathbb{E}X) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}X) = (\mathbb{E}X)^2$, bởi vì $\mathbb{E}X$ là một hằng số.

## Độ lệch chuẩn, Mode

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

**Định nghĩa 37 (Độ lệch chuẩn)**

Cho biến ngẫu nhiên $X$ có phương sai $\mathbb{V}ar(X)$, độ lệch chuẩn của $X$ là đại lượng $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$.

**Định nghĩa 38 (Mode (Giá trị chắc chắn))**

Mode của $X$ là giá trị của $X$ mà hàm mật độ xác suất nhận giá trị lớn nhất.

## Mode

BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

Từ định nghĩa, nếu biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

thì

$$Mod(X) = x_i \Leftrightarrow p_i = \mathbb{P}\,(X = x_i) = \max\{p_1, p_2 \ldots\}$$

còn nếu $X$ có phân phối liên tục với hàm mật độ xác suất $f(x)$ thì

$$Mod(X) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

## Mode

### Ví dụ 39 (? - Trường hợp rời rạc)

Tìm $Mod$ của biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối rời rạc với bảng phân phối xác suất

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0,3 | 0,25 | 0,18 | 0,14 | 0,13 |

### Ví dụ 40 (? - Trường hợp liên tục)

Tìm $Mod$ của biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{khi } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

## Mode

### Lưu ý 41

Xét

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$Mod(X)$ không tồn tại.

## Trung vị

### Định nghĩa 42 (Trung vị)

Cho biến ngẫu nhiên $X$ bất kỳ, trung vị của $X$, ký hiệu $Med(X)$, là giá trị $m$ của biến ngẫu nhiên $X$ sao cho

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X \le m) \ge \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X \ge m) \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

ta viết $Med(X) = m$.

Khi $X$ là biến ngẫu nhiên có phân phối liên tục thì trung vị của $X$, $Med(X)$ chính là điểm chia phân phối xác suất thành hai phần bằng nhau nghĩa là

$$\mathbb{P}(X \ge Med(X)) = \mathbb{P}(X \le Med(X))$$

## Trung vị

### Ví dụ 43 (Trung vị phân phối rời rạc)

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ có bảng phân phối xác suất như sau

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

Tìm $Med(X)$.

### Ví dụ 44 (Trung vị phân phối rời rạc cho trường hợp không duy nhất)

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ có bảng phân phối xác suất như sau

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

Tìm $Med(X)$.

### Ví dụ 45 (Trung vị phân phối liên tục)

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.



BIẾN NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
Biến ngẫu nhiên
Phân phối xác suất
Phân loại
Hàm của một biến ngẫu nhiên
Một số tính chất
Kỳ vọng
Kỳ vọng của hàm của một biến ngẫu nhiên
Phương sai
Độ lệch chuẩn, Mode
Trung vị

### Ví dụ 46

Trung vị phân phối liên tục cho trường hợp không duy nhất
Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có hàm mật độ xác suất cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{khi } 2.5 \le x \le 3 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Med(X)$.