Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2014

Chương 2

ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Định thức của A, được ký hiệu là det A hay* $|A|$, *là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:*

- *Nếu* $n = 1$, $A = (a)$, *thì* $|A| = a$.
- *Nếu* $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *thì* $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Định nghĩa

- *Nếu* $n > 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *thì*

$|A| \overset{\text{dòng 1}}{=\!=\!=} a_{11}(-1)^{1+1}|A(1|1)| + a_{12}(-1)^{1+2}|A(1|2)| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A(1|n)|$, *trong đó* $A(i|j)$ *là ma trận có được từ* A *bằng cách xóa đi dòng* i *và cột* j *của* A.

1.1 Định nghĩa

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $|A| = 1.(-2) - (-3).4 = 10$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

1.1 Định nghĩa

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $|A| = 1.(-2) - (-3).4 = 10$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

$$|A| = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 10 - 15 + 6 = 1$$

1.2 Quy tắc Sarrus

Trong trường hợp $n = 3$, thì ta có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Áp dụng định nghĩa trên ta có thể tính được định thức của A

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Từ đây ta đưa ra quy tắc Sarrus, đưa vào sơ đồ như sau

$$\begin{array}{ccccc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Theo đó định thức bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường liền nét trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường không liền nét. Hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \color{red}\begin{matrix} \bullet & \ast & \circ \\ \circ & \bullet & \ast \\ \ast & \circ & \bullet \end{matrix} \color{black} - \color{blue}\begin{matrix} \ast & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \ast \\ \bullet & \ast & \circ \end{matrix}$$

Định thức của ma trận A được tính bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu đỏ trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu xanh.

Ví dụ

Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.5+2.1.3+3.4.1-3.2.3-1.1.1-2.4.5 = -31$$

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong K. Với mỗi i,j, ta gọi*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det A(i|j)$$

là *phần bù đại số* *của hệ số* a_{ij}*, trong đó* $A(i|j)$ *là ma trận vuông cấp* $(n-1)$ *có được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j.*

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4;$

$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$

1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Định lý

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Với mỗi* i, j *, gọi* c_{ij} *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}. *Ta có*

- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo dòng i:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.
- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo cột j:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.

Chú ý

Trong việc tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để tính.

Ví dụ

Tính định thức của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i. $|A^T| = |A|$.

ii. *Nếu ma trận* A *có một dòng hay một cột bằng* 0 *thì* $|A| = 0$.

iii. *Nếu* A *là một ma trận tam giác thì* $|A|$ *bằng tích các phần tử trên đường chéo của* A, *nghĩa là*

$$|A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Định lý

Nếu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, *thì* $|AB| = |A||B|$

1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

1. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$, *thì* $|A'| = -|A|$;
2. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha |A|$;
3. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng 2}} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 2}} 2.3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2:=d_2-d_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng 2}} 6(-11)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

2. Định thức và ma trận khả nghịch

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. *Đặt* $C = (c_{ij})$ *với* $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$ *là phần bù đại số của* a_{ij}. *Ta gọi ma trận chuyển vị* C^T *của* C *là* ***ma trận phụ hợp*** *của* A, *ký hiệu là* $adj(A)$.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$. *Suy ra* $adj(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$. *Hơn nữa,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

cuu duong than cong . com

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A| = 3c_{31} + 4c_{32} = 3.(-2) + 4.1 = -2 \neq 0.$$

Vậy ma trận A khả nghịch.

Tương tự như trên ta có thể tính được

$$c_{11} = -4; c_{12} = 3; c_{13} = -1; c_{21} = 4; c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{33} = 1.$$

Từ đó ta có ma trận $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và

$adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hệ quả

Ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$.

Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Suy ra* $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Quy tắc Cramer

Định lý

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ gồm n ẩn và n phương trình. Đặt $\Delta = detA; \Delta_i = detA_i, i \in \overline{1,n}$ trong đó A_i là ma trận có được từ A bằng cách thay cột i bằng cột B. Khi đó

i. *Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ $(*)$ có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i \in \overline{1,n}$$

ii. *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_i \neq 0$ với một i nào đó thì hệ $(*)$ vô nghiệm.*

iii. *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_i = 0, \forall i \in \overline{1,n}$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

(1) Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

Vì $\Delta \neq 0$, nên hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$ Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$$

Vậy hệ vô nghiệm.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 6;$$

- $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1})$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$
  - m=1, $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
  - $m = 3$, $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là
    $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$
    Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+9 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+9 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+9 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận

- Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, -1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \dfrac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$

- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$
  - $m = -1, \Delta_1 = -36 \neq 0$, hệ vô nghiệm.
  - $m = 1, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} -6x + 12y - 6z = 1; \\ -10x + 20y - 10z = 2; \\ -12x + 24y - 12z = 0. \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm.