Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2014

Chương 3

KHÔNG GIAN VECTOR

Định nghĩa

Cho V là một tập hợp khác $\emptyset$. Ta nói V là một **không gian vector** *trên $\mathbb{R}$ nếu trong V*

i) *tồn tại một phép toán "cộng vector", tức là một ánh xạ*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

ii) *tồn tại một phép "nhân vô hướng với vector", tức là một ánh xạ*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha u \end{array}$$

thỏa các tính chất sau: với mọi $u, v, w \in V$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Định nghĩa

1. $u + v = v + u$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. $\exists 0 \in V, u + 0 = 0 + u = u$;
4. $\exists (-u) \in V, (-u) + u = u + (-u) = 0$;
5. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
8. $1.u = u$.

Khi đó ta gọi :

- mỗi phần tử $u \in V$ là một vector.
- mỗi số $\alpha \in \mathbb{R}$ là một vô hướng.
- vector 0 là vector không.
- vector $(-u)$ là vector đối của u.

Ví dụ

Xét $V = \mathbb{R}^n = \{u = (x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, n}\}$ *với phép cộng vector và phép nhân vô hướng xác định bởi:*

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

với $u = (x_1, x_2, ..., x_n), v = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$. *Khi đó* $\mathbb{R}^n$ *là không gian vector trên* $\mathbb{R}$ *với vector không là* $0 = (0, 0, ..., 0)$ *và vector đối của vector* u *là* $-u = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Ví dụ

Tập hợp $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường là một không gian vector trên* $\mathbb{R}$. *Trong đó,*

- *Vector không là ma trận không.*
- *Vector đối của* A *là ma trận* $-A$.

Ví dụ

Tập hợp
$\mathbb{R}[x] = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1,n}\}$ *gồm các đa thức theo* x *với các hệ số trong* $\mathbb{R}$ *là một không gian vector trên* $\mathbb{R}$ *với phép cộng vector là phép cộng đa thức thông thường và phép nhân vô hướng với vector là phép nhân thông thường một số với đa thức.*

Ví dụ

Cho $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$. *Khi đó* V *là một không gian vector trên* $\mathbb{R}$.

Ví dụ

Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$. *Khi đó* W *không là không gian vector, vì*

$$u = (1, 2, 1) \in W, v = (2, 3, 2) \in W$$

nhưng $u + v = (3, 5, 3) \neq W$

Mệnh đề

Cho V là một không gian vector trên $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi $u \in V$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có

i) $\alpha u = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0$ *hay* $u = 0)$;

ii) $(-1)u = -u$.

cuu duong than cong. com

2.1 Tổ hợp tuyến tính
2.2 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

2.1 Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$. *Một* ***tổ hợp tuyến tính*** *của* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *là một vector có dạng*

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k$$

với $\alpha_i \in \mathbb{R}(i \in \overline{1,k})$.
Khi đó, đẳng thức trên được gọi là ***dạng biểu diễn*** *của u theo các vector* $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Tính chất

- *u là tổ hợp tuyến tính của* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *khi và chỉ khi phương trình* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = u$ *có nghiệm* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$
- *Tổng của hai tổ hợp tuyến tính, tích của một số với một tổ hợp tuyến tính cũng là các tổ hợp tuyến tính (của* $u_1, u_2, \ldots, u_k$*). Thật vậy,*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 u_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_1 u_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) u_i;$$

$$\alpha(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i) u_i.$$

- Vector 0 luôn luôn là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vì $0 = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_k$
- Mọi tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_j$ $(j \in \overline{1,k})$ đều là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_k$ vì $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_j u_j = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_j u_j + 0u_{j+1} + \cdots + 0u_k$.
- Mọi tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k$ đều là tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ khi và chỉ khi u_k là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$.

Hệ quả

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *là* k *vector trong* $\mathbb{R}^n$ *với* $u_j = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$, $j \in \overline{1,k}$,

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}); \\ u_2 &= (u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{n2}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk}). \end{aligned}$$

Khi đó vector $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *là tổ hợp tuyến tính của* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *khi và chỉ khi hệ pt* $UX = B$ *có nghiệm* X,

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nk} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa

1. *Cho* $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$. *Xét phương trình*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0 \quad (1)$$

Ta nói

- $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi với mọi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *ta có* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$
- $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *không đồng thời bằng* 0 *sao cho* $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$

2. Tập con $S \subseteq V$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu mọi tập con hữu hạn $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$ $(k \in \mathbb{N})$ tùy ý) đều độc lập tuyến tính. Nếu S không độc lập tuyến tính, ta nói S phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vector
$u_1 = (1, 2, -3); u_2 = (2, 5, -1); u_3 = (1, 1, -8)$.

- u_1, u_2 *độc lập tuyến tính.*
- u_1, u_2, u_3 *phụ thuộc tuyến tính.*

Nhận xét

Các vector $u_1, u_2, \ldots, u_k$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại vector u_i, sao cho u_i được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.

Mệnh đề

Cho V là một không gian vector trên $\mathbb{R}$ và $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là tập hợp các vector thuộc V. Khi đó

- *Nếu S phụ thuộc tuyến tính thì mọi tập chứa S đều phụ thuộc tuyến tính*
- *Nếu S độc lập tuyến tính thì mọi tập con của S đều độc lập tuyến tính.*

Hệ quả

Cho $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *là* k *vector trong* $\mathbb{R}^n$*. Gọi* A *là ma trận có được bằng cách xếp* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *thành các dòng. Khi đó* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi* A *có hạng là* $r(A) = k$*.*

Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vector trong $\mathbb{R}^n$

Bước 1: Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \dots, u_m$ thành các dòng.
Bước 2: Xác định hạng $r(A)$ của A.

- Nếu $r(A) = m$ thì $u_1, u_2, \dots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $r(A) < m$ thì $u_1, u_2, \dots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Trường hợp $m = n$, ta có A là ma trận vuông. Khi đó có thể thay bước 2, thành bước 2‘ sau đây:
Bước 2`: Tính định thức $\det A$.

- Nếu $\det A \neq 0$ thì $u_1, u_2, \dots, u_m$ độc lập tuyến tính.
- Nếu $\det A = 0$ thì $u_1, u_2, \dots, u_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^5$ *cho các vector* $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$; $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$; $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$; $u_4 = (2, 3, 4, -7, 4)$. *Hãy xét xem* u_1, u_2, u_3, u_4 *độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.*

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ *cho các vector* $u_1 = (2m + 1, -m, m + 1)$; $u_2 = (m - 2, m - 1, m - 2)$; $u_3 = (2m - 1, m - 1, 2m - 1)$. *Tìm điều kiện để* u_1, u_2, u_3 *độc lập tuyến tính.*

3. Cơ sở và số chiều của không gian vector

3.1 Tập sinh
3.2 Cơ sở và số chiều

Định nghĩa

Cho V là không gian vector và $S \subset V$. S được gọi là tập sinh của V nếu mọi vector u của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S sinh ra V hoặc V được sinh ra bởi S, ký hiệu $V = \langle S \rangle$

Định nghĩa

Cho V là không gian vector và $S \subset V$. S được gọi là tập sinh của V nếu mọi vector u của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S sinh ra V hoặc V được sinh ra bởi S, ký hiệu $V = \langle S \rangle$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho
$S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (2, 3, 1)\}$ *Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ hay không?*

Định nghĩa

Cho V là không gian vector và $S \subset V$. S được gọi là tập sinh của V nếu mọi vector u của V đều là tổ hợp tuyến tính của S. Khi đó, ta nói S sinh ra V hoặc V được sinh ra bởi S, ký hiệu $V = \langle S \rangle$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho
$S = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (2,3,1)\}$ *Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ hay không?*

Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & -1 & -x+z \end{array}\right).$$ Hệ có nghiệm,

suy ra u là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ hay không?

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, *cho*

$$S = \{u_1 = (1,1,-1); u_2 = (2,3,1); u_3 = (3,4,0)\}.$$

Hỏi S có là tập sinh của $\mathbb{R}^3$ *hay không?*

Với $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & 4x-3y+z \end{array}\right)$$ Với $u_0 = (1,1,1)$ thì hệ trên vô nghiệm. Vậy u_0 không là tổ hợp tuyến tính của u_1, u_2, u_3. Suy ra S không là tập sinh của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Cho V là không gian vector và $\mathcal{B}$ là con của V. $\mathcal{B}$ được gọi là một cơ sở của V nếu $\mathcal{B}$ là một tập sinh và $\mathcal{B}$ độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,2,1); u_3 = (2,3,1)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ là cở sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, cho*

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, -2); u_2 = (2, 3, 3); u_3 = (5, 7, 4)\}.$$

Kiểm tra $\mathcal{B}$ *là cở sở của* $\mathbb{R}^3$*.*

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^4$*, cho* $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 3, -1, 0), u_3 = (-1, -1, 1, 1), u_4 = (1, 2, 1, -1)\}$*. Kiểm tra* $\mathcal{B}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^4$*.*

Bổ đề

Giả sử V sinh bởi m vector $V = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$*. Khi đó mọi tập hợp con độc lập tuyến tính của V có không quá m phần tử.*

Hệ quả

Nếu V có một cơ sở $\mathcal{B}$ *hữu hạn gồm m vector* $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ *thì mọi cơ sở khác của V cũng hữu hạn và có đúng m vector. Khi đó ta nói không gian vector V hữu hạn chiều trên* $\mathcal{R}$*; m được gọi là số chiều (dimension) của V trên* $\mathcal{R}$ *và ký hiệu* $\dim_{\mathcal{R}} V$*, hay* $\dim V$*. Trong trường hợp ngược lại, ta nói không gian vector V vô hạn chiều trên* $\mathcal{R}$*, ký hiệu* $\dim_{\mathcal{R}} V = \infty$*, hay* $\dim V = \infty$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, *xét* $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *trong đó*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0), \\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0,0,0,\ldots,1). \end{aligned}$$

Với $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Ta có*

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

Do đó $\mathcal{B}_0$ *là tập sinh của* $\mathbb{R}^n$. *Mặt khác* $\mathcal{B}_0$ *độc lập tuyến tính nên* $\mathcal{B}_0$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{B}_0$ *được gọi là* *cơ sở chính tắc* *của* $\mathbb{R}^n$. *Như vậy*

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

Ví dụ

Không gian vector $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ có cơ sở

$$\mathcal{B}_0 = \{E_{ij}|, i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\}$$

trong đó E_{ij} là ma trận loại $m \times n$ chỉ có một hệ số khác 0 duy nhất là hệ số 1 ở dòng i cột j. Ta gọi $\mathcal{B}_0 = \{E_{ij}|, i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\}$ là *cơ sở chính tắc* *của $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Ví dụ

Không gian $\mathbb{R}_n[x]$ gồm các đa thức theo x bậc không quá n với hệ số trong $\mathbb{R}$, là không gian vector hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ có $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ *với cơ sở $\mathcal{B}_0 = \{1, x, \ldots, x^n\}$. Ta gọi $\mathcal{B}_0 = \{1, x, \ldots, x^n\}$ là* *cơ sở chính tắc* *của $\mathbb{R}_n[x]$.*

Ví dụ

Không gian $\mathbb{R}[x]$ gồm tất cả các đa thức theo x với hệ số trong $\mathbb{R}$, là không gian vector vô hạn chiều trên $\mathbb{R}$ với cơ sở $\mathcal{B}'_0 = \{1, x, x^2, \ldots\}$ là *cơ sở chính tắc* *của $\mathbb{R}[x]$.*

Hệ quả

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều với $\dim V = n$. Ta có

i) *Mọi tập con của V có nhiều hơn n vector đều phụ thuộc tuyến tính.*

ii) *Mọi tập con của V có ít hơn n vector không là tập sinh của V.*

Bổ đề

Cho S là một tập con độc lập tuyến tính của V và $u \in V$ là một vector sao cho $u \notin \langle S \rangle$. Khi đó tập hợp $S_1 = S \cup \{u\}$ độc lập tuyến tính.

Định lý

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều với $\dim V = n$. Khi đó

i) *Mọi tập con độc lập tuyến tính gồm n vector của V đều là cơ sở của V.*

ii) *Mọi tập sinh gồm n vector đều là cơ sở của V*

Ví dụ

Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của không gian vector $\mathbb{R}^3$ *?*

a) $B_1 = \{u_1 = (2,3,4), u_2 = (4,5,6)\}$

b) $B_2 = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,3,4), u_3 = (3,4,5), u_4 = (4,5,6)\}$

c) $B_3 = \{u_1 = (1,-2,1), u_2 = (1,3,2), u_3 = (-2,1,-2)\}$

d) $B_4 = \{u_1 = (2,-1,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (5,0,3)\}$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, cho*

$S = \{u_1 = (1, m-2, -2), u_2 = (m-1, 3, 3), u_3 = (m, m+2, 2)\}.$

Tìm điều kiện của m để S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho
$S = \{u_1 = (1, m-2, -2), u_2 = (m-1, 3, 3), u_3 = (m, m+2, 2)\}$.
Tìm điều kiện của m để S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Do số phần tử của S bằng 3 nên S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi S độc lập tuyến tính.

Lập $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m-2 & -2 \\ m-1 & 3 & 3 \\ m & m+2 & 2 \end{pmatrix}$. Ta có

$\det A = m - m^2$. Suy ra S độc lập tuyến tính khi $\det A \neq 0$. Vậy S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

4. Không gian vector con

Định nghĩa

Cho W là một tập con khác $\emptyset$ của V. Ta nói W là một không gian vector con (gọi tắt là không gian con) của V, ký hiệu $W \leq V$, nếu W với phép cộng vector và phép nhân vô hướng với vector được hạn chế từ V, cũng là một không gian vector trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ

1) $W = \{0\}$ và V là các không gian vector con của V. Ta gọi đây là các không gian con tầm thường của V.
2) Trong không gian $\mathbb{R}^3$, đường thẳng (D) đi qua gốc tọa độ 0 là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Định lý

Cho W là một tập con của V. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:

1. $W \leq V$.
2. $W \neq \emptyset$ *và với mọi* $u, v \in W$; $\alpha \in \mathbb{R}$, *ta có* $u + v \in W$ *và* $\alpha u \in W$.
3. $W \neq \emptyset$ *và với mọi* $u, v \in W$;$\alpha \in \mathbb{R}$, *ta có* $\alpha u + v \in W$.

Hơn nữa, có thể thay điều kiện $W \neq \emptyset$ *ở trên bằng điều kiện* $0 \in W$.

Ví dụ

Cho $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. *Hỏi* W *có là không gian con của* $\mathbb{R}^3$ *hay không?*

Ta có $W \subset \mathbb{R}^3$, và $0 \in W$. Với $u = (u_1, u_2, u_3)$ và $v = (v_1, v_2, v_3)$, ta chứng minh $\alpha u + v \in W$.

Ta có

$$\alpha u + v = \alpha(u_1, u_2, u_3) + (v_1 + v_2 + v_3) = (\alpha u_1 + v_1, \alpha u_2 + v_2, \alpha u_3 + v_3).$$

$$2(\alpha u_1 + v_1) + \alpha u_2 + v_2 - \alpha u_3 - v_3 = \alpha(2u_1 + u_2 - u_3) + (2v_1 + v_2 - v_3) = 0$$

Định lý

Giao của một họ tùy ý các không gian con của V cũng là một không gian con của V.

Cho $\{W_i\}_{i\in I}$ là một họ những không gian con của V. Đặt

$$W = \cap_{i\in I} W_i = \{u \in W_i, \forall i \in I\}$$

Ta chứng minh W là một không gian con của V. Trước hết ta có $W \neq \emptyset$, vì $0 \in W$. Chọn $u, v \in W$, và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta chứng minh $\alpha u + v \in W$. Vì $u, v \in W$, nên $u, v \in W_i$ với mọi $i \in I$. Do đó $\alpha u + v \in W_i$ với mọi $i \in I$. Hay $\alpha u + v \in W$.

Chú ý

Hợp của hai không gian con của V không nhất thiết là một không gian của của V

Định nghĩa (Không gian con sinh bởi một tập hợp)

Cho S là một tập con của V (S không nhất thiết là không gian con của V). Gọi $\{W_i\}_{i\in I}$ là họ tất cả những không gian con của V có chứa S (họ này khác rỗng vì có chứa V). Đặt

$$W = \cap_{i\in I} W_i$$

Khi đó W là một không gian con của V và W phải là không gian con nhỏ nhất của V có chứa S. Ta gọi

1) *W là không gian con sinh bởi S và được ký hiệu là $\langle S\rangle$.*
2) *S là tập sinh của $\langle S\rangle$.*
3) *Nếu S hữu hạn, $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ thì $\langle S\rangle$ được gọi là không gian con hữu hạn sinh bởi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ và được ký hiệu là $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle$*

Định lý

Cho $\emptyset \neq S \subseteq V$. Khi đó không gian con của V sinh bởi S là tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn nhưng tùy ý các vector trong S, nghĩa là

$$\langle S \rangle = \{u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n | n \in \mathbb{N}, u_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1,n}\}$$

Định lý

Cho $\emptyset \neq S \subseteq V$. Khi đó không gian con của V sinh bởi S là tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn nhưng tùy ý các vector trong S, nghĩa là

$$\langle S \rangle = \{u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n | n \in \mathbb{N}, u_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1,n}\}$$

Hệ quả

i) *Nếu $S = \emptyset$ thì $\langle S \rangle = \{0\}$.*

ii) *Nếu $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ thì*

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n | \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1,n}\}$$

iii) *Nếu $S \leq V$ thì $\langle S \rangle = S$*

iv) *Cho $S \subseteq V$ và $W \leq V$. Khi đó $S \subseteq W \Leftrightarrow \langle S \rangle \leq W$*

v) *Nếu $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ thì $\langle S_1 \rangle \leq \langle S_2 \rangle$*

Nhận xét

Vì không gian sinh bởi S là không gian nhỏ nhất chứa S nên ta quy ước $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$

Ví dụ

Trong không gian $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *các ma trận* $m \times n$ *với các hệ số trong* $\mathbb{R}$, *tập hợp*

$$\mathcal{B}_0 = \{E_{ij} | i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\}$$

là một tập sinh của $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *vì*

$$\langle\mathcal{B}_0\rangle = \{\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(a_{ij})_{m\times n} | a_{ij} \in \mathbb{R}\} = M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^n$*, tập hợp* $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *là một tập sinh của* $\mathbb{R}^n$ *vì*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{B}_0 \rangle &= \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n | \alpha_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1) | \alpha_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, ta xét*

$$S = \{u_1 = (1,2,1), u_2 = (-1,2,0)\}$$

Khi đó

$$\langle S \rangle = \{tu_1 + su_2 | t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t - s, 2t + 2s, t) | t, s \in \mathbb{R}\}$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, cho*

$$W = \{(x + 2y, x - y, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

a) *Chứng minh* W *là không gian con của* $\mathbb{R}^3$.

b) *Tìm một tập sinh của* W.

a) Ta thấy $0 \in W$. Cho $u = (x_1 + 2y_1, x_1 - y_1, y_1)$ và $v = (x_2 + 2y_2, x_2 - y_2, y_2)$ là 2 vector trong W. Ta chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có $\alpha u + v \in W$.

$$\alpha u + v = (\alpha x_1 + 2\alpha y_1 + x_2 + 2y_2, \alpha x_1 - \alpha y_1 + x_2 - y_2, \alpha y_1 + y_2)$$

$$= ((\alpha x_1 + x_2) + 2(\alpha y_1 + y_2), (\alpha x_1 + x_2) - (\alpha y_1 + y_2), \alpha y_1 + y_2) \in W$$

vì $\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$. Vậy $W \leq \mathbb{R}^3$.

b)

$$W = \{(x+2y, x-y, y) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) + y(2,-1,1) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

Vì mọi vector trong W là tổ hợp tuyến tính của $u_1 = (1,1,0)$ và $u_2 = (2,-1,1)$, nên $S = \{u_1, u_2\}$ là tập sinh của W.

Định lý

Cho V là không gian vector và S_1, S_2 là tập con của V. Khi đó, nếu mọi vector của S_1 đều là tổ hợp tuyến tính của các vector trong S_2 và ngược lại thì $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho

$$S_1 = \{u_1 = (1, -1, 4), u_2 = (2, 1, 3)\},$$

$$S_2 = \{u_3 = (-1, -2, 1), u_4 = (5, 1, 10)\}$$

Chứng minh $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

Định lý (về cơ sở không toàn vẹn)

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều và S là một tập con độc lập tuyến tính của V. Khi đó, nếu S không phải một cơ sở của V thì có thể thêm vào S một số vector để được một cơ sở của V.

Định lý

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều sinh bởi S. Khi đó tồn tại một cở sở $\mathcal{B}$ của V sao cho $\mathcal{B} \subseteq S$. Nói cách khác, nếu S không phải là một cơ sở của V thì ta có thể loại bỏ ra khỏi S một số vector để được một cơ sở của V.

Định nghĩa

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *loại* $m \times n$ *với hệ số trong* $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}); \\ u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}); \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

và $W_A = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$ *. Ta gọi* $u_1, u_2, \dots, u_m$ *là các vector dòng của* A*, và* W_A *là không gian dòng của* A*.*

Định lý

Nếu A và B là hai ma trận tương đương dòng, thì $W_A = W_B$, nghĩa là hai ma trận tương đương dòng có cùng không gian dòng.

Cách tìm số chiều và cơ sở của không gian dòng

Vì các vector dòng khác 0 của một ma trận dạng bậc thang luôn luôn độc lập tuyến tính nên chúng tạo thành một cơ sở của không gian dòng. Từ đây ta suy ra cách tìm số chiếu và một cơ sở của không gian dòng của ma trận A như sau:

- Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R.
- Số chiều của không gian dòng W_A bằng số dòng khác 0 của R (do đó bằng $r(A)$) và các vector dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W_A.

Ví dụ

Tìm số chiều và một cơ sở của không gian dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của $\mathbb{R}^n$ khi biết một tập sinh

Giả sử $W = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle \leq \mathbb{R}^n$, ($u_1, u_2, \ldots, u_m$ không nhất thiết độc lập tuyến tính). Để tìm số chiều và một cơ sở của W ta tiến hành như sau:

Bước 1: Lập ma trận A bằng cách xếp $u_1, u_2, \ldots, u_m$ thành các dòng.

Bước 2: Dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang R.

Bước 3: Số chiều của W bằng số dòng khác 0 của R (do đó bằng $r(A)$) và các vector dòng khác 0 của R tạo thành một cơ sở của W.

Ví dụ

Tìm một cơ sở cho không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vector u_1, u_2, u_3, u_4, trong đó $u_1 = (1, 2, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1, 2); u_3 = (4, 8, 6, 8); u_4 = (8, 16, 12, 20)$.

4.4 Không gian tổng

Định lý

Cho $W_1, W_2, \dots, W_n$ *là các không gian con của V. Đặt*

$$W = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n | u_i \in W_i, i \in \overline{1, n}\}$$

Khi đó W là không gian con của V sinh bởi $\cup_{i=1}^{n} W_i$*. Ta gọi W là không gian tổng của* $W_1, W_2, \dots, W_n$*, ký hiệu là* $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ *hay* $\sum_{i=1}^{n} W_i$*.*

Hệ quả

Với $W, W_1, W_2, \dots, W_n$ *là các không gian con của V, hai mệnh đề sau tương đương:*

i) $W_1 + W_2 + \cdots + W_n \leq W$

ii) $W_i \leq W$ *với mọi* $i \in \overline{1, n}$

Hệ quả

Cho $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *là các không gian con của* V *với* $W_i = \langle S_i \rangle$. *Khi đó*

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \langle \cup_{i=1}^{n} S_i \rangle$$

Đặc biệt, nếu các không gian con W_i*, đều hữu hạn chiều thì không gian tổng* $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ *cũng hữu hạn chiều và*

$$\dim W \leq \sum_{i=1}^{n} \dim W_i$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ *cho các vector* $u_1 = (1, 2, 1, 1); v_1 = (1, 3, 3, 3); u_2 = (3, 6, 5, 7); v_2 = (2, 5, 5, 6); u_3 = (4, 8, 6, 8); v_3 = (3, 8, 8, 9); u_4 = (8, 16, 12, 16); v_4 = (6, 16, 16, 18)$. *Đặt* $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ *và* $W_2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. *Tìm một cơ sở và xác định số chiều của không gian* $W_1 + W_2$.

W_1 là không gian dòng của ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W_1 có số chiều là 2 và một cơ sở là $\{(1, 2, 1, 1); (0, 0, 1, 2)\}$.
W_2 là không gian dòng của ma trận

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 16 & 16 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó W_2 có số chiều là 2 và một cơ sở là $\{(1, 3, 3, 3); (0, 1, 1, 0)\}$

Không gian $W_1 + W_2$ sinh bởi các vector

$$(1,2,1,1); (0,0,1,2); (1,3,3,3); (0,1,1,0)$$

$W_1 + W_2$ là không gian dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra $W_1 + W_2$ có số chiều là 3 và một cơ sở là

$$\{(1,2,1,1); (0,1,1,0); (0,0,1,2)\}$$

Ví dụ

Cho W là tập tất cả các nghiệm thực (x_1, x_2, x_3, x_4) của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$$

Chọn $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, ta tính được

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta; \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta. \end{cases}$$

Hệ (1) có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta)$$

với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tùy ý.

$$\begin{aligned}
\text{Đặt } W &= \{(-17\alpha + 29\beta, 10\alpha - 17\beta, \alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(-17\alpha, 10\alpha, \alpha, 0) + (29\beta, -17\beta, 0, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha(-17, 10, 1, 0) + \beta(29, -17, 0, 1) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (-17, 10, 1, 0); (29, -17, 0, 1) \rangle.
\end{aligned}$$

Đặt $u_1 = (-17, 10, 1, 0); u_2 = (29, -17, 0, 1)$. Ta gọi u_1, u_2 là nghiệm cơ bản của hệ (1). Ta có $W = \langle u_1, u_2 \rangle$. u_1, u_2 độc lập tuyến tính. Suy ra $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của W và $\dim W = 2$. Ta gọi W là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1).

Định lý

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *loại* $m \times n$ *với hệ số trong* $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

và S_A *là tập tất cả các nghiệm* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = 0$, *nghĩa là tập tất cả các nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Khi đó S_A *là một không gian con của* $\mathbb{R}$. *Ta gọi* S_A *là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* $AX = 0$.

Để tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm S_A của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$, ta tiến hành các bước sau:

Bước 1: Giải hệ $AX = 0$ tìm nghiệm tổng quát.

Bước 2: Tìm một nghiệm cơ bản của hệ $AX = 0$ như sau: Giả sử nghiệm cơ bản của hệ $AX = 0$ có s ẩn tự do $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}$. Với mỗi $i \in \overline{1, s}$, chọn $x_{k_i} = 1; x_{k_j} = 0; \forall j \neq i$, ta được nghiệm u_{k_i}. Khi đó $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_s}\}$ là một nghiệm cơ bản.

Bước 3: Không gian nghiệm S_A có $\dim S_A = s$ và nhận hệ nghiệm cơ bản $\{u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_s}\}$ làm một cơ sở.

5. Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

5.1 Tọa độ
5.2 Ma trận chuyển cơ sở.

Định lý

Cho $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là một cơ sở của không gian vector* V *trên* $\mathbb{R}$. *Khi đó với mọi* $u \in V$ *phương trình*
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = u$ *luôn luôn có duy nhất một nghiệm.*

Gọi $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$ *là nghiệm của* (1). *Ta đặt* $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_1^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix}$ *và*

gọi là *tọa độ* *của* u *trong cơ sở* $\mathcal{B}$. *Như vậy,*

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 \\ \alpha_1^0 \\ \vdots \\ \alpha_n^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + \cdots + \alpha_n^0 u_n$$

Hệ quả

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *là một cơ sở của* $W \leq \mathcal{R}^n$ *trong đó*

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}); \\ u_2 & = & (u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{n2}); \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ u_k & = & (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk}). \end{array}$$

Khi đó với mọi $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in W$*, ta có*

$[u]_{\mathcal{B}} = X \Leftrightarrow UX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, *trong đó*

$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nk} \end{pmatrix}$ *là ma trận có được bằng cách dựng* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *thành các cột.*

Nhận xét

- *Đối với cơ sở chính tắc* $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *của không gian* $\mathbb{R}^n$, *với mọi* $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *ta có*

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Đối với cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = \{E_{11}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{m1}, \dots, E_{mn}\}$ của không gian $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ các ma trận loại $m \times n$ hệ số trong $\mathbb{R}$ và $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ta có

$$[A]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Đối với cơ sở chính tắc $\mathcal{B}_0 = \{1, x, \ldots, x^n\}$ của không gian $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức theo x bậc không quá n, với mọi $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$[p(x)]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, cho các vector* $u_1 = (1, 2, 1)$*;* $u_2 = (1, 3, 1)$*;* $u_3 = (2, 5, 3)$

a) *Chứng minh* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$.

b) *Tìm tọa độ của vector* $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *trong cơ sở* $\mathcal{B}$.

Định lý

Cho V là một không gian vector có $\dim V = n$ và hai cơ sở $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$; $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Với mỗi $j \in \overline{1,n}$, đặt

$$[v_j]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, j \in \overline{1,n}$$

và P là ma trận vuông cấp n có các cột lần lượt là $[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, \ldots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}$, nghĩa là

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Khi đó P khả nghịch và là ma trận duy nhất thỏa $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = P[u]_{\mathcal{B}_2}$. P được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}_1$ sang $\mathcal{B}_2$, ký hiệu là $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$. Như vậy, $\forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}$.

Mệnh đề

Cho V là một không gian vector hữu hạn chiều và $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ là ba cở sở của V. Khi đó

i) $(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)^{-1}$;

ii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3)$.

Hệ quả

Cho $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$*;* $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *là hai cơ sở của không gian* $\mathbb{R}^n$*. Gọi* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *là cơ sở chính tắc của* $\mathbb{R}^n$*. Ta có*

i) $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)$ *là ma trận có được bằng cách dựng các vector* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *thành các cột.*

ii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}$.

iii) $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$.

iv) *Nếu qua một số phép BĐSCTD ma trận* $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)$ *biến thành ma trận đơn vị* I_n *thì cũng chính qua những phép biến đổi đó ma trận* $(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)$ *sẽ biến thành ma trận* $(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2)$*, nghĩa là*

$$((\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1)|(\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_2)) \xrightarrow{\mathit{BĐSCTD}} (I_n|(\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2))$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$*, cho các vector* $u_1 = (1, 2, 1)$*;* $u_2 = (1, 3, 1)$*;* $u_3 = (2, 5, 3)$.

a) *Chứng minh* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$.

b) *Tìm ma trận chuyển cơ sở từ* $\mathcal{B}$ *sang cơ sở chính tắc* $\mathcal{B}_0$ *của* $\mathbb{R}^3$.

c) *Tìm tọa độ của vector* $u = (1, 2, -3)$ *theo cơ sở* $\mathcal{B}$.