CHƯƠNG 1.

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ.

1.1 ĐỊNH NGHĨA & THÍ DỤ.

1.1.1 ĐỊNH NGHĨA.

1.1.1.1 Đồ thị có định hướng.

Một đồ thị $G = G(X,U)$ được xác định bởi

- Tập hữu hạn $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tập các đỉnh hay nút.
- Tập $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\} \subset X \times X$ tập các cung (cạnh).

Đối với một cung $u = (x_i, x_j)$, x_i là đỉnh đi, x_j là đỉnh đến (hay còn gọi là gốc và đích). Cung u đi từ x_i và đến x_j.

Cung u được biểu diễn một cách hình học như sau :

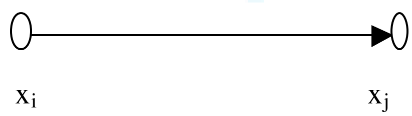
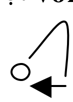


FIG.1.1. Cung $u=(x_i, x_j)$

Một cung (x_i, x_i) được gọi là một **vòng** (**khuyên**).



Một **p-đồ thị** là một đồ thị trong đó không có quá p cung dưới dạng (i,j) giữa hai đỉnh bất kỳ.

Thí dụ.

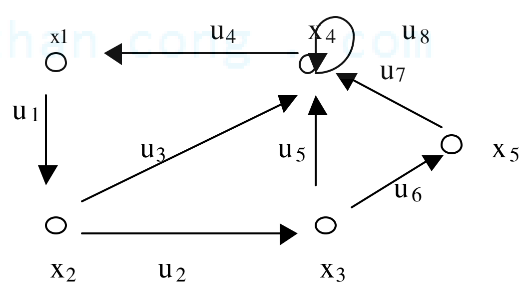


FIG. 1.2. Đồ thị xác định bởi (X,U),

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

1.1.1.2 Đồ thị không định hướng.

Khi khảo sát một vài tính chất, sự định hướng của các cung không đóng một vai trò gì. Ta chỉ quan tâm đến sự hiện diện của các cung giữa hai đỉnh mà thôi (không cần định rõ thứ tự). Một cung không định hướng được gọi là **cạnh.** Đối với một cạnh $u = (x_i, x_j)$, u được gọi là CẠNH TỚI của hai đỉnh x_i và x_j.

Thí dụ.

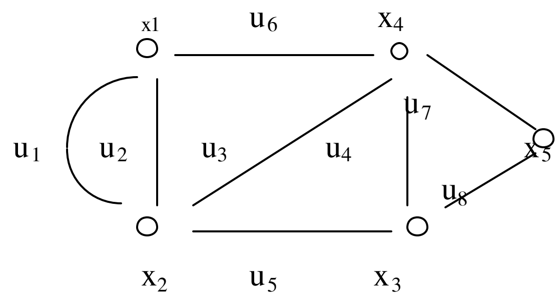


FIG. 1.3. Đồ thị xác định bởi (X,U),
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

Một đồ thị được gọi là **đa đồ thị** nếu có nhiều hơn một cạnh giữa hai đỉnh.

Một đồ thị được gọi là **đơn** nếu:

1. Không phải là đa đồ thị ;
2. Không tồn tại một vòng nào.

Hai cạnh u và v được gọi là **song song** khi chúng cùng là cạnh tới của hai đỉnh phân biệt. Ký hiệu u ¦ v.

Theo thí dụ trên, ta có u_1 ¦ u_2

1.1.1.3 Một số định nghĩa cơ bản.

- **ÁNH XẠ ĐA TRỊ.**
  - ❖ x_j được gọi là ĐỈNH SAU (SUCCESSEUR) của x_i nếu $(x_i,x_j) \in U$; Tập các đỉnh sau của x_i ký hiệu là $\Gamma(x_i)$.
  - ❖ x_j được gọi là ĐỈNH TRƯỚC (PREDECESSEUR) của x_i nếu $(x_j,x_i) \in U$; Tập các đỉnh trước của x_i ký hiệu là $\Gamma^{-1}(x_i)$.
  - ❖ Ánh xạ Γ được định nghĩa :với mọi phần tử của X, tương ứng với một tập con của X được gọi là một ÁNH XẠ ĐA TRỊ.
  - ❖ Đối với một 1-đồ thị, G có thể hoàn toàn xác định bởi (X,Γ), đây là một ký hiệu cơ sở thường dùng trong cấu trúc dữ liệu : DANH SÁCH KỀ.

THÍ DỤ. Trong đồ thị được định nghĩa ở hình vẽ sau. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$;
$\Gamma(x_1) = x_2$; $\Gamma(x_2) = \{x_3,x_4\}$; $\Gamma(x_3)=\{x_4,x_5\}$; $\Gamma(x_4)=\{x_1\}$; $\Gamma(x_5)=\{x_4\}$.

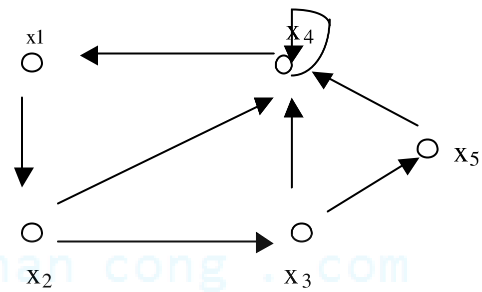


FIG. 1.4. Đồ thị xác định bởi (X,Γ)

- **KỀ.**
  - ❖ Hai đỉnh được gọi là kề nếu chúng được nối bởi một cung (cạnh).
  - ❖ Hai cung (cạnh) được gọi là kề nếu chúng có ít nhất một đỉnh chung.

- **BẬC CỦA ĐỈNH.**
  - ❖ **Nửa bậc ngoài** của đỉnh x_i, ký hiệu $d^+(x_i)$ là số các cung khởi đầu từ (hay đi ra từ) x_i . Ta có $d^+(x_i) = card(\Gamma(x_i))$. (ký hiệu card(A) chỉ số phần tử của tập A).
  - ❖ **Nửa bậc trong** của đỉnh x_i, ký hiệu $d^-(x_i)$ là số các cung kết thúc tại (hay đi vào từ) x_i . Ta có $d^-(x_i)=card(\Gamma^{-1}(x_i))$.
  - ❖ **Bậc của đỉnh** x_i, $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$. Bậc của một đỉnh trong một đồ thị không định hướng là tổng số các cạnh tới của nó.

Bậc của một đỉnh có vòng được cộng thêm 2 cho mỗi vòng.

THÍ DỤ. [xem FIG. 1.4].
$d^+(x_2)= 2$; $d^-(x_2)= 1$; $d(x_2)=3$.

$d^+(x_4)=1$; $d^-(x_4)=3$; $d(x_4)=6$. (Vì tại đỉnh x_4 có một vòng).

- Đỉnh có bậc = 0 được gọi là **đỉnh cô lập.**
- Đỉnh có bậc = 1 được gọi là **đỉnh treo** và cung (cạnh) tới của nó được gọi là **cạnh treo**.
- **ĐỊNH LÝ** (công thức liên hệ giữa bậc và số cạnh).

  1. Tổng bậc các đỉnh = 2 x số cạnh.
  2. Xét đồ thị có định hướng G = (X, U). Ta có

     $\sum d^+(x) = \sum d^-(x) =$ card(U) (số cung).

  CHỨNG MINH. Truy chứng theo đỉnh.

- **HỆ QUẢ**. Số đỉnh bậc lẻ là số chẵn.

  CHỨNG MINH.

  $\sum$ d(đỉnh bậc lẻ) + $\sum$ d(đỉnh bậc chẵn) = 2 x số cạnh.

- **ĐỒ THỊ BÙ.**

  $G = (X, U)$ và $\overline{G} = (X, \overline{U})$. $(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_i,x_j) \notin \overline{U}$ et $(x_i,x_j) \notin U \Rightarrow (x_i,x_j) \in \overline{U}$.
  $\overline{G}$ được gọi là đồ thị bù của G.

- **ĐỒ THỊ RIÊNG PHẦN (BỘ PHẬN).**
  $G=(X,U)$ và $U_p \subset U$. $G_p=(X,U_p)$ là một đồ thị riêng phần của G ;

- **ĐỒ THỊ CON.**
  $G=(X,U)$ và $X_s \subset X$. $G_s=(X_s,V)$ là một đồ thị con của G; trong đó V là thu hẹp của hàm đặc trưng của U trên X_s.

  $V=\{(x,y)/(x,y) \in U \cap X_s \times X_s\}$. $\forall x_i \in X_s$, $\Gamma_s(x_i)=\Gamma(x_i)\cap X_s$.

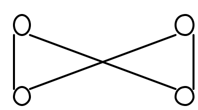
- **ĐỒ THỊ CON RIÊNG PHẦN.** Tổng hợp hai định nghĩa trên.

THÍ DỤ. Mạng giao thông đường bộ cả nước.
- Mạng xe bus : đồ thị riêng phần.
- Mạng giao thông đường bộ T.P. Hồ Chí Minh: đồ thị con.
- Mạng xe bus T.P. Hồ Chí Minh: đồ thị con riêng phần.

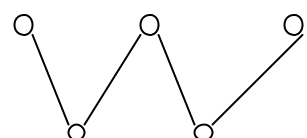
- **ĐỒ THỊ** đối xứng : $(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_j,x_i) \in U$.
- **ĐỒ THỊ** phản đối xứng : $(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_j,x_i) \notin U$.
- **ĐỒ THỊ** phản chiếu : $(x_i,x_i) \in U, \forall x_i \in U$.
- **ĐỒ THỊ** bắc cầu : $(x_i,x_j) \in U, (x_j,x_k) \in U \Rightarrow (x_i,x_k) \in U$.
- **ĐỒ THỊ** đầy đủ : $(x_i,x_j) \notin U \Rightarrow (x_j,x_i) \in U$ (có duy nhất một cạnh giữa hai đỉnh). Một đồ thị đủ có n đỉnh sẽ có n(n-1)/2 cạnh. Ký hiệu K_n.
- **CLIQUE** :Tập các đỉnh của một đồ thị con đầy đủ.
- **ĐỒ THỊ HAI PHẦN (LƯỠNG PHÂN)** G=(X,U) nếu :
  1. X phân hoạch thành X_1 và X_2.
  2. $\forall (x_1,x_2) \in U$ thì $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

  Nếu $Card(X_1) = n$, $Card(X_2) = m$, ký hiệu $K_{n,m}$.

  Thí dụ : Đồ thị sau lưỡng phân, nhưng không đầy đủ.



$K_{2,2}$



$K_{3,2}$

- **ĐỀU.** Là đồ thị mà mọi đỉnh có cùng bậc.

THÍ DỤ.

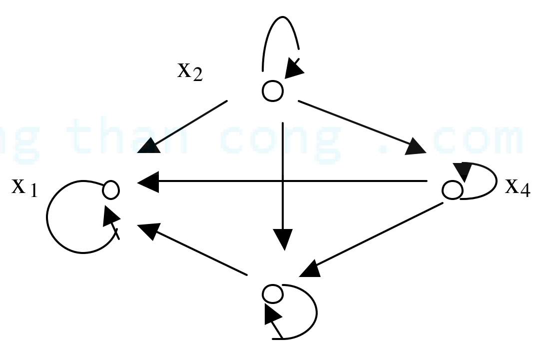


FIG. 1.5. Đồ thị phản chiếu , phản đối xứng, bắc cầu và đầy đủ.

1.1.2 THÍ DỤ.

- **THÍ DỤ 1**. Đường đi ngắn nhất.

Bài toán 1. Cho một đồ thị có định hướng, G = (X,U), một định giá $v : U \rightarrow R$ và s, t là hai đỉnh phân biệt của X.

Bài toán đặt ra. Tìm đường đi ngắn nhất giữa s và t ?

Lời giải. Thuật giải Dijkstra, Bellman-Ford (xem Chương 3).

`

- **THÍ DỤ 2**. Cây phủ tối thiểu.

Xét bài toán trên một mạng, chẳng hạn mạng cung cấp điện, nước từ một nguồn duy nhất.

Bài toán 2. Một đồ thị không định hướng G = (X,U), một hàm định giá trọng lượng $v : U \rightarrow R^+$ và hai đỉnh phân biệt s, t của X.

Bài toán đặt ra. Tìm một cây phủ với trong lượng tối thiểu ?

Lời giải : Thuật giải Kruskal, Prim (xem Chương 2).

1.2 BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ.

Có rất nhiều cách để biểu diễn đồ thị. Tuy nhiên, các cách biểu diễn này không tương đương với nhau theo quan điểm của các thuật toán. Người ta, phân biệt một vài cách biểu diễn chính, chẳng hạn biểu diễn bằng ma trận kề, ma trận tới đỉnh – cung (hay đỉnh – cạnh trong trường hợp không định hướng) và bằng danh sách kề.

1.2.1 Biểu diễn bằng cách sử dụng các Bảng.

1.2.1.1. Ma trận kề.

Xét một 1 - đồ thị có n đỉnh. Ma trận kề là một ma trận (n x n) có n hàng tương ứng với các đỉnh khởi đầu và n cột tương ứng với các đỉnh kết thúc, được định nghĩa như sau :

x_{ij} = 1 (True) nếu có một cung (cạnh) nối x_i và x_j.
= 0 (False) ngược lại.

THÍ DỤ.

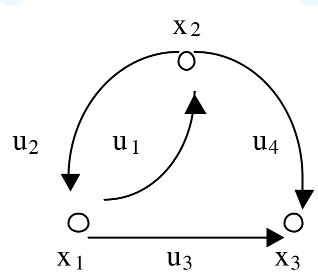


FIG.1.6. 1. Đồ thị.

Ma trận kề của đồ thị này như sau :

	x_1	x_2	x_3 ← kết thúc
x_1	0	1	1
x_2	1	0	1
x_3	0	0	0

↑
khởi đầu

1.2.1.2. Ma trận tới đỉnh – cung (đỉnh – cạnh).

- ❖ Dòng ↔ đỉnh.
- ❖ Cột ↔ cung (cạnh).

Cho đồ thị G = (X, U). Một ma trận tới $A = [a_{ij}]$ được định nghĩa như sau :
Nếu cạnh $u = (x_i, x_j)$ Î U thì trên cột u, $a_{iu} = 1$, $a_{ju} = -1$, ngược lại thì có giá trị 0.

THÍ DỤ. Đối với 1. Đồ thị ở hình FIG .1.6. ta có :

	U_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	-1	1	0
x_2	-1	1	0	1
x_3	0	0	-1	-1

CHÚ Ý : Tổng các dòng bằng không (một cung có đỉnh gốc và một đỉnh kết thúc). Tất cả các ma trận con vuông đều có định thức bằng 1, -1 hay 0.

Có một cách khác cho ma trận tới như sau :
Cho đồ thị G = (X, U). Một ma trận tới $A = [a_{ij}]$ được định nghĩa như sau :

$a_{iu} = 1$ nếu $u = (x_i, x_j) \in U$
$= 0$ ngược lại.

THÍ DỤ. Đối với 1. Đồ thị ở hình FIG .1.6. ta có :

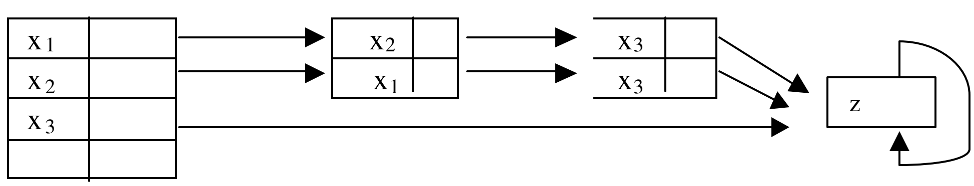
	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	0	0	0	0

CHÚ Ý : Tổng các dòng bằng số các cung tới.

1.2.2 Biểu diễn bằng cách sử dụng các con trỏ.

Lợi ích của cách biểu diễn bằng con trỏ hay Danh sách kề (nhờ vào ánh xạ đa trị Γ) là giảm thiểu chỗ trong bộ nhớ.

THÍ DỤ. Đối với 1.đồ thị của hình FIG.1.6. ta có :



1.3 PHÉP DUYỆT ĐỒ THỊ. (Parcours de graphes).

Nhiều bài toán trên đồ thị cần khảo sát sự vét kiệt các đỉnh và các cung (cạnh) của đồ thị. Có 2 cách duyệt đồ thị : **phép duyệt theo chiều sâu** (Parcours en profondeur) và **phép duyệt theo chiều rộng** (Parcours en largeur).

1.3.1. DUYỆT THEO CHIỀU SÂU.

NGUYÊN LÝ :
Khởi từ một đỉnh, đi theo các cung (cạ nh) xa nhất có thể. Trở lại đỉnh sau của cạnh xa nhất, tiếp tục duyệt như trước, cho đến đỉnh cuối cùng.

Thí dụ. Ta có đồ thị theo hình vẽ sau :

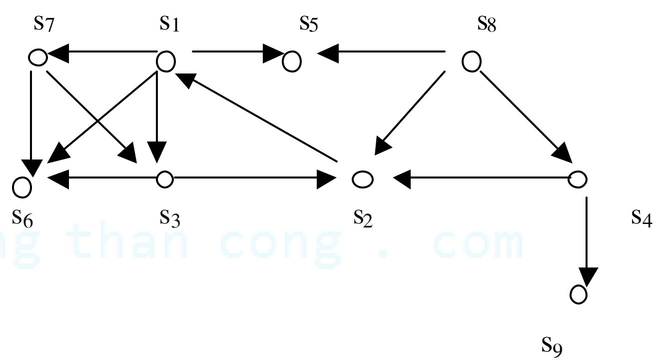


FIG. 1.7.

Phép duyệt theo chiều sâu thực hiện trên đồ thị ở hình FIG.1.7 như sau :

- Khởi từ đỉnh s_1. Đỉnh đầu tiên được duyệt là s_3.
- Khởi từ đỉnh s_3. Đỉnh được duyệt là s_2. Đỉnh sau của s_3 là s_6.
- Khởi từ đỉnh s_6. Đỉnh sau của s_1 là s_5.
- Khởi từ đỉnh s_5. Đỉnh sau của s_1 là s_7.
- Khởi từ đỉnh s_7.
- Khởi từ đỉnh s_4. Đỉnh được duyệt là s_9.
- Khởi từ đỉnh s_8.
- Kết thúc vì tất cả các đỉnh đã được duyệt.

Ký hiệu :

s[k], k : 1..n là tập đỉnh có n phần tử, được đánh số thứ tự từ 1 đến n.
Mark[k], k : 1..n là hàm nguyên :
= 1 nếu đỉnh đã được duyệt (có nghĩa đã được đánh dấu),
= 0 ngược lại.
Ma trận kề a, được định nghĩa như sau :
a[i,j] = 1, nếu (i,j) là một cung (cạnh) của đồ thị G.
= 0 ngược lại.

Dạng đệ qui

Chương trình chính :

```
For  (int i =1; i ≤ n ;i++)  Mark[i] = 0  ;
For  (int i =1; i ≤ n ;i++)   if( Mark[i] == 0) then DFS(i) ;
```

Thủ tục đệ qui : Duyệt theo chiều sâu bắt đầu từ đỉnh k.

```
Thủ tục DFS(int k) ;
{
    Mark[k] = 1
    // Duyệt các đỉnh trong ma trận kề của đỉnh k
    For  (int j =1; j ≤ n ;j++)
      if (Mark[j] == 0 && a[k][j]==1)  DFS(j) ;
 } End DFS
```

Độ phức tạp của giải thuật : Đồ thị có n đỉnh và m cung(cạnh).

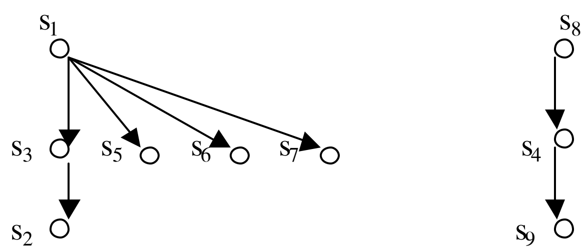
- Trường hợp lưu trữ đồ thị dưới dạng ma trận kề : $O(n^2)$.
- Trường hợp lưu trữ đồ thị dưới dạng danh sách kề : O(max(n,p)).

1.6.2. DUYỆT THEO CHIỀU RỘNG.

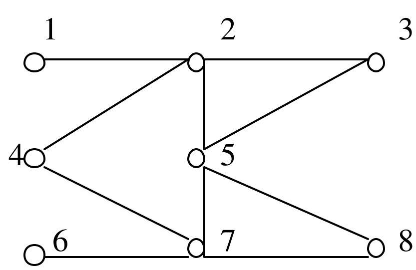
NGUYÊN LÝ :

- Khởi từ một đỉnh s bất kỳ, ta duyệt tất cả những đỉnh sau của S,tập $\Gamma^+(s)$ trong trường hợp đồ thị có định hướng (tập $\Gamma(s)$:tập tất cả các đỉnh kề của s trong trường hợp đồ thị không định hướng) .
- Sau đó xét $v \in \Gamma^+(s)$ (hay $\Gamma(s)$) và áp dụng lại cách duyệt giống như s.

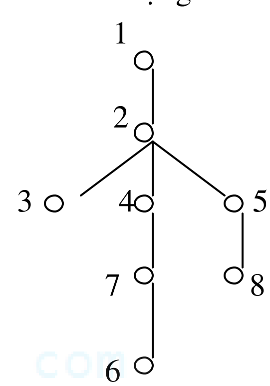
Thí dụ 1. Ta có đồ thị theo hình vẽ FIG 1.7. Duyệt theo chiều rộng như sau :



Thí dụ 2. Ta có đồ thị theo hình vẽ sau :



Duyệt theo chiều rộng như sau :



1.4 TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ.

1.4.1. Dây chuyền - Chu trình.

Một dây chuyền trong một đồ thị không có định hướng là một dãy liên tiếp các cạnh, sao cho mỗi một cạnh có một đỉnh chung với cạnh tiếp theo. Một chu trình là một dây chuyền mà có ít nhất một cạnh có đỉnh khởi đầu và đỉnh kết thúc trùng nhau.

Thí dụ.

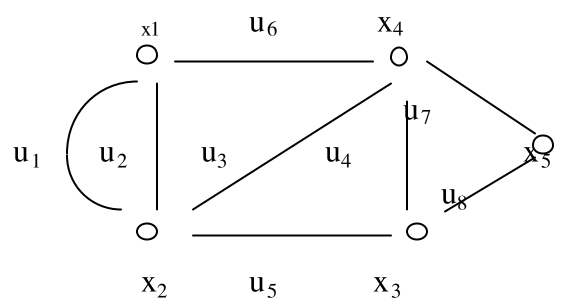


FIG.1.8. $<u_5,u_2,u_6,u_7>$ là một dây chuyền, $<u_4,u_7,u_8>$ là một chu trình.

1.4.2. Đường – Mạch.

Đường và mạch là khái niệm dây chuyền và chu trình trong trường hợp đồ thị có định hướng.

THÍ DỤ.

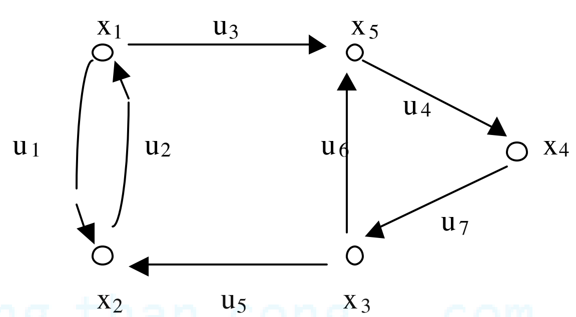


FIG.1.9. $<u_5,u_2,u_3,u_4>$ là một đường, $<u_4,u_7,u_6>$ là một mạch.

Tập con các đỉnh liên kết của một đường được gọi là BAO CHUYỀN.

Thuật ngữ **HÀNH TRÌNH** (PARCOURS) để chỉ nhóm lại các đường, các dây chuyền, các mạch và các chu trình. Một hành trình được gọi là :

- **SƠ CẤP** : Nếu Tất cả các đỉnh hợp thành đều phân biệt.
- **ĐƠN** : Nếu tất cả các cạnh đều phân biệt.
- **HAMILTON** : Đi qua đúng một lần đối với mỗi đỉnh của đồ thị.
- **EULER** : Đi qua đúng một lần tại mỗi cạnh của đồ thị.
- **TIỀN HAMILTON**: Đi qua it nhất một lần đối với mỗi đỉnh của đồ thị.
- **TIỀN EULER (CHINOIS**) : Đi qua ít nhất một lần tại mỗi cạnh của đồ thị.

1.4.3. Tính liên thông .

Một đồ thị không định hướng được gọi là LIÊN THÔNG (CONNEXE) nếu với mọi cặp đỉnh đều có đường nối.

THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG là một đồ thị con liên thông tối đại.

THÍ DỤ :

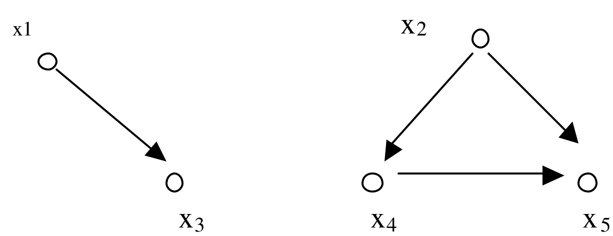


FIG.1.10. Đồ thị có hai thành phần liên thông.

ĐỊNH LÝ 1

Một đồ thị là liên thông nếu và chỉ nếu nó có một thành phần liên thông.

Chứng minh. Hiển nhiên.

ĐỊNH LÝ 2.

Một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì phải có một đường nối hai đỉnh này.

Chứng minh. Chứng minh bằng phản chứng.

1.4.4. Liên thông mạnh.

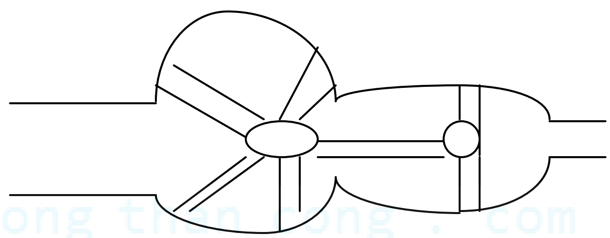
Một đồ thị có định hường được gọi là liên thông mạnh nếu với mọi cặp đỉnh phân biệt có một đường nối chúng.
Một thành phần liên thông mạnh (CFC) là đồ thị con tối đại liên thông mạnh.

ĐỊNH LÝ
Một đồ thị là liên thông nếu và chỉ nếu nó có một thành phần liên thông mạnh.

Chứng minh. Hiễn nhiên.

1.5 ĐỒ THỊ EULER.

1.5.1. Bài toán 7 chiếc cầu.



Đây là tình huống có thật ở Konigsberg (nước Đức), có hai vùng bị ngăn cách bởi một dòng sông và có hai cù lao ở giũa sông, 7 chiếc cầu nối những vùng này với nhau như minh họa trong hình vẽ trên. Người dân trong vùng thách đố nhau là thử tìm cách xuất phát từ một vùng đi dạo qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và trở về nơi xuất phát. Năm 1736, nhà toán học Euler đã mô hình hóa bài toán nàybằng một đồ thị vô hướng với mỗi đỉnh ứng với một vùng, mỗi cạnh ứng với một chiếc cầu. Bài tóan được phát biểu lại cho đồ thị trong hình vẽ bên dưới, hãy tìm một đường đi trong đồ thị đi qua một lần trong tất cả các cạnh và sau đó trở về đỉnh xuất phát. Việc giải bài toán đưa đến các định lý EULER.

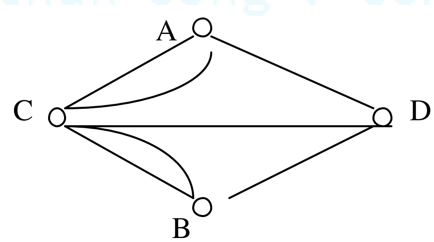


FIG. 1.11. Bài toán 7 chiếc cầu.

1.5.2. Định nghĩa.

Đồ thị không định hướng (có định hướng) EULER là đồ thị không định hướng (có định hướng) có chứa một mạch (chu trình) EULER.

Thí dụ.

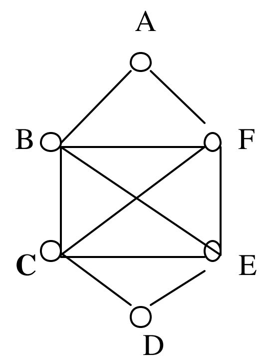


FIG. 1.12. <ABEDCEFCBFA.> là mạch EULER.

Đồ thị sau đây không có mạch EULER, nhưng có các đường EULER.

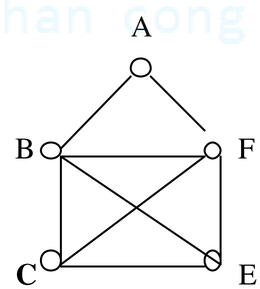


FIG. 1.13. <EBACBDCED> là một đường EULER.

1.5.3. Định lý EULER.

- **Định lý 1.** Một đồ thị không định hướng, liên thông là đồ thị EULER nếu và chỉ nếu mọi đỉnh của G có bậc chẵn.

- **Định lý 2.** Cho G= (X,U) là một đồ thị có định hướng, liên thông mạnh. Khi đó G là đồ thị Euler nếu và chỉ nếu ta có :

  $d^+(x) = d^-(x)$ với mọi đỉnh x.

- **Định lý 3.** Cho G=(X,U) là một đồ thị không định hướng, liên thông. Khi đó G có đường Euler nếu và chỉ nếu G có đúng 2 đỉnh có bậc lẻ.

Thí dụ.

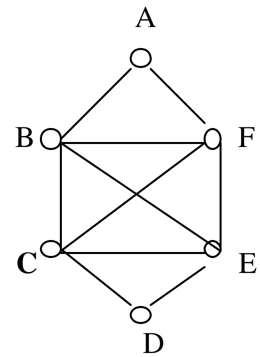


FIG.1.14. Đồ thị không định hướng có mọi đỉnh có bậc chẳn nên là đồ thị EULER

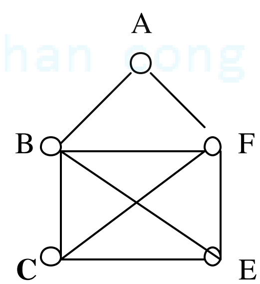


FIG. 1.15. Đồ thị có 2 đỉnh bậc lẻ nên không phải là đồ thị Euler, thỏa định lý 3 nên đồ thị sẽ có một đường Euler.

1.6 ĐỒ THỊ HAMILTON.

Khái niệm đường đi Hamilton được xuất phát từ bài toán « Xuất phát từ một đỉnh của khối thập nhị diện đều, hãy đi dọc theo các cạnh của khối đó sao cho đi qua đúng một lần tất cả các đỉnh của đồ thị ». Bài toán này được nhà Toán học Hamilton đưa vào năm 1859.

1.6.1. Định nghĩa.

Đồ thị HAMILTON là đồ thị có chứa một chu trình HAMILTON.

1.6.2. Tính chất.

- **Định lý 1.** Đồ thị đầy đủ là đồ thị Hamilton. Với n lẻ ≥ 3 thì K_n có $(n-1)/2$ chu trình Hamilton đôi một không có cạnh chung.
  Chứng minh. Hiển nhiên.

- **Định lý 2.** Giả sử G là đồ thị đơn không có định hướng có n đỉnh, với $n \geq 3$. Nếu với mọi cặp đỉnh x, z sao cho z không là đỉnh kề của x, ta có :
  $$d(x) + d(z) \geq n$$
  Thì G là một đồ thị Hamilton.
  Chứng minh. Bài tập.

- **Định lý 3.** Giả sử G là đồ thị đơn không có định hướng có n đỉnh, với $n \geq 3$. Nếu với mọi đỉnh có bậc $\geq n/2$ thì G là một đồ thị Hamilton.
  Chứng minh. Suy từ định lý 2.

- **Định lý 4.** Gi ả sử G là đồ thị đơn không có định hướng có n đỉnh và m cạnh. Nếu $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$ thì G là một đồ thị Hamilton.
  Chứng minh. Áp dụng định lý 2.