Bài giảng môn học Toán B1

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2015

Chương 1
MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Nội dung

1. Chương 1: MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH
    1. Ma trận
    2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
    3. Hệ phương trình tuyến tính
    4. Ma trận khả nghịch
    5. Phương trình ma trận

1. Ma trận

1.1. Định nghĩa và ký hiệu.
1.2. Ma trận vuông.
1.3. Các phép toán ma trận.

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa

Một ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong $\mathbb{R}$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *hay* $A = (a_{ij})$, *trong đó* $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

a_{ij} là hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A (hệ số này còn được ký hiệu là A_{ij}).
Ký hiệu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả những ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}); \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Ma trận có các hệ số bằng 0, được gọi là ma trận không, ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0).

Ví dụ

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa

Ma trận vuông cấp n là một ma trận loại $n \times n$, (số dòng bằng số cột). Ký hiệu $M_n(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n.

Ví dụ

$$A \in M_3(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, 0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa

Nếu $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *thì đường chứa các phần tử* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *được gọi là **đường chéo chính** hay **đường chéo** của A.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa

Một ma trận chéo cấp n là một ma trận vuông cấp n mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0. Nếu A là một ma trận chéo cấp n, ta ký hiệu $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Ví dụ

$$A = diag(1, 5, 9) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa

Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n hay I, là ma trận chéo cấp n mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa

Ma trận tam giác trên (tương ứng ma trận tam giác dưới) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương ứng phía trên) đường chéo chính đều bằng 0. *Như vậy,*

- $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *là ma trận tam giác trên khi và chỉ khi* $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$.
- $B = (b_{ij})_{n\times n}$ *là ma trận tam giác dưới khi và chỉ khi* $b_{ij} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

1.2. Ma trận vuông

Nhận xét

Ma trận vuông A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi A vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (so sánh hai ma trận)

Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B = (b_{ij})_{m\times n}$*. Ta nói A bằng B, ký hiệu* $A = B$*, nếu* $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$.

Ví dụ

Tìm x, y, z *để*

$$\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$$

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (phép lấy chuyển vị)

Cho $A = (a_{ij})$ *là một ma trận loại* $m \times n$*. Ta gọi* ***ma trận chuyển vị*** *của A, ký hiệu* A^T*, là ma trận loại* $n \times m$*, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng,*

nghĩa là nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *thì*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.3. Các phép toán ma trận

Nếu $A^T = A$ thì ta nói A là *ma trận đối xứng*. Nếu $A^T = -A$ thì nói A là *ma trận phản xứng*.

Tính chất

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó*

- $(A^T)^T = A$;
- $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$.

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ *ta có* $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *là ma trận đối xứng.*

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *là ma trận phản xứng.*

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (Phép nhân vô hướng với ma trận)

Cho ma trận $A = (a_{ij})$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α, nghĩa là

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ma trận $(-1)A$ được ký hiệu là $-A$, được gọi là ma trận đối của A.

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, *ta có* $2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$,

$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tính chất

Với $A = (a_{ij})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
- $0.A = 0$ *và* $1.A = A$.

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (Phép cộng ma trận)

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó tổng của A và B, ký hiệu $A+B$, là ma trận được xác định bởi:

$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Ký hiệu $A-B := A+(-B)$ và gọi là hiệu của A và B.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Tính $A+B$ và $A-B$.

1.3. Các phép toán ma trận

Tính chất

Với $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *ta có*

i. $A + B = B + A$;
ii. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
iii. $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;
iv. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;
v. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
vi. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
viii. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (phép nhân ma trận)

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})$ loại $m \times n$ và $B = (b_{ij})$ loại $n \times p$. Ta định nghĩa ***tích*** *của hai ma trận A và B, ký hiệu là* ***AB****, là ma trận định bởi:*

- *AB có loại $m \times p$.*
- *AB có hệ số ở dòng i, cột j được tính bởi công thức*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, *tìm tích* $AB = ?$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

1.3. Các phép toán ma trận

Tính chất

Với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, *ta có*

- $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$I_n A = AI_n = A.$$
- $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ *và* $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A = M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$
- $(AB)^T = B^T A^T$.

1.3. Các phép toán ma trận

- Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, nghĩa là

$$(AB)C = A(BC).$$

- Phép nhân ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng , nghĩa là

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

1.3. Các phép toán ma trận

Chú ý

1. *Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường ta có $AB \neq BA$.*
2. *Nhiều tính chất quen thuộc của phép nhân giữa các số thực không còn đúng đối với phép nhân ma trận, chẳng hạn:* *Với* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ta có* $A^2 = 0$; $AB = AC$, *nhưng* A, B *đều khác* 0 *và* $B \neq C$.

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa (lũy thừa ma trận vuông)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi lũy thừa bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^k, được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ lần}}$.

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* $A^2, A^3, \ldots,$ *từ đó suy ra* A^{200}.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Suy\ ra\ A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* A^{100}.

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* A^n *với* $n > 1$.

1.3. Các phép toán ma trận

Tính chất

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ *và* $k, l \in \mathbb{N}$. *Khi đó:*

- $I^k = I;$
- $A^{k+l} = A^k A^l;$
- $A^{kl} = (A^k)^l.$

1.3. Các phép toán ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc m trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi $f(A)$ là đa thức theo ma trận A.

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *và* $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. *Tính* $f(A)$.

1.3. Các phép toán ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *và* $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. *Tính* $f(A)$.

Ta có $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$.

Do đó

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}$$

2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.
2.2. Ma trận bậc thang.
2.3. Hạng của ma trận.

2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. *Ta gọi phép biến đổi sơ cấp trên dòng, viết tắt là phép BĐSCTD trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:*

- *Loại 1: Hoán vị hai dòng i và j* $(i \neq j)$*. Ký hiệu:* $d_i \leftrightarrow d_j$.
- *Loại 2: Nhân dòng i với một số* $\alpha \neq 0$*. Ký hiệu:* $d_i := \alpha d_i$.
- *Loại 3: Cộng vào một dòng i với* β *lần dòng j* $(j \neq i)$*. Ký hiệu:* $d_i := d_i + \beta d_j$.

Với φ *là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu* $\varphi(A)$ *là ma trận có từ A qua* φ.

2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

1. $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$
2. $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A$
3. $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A$

Định nghĩa

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A tương đương dòng với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy $A \sim B \Leftrightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ là các phép BĐSCTD sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B$$

2.2. Ma trận bậc thang

Định nghĩa

*Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Hệ số khác 0 đầu tiên kể từ bên trái của mỗi dòng được gọi là **phần tử cơ sở** của dòng đó. Ta nói A là **ma trận bậc thang** nếu A thỏa hai tính chất sau:*

1. *Các dòng khác 0 luôn luôn ở trên các dòng bằng 0 của A.*
2. *Trên hai dòng khác 0 của A, phần tử cơ sở của dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của dòng trên.*

2.2. Ma trận bậc thang

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \color{green}{2} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \color{green}{4} & 2 \\ 0 & \color{green}{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *A là ma trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.*

2.2. Ma trận bậc thang

Định nghĩa (Ma trận bậc thang rút gọn)

Ma trận A được gọi là ma trận bậc thang rút gọn nếu các tính chất sau được thoả

1. *A có dạng bậc thang.*
2. *Các phần tử cơ sở đều bằng* 1.
3. *Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các hệ số ngoài phần tử cơ sở đều bằng* 0.

2.2. Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C là ma trận bậc thang rút gọn, D không là ma trận bậc thang rút gọn.

Nhận xét

Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0.

2.3. Hạng của ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *số dòng khác* 0 *của một dạng bậc thang của* A *là hạng của* A, *ký hiệu* $r(A)$.

Mệnh đề

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i. $0 \leq r(A) \leq m, n;$

ii. $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0;$

iii. $r(A^T) = r(A);$

iv. *Nếu* $A \sim B$ *thì* $r(A) = r(B)$.

2.3. Hạng của ma trận

Định nghĩa

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là dạng bậc thang rút gọn của A

Nhận xét

Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và được ký hiệu R_A.

2.3. Hạng của ma trận

Ví dụ

$$\textit{Cho } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \textit{ tìm } R_A?$$

2.3. Hạng của ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, *tìm* R_A?

$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ R_A *có được từ* A *thông qua các phép biến đổi:* $d_2 := d_2 + 2d_1$, $d_3 := d_3 - 3d_1$, $d_2 := -1d_2$, $d_1 := d_1 - 2d_2$.

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

- Bước 1: $i := 1, j := 1$.
- Bước 2: Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.
- Bước 3: Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BĐSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \quad k > i.$$

  Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về bước 2.
- Bước 4: Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BĐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm một dạng bậc thang R của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

Từ đó xác định hạng của A.

$$A \xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3 \\ d_2:=d_2+2d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Ta có $A \sim R$ và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là $r(A) = 3$.

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm hạng của các ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss - Tìm dạng bậc thang của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để $r(A) = 3$ *với*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị của m để $r(B) = 2$ *với*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Thuật toán Gauss-Jordan. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Để đưa ma trận A về dạng bậc thang rút gọn , ta làm như thuật toán Gauss ở các Bước $1, 2, 4$, riêng ở Bước 3 ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \text{ với } k \in \overline{1,n}; k \neq i;$$

$$d_i := \frac{1}{a_{ij}} d_i.$$

Thuật toán Gauss-Jordan. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Ví dụ

Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow[d_4:=d_4-6d_1]{\substack{d_2:=d_2-d_1\\ d_3:=d_3-2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_2:=-\frac{1}{2}d_2]{\substack{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2\\ d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3]{\substack{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3\\ d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là dạng bậc thang rút gọn của A.

3. Hệ phương trình tuyến tính

3.1. Định nghĩa
3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính
3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính
3.4. Định lý Kronecker-Capelli

3.1. Định nghĩa

Định nghĩa

1. *Một hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó

3.1. Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;

3.1. Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;

3.1. Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

3.1. Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

Nếu các hệ số $b_i = 0$ thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

3.1. Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

Nếu các hệ số $b_i = 0$ thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

2. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số* của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ $(*)$.

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của hệ phương trình $(*)$ nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong $(*)$ đều thỏa.

Định nghĩa

Hai hệ phương trình là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác* 0.
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý

Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & -3; \\ 2x & - & y & + & z & = & 1; \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}\right. \qquad (1)$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[d_2:=d_2-5d_3]{\substack{d_1:=d_1-3d_3 \\ d_3:=-\frac{1}{7}d_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ta có $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 0y & + & 0z & = & 1; \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 2; \\ 0x & + & 0y & + & z & = & 1. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1; \\ y & = & 2; \\ z & = & 1. \end{array}\right.$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải hệ phương trình
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 4; \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 3; \\ 5x & + & 7y & + & 4z & = & 10. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$(2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & - & 9z & = & 9 \\ & y & + & 7z & = & -5. \end{array} \right.$$

Như vậy nghiệm của hệ (2) là $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 9+9t \\ y & = & -5-7t \\ z & = & t. \end{array} \right.$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \qquad (3)$$

Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3:=d_3-5d_1]{d_2:=d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-2d_2]{d_1:=d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \dots, 0)$.
Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss-Jordan

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 1. Ma trận R có 1 dòng là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không chứa phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng $\tilde{A}$ là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 5; \\ x_4 = -3. \end{cases}$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 1; \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 13x_3 & + & 22x_4 & = & -1; \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 5; \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 7x_4 & = & 4. \end{array}\right.$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = -2 + 10t - 17s \\ x_1 = 5 - 17t + 29s \end{cases}$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1.Ma trận R_A có một dòng $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 2. Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

- Trường hợp 3. Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là bậc tự do của hệ phương trình.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Định lý (Kronecker-Capelli)

Nếu $\tilde{A} = (A|B)$ là ma trận mở rộng của hệ gồm n ẩn dạng $AX = B$ thì $r(\tilde{A}) = r(A)$ hoặc $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$. Hơn nữa,

- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- *nếu $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là $n - r(A)$.*

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $2m-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với $m=2$, hệ tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad\; - x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \quad\quad\quad\; - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - t; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14t; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21t \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Dạng bậc thang của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$, hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 = m ; \\ x_3 = m + 1 - x_4 = 1; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 - 2m; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Vậy khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3-2m, 1, m)$.

- Với $m = 7$, hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Vậy khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

4. Ma trận khả nghịch

4.1. Định nghĩa.
4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch.

4.1. Định nghĩa

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho $AB = BA = I_n$. Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là ma trận nghịch đảo của A.

Nhận xét

Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

4.1. Định nghĩa

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Giả sử* A *khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là* A^{-1}. *Khi đó*

- A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

i. *A khả nghịch.*

ii. $r(A) = n$.

iii. $A \sim I_n$.

iv. *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n.*

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang rút gọn:

$$(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \ldots$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Trong dãy biến đổi trên, tồn tại p sao cho ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng trong dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Chú ý

Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1\\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-2d_3]{\substack{d_1:=d_1-7d_3\\ d_2:=d_2+2d_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_4]{\substack{d_1:=d_1+d_4\\ d_2:=d_2-d_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I_4|A^{-1})$$

Vậy ma trận khả nghịch là $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ

Xét tính khả nghịch của A, và tìm A^{-1} (nếu có).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-4d_1]{\substack{d_2:=d_2-2d_1 \\ d_3:=d_3-3d_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_4:=d_4-3d_2]{d_3:=d_3-2d_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-d_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

5. Phương trình ma trận

Định lý

Cho các ma trận $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B;$
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1};$
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}.$

5. Phương trình ma trận

Ví dụ

Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. *Chứng tỏ A khả nghịch và tìm* A^{-1}.
b. *Tìm ma trận X thỏa* $AXA = AB$.
c. *Tìm ma trận X thỏa* $A^2XA^2 = ABA^2$.

Hệ quả

Cho các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ *khả nghịch và* $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Ta có*

- *Nếu* $AB = 0$ *thì* $B = 0$.
- *Nếu* $CA = 0$ *thì* $C = 0$.