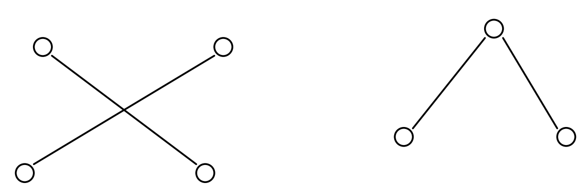
CHƯƠNG 4.

ĐỒ THỊ PHẲNG & BÀI TOÁN TÔ MÀU.

4.1. ĐINH NGHĨA VỀ ĐỒ THỊ PHẲNG.

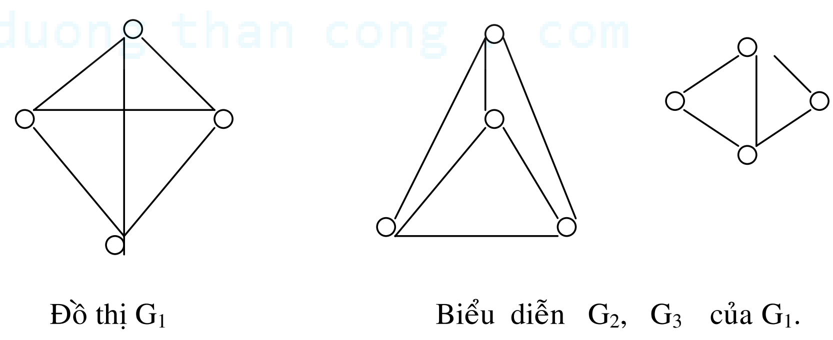
Đồ thị phẳng là một đồ thị có thể biểu diễn trên một mặt phẳng (hay trên hình cầu) sao cho hai cung (hay hai cạnh) không cắt nhau.

Ghi chú. Hai cạnh có chung một đỉnh được gọi là không cắt nhau.



Cắt nhau Không cắt nhau .

Thí dụ. Đồ thị G_1 là đồ thị phẳng và G_2 , G_3 là các biểu diễn phẳng của G_1.



Đồ thị G_1 Biểu diễn G_2, G_3 của G_1.

Cho G là đồ thị phẳng. Một **mặt** (FACE) của G là một miền, giới hạn bởi các cạnh, không có đỉnh lẫn cạnh ở bên trong. Trong các mặt này luôn luôn có một và chỉ một mặt vô hạn. **Đường biên** (CONTOUR) của một mặt r là chu trình hợp thành từ các cạnh biên của r. Hai mặt r và s được gọi là **KỀ** (ADJACENTES) nếu đường biên của chúng có chung ít nhất một cạnh. Hai mặt không có chung một đỉnh nào thì sẽ không kề.

THÍ DỤ.

❖ Một bản đồ địa dư là một đồ thị phẳng (với điều kiện là không có đảo). Đồ thị này đặc biệt mỗi đỉnh có bậc ≥ 3. Mặt h là mặt vô hạn, những mặt còn lại a, b, c, d, e, f, g là những mặt hữu hạn.

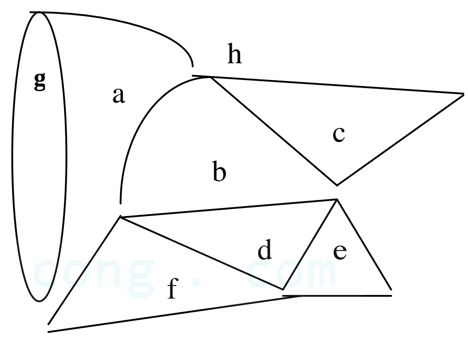


FIG. 4.1. ĐỒ THỊ PHẲNG.

❖ **Bài toán ba làng và ba nhà máy**. Ta có 3 làng a, b, c, mà ta muốn đặt đường nối với 3 nhà máy : một nhà máy cung cấp nước d, một nhà máy cung cấp ga e, một nhà máy cung cấp điện f. Vấn đề đặt ra là , ta có thể đặt trên một mặt phẳng sao cho các đường dẫn không giao nhau ngoài các đỉnh cực biên ? Đồ thị biểu diễn 3 làng và 3 nhà máy cho phép định nghĩa một lớp các đồ thị không phẳng.

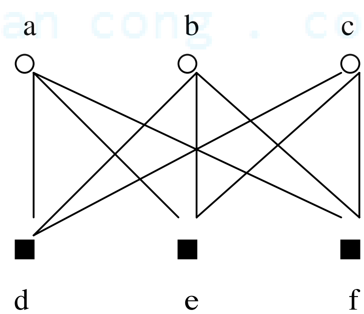


FIG 4.2. ĐỒ THỊ KHÔNG PHẲNG LOẠI 1 : $K_{3,3}$.

4.2. CÔNG THỨC EULER , HỆ QUẢ & THÍ DỤ.

4.2..1. CÔNG THỨC EULER.

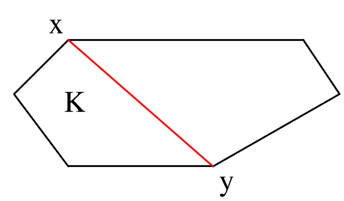
Cho một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, m cạnh và f mặt, ta có

$$n - m + f = 2$$

Chứng minh. Truy chứng trên số cạnh :

- $m = 1$. Ta có $n= 2$ đỉnh và $f=1$ mặt. Ta có $n – m + f = 2 – 1 + 1 = 2$
  Vậy công thức EULER đúng cho trường hợp $m = 1$.
- Giả sử công thức EULER đúng cho trường hợp đồ thị G_{i-1} có $m_i – 1$ cạnh.
  Ta sẽ chứng minh công thức EULER cũng đúng cho trường hợp đồ thị có m_i cạnh.
  Gọi cạnh $u = (x,y)$ là cạnh vẽ thêm vào G_{i-1} để có G_i.
  Hiễn nhiên là có it nhất một đỉnh thuộc G_{i-1} và $u=(x,y)$ thuộc một mặt K của G_{i-1}. Giả sử $x \in G_{i-1}$. Có 2 trường hợp xãy ra :

1. $y \in K$. Do đó ta có :



$f_i = f_{i-1} + 1.$
$n_i = n_{i-1}$
$m_i = m_{i-1} + 1$
Ta có :
$$n_i - m_i + f_i = n_i - (m_{i-1} + 1) + (f_{i-1} + 1).$$
$$= n_i - m_{i-1} + f_{i-1} = 2$$
Vậy công thức EULER đúng.

2. $y \notin K$. Ta có :
$f_i = f_{i-1}$.
$n_i = n_{i-1} + 1$
$m_i = m_{i-1} + 1$
Ta có :
$$n_i - m_i + f_i = (n_i + 1) - (m_{i-1} + 1) + f_{i-1}$$
$$= n_i - m_{i-1} + f_{i-1} = 2$$
Vậy công thức EULER đúng.

Vậy công thức EULER đúng với mọi m.

4.2.2. Hệ quả.

Trong một đồ thị đơn giản phẳng, liên thông bất kỳ có n đỉnh, m cạnh ($m > 2$) và f mặt. Khi ấy, ta có :

$$3f/2 \leq m \leq 3n - 6. \quad (1)$$

Chứng minh.
Mỗi mặt bị bao ít nhất 3 cạnh, mỗi cạnh thuộc 2 mặt.
Ba cạnh xác định tối đa 2 mặt. Vậy số mặt tối đa là 2m/3.
Ta có $f \leq 2m/3$. Dùng công thức EULER suy ra bất đẳng thức (1).

4.2.3. Hệ quả.

Trong tất cả các đồ thị phẳng đơn giản, có ít nhất một đỉnh có bậc ≤ 5.

Chứng minh.
Giả sử mọi đỉnh có bậc > 6. Khi ấy $2m > 6n \Rightarrow m > 3n > 3n - 6$. Mâu thuẩn.

4.2.4. THÍ DỤ.

Dùng công thức EULER, ta sẽ chứng minh là tất cả đồ thị đầy đủ 5 đỉnh K_5 là không phẳng.

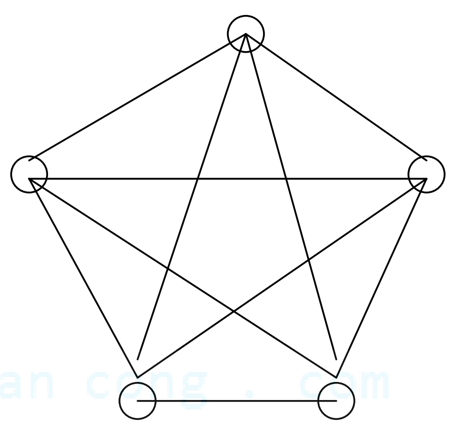


FIG 4.3. ĐỒ THỊ KHÔNG PHẲNG LOẠI 2 : K_5.

Chứng minh.
Ta có số đỉnh $n = 5$, Số cạnh $m = n(n-1)/2 = 10$.
Nếu K_5 phẳng, áp dụng hệ quả 3.2.2 ta có :

$$10 = m \leq 3n - 6 = 3x5 - 6 = 9.$$

Mâu thuẩn. Vậy K_5 không phẳng.

Nhận xét.

- ❖ Đồ thị những làng và những nhà máy (Loại 1 : $K_{3,3}$) và đồ thị đầy đủ 5 đỉnh (loại 2 :K_5) cho phép định nghĩa tất cả những đồ thị mà không phẳng.
- ❖ K_5, $K_{3,3}$ cũng là đồ thị đều.
- ❖ Đồ thị K_5 không phẳng với số đỉnh nhỏ nhất, đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có số cạnh nhỏ nhất, và cả hai là đồ thị không phẳng đơn giản nhất.

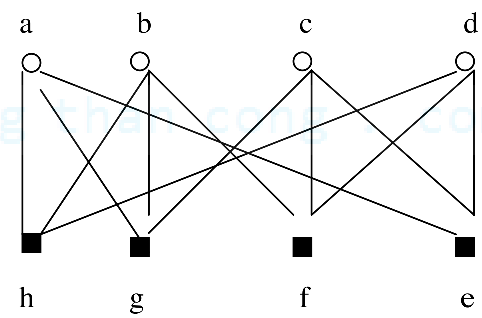
4.3. BẤT ĐẲNG THỨC CẠNH- ĐỈNH.

4.3.1. THÍ DỤ.

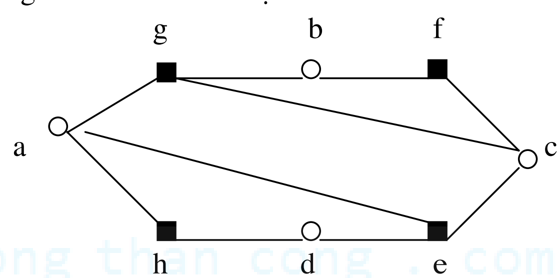
Ta xét bài toán xác định xem đồ thị G cho trước có phẳng không ?

❖ **THÍ DỤ 1**. Cho đồ thị $K_{4..}$ K_4 phẳng.

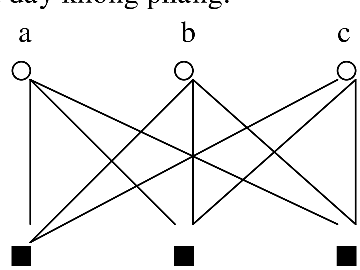
❖ **THÍ DỤ 2.** Cho đồ thị G sau :



G phẳng vì ta có thể vẽ lại như sau :



❖ **THÍ DỤ 3.** Đồ thị sau đây không phẳng.



1 2 3

4.3.2. BẤT ĐẲNG THỨC CẠNH – ĐỈNH.

Cho G là một đồ thị phẳng liên thông có n đỉnh, m cạnh và đường biên của các mặt có số cạnh $g \geq 3$. Khi ấy, ta có :

$$m \leq (n-2)\ g/(g-2).$$

Chứng minh.

Giả sử ma trận kề cạnh- mặt có dạng :

$$A = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ . \\ m_I \\ . \\ m_f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & . & f_j & f_F \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccccc} & & & . & \\ & & & . & \\ & & & . & \\ . & . & . & m_{ij} & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right| \end{array}$$

trong đó :

$m_{ij} =$ 1 nếu m_I là cạnh biên của f_j,
0 ngược lại.

Xét hàng thứ i, ta có :

$$\sum m_{ij} \leq 2 \quad (\text{vì } m_{ij} \text{ là cạnh biên của nhiều nhất 2 mặt})$$

Suy ra $\quad \sum \sum m_{ij} \leq 2m \qquad (1)$

Xét cột thứ j, ta có :

$$\sum m_{ij} \geq g \quad (\text{vì mặt } f_j \text{ có it nhất } g \text{ cạnh biên})$$

Suy ra $\quad \sum \sum m_{ij} \geq gf \qquad (2)$

Theo công thức EULER, ta có :

$$n - m + f = 2 \qquad (3)$$

Theo (2), (1), ta có :

$$\begin{array}{lll} & gf = g(2 + m - n) & \leq 2m \\ & (2 + m - n) & \leq 2m/g \\ \Leftrightarrow & m(1-2/g) & \leq n-2 \\ \Leftrightarrow & m & \leq (n-2)\ g/(g-2) \end{array}$$

BĐT đã chứng minh xong.

❖ **THÍ DỤ.**

Nhờ Bất đẳng thức trên, ta sẽ chứng minh được rằng đồ thị 3 làng và 3 nhà máy $K_{3,3}$, xem hình FIG. 4.2. không phẳng.
Thật vậy, nhận xét rằng mọi chu trình trong $K_{3,3}$ có số cạnh ít nhất là 4. Vậy nếu $K_{3,3}$ phẳng mọi mặt phải có số cạnh ít nhất là 4.
Theo Bất đẳng thức trên, ta có : $9 = m \leq (6-2)\,4/(4-2) = 8$. Mâu thuẩn.
Vậy $K_{3,3}$ không phẳng.

4.4. PHÉP ĐỒNG DẠNG.

4.4.1. ĐỊNH NGHĨA.

Hai đồ thị được gọi là đồng dạng với nhau nếu đồ thị này có được bằng cách biến đổi đồ thị kia theo cách thêm đỉnh bậc 2 hoặc bỏ đi đỉnh bậc 2.

THÍ DỤ. a ——— b → a ——— c ——— b → a ——— b

Thêm Đỉnh c bậc 2 vào ab

Bớt Đỉnh c bậc 2 khỏi acb.

4.4.2. BỔ ĐỀ.

Giả sử H là đồ thị con của G. Khi ấy :

- ❖ Nếu G phẳng thì H phẳng.
- ❖ Nếu H không phẳng thì G cũng không phẳng.

4.4.3. BỔ ĐỀ.

Mọi đồ thị là phẳng nếu đồng dạng của nó là phẳng.

4.5. ĐỊNH LÝ KURATOWSKI.

Đồ thị G là phẳng nếu và chỉ nếu G không chứa một đồ thị con đồng cấu với K_5 cũng như với $K_{3,3}$.

4.6. BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ.

4.6.1. ĐỊNH NGHĨA.

Phép tô màu một đồ thị là phép gán màu cho các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

Một cách hình thức có thể định nghĩa phép tô màu như sau :

Phép tô màu là một ánh xạ $\gamma : X \rightarrow N$ sao cho $\forall (x, y) \in X, \gamma(x) \neq \gamma(y)$.

THÍ DỤ.

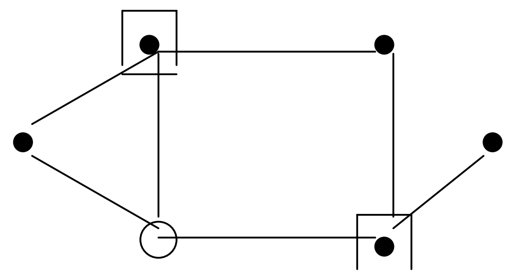


FIG 4.4.

Số màu (phân biệt) ít nhất cần thiết để tô màu các đỉnh của đồ thị G được gọi là **Sắc tố** (CHROMATIQUE) và ký hiệu là $\gamma(G)$.

Một đồ thị G $\gamma(G) \leq k$ được gọi là **k-sắc tố.**

Chận trên của sắc tố được cho bởi $d + 1$ với d bậc lớn nhất của đỉnh.

$$\gamma(G) \leq d + 1$$

4.6.2. CÁC ỨNG DỤNG.

❖ **XẾP LỊCH THI.**

Giả sử ta khảo sát việc thi vấn đáp của một kỳ thi. Có những ràng buộc sau :

- Một thầy , một lúc chỉ có thể hỏi thi một em.
- Một thí sinh thi với một thầy vào một thời gian đã định trước.

Sự phân bố thí sinh thi với thầy nào đã được ấn định trươc. (Thầy P_i thí sinh E_j) :

THÍ DỤ. $(P_1, E_1), (P_1, E_2), (P_1, E_3), (P_2, E_1), (P_2, E_2)$,

❖ **BẢN ĐỒ ĐỊA DƯ.**

Một bài toán hết sức lý thú là tô màu các bản đồ sao cho hai vùng khác nhau không cùng một màu.

4.6.3. THUẬT TOÁN TÔ MÀU.

DỮ LIỆU : Đồ thị G = (X, U).

KẾT QUẢ : Một phép tô màu $\gamma : X \rightarrow N$.

BEGIN.

Cho $\tau = x_1, x_2, ..., x_n$ là một phép đánh số thứ tự các đỉnh của G.

Cho $C = \{1, 2, ..., k\}$ tập các màu.

FOR i=1 To n Do
$\gamma(x_i) = \text{Min}\{k \in C : \forall$ đỉnh y kề $x_i, \gamma(y) \neq k\}$

END.

4.6.4. ĐỊNH LÝ.

Nếu G có chứa một đồ thị con đẳng hình với K_m thì $\gamma(G) \geq m$.

CHỨNG MINH. Hiển nhiên.

4.6.5. ĐỊNH LÝ 5 MÀU (KEMPE-HEAWOOD).

Mọi đồ thị phẳng đều có 5-sắc tố.

4.6.6. BÀI TOÁN 4 MÀU.

❖ **GIẢ THIẾT BÀI TOÁN 4 MÀU**.

Trên một bản đồ bất kỳ, ta nói nó được tô màu nếu mỗi miền của bản đồ được tô một màu xác định sao cho 2 miền kề nhau (chung một phần biên) phải được tô bằng hai màu khác nhau. Vấn đề đặt ra là cần dùng tối thiểu bao nhiêu màu để tô được một bản đồ bất kỳ. Vấn đề này được đặt ra từ năm 1852 do giáo sư De Morgan đặt ra : « Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau ». Sau đó có rất nhiều cố gắng của các nhà toán học để giải bài toán này nhưng đều không đi đến kết quả cuối cùng. Cho đến năm 1976, một nhóm các nhà toán học (K. Appel, W. Haken, J.Koch) đã xây dựng một lời giải dựa trên kết quả do máy tính IBM cung cấp đã khẳng định được giả thiết 4 màu là đúng.

❖ **LIÊN QUAN GIỮA BÀI TOÁN 4 MÀU & SẮC TỐ ĐỒ THỊ PHẲNG.**

Cho một đồ thị phẳng G liên thông, không có đỉnh cô lập. Ta xây dựng một đồ thị đối ngẫu của nó gọi là G^* như sau :

- Mỗi đỉnh x^* của G^* tương ứng đúng với một mặt s của G.
- Mỗi cạnh u^* của G^* nối 2 đỉnh của G^* tương ứng với 2 vùng kề nhau và cắt cạnh chung của hai vùng đó.

G^* được xây dựng như trên là một đồ thị phẳng, và cũng không có đỉnh cô lập.

Chú ý : Đối ngẫu của G^* là G.

❖ **HỆ QUẢ.**

Trong tất cả các bản đồ địa dư, có ít nhất một mặt có đường biên có số cạnh $\leq$ 5.

Chứng minh.

Chuyển bản đồ địa dư thành đồ thị đối ngẫu. Giả thiết trở thành « có it nhất một đỉnh có bậc 5 ≤ ». áp dụng Hệ quả 4.2.3. suy ra kết luận của hệ quả trên.

❖ **ĐỊNH LÝ 4 MÀU.**

Mọi đồ thị phẳng có sắc tố $\gamma(G) \leq 4$.