CHAPITRE 1.

FONDEMENTS DE LA THEORIE DES GRAPHES.

1.1 DEFINITIONS ET EXEMPLES.

1.1.1 DEFINITIONS.

1.1.1.1 Graphes Orientés.

Un GRAPHE G = G(X,U) est déterminé par

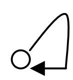
- Un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets** ou **nœuds.**
- Un ensemble $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ du produit cartésien X x X dont les éléments sont appelés **arcs.**

Pour un arc $u = (x_i, x_j)$, x_i est l'extrémité **initiale,** x_j l'extrémité **finale** (ou bien **origine** et **destination**). L'arc u part de x_i et arrive à x_j.

Graphiquement, l'arc u se représente de la manière suivante :

FIG.1.1. Arc $u=(x_i, x_j)$

Un arc (x_i, x_i) est appelé une **boucle.**



Un **p-graphe** est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de p arcs de la forme (i,j) entre deux sommets quelconques.

Exemple.

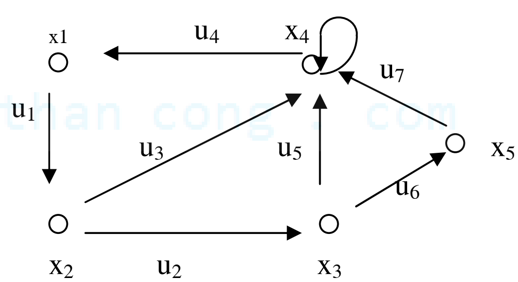


FIG. 1.2. Graphe determiné par (X,U),
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$

1.1.1.2 Graphes non Orientés.

Lors de l'étude de certaines propriétés, il arrive que l'orientation des arcs ne joue aucun rôle. On s'intéresse simplement à l'existence d'arc(s) entre deux sommets (sans en préciser l'ordre). Un arc sans orientation est appelé **arête**. Pour une arête $u=(x_i,x_j)$, on dit que u est INCIDENTE aux sommets x_i et x_j.

Exemple.

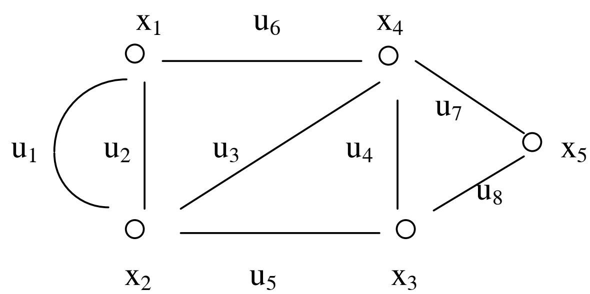


FIG. 1.3. Graphe determiné par (X,U),

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

Un **multigraphe** est un graphe pour lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets.

Un graphe est **simple** :

1. s'il n'est pas un multigraphe ;
2. s'il n'existe pas de boucle.

Deux arêtes u, v sont dites paralèlles si et seulement s'elles sont des arêtes incidentes entre deux sommets distincts. Notation : $u \| v$. Dans la figure FIG 1.3. nous avons $u_1 \| u_2$.

1.1.1.3 Principales Définitions.

- **APPLICATION MULTIVOQUE.** Soit G = (X,U) un graphe orienté, x_i, x_j deux sommets de G. On a :
  - ❖ x_j est SUCCESSEUR de x_i si $(x_i,x_j) \in U$; l'ensemble des successeurs de x_i est noté $\Gamma(x_i)$.
  - ❖ x_j est PREDECESSEUR de x_i si $(x_j,x_i) \in U$; l'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté $\Gamma^{-1}(x_i)$.
  - ❖ L'application Γ qui, à tout élément de X, fait correspondre une partie de X est appelée une APPLICATION MULTIVOQUE.
  - ❖ Pour un 1-graphe, G peut être parfaitement déterminé par (X,Γ), notation à la base d'une représentation informatique très utilisée, les LISTES D'ADJACENCE.

EXEMPLE. $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$; $\Gamma(x_1) = x_2$; $\Gamma(x_2) = \{x_3,x_4\}$; $\Gamma(x_3)=\{x_4,x_5\}$; $\Gamma(x_4)=\{x_1\}$; $\Gamma(x_5)=\{x_4\}$.

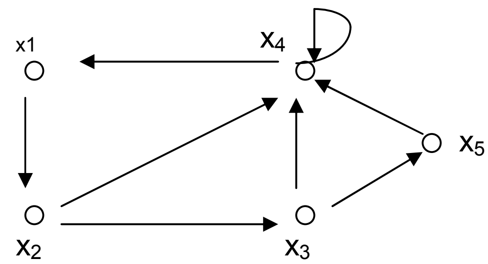


FIG. 1.4. Graphe déterminé par (X,Γ)

- **ADJACENCE.**
  - ❖ Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont joints par un arc.
  - ❖ Deux arcs sont **adjacents** s'ils ont au moins une extrémité commune.

- **DEGRES.**
  - ❖ Le **demi- degré extérieur** de x_i , $d^+(x_i)$ est le nombre d'arcs ayant x_i comme extrémité initiale ; $d^+(x_i)=card(\Gamma(x_i))$.
  - ❖ Le **demi-degré intérieur** de x_i , $d^-(x_i)$ est le nombre d'arcs ayant x_i comme extrémité finale ; $d^-(x_i)=card(\Gamma^{-1}(x_i))$.
  - ❖ Le degré de x_i , $d(x_i) = d^+(x_i) + d^-(x_i)$. **Le degré d'un sommet** d'un graphe non orienté est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Une **boucle** augmente de deux unités le degré du sommet concerné.

EXEMPLE. [cf. FIG. 1.4]

$d^+(x_2)= 2$; $d^-(x_2)= 1$; $d(x_2)=3$.

$d^+(x_4)= 1$; $d^-(x_4)= 3$; $d(x_4)=6$ (il y a une boucle du sommet x_4).

❖ Un sommet est dit **isolé** si son degré est égal à zéro.

❖ **THÉORÈME. (FORMULE ENTRE DÉGRÉ ET NOMBRE DE ARÊTES).**

1.Some de degrés est égal deux fois de nombre des arêtes.

2. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On a

$$\sum d^+(x) = \sum d^-(x) = card(U) \text{ (nombre d'arcs)}.$$

❖ **COROLAIRE.** Le nombre de sommets ayant le degré impair est pair.

DEMONSTRATION.

$\sum$d(sommet de dégré impair)+$\sum$ d(sommet de dégré pair) = 2 x nombre d'arcs

- **GRAPHE COMPLEMENTAIRE.**

  $G=(X, \overline{G})$ et $\overline{G}=(X, \overline{U}).(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_i,x_j) \notin \overline{U}$ et $(x_i,x_j) \notin U \Rightarrow (x_i,x_j) \in \overline{U}$.

  $\overline{G}$ est le graphe **complémentaire de** G.

- **GRAPHE PARTIEL.**
  $G=(X,U)$ et $U_p \subset U$. $G_p=(X,U_p)$ est un graphe **partiel** de G ;

- **SOUS GRAPHE.**
  $G=(X,U)$ et $X_s \subset X$. $G_s=(X_s,V)$ est un **sous graphe** de G; où V est la restriction de la fonction caractéristique de U à X_s.
  $V=\{(x,y)/(x,y) \in U \cap X_s \times X_s\}$. $\forall x_i \in X_s, \Gamma_s(x_i)=\Gamma(x_i) \cap X_s$.

- **SOUS GRAPHE PARTIEL.** Combinaison des deux définitions précédentes.

EXEMPLE. Réseau routier.
- ❖ Que les autoroutes : graphe partiel
- ❖ Que la région Midi-Pyrénées: sous graphe.
- ❖ Que les autoroutes Midi-Pyrénées: sous graphe partiel.

- **GRAPHE symétrique** : $(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_j,x_i) \in U$.

- **GRAPHE anti –symétrique** : $(x_i,x_j) \in U \Rightarrow (x_j,x_i) \notin U$.

- **GRAPHE réfléxif** : $(x_i,x_i) \in U, \forall x_i \in U$.

- **GRAPHE transitif** : $(x_i,x_j) \in U, (x_j,x_k) \in U \Rightarrow (x_i,x_k) \in U$.

- **GRAPHE complet** : $(x_i,x_j) \notin U \Rightarrow (x_j,x_i) \in U$ (il y a uniquement une arête entre deux sommets). Un graphe complet ayant n sommets a n(n-1)/2 arêtes. Noté K_n.

- **GRAPHE HOMOGENE** de degré h : tout sommet est de degré h.

- **CLIQUE** : ensemble des sommets d'un sous graphes complet.

EXEMPLE.

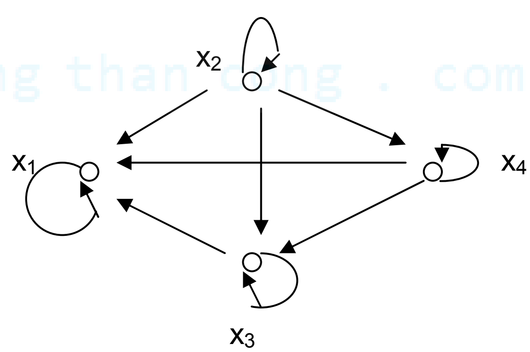
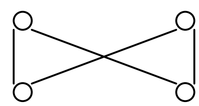


FIG. 1.5. Graphe réflexif, anti symétrique, transitif et complet.

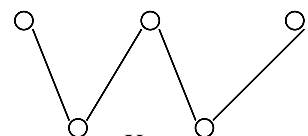
- **GRAPHE BI-PARTIE** G=(X,U) si :
  1. X partionné en X_1 èt X_2.
  2. $\forall (x_1,x_2) \in U$ alors $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

  Si $Card(X_1) = n$, $Card(X_2) = m$, G est noté $K_{n,m}$.

  Exemple : Les graphes suivants sont bi-parties, mais non complets.



$K_{2,2}$



$K_{3,2}$

1.1.2 EXEMPLES.

- **EXEMPLE 1.** Plus court chemin. Carte routière.

  Problème 1. Un graphe orienté G = (X,U), une valuation $v : U \rightarrow R$ et s, t deux sommets distincts de X .

  Question 1. Trouver le plus court chemin entre s et t ?

  Ce problème est polynomial : Algorithme de Dijkstra, Bellman-Ford (voir Chapitre 3)

- **EXEMPLE 2.** Arbre de poids minimum.

  Réseau électrique, alimentation en eau potable à partir d'une source unique

  Problème .2. Un graphe non - orienté G = (X,U), une valuation de poids $v : U \rightarrow R^+$ et s, t deux sommets distincts de X .

  Question 2. Trouver un arbre recouvrant de poids minimum?

  Ce problème est polynomial :Algorithme de Kruskal, Prim (voir Chapitre 2)

1.2 REPRESENTATIONS DES GRAPHES.

Un certain nombre de représentations existent pour décrire un graphe. En particulier, elles ne sont pas équivalentes du point de vue de l'efficacité des algorithmes. On distingue principalement la représentation par matrice d'adjacence, par matrice d'incidence sommets - arcs (ou sommets – arêtes dans le cas non orienté) et par listes d'adjacence.

1.2.1. Utilisation de tableau.

1.2.1.1. Matrice d'adjacence.

On considère un 1-graphe. La matrice d'adjacence fait correspondre les sommets origine des arcs (placés en ligne dans la matrice) aux sommets destination (placés en colonne). Dans le formalisme MATRICE BOOLEENNE, l'existence d'un arc (x_i,x_j) se traduit par la présence d'un 1 à l'intersection de la ligne x_i et de la colonne x_j ; l'absence d'arc par la présence d'un 0 (dans un formalisme dit MATRICE AUX ARCS les éléments représentent le nom de l'arc).

Place mémoire utilisée : n^2 pour un graphe d'ordre n (i.e., n sommets).

EXEMPLE.

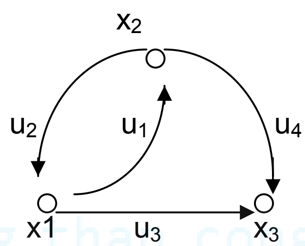


FIG.1.6. 1. GRAPHE.

La matrice d'adjacence de ce graphe est suivant :

	x_1	x_2	x_3 ← destination
x1	0	1	1
x_2	1	0	1
x_3	0	0	0
↑ origine			

Dans le cas où le graphe est non orienté, la matrice est symétrique. Dans cas où le graphe est valué, on utilise une matrice où l'élément d'indices x_i, x_j a pour valeur le poids de l'arc $u = (x_i, x_j) \in U$, sinon une valeur dont on sait qu'elle ne peut être un poids, par exemple $\propto$.

EXEMPLE.

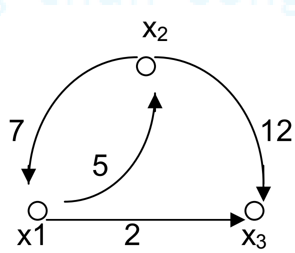


FIG.1.7. 1. GRAPHE.

La matrice d'adjacence de ce graphe est la suivante :

	x_1	x_2	x_3 ← destination
x1	∝	5	2
x_2	7	∝	12
x_3	∝	∝	∝

1.2.1.2. Matrice d'incidence sommets – arcs.

- ❖ Ligne ↔ sommet
- ❖ Colonne ↔ arc.

Si $u = (i,j) \in U$, on trouve dans la colonne u : $a_{iu} = 1$: $a_{ju} = -1$; tous les autres termes sont nuls.

Place mémoire utilisée : n x m.

EXEMPLE. Pour le 1.graphe de la figure FIG.1.6. on a :

	u_1	u_2	U_3	u_4
x1	1	-1	1	0
x_2	-1	1	0	1
x_3	0	0	-1	-1

REMARQUES : La somme de chaque colonne est égale à 0 (un arc a une origine et une destination) ; la matrice est totalement UNIMODULAIRE, i.e., toutes les sous–matrices carrées- extraites de la matrice - ont pour déterminant +1, -1 ou 0.

Une autre définition de la Matrice d'incidence sommets – arcs est comme suit :
Soit G = (X,U) un 1-GRAPHE, une matrice d'incidence sommets – arcs $A=[a_{I,j}]$ est déterminée par :

$$a_{iu} = 1 \text{ si } u = (x_i, x_j) \in U,$$
$$= 0, \text{ si non.}$$

EXEMPLE. Pour le 1.graphe de la figure FIG.1.6. on a :

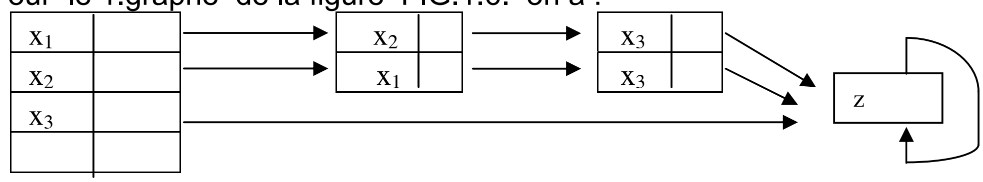
	u_1	u_2	U_3	u_4
x1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	1
x_3	0	0	0	0

REMARQUES : La somme de chaque ligne est égale à la somme des arcs incidents.

1.2.2. Utilisation de pointeurs .

L'avantage de la représentation par des pointeurs ou listes d'adjacence (grâce à l'application multivoque Γ), par rapport à celle par matrice d'adjacence, est le gain obtenu en place mémoire ; ce type de représentation est donc mieux adapté pour une implémentation. Le but est de représenter chaque arc **PARCOURS** par son extrémité initiale étant définie implicitement. Tous les arcs émanant d'un même sommet sont liés entre eux dans une liste. A chaque arc sont donc associés le noeud destination et le pointeur au prochain sommet dans la liste.

EXEMPLE. Pour le 1.graphe de la figure FIG.1.6. on a :



1.3 PARCOURS DE GRAPHES.

Beaucoup de problèmes sur les graphes nécessitent un examen exhaustif des sommets et des arcs (arêtes) du graphe. En général, il y a deux types de parcours : Parcours en profondeur et Parcours en largeur.

1.3.1. EN PROFONDEUR.

PRINCIPE :

À partir d'un sommet donné, à suivre un chemin le plus loin possible, puis à faire des retours arrières pour reprendre tous les chemin ignorés précédemment.

Exemple. Considèrons un graphe comme ci-dessous :

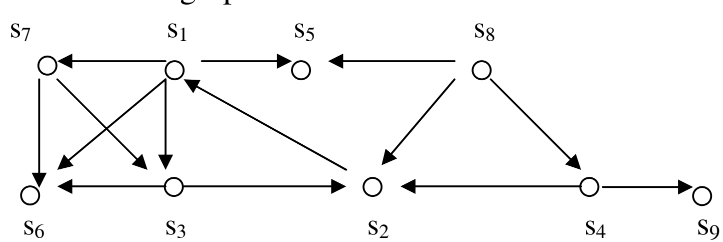


FIG. 1.8.

La méthode de parcours en profondeur est effectueé sur le graphe de la figure FIG.1.15 à suivre :

- À partir du sommet s_1. Le premier sommet qui est choisi est s_3.
- À partir du sommet s_3. Les successeurs de s_3 est s_2 et s_6. On peut choisir s_2
- À partir du sommet s_2. Retourner s_3. Choisir s_6
- À partir du sommet s_6. Retourner s_3. Retouner s_1. Le successeur de s_1 est s_5.
- À partir du sommet s_5. Retouner s_1. Le successeur de s_1 est s_7.
- À partir du sommet s_7.
- À partir du sommet s_4. Le sommet s_9 est marqué.
- À partir du sommet s_8.
- Tous les sommets étant marqués. Le processus se termine.

Noté :

s[k], k : 1..n L'ensemble de n sommets,est numéroté de 1 à n.
Mark[k], k : 1..n = 1 si sommet k étant marqué,
= 0 sinon.
a[i,j], i,j : 1..n = 1 si (i,j) est un arc (ou une arête) du graphe G
= 0 sinon.

Version récursive.

Programme principal :

```
For (int i =1 ; i<= n ; i++)   Mark[i] := 0 ;
For (int i =1 ; i<= n ; i++)   if (Mark[i] == 0) PROF(i) ;
```

Procédure récursive :

Parcours en profondeur à partir du sommet k.

```
Procédure PROF(int k ) ;
{
    Mark[k] := 1 ;
    {Visit des sommets dans la matrice d'adjacence du sommet k}
    For (int j = 1 ; j<=n ;j++)
    if (Mark[j] == 0) && (a[k][j]==1)  PROF(j)  ;
}End PROF
```


La complexité : Graphe ayant n sommets et m arcs(arêtes).

- Par matrices d'adjacence : $O(n^2)$.
- Par listes d'adjacence : O(max(n,p)).

1.3.2. EN LARGEUR.

PRINCIPE :

- Explorer le graphe niveau par niveau, à partir d'un sommet donné. C'est-à-dire, À partir d'un sommet s, on commence par visiter tous les successeurs de s avant de visiter les autres descendants de s.

Exemple. Un parcours en largeur du graphe de la figure FIG.1.8, à partir de sommet s_1 dans l'ordre:

- s_1.
- s_3, s_5, s_6, s_7.
- s_2.
- s_4.
- s_9
- s_8.

1.4 CONNEXITE DANS LES GRAPHES.

1.4.1. Chaîne - Cycle.

Une **Chaîne** est une séquence d'arêtes telle que chaque arête ait une extrémité commune avec la suivante. Un **Cycle** est une chaîne qui contient au moins une arête et dont les extrémités coïncident.

EXEMPLE.

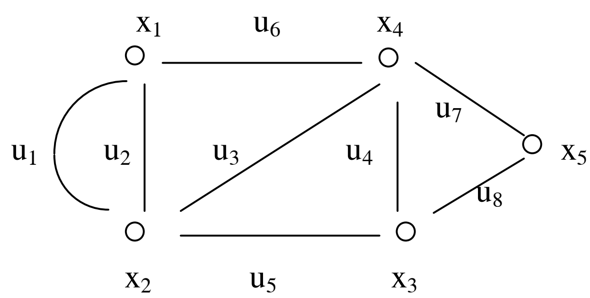


FIG.1.9. <u_5,u_2,u_6,u_7> est une chaîne, <u_4,u_7,u_8> est un cycle.

1.4.2. Chemin – Circuit.

Ce sont les mêmes définitions que les précédentes mais en considérant des concepts orientés.

Le sous ensemble de sommets atteignables à partir d'un sommet donné, grâce à des chemins, est appelé FERMETURE TRANSITIVE de ce sommet.

Le terme PARCOURS regroupe les chemins, les chaînes, les circuits et les cycles. Un parcours est :

- ❖ ELEMENTAIRE : Si tous les sommets qui le composent sont tous distincts.
- ❖ SIMPLE : Si tous les arcs qui le composent sont tous distincts.
- ❖ HAMILTONIEN : Passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.
- ❖ EULERIEN : Passe une fois et une seule par chaque arc du graphe.
- ❖ PREHAMILTONIEN : Passe au moins une fois par chaque sommet du graphe.
- ❖ PREEULERIEN ou CHINOIS:Passe au moins une fois par chaque arc du graphe

1.2.1 Connexité .

Un graphe non orienté est CONNEXE si ∀i,j, il existe une chaîne entre i et j.

On appelle COMPOSANTE CONNEXE le sous ensemble de sommets tels qu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques.

EXEMPLE :

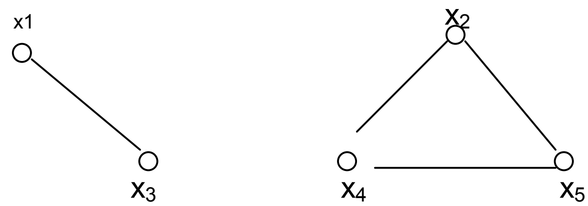


FIG.1.10. Graphe ayant deux composantes connexes.

THEOREME 1.2.3.1.

Un graphe est connexe si, et seulement si, il ne possède qu'une composante.

1.2.2 Forte Connexité.

Une graphe orienté est FORTEMENT CONNEXE si ∀i,j, il existe un chemin entre i et j.

On appelle COMPOSANTE FORTEMENT CONNEXE (cfc) un sous ensemble de sommets tels qu'il existe un chemin entre deux sommets quelconques. Une cfc maximale (cfcm) est un ensemble maximal de cfc.

THEOREME 1.2.4.1.

Un graphe est connexe si, et seulement si, il ne possède qu'une cfcm.

1.5 GRAPHE EULERIEN.

1.3.1. Problème des 7 ponts.

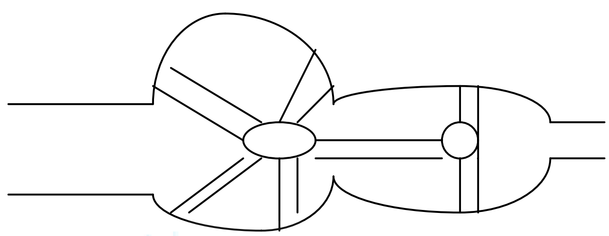


FIG.1.11. Problème de 7 ponts.

C'est une vrai situation à Koenigsberg (Allemande). Il ya deux régions séparées par une rivière qui a deux iles dedans. Il y a 7 ponts qui ont relié ces régions. Un Problème a été posé comme suit :

« Commencer par une région et se promener une fois et une seule par chaque pont et de revenir au point de départ ».

En 1736, un Mathématcien nomé EULER a modelisé ce problème par un graphe non orienté, sommet correspond à un région et arête à un pont. Ce Problème a été énoncé pour un graphe ci-dessous (cf FIG 1.9) comme le suivant:

« Chercher un cycle qui **Passe une fois et une seule par chaque arête** ».

La résolution du problème entraine les Théorèmes d' EULER.

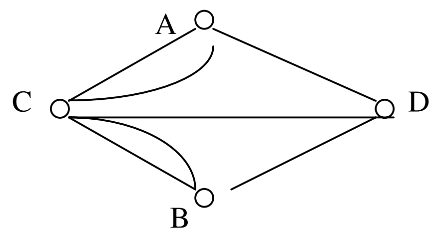


FIG. 1.12. Problème des 7 ponts.

1.3.2. Définition.

Un graphe non orienté (respectivement orienté) est dit un graphe EULERIEN s'il ait un cycle (resp. circuit) Eulerien.

Exemple 1.

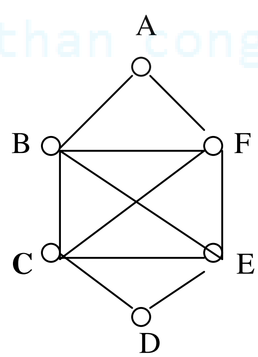


FIG. 1.13. Graphe Eulerien.

Exemple 2.

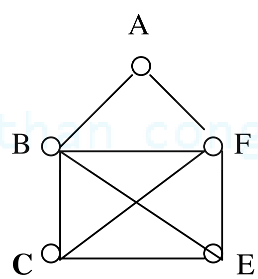


FIG. 1.14. Ce n'est pas un graphe Eulerien, mais ayant une chaine d' Euler.

1.3.3. Théorèmes d' EULER.

- **Théorème 1.** Un graphe non orienté est dit Eulérien si et seulement s'il soit connexe et tous les sommets sont de degré pair.

- **Théorème 2..** Soit G=(X,U) un graphe orienté. Alors G est Eulérien si et seulement si :
  1. G fortement connexe et
  2. $d^+(x) = d^-(x), \quad \forall x$.

- **Théorème 3.** Soit G=(X,U) un graphe non orienté, pas de sommets isolés. Alors, G a une chaîne Eulérienne si et seulement si :
  1. G connexe et
  2. Ayant justement deux sommets à degré impair.

Exemple 1.

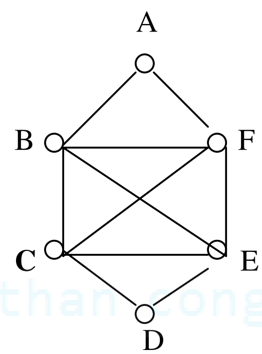


FIG.1.15. Graphe non orienté ayant tous les sommets à degré pair, alors G est Eulérien.

Exemple 2.

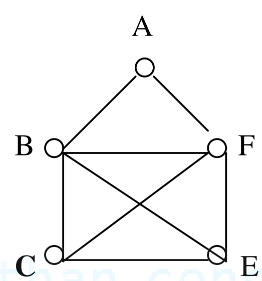


FIG. 1.16. Graphe ayant exactement 2 sommets à degré impair, alors G n'est pas Eulérien, mais d'après le théorème 3, G a une chaine Eulerienne.

1.6 GRAPHE HAMILTONIEN.

Le concept de chemin (resp. chaîne) Hamiltonien a été prononcé d'après le problème suivant : « Départ d' un sommet d'un polyèdre équilatéral, **passe une fois et une seule par chaque sommet** ». Ce problème a été formulé par Hamilton en 1859.

1.4.1. Définition

Un graphe non orienté (respectivement orienté) est dit un graphe HAMILTONIEN s'il ait un cycle (resp. circuit) Hamiltonien.

1.4.2. Propriétés.

- **Théorème 1.** Un graphe complet est Hamiltonien. Si n impair et $n \geq 3$, alors K_n ayant $(n-1)/2$ chaines Hamiltoniennes, chaque couple n' ayant pas une arête commone.
  Démonstration. Évident.

- **Théorème 2.** Soit G un graphe simple, non orienté ayant n sommets, $n \geq 3$. Si tous les sommets sont à degré $\geq n/2$, alors G est Hamiltonien.
  Démonstration. Comme exercice.

- **Théorème 3.** Soit G un graphe simple, non orienté ayant n sommets et m arêtes. Si $m \geq (n^2 - 3n + 6)/2$, alors G est Hamiltonien.
  Démonstration . Comme l'exercice.

- **Théorème 4.** Soit G un graphe simple, non orienté ayant n sommets. S' il exist au moins $(n-1)\,n/2 + 2$ arêtes, alors G est Hamiltonien.
  Démonstration . Appliquer le théorème 3.
  On a
  $$\begin{aligned}(n^2 - 3n + 6)/2 &= (n^2 - n + 4)/2 + (-2n + 2)/2 \\ &= (n^2 - n + 4)/2 + (1-n) \\ &\leq (n^2 - n + 4)/2 = (n-1)n/2 + 2.\end{aligned}$$
  $$m \geq n(n-1)/2 + 2 \geq (n^2 - 3n + 6)/2$$

Mail=tmdung@fit.hcmuns.edu.vn