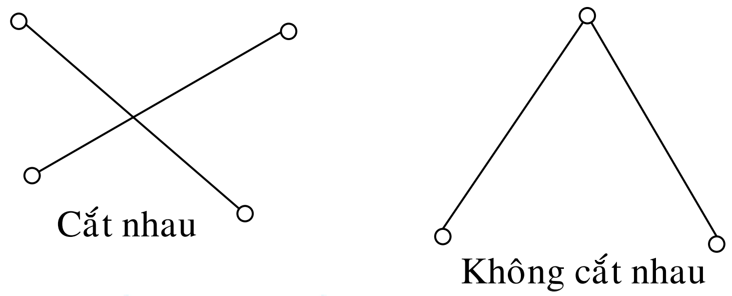
CHƯƠNG III. ĐỒ THỊ PHẲNG

III.1 Định nghĩa

(a) <u>Đồ thị phẳng</u>

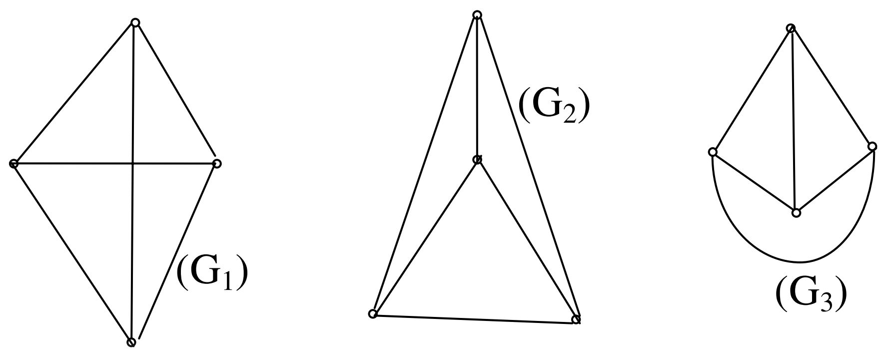
- Một đồ thị vô hướng G được gọi là phẳng nếu tồn tại một cách vẽ G trong mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau.
- Khi G là một đồ thị phẳng thì mỗi cách vẽ G trong mặt phẳng (sao cho không có hai cạnh nào của G cắt nhau) được gọi là một biểu diễn phẳng của G.

<u>Ghi chú</u>: hai cạnh có chung một đỉnh được qui ước là không cắt nhau



<u>Ví dụ</u>

Đồ thị (G_1) là đồ thị phẳng và các đồ thị (G_2), (G_3) là các biểu diễn phẳng của (G_1).



(b) <u>Phép biến đổi đồng phôi</u>

Thêm vào 1 đỉnh nằm trên 1 cạnh hay gộp 2 cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành 1 cạnh.

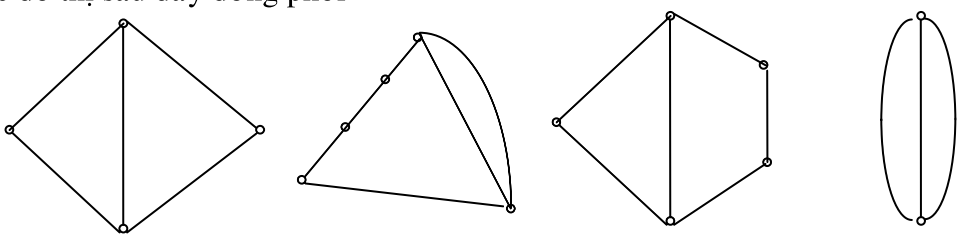
(c) <u>Đồ thị đồng phôi</u>

Hai đồ thị được gọi là đồng phôi nếu mỗi đồ thị có được từ đồ thị kia bằng cách thực hiện một dãy các phép biến đổi đồng phôi.

Định lý: Nếu G là một đồ thị phẳng thì ta có thể tìm một đồ thị G_1 đồng phôi với G sao cho có thể vẽ G_1 bằng cách chỉ dùng các đoạn thẳng.

Ví dụ

Các đồ thị sau đây đồng phôi



III.2 Các phép rút gọn cơ bản trên đồ thị

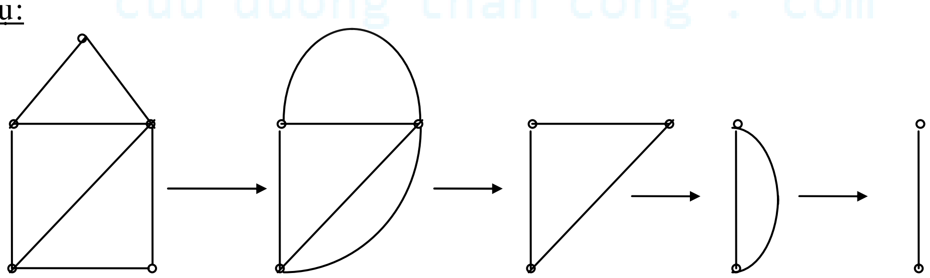
Tính phẳng của một đồ thị không thay đổi nếu thực hiện một hay nhiều lần các phép rút gọn sau đây:

(a) Bỏ đi các khuyên

(b) Bỏ bớt các cạnh song song (chỉ giữ lại một cạnh nối hai đỉnh).

(c) Gộp hai cạnh có chung đỉnh bậc 2 thành một cạnh.

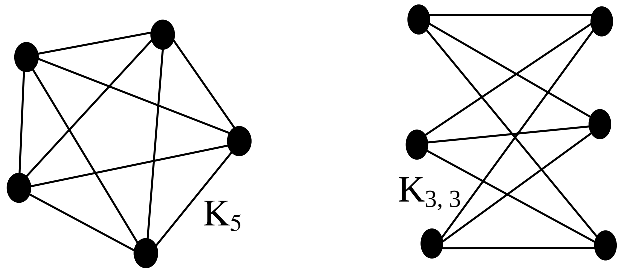
Ví dụ:



III.3 Định lý Kuratowski

Định lý 1: Đồ thị đủ K_5 không phẳng.

Định lý 2: Đồ thị lưỡng phân đủ $K_{3,3}$ không phẳng.

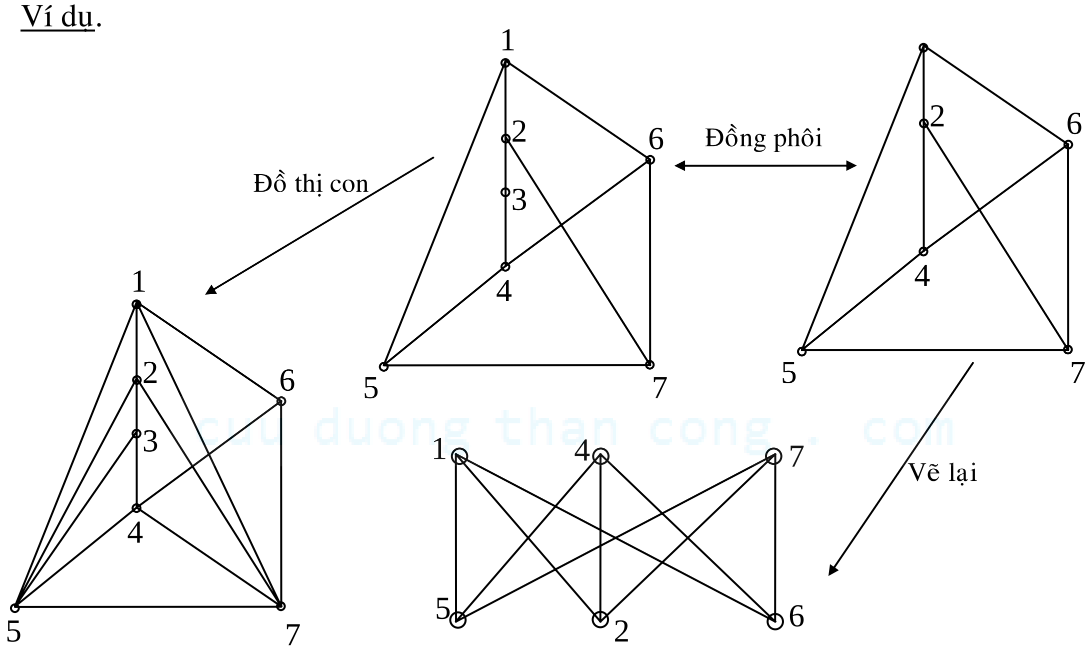


Nhận xét: hai đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là các đồ thị không phẳng đơn giản nhất với các tính chất sau

- Nếu xóa đi 1 đỉnh hay 1 cạnh của 2 đồ thị trên thì chúng ta sẽ có được đồ thị phẳng.
- Đồ thị K_5 là đồ thị không phẳng có ít đỉnh nhất.
- Đồ thị $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng có ít cạnh nhất.

Định lý 3.
Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có tính phẳng là G không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với K_5 hay $K_{3,3}$.

Ví dụ.



III.4 Công thức Euler

1

Định lý: Cho G là đồ thị phẳng, liên thông gồm n đỉnh, e cạnh. Giả sử G chia mặt phẳng ra làm f vùng, ta có công thức sau (công thức Euler):

$$\boxed{f = e - n + 2}$$

Hệ quả: Nếu G là đồ thị đơn, phẳng, liên thông, gồm n đỉnh và e cạnh (với e > 2). Giả sử G chia mặt phẳng ra thành f vùng. Ta có:

(a) $e \geq (3/2)f$ (b) $e \leq 3n - 6$

Ví dụ, áp dụng hệ quả nầy để chứng minh tính không phẳng của K_5. K_5 là đồ thị đơn và liên thông có v=5 và e=10, ta có $e=10 > 9=3v-6$ do đó K_5 không phẳng (chú ý rằng đảo lại nếu một đồ thị thỏa mãn $e \leq 3v - 6$ thì chưa chắc là đồ thị phẳng, $K_{3,3}$ là một ví dụ).

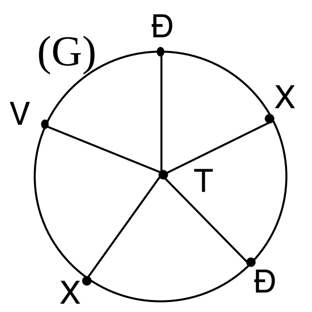
III.5 Tô màu đồ thị

III.5.1 Sắc số của đồ thị

(a) Một phép tô màu đồ thị là một cách đánh nhãn cho mỗi đỉnh của đồ thị bằng một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau phải được đánh nhãn khác nhau.

(b) Sắc số của một đồ thị G, ký hiệu $\gamma(G)$, là một số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một phép tô màu G chỉ sử dụng k màu.

Ví dụ:



$\gamma(G)=4$

$\gamma(K_n)=n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\gamma(K_{m,n})=2, \forall m, n \in \mathbb{N}$

III.5.2 Một vài tính chất về sắc số

- Nếu đồ thị G có chứa ít nhất một cạnh không phải là khuyên thì $\gamma(G) \geq 2$.
- Đồ thị đủ n đỉnh K_n có sắc số là n. Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đẳng cấu K_r thì $\gamma(G) \geq r$.
- Nếu đồ thị G là một chu trình sơ cấp n đỉnh thì:

  $\gamma(G)= 2$ nếu n chẳn, $\gamma(G)= 3$ nếu n lẻ;

  $\gamma(G)= (n \bmod 2) + 2$.

(a) Định lý 1.

Nếu T là một cây n đỉnh với $n \geq 2$ thì $\gamma(T)= 2$.

(b) Định lý 2.

Cho G là đồ thị liên thông có ít nhất 1 cạnh. Khi đó $\gamma(G)=2$ khi và chỉ khi G không chứa chu trình sơ cấp có số cạnh lẻ.

(c) Định lý 3.

Cho đồ thị G=(X, E). Gọi $d(G)=\max\{d(x)/x \in X\}$. Ta có: $\gamma(G) \leq d(G)+1$.

III.5.3 Bài toán sắc số của đồ thị phẳng

(a) Lịch sử về giả thuyết 4 màu

Khoảng 10/1852, giáo sư De Morgan ở trường Đại học Luân Đôn viết thư cho đồng nghiệp của mình là ông Sir William Hamilton để bàn về bài toán: "Mọi bản đồ đều có thể tô bằng 4 màu sao cho hai nước nằm kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau". Sau đó có nhiều cố gắng của một số nhà toán học để giải bài toán nầy nhưng đều không đi đến kết quả cuối cùng. Đặc biệt có một lời giải bị sai (phải sau 10 năm mới phát hiện được chỗ không đúng trong lời giải), nhưng lý luận của lời giải nầy đúng cho "bài toán 5 màu". Vào năm 1976, ...

Một số điểm cần chú ý:

(b) Liên quan giữa giả thuyết 4 màu và sắc số đồ thị phẳng