Bài giảng môn học Đại số tuyến tính

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Tp Hồ Chí Minh

2014

Chương 4

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Chương 4: ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

4.1 Định nghĩa và những tính chất căn bản
4.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
4.3 Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa

Cho V và W là hai không gian vector trên trường $\mathbb{R}$. Ta nói $f : V \to W$ là một ***ánh xạ tuyến tính*** *nếu nó thỏa mãn các điều kiện dưới đây:*

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \forall x_1, x_2 \in V,$

ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V.$

Nhận xét

- *Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện:*

$$f(\alpha x_1 + x_2) = \alpha f(x_1) + f(x_2), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$$

- *Nếu f là một ánh xạ tuyến tính, thì*
  - $f(0) = 0.$
  - $f(-x) = -f(x), \forall x \in V.$

Ký hiệu

- *L(V, W) là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ $V \to W$.*
- *Nếu $f \in L(V,V)$ thì f được gọi là một toán tử tuyến tính trên V. Viết tắt $f \in L(V)$.*

Ví dụ

Các ánh xạ sau đây là ánh xạ tuyến tính

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *xác định bởi*

$$f(x) = (x, 0, \ldots, 0);$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2);$$

Định lý

Cho V và W là hai không gian vector, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là cơ sở của V. Khi đó, nếu* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *là một tập hợp của W thì tồn tại duy nhất một* $f \in L(V, W)$ *sao cho*

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \ldots, f(u_n) = v_n$$

Khi đó, nếu

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

thì $f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$.

Định lý

Mọi ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ đều hoàn toàn xác định bởi ảnh của các vector của một cơ sở nào đó của V.

Chứng minh Ta xét trường hợp V là không gian vector hữu hạn chiều. Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của V và các vector $f(u_i), \forall i \in \overline{1, n}$ hoàn toàn xác định trong W. Khi đó $\forall x \in V$, biểu diễn x một cách duy nhất dưới dạng

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

ta có $f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$.

Trên tập hợp $L(V, W)$ ta định nghĩa các phép toán sau đây:

a) Phép cộng: $\forall f, g \in L(V, W), \forall x \in V$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

b) Phép nhân vô hướng: $\forall f \in L(V, W), \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Mệnh đề

$L(V, W)$ với những phép toán vừa định nghĩa phía trên là một không gian vector trên trường $\mathbb{R}$.

Định nghĩa

Cho $f : V \to W$ *là một ánh xạ tuyến tính.*

a) *Tập hợp* $Kerf = \{x \in V | f(x) = 0\}$ *được gọi là* ***nhân*** *của ánh xạ f.*

b) *Tập hợp* $Imf = \{f(x) | x \in V\}$ *được gọi là* ***ảnh*** *của ánh xạ f.*

Nhân và ảnh của f tương ứng là không gian con của V và W.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *được xác định bởi:*

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+3y-z, 3x+5y-z)$$

Tìm một cơ sở của Kerf.

Gọi $u \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in Kerf \Leftrightarrow f(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x,y,z) = (2t, -t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Nghiệm cơ bản của hệ là $u = (2,-1,1)$. Vậy *Kerf* có cơ sở là $\{u = (2,-1,1)\}$.

Định lý

Cho $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu

$$S = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$$

là tập sinh của V thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của Imf.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z).$$

Tìm một cơ sở của Imf.

Gọi $\mathbb{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ là một cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Ta có $f(e_1) = (1, 2, 3)$, $f(e_2) = (1, 3, 5)$, $f(e_3) = (-1, -1, -1)$. Ta có *Imf* sinh bởi $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. Lập ma trận

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do đó *Imf* có cơ sở là $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}$.

Định lý

Cho $f : V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vector hữu hạn chiều V vào không gian vector W. Khi đó Imf là không gian con hữu hạn chiều của V và ta có công thức:

$$\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$$

Định nghĩa

Cho V và W là các không gian vector trên trường $\mathbb{R}$. Gọi $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ lần lượt là các cơ sở của V và W. Cho f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vector V vào không gian vector W, $f \in L(V, W)$. Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{C}}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}}, \ldots, [f(u_n)]_{\mathcal{C}})$$

Khi đó ma trận P được gọi là ma trận biểu diễn của ánh xạ f theo cặp cơ sở $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, ký hiệu $P = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ hoặc $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.
Nếu $f \in L(V)$ thì ma trận $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ được gọi là ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính f, ký hiệu $[f]_{\mathcal{B}}$

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

và cặp cơ sở $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,1,2), u_3 = (1,1,1)\}$, $\mathcal{C} = \{v_1 = (1,3), v_2 = (2,5)\}$. *Tìm* $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$

Ta có $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}$, $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vậy $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Định lý

Cho V, W là các không gian vector với các cơ sở tương ứng là $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó với mọi vector $x \in V$, ta có

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Hệ quả

Cho V là không gian vector trên trường $\mathbb{R}$ và $\mathcal{B}$ là một cơ sở trong V. Giả sử f là một toán tử tuyến tính trong V. Khi đó, với mọi $x \in V$ ta có

$$[f(x)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

Ví dụ

Trong ví dụ trên ta lấy $x = (1, 2, 3)$, *ta có* $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Do đó*

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Mệnh đề

Cho V và W là các không gian vector hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ và $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ tương ứng là các cặp cơ sở trong V và W. Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$ ta có

$$[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \to \mathcal{C}')^{-1}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$$

Hệ quả

Cho $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở trong không gian vector hữu hạn chiều V trên trường $\mathbb{R}$. Khi đó với mọi toán tử tuyến tính f ta có

$$[f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1}[f]_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}').$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ *cho các vector*

$$u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,2,1); u_3 = (2,3,1)$$

và ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

a) *Chứng minh* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$.

b) *Tìm* $[f]_{\mathcal{B}}$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ *cho các vector:*

$$u_1 = (1, -1, 2); u_2 = (3, -1, 4); u_3 = (5, -3, 9)$$

1. *Chứng tỏ* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^3$.
2. *Cho* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *là một ánh xạ tuyến tính thỏa*

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm biểu thức của ánh xạ f.