

ĐẠI SỐ B1

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

lvluyen@hcmus.edu.vn

 <http://lvluyen.wordpress.com/dsb1>

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

Nội dung

Chương 4. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

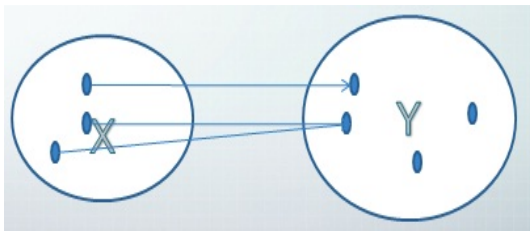
4.1. Định nghĩa

- ① Ảnh xạ
- ② Ảnh xạ tuyến tính

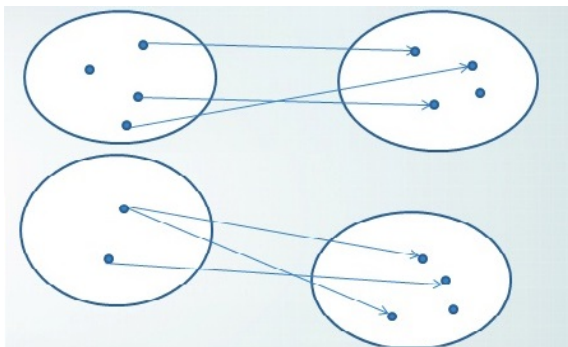
4.1.1. Ảnh xạ

Định nghĩa. Một **ảnh xạ** f từ tập X vào tập Y là một phép liên kết từ X vào Y sao cho mỗi phần tử x của X được liên kết với **duy nhất một phần tử** y của Y , ký hiệu: $y = f(x)$

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$



Khi đó X được gọi là **tập nguồn**, Y được gọi là **tập đích**.



Không là ánh xạ

Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x - 1$ là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$ là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $h(\frac{m}{n}) = m$ **không** là ánh xạ.

4.1.2. Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V và W là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ta nói ánh xạ $f : V \rightarrow W$ là một **ánh xạ tuyến tính** nếu thỏa hai điều kiện sau:

- i) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in V$;
- ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và với mọi $u \in V$.

Nhận xét. Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

Ký hiệu.

- $L(V, W)$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ V vào W .
- Nếu $f \in L(V, V)$ thì f được gọi là một **toán tử tuyến tính** trên V .
Viết tắt $f \in L(V)$.

Ví dụ. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chúng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Với mọi $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2), 2(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$ được kiểm tra tương tự.

Ví dụ.(tự làm) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y, y - 3z).$$

Chúng tỏ f là ánh xạ tuyến tính.

Mệnh đề. Cho $f : V \rightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- (i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- (ii) Với mọi $u \in V$, ta có $f(-u) = -f(u)$;
- (iii) Với mọi $u_1, \dots, u_m \in V$ và với mọi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, ta có
$$f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_m f(u_m).$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ và

$$f(1, 2, 1) = (2, 1); f(-1, 2, 3) = (4, -3).$$

Tính $f(5, 2, -3)$?

Giải. Ta có $(5, 2, -3) = 3(1, 2, 1) - 2(-1, 2, 3)$. Suy ra

$$f(5, 2, -3) = 3(2, 1) - 2(4, -3) = (-2, 9).$$

Định lý. Cho V và W là hai không gian vectơ, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là cơ sở của V . Khi đó, nếu $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ là một tập hợp của W thì tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ sao cho

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ thì

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Giải.

a) Chứng tỏ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ta có $|A| = 1$, suy ra $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính. Vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ bằng số vectơ của $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ta sẽ tìm $[u]_{\mathcal{B}}$. Lập ma trận mở rộng

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \ | \ u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + y - z \\ -x + z \end{pmatrix}. \text{ Suy ra}$$

$$u = (x - y - z)u_1 + (2x + y - z)u_2 + (-x + z)u_3.$$

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - y - z)f(u_1) + (2x + y - z)f(u_2) + (-x + z)f(u_3) \\ &= (x - y - z)(2, 1, -2) + (2x + y - z)(1, 2, -2) \\ &\quad + (-x + z)(3, 5, -7) \\ &= (x - y, y + 2z, x - 3z). \end{aligned}$$

Ví dụ.(tự làm) Cho

$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 2); u_2 = (-2, 5, -4); u_3 = (0, -1, 1))$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ thỏa

$$f(u_1) = (1, 1, -2); f(u_2) = (1, -2, 1); f(u_3) = (1, 2, -1).$$

Đáp án. $f(x, y, z) = (-x + 3y + 4z, -3x + 2z, -3y - 4z).$

4.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

- 1 Không gian nhân
- 2 Không gian ảnh

4.2.1. Không gian nhân

Định nghĩa. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\mathbf{Ker}f = \{u \in V \mid f(u) = \mathbf{0}\}$$

Khi đó $\mathbf{Ker}f$ là không gian con của V , ta gọi $\mathbf{Ker}f$ là *không gian nhân* của f .

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa, ta được

$$u \in \mathbf{Ker}f \Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0}.$$

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\mathbf{Ker}f$?

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Giải. Gọi $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ma trận hóa ta được $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z) = (2t, -t, t) \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (2, -1, 1)$.

Vậy, $\text{Ker } f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, x + 3y + 3z - t, 2x + 3y + 6z + 7t).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Ker } f$?

Hướng dẫn. Xét hệ phương trình thuần nhất với ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y, z, t) = (-3a - 8b, 3b, a, b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là $u_1 = (-3, 0, 1, 0)$ và $u_2 = (-8, 3, 0, 1)$.

Vậy, $\text{Ker } f$ có một cơ sở là $\{u_1 = (-3, 0, 1, 0); u_2 = (-8, 3, 0, 1)\}$.

4.2.1. Không gian ảnh

Định nghĩa. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\text{Im}f = \{f(u) \mid u \in V\}.$$

Khi đó $\text{Im}f$ là không gian con của W , ta gọi $\text{Im}f$ là *không gian ảnh* của f .

Định lý. Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của $\text{Im}f$.

Nhận xét. Dựa vào Định lý trên, để tìm cơ sở $\text{Im}f$, ta chọn một tập sinh S của V (để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó $\text{Im}f$ sinh bởi tập ảnh của S .

Ví dụ. Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Im}f$?

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, 3),$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 3, 5),$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1).$$

Ta có $\text{Im}f$ sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.

Lập ma trận $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Do đó $\text{Im} f$ có cơ sở là $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 3x + 2y, 2x + 2y - z, 4x - y + 5z).$$

Tìm một cơ sở của $\text{Im} f$?

4.3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là cơ sở của V ,
 $\mathcal{C} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ là cơ sở của W và $f \in L(V, W)$. Ta đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{C}}).$$

Khi đó ma trận P được gọi là **ma trận biểu diễn** của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ (hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$).

Nhận xét. Khi $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, ta có phương pháp tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ như sau:

- Tính $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$.
- Đặt $M = (v_1^\top \mid v_2^\top \mid \dots \mid v_m^\top \mid f(u_1)^\top \mid f(u_2)^\top \mid \dots \mid f(u_n)^\top)$.
- Dùng thuật toán Gauss-Jordan, đưa M về dạng $(I_m \mid P)$
- Khi đó $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = P$.

Ví dụ. Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$,
 $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$?

Giải. Ta có

$$f(u_1) = (0, 3),$$

$$f(u_2) = (-1, 3),$$

$$f(u_3) = (0, 4).$$

Lập

$$(v_1^\top \ v_2^\top \mid f(u_1)^\top \ f(u_2)^\top \ f(u_3)^\top) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -6 & -4 \end{array} \right).$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Xét ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, -y + 2z)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$
 $\mathcal{C} = \{u'_1 = (1, 2), u'_2 = (3, 5)\}$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$?

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -18 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính f theo cặp cơ sở chính tắc.

Giải.

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa. Cho $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ là cơ sở của V và $f \in L(V)$. Khi đo ma trận $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ được gọi là *ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính* f , ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$. Rõ ràng

$$[f]_{\mathcal{B}} = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}} \quad [f(u_2)]_{\mathcal{B}} \quad \dots \quad [f(u_n)]_{\mathcal{B}})$$

Ví dụ. Cho $f \in L(\mathbb{R}^3)$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x - 4y + 3z, 2x - y - z)$$

và $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Tìm $[f]_{\mathcal{B}_0}$?

Đáp án.

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$$u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

- a) Chứng minh $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
- b) Tìm $[f]_{\mathcal{B}}$.

Đáp án. $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Định lý. Cho V và W là các không gian vectơ; $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W . Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ ta có

- i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$
- ii) $[f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$

Hệ quả. Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều V . Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính $f \in L(V)$ ta có

- i) $\forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{B}}.$
- ii) $[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$

Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1))$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z). \text{ Tìm } [f]_{\mathcal{B}}?$$

Giải. Gọi $\mathcal{B}_0$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả trên, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}),$$

trong đó $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, do đó

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, biết ma trận biểu diễn của f trong cặp cơ sở $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0))$ và $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1); v_2 = (2, 1))$ là

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của f .

Giải.

Cách 1. Do $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$.
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$.
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Suy ra $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$.

Cho $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Tìm $[u]_{\mathcal{B}}$.

$$\text{Lập } (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -x + y + z \\ 0 & 1 & 0 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & x - z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y \\ x - z \end{pmatrix}.$$

Suy ra $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$.

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

Cách 2. Gọi $\mathcal{B}_0$ và $\mathcal{C}_0$ lần lượt là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0).$$

Ta có

$$\begin{aligned} \bullet (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} &= (\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}) = (v_1^\top \ v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ \bullet (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) &= (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z).$$

Ví dụ.(tự làm) Cho f là toán tử tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, -2x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 2x_3).$$

- a) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
- b) Tìm ma trận biểu diễn f trong cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (-1, 2, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, -3, -2)).$$