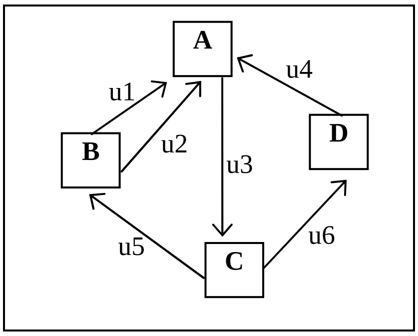
I.1 ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

❑ ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Một đồ thị có hướng G=(X, U) được định nghĩa bởi:

- tập hợp X ≠ ∅ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
- tập hợp U là tập các cạnh của đồ thị;
- mỗi cạnh u∈U được liên kết với một cặp đỉnh (i, j)∈X^2.

<u>Ví dụ 1:</u>



Hình vẽ bên là minh họa hình học của một đồ thị có:

- Tập đỉnh là {A, B, C, D}.
- Tập cạnh là {u1,u2,u3,u4,u5,u6}.
- Ánh xạ φ định nghĩa như sau:

u1 và u2 liên kết với cặp (A, B)
u3 liên kết với cặp (A, C)
u4 liên kết với cặp (D, A)
u5 liên kết với cặp (C, B)
u6 liên kết với cặp (C, D).

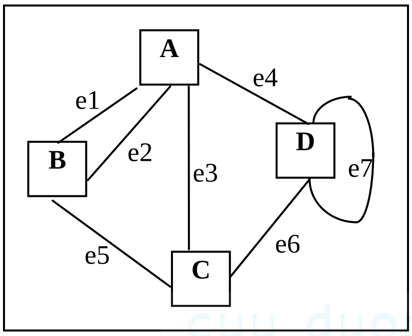
❑ ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Nếu chúng ta không phân biệt thứ tự của cặp đỉnh liên kết với mỗi cạnh thì sẽ có được đồ thị vô hướng. Đồ thị vô hướng G=(X, E) được định nghĩa bởi:

- tập hợp X ≠ ∅ được gọi là tập các đỉnh của đồ thị;
- tập hợp E là tập các cạnh của đồ thị.
- mỗi cạnh e∈E được liên kết với một cặp đỉnh {i, j} ⊆ X không phân biệt thứ tự.

<u>Ví dụ 2:</u>

Hình vẽ dưới là minh họa hình học của một đồ thị có:



- Tập đỉnh là {A, B, C, D}.
- Tập cạnh là {e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7}.
- Ánh xạ φ định nghĩa như sau:

e1 và e2 liên kết với {A, B}
e3 liên kết với {A, C}
e4 liên kết với {A, D}
e5 liên kết với {B, C}
e6 liên kết với {C, D}
e7 liên kết với {D}.

❑ MỘT SỐ TỪ NGỮ và QUI ƯỚC

Khi một cạnh u được liên kết với cặp đỉnh (i, j):

- ta nói cạnh u kề với đỉnh i và kề với đỉnh j (hay cũng nói đỉnh i và đỉnh j kề với cạnh u);
- ta có thể viết tắt u=(i, j), như vậy có lúc ta viết u=(i, j) và v=(i, j) nhưng lại hiểu u ≠ v;
- nếu đồ thị vô hướng, ta nói hai đỉnh i và j được nối với nhau, nếu đồ thị có hướng (tức cặp đỉnh (i, j) được tôn trọng thứ tự) ta nói đỉnh i được nối tới đỉnh j.

- nếu đồ thị có hướng thì ta nói cạnh u bắt đầu từ đỉnh i và kết thúc tại đỉnh j, ta cũng nói cạnh u đi ra khỏi đỉnh i và đi vào đỉnh j.

Ngoài ra, trong giáo trình nầy chúng ta chỉ làm việc với trường hợp các đồ thị có tập đỉnh và tập cạnh hữu hạn. Để cho chính xác thì phải nhấn mạnh là ĐỒ THỊ HỮU HẠN, tuy nhiên để ngắn gọn chúng ta chỉ dùng thuật ngữ ĐỒ THỊ và hiểu ngầm đó là đồ thị hữu hạn.

❑ KHUYÊN và CẠNH SONG SONG

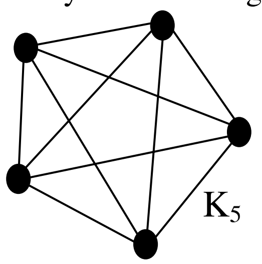
- Trong một đồ thị có hướng: nếu cạnh u liên kết với cặp đỉnh (i, i) thì u được gọi là một khuyên; hai cạnh a và b được gọi là song song nếu chúng cùng liên kết với một cặp đỉnh (i, j).
- Trong đồ thị vô hướng: nếu cạnh e liên kết với tập đỉnh {i} thì e được gọi là một khuyên; hai cạnh a và b được gọi là song song nếu chúng cùng liên kết với một tập đỉnh {i. j}.

<u>Ví dụ:</u> Trong hai ví dụ trên u1 và u2 là hai cạnh song song trong đồ thị thứ nhất, e1 và e2 là hai cạnh song song và e7 là một khuyên trong đồ thị thứ hai.

I.2 CÁC DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

❑ ĐỒ THỊ ĐƠN: không có khuyên và không có cạnh song song.

❑ ĐỒ THỊ ĐỦ: đồ thị vô hướng, đơn mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh nối chúng. Ta có:



K_5

- Một đồ thị đủ n đỉnh sẽ có n(n-1)/2 cạnh.
- Đồ thị đủ n đỉnh được ký hiệu là K_n.

❑ ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN (HAI PHẦN)

Cho G=(X, E) là một đồ thị vô hướng, đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập X được chia thành hai tập X_1 và X_2 sao cho:

- hai tập X_1 và X_2 phân hoạch X, nghĩa là: $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$ và $X_1 \cap X_2 = \emptyset$;
- hai đỉnh bất kỳ trong X_1 không được nối với nhau; hai đỉnh bất kỳ trong X_2 cũng không được nối với nhau.

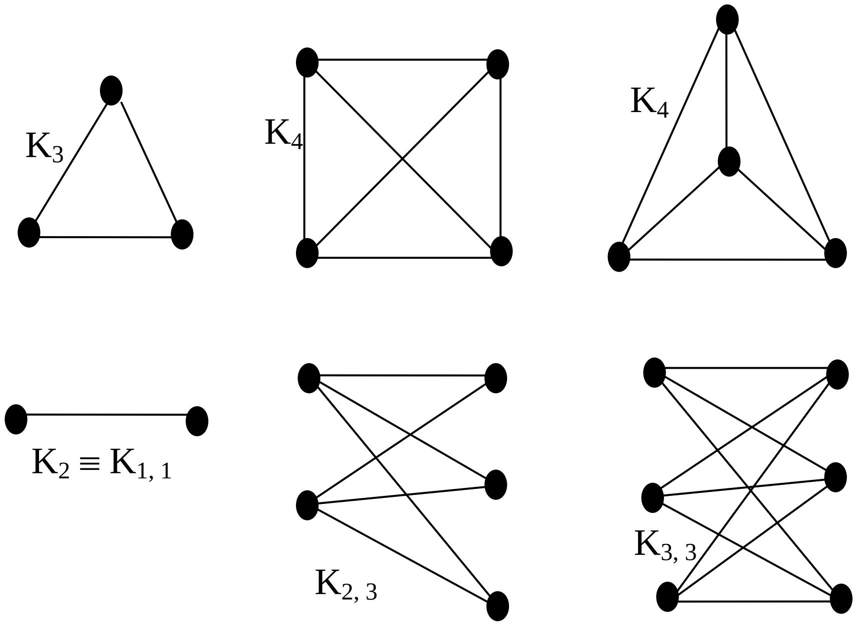
❑ ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN ĐỦ

Cho G=(X, E) là một đồ thị vô hướng lưỡng phân với hai tập X_1 và X_2 định nghĩa như trên. G được gọi là đồ thị lưỡng phân đủ nếu:

Với mọi cặp đỉnh (i, j) mà $i \in X_1$ và $j \in X_2$ thì có đúng một cạnh của G nối i và j.

- Nếu $|X_1| = n$ và $|X_2| = m$ thì G có mxn cạnh và được ký hiệu là $K_{m, n}$.

❑ CÁC VÍ DỤ



I.3 BẬC CỦA ĐỈNH

❑ BẬC (ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG)

Bậc của một đỉnh x trong đồ thị vô hướng là tổng số các cạnh kề với đỉnh x, qui ước là mỗi khuyên phải được tính hai lần. Bậc của đỉnh x trong đồ thị G được ký hiệu là $d_G(x)$ (hay d(x) nếu đang xét một đồ thị nào đó).

Ví dụ: đồ thị vô hướng trong ví dụ 2 có d(B)=3 và d(D)=4.

❑ BẬC (ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG)

- Nửa bậc ngoài của đỉnh x: ký hiệu $d^+(x)$ là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh x (hay khởi đầu từ đỉnh x).
- Nửa bậc trong của đỉnh x: ký hiệu $d^-(x)$ là số các cạnh đi vào đỉnh x (hay kết thúc tại đỉnh x).
- Bậc của đỉnh x: $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$

Ví dụ: đồ thị có hướng trong ví dụ 1 có $d^+(A)=1$ và $d^-(A)=3$.

❑ ĐỈNH TREO, ĐỈNH CÔ LẬP

- Đỉnh treo là đỉnh có bậc bằng 1.
- Đỉnh cô lập là đỉnh có bậc bằng 0.

❑ ĐỊNH LÝ (công thức liên hệ giữa bậc và số cạnh)

a) Xét đồ thị có hướng G=(X, U). Ta có:

$$\sum d^+(x) = \sum d^-(x) = |U| \text{ và } \sum d(x) = 2|U|.$$

x∈X x∈X x∈X

b) Xét đồ thị vô hướng G=(X, E). Ta có:

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2\,|E|.$$

- <u>Hệ quả</u>: số lượng các đỉnh có bậc lẻ trong một đồ thị là một số chẵn.

I.4 ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ, ĐỒ THỊ CON, ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

❑ ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

Cho hai đồ thị vô hướng $G_1=(X_1, E_1)$ và $G_2=(X_2, E_2)$.

Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện sau:

- $\psi: X_1 \to X_2$ và $\delta: E_1 \to E_2$
- Nếu cạnh $e \in E_1$ liên kết với cặp đỉnh $\{x, y\} \subseteq X_1$ xét trong đồ thị G_1 thì cạnh $\delta(e)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $\{\psi(x), \psi(y)\}$ xét trong đồ thị G_2 (điều nầy được gọi là sự tương ứng cạnh).

❑ ĐẲNG CẤU ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

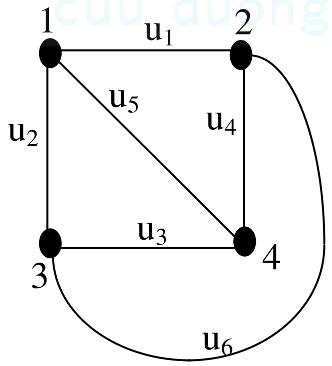
Cho hai đồ thị có hướng $G_1=(X_1, U_1)$ và $G_2=(X_2, U_2)$.

Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại hai song ánh ψ và δ thỏa mãn điều kiện sau:

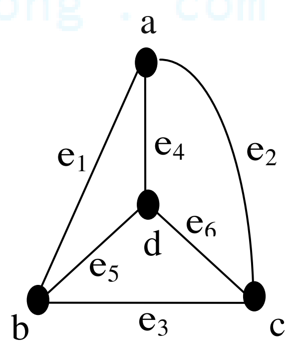
- $\psi: X_1 \to X_2$ và $\delta: E_1 \to E_2$
- Nếu cạnh $e \in E_1$ liên kết với cặp đỉnh $(x, y) \in X_1^2$ xét trong đồ thị G_1 thì cạnh $\delta(e)$ sẽ liên kết với cặp đỉnh $(\psi(x), \psi(y))$ xét trong đồ thị G_2 (điều nầy được gọi là sự tương ứng cạnh).

❑ VÍ DỤ VỀ ĐỒ THỊ ĐẲNG CẤU

<u>Ví dụ 3</u>: Hai đồ thị (G1) và (G2) đẳng cấu nhau tương ứng đỉnh cạnh dưới đây.



(G_1)

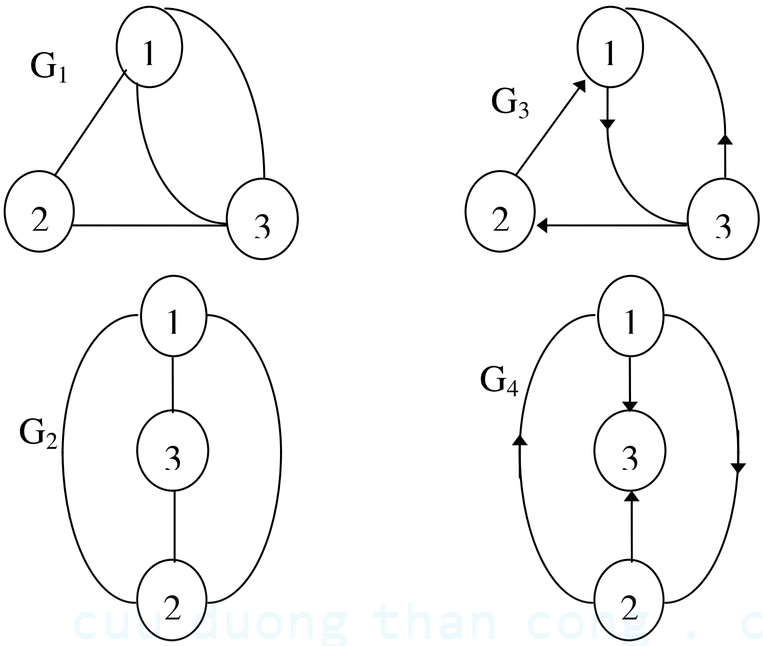


(G_2)

$\psi(1)=a$, $\psi(2)=b$, $\psi(3)=c$, $\psi(4)=d$

$\delta(u_1)=e_1$, $\delta(u_2)=e_2$, $\delta(u_3)=e_6$, $\delta(u_4)=e_5$, $\delta(u_5)=e_4$, $\delta(u_6)=e_3$.

Ví dụ 4:



Hai đồ thị vô hướng G_1 và G_2 đẳng cấu nhau, trong khi hai đồ thị có hướng G_3 và G_4 không đẳng cấu nhau.

❑ ĐỒ THỊ CON

Cho hai đồ thị $G=(X, U)$ và $G_1=(X_1, U_1)$. Ta nói G_1 là đồ thị con của đồ thị G và ký hiệu $G_1 \leq G$ nếu:

- $X_1 \subseteq X$; $U_1 \subseteq U$
- Với mọi cạnh $u=(i, j) \in U$ của G, nếu $u \in U_1$ thì $i, j \in X_1$

❑ ĐỒ THỊ BỘ PHẬN

Cho đồ thị $G_1=(X_1, U_1)$ là đồ thị con của đồ thị $G=(X, U)$. G_1 gọi là đồ thị bộ phận của G nếu $X=X_1$.

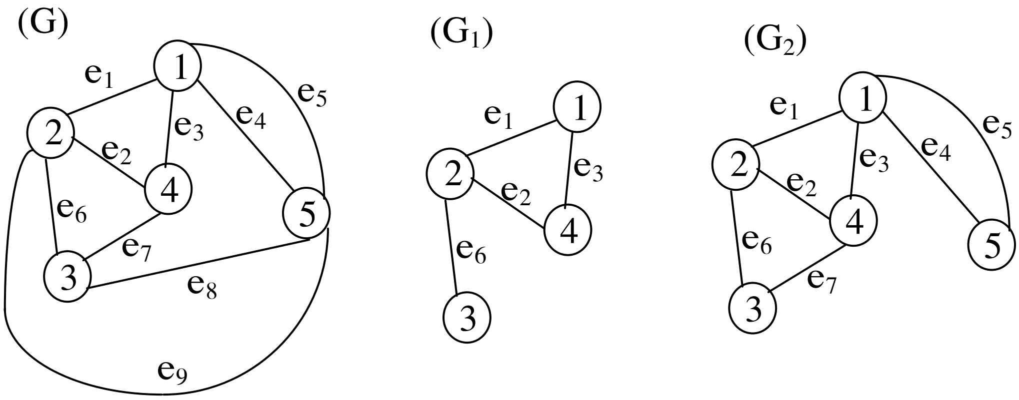
❑ ĐỒ THỊ CON SINH BỞI TẬP ĐỈNH

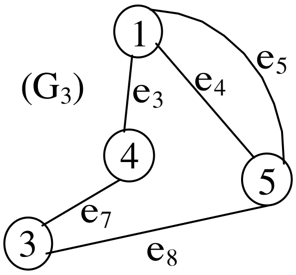
Cho đồ thị $G=(X, U)$ và $A \subseteq X$. Đồ thị con sinh bởi tập A, ký hiệu là <A> được định nghĩa là <A>=(A, V), trong đó:

(i) tập cạnh $V \subseteq U$

(ii) Gọi $u=(i, j) \in U$ là một cạnh của G, nếu $i, j \in A$ thì $u \in V$

- VÍ DỤ VỀ ĐỒ THỊ CON, ĐỒ THỊ BỘ PHẬN





Trong các đồ thị trên, tất cả các đồ thị G_1, G_2, G_3 đều là đồ thị con của đồ thị G. Trong đó G_2 là đồ thị (con) bộ phận của G, G_3 là đồ con của G sinh bởi tập đỉnh {1, 2, 4, 5}, G_1 không phải là đồ thị bộ phận và cũng không sinh bởi tập đỉnh {1, 2, 3, 4} vì thiếu cạnh e_7.

I.5 DÂY CHUYỀN, CHU TRÌNH, ĐƯỜNG ĐI và MẠCH

Cho đồ thị G=(X, U).

- DÂY CHUYỀN

Một dây chuyền trong G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh:

$x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m$ (x_i là đỉnh và u_i là cạnh)

trong đồ thị thỏa mãn điều kiện u_i liên kết với cặp đỉnh x_i, x_{i+1} không phân biệt thứ tự, nghĩa là:

$u_i=(x_i, x_{i+1})$ hay $u_i=(x_{i+1}, x_i)$ nếu đồ thị có hướng,

$u_i=\{x_i, x_{i+1}\}$ nếu đồ thị vô hướng.

Khi đó ta gọi x_1 là đỉnh đầu và x_m là đỉnh cuối của dây chuyền.

- DÂY CHUYỀN SƠ CẤP: dây chuyền không có đỉnh lặp lại.

- CHU TRÌNH: là một dây chuyền $x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m\ u_m\ x_1$ sao cho các đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_m$ đôi một khác nhau.

- ĐƯỜNG ĐI

Một đường đi trong G là một dãy luân phiên các đỉnh và cạnh:

$x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m$ (x_i là đỉnh và u_i là cạnh)

trong đồ thị thỏa mãn điều kiện u_i liên kết với cặp đỉnh (x_i, x_{i+1}), nghĩa là:

u_i liên kết với (x_i, x_{i+1}) nếu đồ thị có hướng,

u_i liên kết với $\{x_i, x_{i+1}\}$ nếu đồ thị vô hướng.
Khi đó ta gọi x_1 là đỉnh đầu và x_m là đỉnh cuối của đường đi.

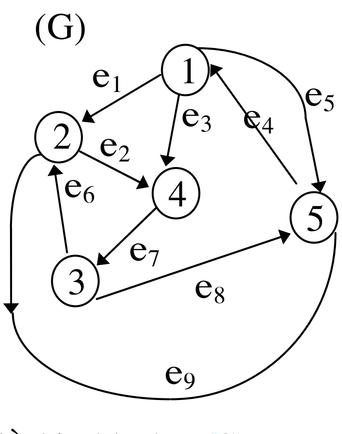
- ĐƯỜNG ĐI SƠ CẤP: đường đi không có đỉnh lặp lại.

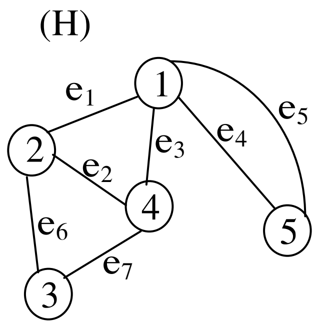
- MẠCH: là một đường đi $x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m\ u_m\ x_1$ sao cho các đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_m$ đôi một khác nhau.

GHI CHÚ:
a) Trong trường hợp đồ thị vô hướng thì:
- hai khái niệm dây chuyền và đường đi là như nhau,
- hai khái niệm chu trình và mạch là như nhau.

Do đó, chúng ta cũng dùng thuật ngữ đường đi cho đồ thị vô hướng. Đôi khi một mạch trong đồ thị có hướng cũng được gọi là một "chu trình có hướng", hay một đường đi trong đồ thị có hướng cũng được gọi là "đường đi có hướng" để nhấn mạnh.
b) Khi các cạnh hoàn toàn được hiểu rõ (chẳng hạn trong một đồ thị vô hướng không có cạnh song song) thì:
- một dây chuyền $x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m$ có thể viết gọn là $x_1\ x_2 \ldots\ x_{m-1}\ x_m$;
- một chu trình $x_1\ u_1\ x_2\ u_2 \ldots\ x_{m-1}\ u_{m-1}\ x_m\ u_m\ x_1$ có thể viết gọn là $x_1\ x_2 \ldots\ x_{m-1}\ x_m\ x_1$.

Ví dụ 5.





Trong đồ thị có hướng (G):

- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_1 2 e_6 3 e_8 5** là một dây chuyền sơ cấp (nhưng không phải đường đi vì cạnh e_6 ngược hướng).
- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_1 2 e_6 3 e_8 5 e_4 1** là một chu trình (nhưng không phải mạch vì cạnh e_6 ngược hướng).
- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_3 4 e_7 3 e_6 2 e_9 5** là một đường đi sơ cấp.
- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_3 4 e_7 3 e_6 2 e_9 5 e_4 1** là một mạch.

Trong đồ thị vô hướng (H):
- Dãy các đỉnh cạnh: **5 e_4 1 e_3 4 e_2 2 e_1 1** là một dây chuyền không sơ cấp.

- Dãy các đỉnh cạnh: **5 e_4 1 e_3 4 e_7 3 e_6 2** là một dây chuyền sơ cấp và cũng là một đường đi sơ cấp.
- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_4 5 e_5 1** là một chu trình.
- Dãy các đỉnh cạnh: **1 e_1 2 e_6 3 e_7 4 e_3 1** là một chu trình.

I.6 BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

Xét đồ thị G=(X, U) (có hướng hay vô hướng).
Giả sử tập X gồm n đỉnh và được sắp thứ tự $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tập U gồm n cạnh và được sắp thứ tự $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$.

- Ma trận kề của đồ thị G, ký hiệu B(G), là một ma trận nhị phân cấp n x n được định nghĩa như sau:
  $B=(B_{ij})$ với $B_{ij}=1$ nếu có cạnh nối x_i tới x_j, $B_{ij}=0$ nếu ngược lại.

- Nếu G là đồ thị vô hướng, ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của đồ thị G, ký hiệu A(G), là ma trận nhị phân cấp n x m được định nghĩa như sau:
  $A=(A_{ij})$ với $A_{ij}=1$ nếu đỉnh x_i kề với cạnh u_j, $A_{ij}=0$ nếu ngược lại.

- Nếu G là đồ thị có hướng không có khuyên, ma trận liên thuộc (hay liên kết đỉnh cạnh) của đồ thị G, ký hiệu A(G), là ma trận n x m được định nghĩa là $A=(A_{ij})$ với qui ước:
  $A_{ij} = 1$ nếu cạnh u_j hướng ra khỏi đỉnh x_i ,
  $A_{ij} = -1$ nếu cạnh u_j hướng vào đỉnh x_i ,
  $A_{ij} = 0$ nếu cạnh u_j không kề đỉnh x_i .

<u>Ví dụ 6</u>.

a) Nếu ta sắp thứ tự các đỉnh và cạnh của đồ thị G trong ví dụ 1 là X={A, B, C, D} và U={u1, u2, u3, u4, u5, u6} thì các ma trận biểu diễn của đồ thị là:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Gọi H là đồ thị có được từ đồ thị G nói trên bằng cách bỏ đi hướng các cạnh và ta sắp thứ tự các đỉnh, cạnh như trên thì:

$$B(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I.7 CÁC THÀNH PHẦN LIÊN THÔNG VÀ TÍNH LIÊN THÔNG

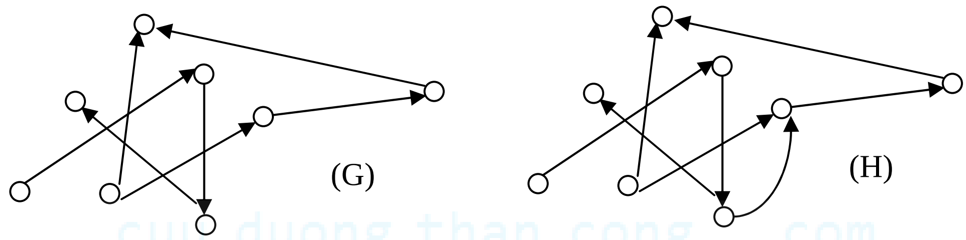
Cho đồ thị G=(X, U) vô hướng hay có hướng. Ta định nghĩa một quan hệ ~ như sau trên tập đỉnh X:

$\forall i, j \in X, i \sim j \Leftrightarrow$ (i=j hay có dây chuyền đỉnh đầu là i và đỉnh cuối là j).

Quan hệ nầy có ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ tương đương. Do đó tập X được phân hoạch thành các lớp tương đương và ta định nghĩa:

- một thành phần liên thông của đồ thị là một lớp tương đương được xác định bởi quan hệ ~ nói trên;
- số thành phần liên thông của đồ thị làsố lượng các lớp tương đương;
- một đồ thị liên thông là một đồ thị chỉ có một thành phần liên thông.

<u>Ví dụ 7</u>.



Đồ thị (G) trong hình vẽ trên gồm 2 thành phần liên thông, trong khi đồ thì (H) là một đồ thị liên thông.

GHI CHÚ:

Khi một đồ G gồm p thành phần liên thông $G_1, G_2, ..., G_p$ thì các đồ thị G_i cũng là các đồ thị con của G và chúng ta có $d_G(x) = d_{G_i}(x)$ với mọi đỉnh x của G_i.

<table>
<tr>
<td>

*** <u>Thuật toán tìm các thành phần liên thông (Depth first search)</u>:**
Giả sử đồ thị G=(X, E) gồm n đỉnh.
Thuật toán được tóm tắt như sau:
- <u>Bước 1.</u> Khởi tạo biến *label=0* và gắn nhãn 0 cho tất cả các đỉnh
- <u>Bước 2.</u>
Lặp i=1, 2, ..., n làm
Nếu đỉnh i có nhãn 0 thì
label=label+1
<u>Viếng vàgắn nhãn đỉnh i với nhãn là *label*</u>.
Cuối nếu
Cuối lặp i

Trong đó, việc viếng và gắn nhãn được thực hiện bằng một thủ tục đệ qui *Visit* như sau:

</td>
<td>

<u>Thủ tục *Visit* (đỉnh i, nhãn *label*)</u>
- Gắn nhãn *label* cho đỉnh i
- Với mọi đỉnh j mà có cạnh nối i với j và j có nhãn 0 ta gọi đệ qui *Visit*(j, *label*).

<u>Chú ý</u>: Khi thuật toán kết thúc thì các đỉnh nằm trong cùng một thành phần liên thông sẽ được gắn cùng một nhãn.

</td>
</tr>
</table>

BÀI TẬP CHƯƠNG I

PHẦN A. VIẾT CHƯƠNG TRÌNH

Viết chương trình nhập vào một đồ thị vô hướng (tối đa 30 đỉnh), xác định xem đồ thị có liên thông hay không, nếu đồ thị không liên thông hãy in ra các thành phần liên thông của đồ thị. Giả sử dữ liệu nhập cho bài tập nầy là ma trận kề được lưu trên đĩa dưới dạng các tệp văn bản ASCII theo qui ước như sau:

- Dòng 1 của tệp: lưu số đỉnh của đồ thị.
- Từ dòng 2 đến dòng n+1 của tệp: mỗi dòng gồm n số có giá trị 0 hay 1, dòng thứ i của tệp chính chính là dòng i-1 của ma trận kề.

PHẦN B. LÀM TRÊN GIẤY

1. G là một đồ thị đơn, vô hướng cósố đỉnh n>3. Chứng minh G có chứa 2 đỉnh cùng bậc.
2. Đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ. Chứng minh tồn tại một dây chuyền nối hai đỉnh đó với nhau.
3. Xét đồ thị G đơn, vô hướng gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông.
   a) Chứng minh:
   $$m \le (n-p)(n-p+1)/2,$$
   suy ra nếu m > (n-1)(n-2)/2 thì G liên thông.
   b) Một đồ thị đơn có 10 đỉnh, 37 cạnh thì có chắc liên thông hay không?
4. Đồ thị G đơn, vô hướng gồm n đỉnh và $d(x) \ge (n-1)/2$ với mọi đỉnh x. Chứng minh G liên thông.
5. Đồ thị vô hướng G liên thông gồm n đỉnh. Chứng minh số cạnh của G ≥ n-1.
6. Xét đồ thị G vô hướng đơn. Gọi x là đỉnh có bậc nhỏ nhất của G. Giả sử $d(x) \ge k \ge 2$ với k nguyên dương. Chứng minh G chứa một chu trình sơ cấp có

chiều dài lớn hơn hay bằng k+1.

7. G là đồ thị vô hướng đơn. Chứng minh G hay ∍ liên thông.
8. Cho G là đồ thị vô hướng liên thông. Giả sử C1 và C2 là2 dây chuyền sơ cấp trong G có số cạnh nhiều nhất. Chứng minh C1 và C2 có đỉnh chung.
9. G là đồ thị vô hướng không khuyên và d(x) ≥3 với mọi đỉnh x. Chứng minh G có chứa chu trình với số cạnh chẵn.