Bài giảng môn học Toán 1

Nguyễn Anh Thi

2016

Chương 1

SỐ PHỨC, MA TRẬN

Nội dung

1. Chương 1: SỐ PHỨC, MA TRẬN
    1. Số phức.
    2. Ma trận.

Số phức

- Định nghĩa tập số phức
- Dạng đại số của số phức
- Dạng lượng giác của số phức
- Căn của số phức

Định nghĩa

Đặt $\mathbb{C}$ là tập hợp gồm các cặp số

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Trên $\mathbb{C}$ ta định nghĩa hai phép toán $(+)$ và nhân $(.)$ như sau:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mỗi cặp (a, b) được gọi là một số phức, và tập $\mathbb{C}$ với hai phép toán trên được gọi là tập số phức.

Dạng đại số của số phức

Định nghĩa

Mọi số phức $z = (a, b)$ đều viết được dưới dạng đại số

$$z = a + ib$$

với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i = (0, 1)$. Trong đó a được gọi là phần thực (ký hiệu là Re(z)), và b được gọi là phần ảo (ký hiệu là Im(z)).

Ví dụ

Cho $z = (2, 3)$. Ta có $z = 2 + i3$; $Re(z) = 2$; $Im(z) = 3$.

Dạng đại số của số phức

Tính chất

1. *Dạng đại số của một số phức là duy nhất, nghĩa là*

$$a + ib = c + id \leftrightarrow a = c, b = d (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

   Đặc biệt $a + ib = 0 \leftrightarrow a = b = 0.$

2. *Với dạng đại số, các phép tính về số thực được thực hiện như các phép tính thông thường trong* $\mathbb{R}$ *với* $i^2 = -1.$
3. *Những hằng đẳng thức thực cũng còn đúng trong trường hợp phức.*

Dạng đại số của số phức

Định nghĩa

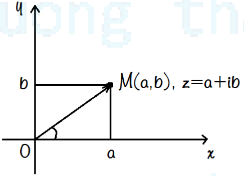
Cho số phức $z = a + ib$. Ta gọi ***module*** *hay* ***giá trị tuyệt đối*** *của z, ký hiệu là $|z|$, là số thực không âm $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Ví dụ

Cho các số phức $z = 3 - 4i; z' = -6 + 8i$. Hãy tìm module của $z; z'; z + z'; z - z'; zz'; z/z'; z^4$ và z'^{-3}.

Dạng lượng giác của số phức

Về mặt tập hợp ta thấy $\mathbb{C}$ trùng với $\mathbb{R}^2$. Do đó ta có thể biểu diễn số phức $z = a + ib$ bởi điểm $M(a, b)$ trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với hệ trục $x0y$.



Ta gọi 0x là ***trục thực***, biểu diễn số thực a, 0y là ***trục ảo*** biểu diễn số thuần ảo ib.

Ta thấy $0M = |z|$. Ta gọi $\varphi = (\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0M})$ là *argument* của z, ký hiệu $\varphi = \arg(z)$. Nếu $z \neq 0$ thì $\arg(z)$ được xác định duy nhất sai kém một bội nguyên của 2π. Với $z = 0$ ta có thể xem $\arg(z)$ là tùy ý.

Dạng lượng giác của số phức

Với một số phức $z = a + ib \neq 0$ và $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Khi đó ta có

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}; \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Định lý

Mọi số phức $z \neq 0$ đều viết được dưới dạng lượng giác

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trong đó $r = |z|$ và $\varphi = \arg(z)$.

Dạng lượng giác của số phức

Ví dụ

$$1 = \cos 0 + i \sin 0;$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2};$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3});$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})].$$

Dạng lượng giác của số phức

Định lý

Cho các số thực $z, z' \neq 0$. Khi đó

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$;
2. $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z')$.

Dạng lượng giác của số phức

Hệ quả

Cho các số phức $z, z' \neq 0$ dưới dạng lượng giác

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

Khi đó

i. $zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$;

ii. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$.

Dạng lượng giác của số phức

Ví dụ

Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

$$z_1 = (1-i)(\sqrt{3}-i); z_2 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}.$$

Dạng lượng giác của số phức

Định lý (Công thức Moivre)

Cho số phức $z \neq 0$ *dưới dạng lượng giác* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Khi đó với mọi số nguyên n ta có*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Dạng lượng giác của số phức

Ví dụ

Tính $(1-i)^{1945}$

Căn của số phức

Định nghĩa

Căn bậc $n > 0$ của số phức u là số phức z thỏa mãn $z^n = u$.

Định lý

Mọi số phức $u \neq 0$ đều có đúng n căn bậc n định bởi

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right),$$

với $k \in \overline{0, n-1}$, trong đó $r = |u|, \varphi = arg(u)$.

Căn của số phức

Ví dụ

- *Tìm căn bậc 5 của* 1.
- *Tìm căn bậc 3 của* $1+i$.

Căn của số phức

Định lý

Phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$, luôn luôn có các nghiệm định bởi

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$, với quy ước $\sqrt{\Delta}$ là một trong hai căn bậc hai của số phức Δ.

Căn của số phức

Ví dụ

Giải phương trình phức

$$144z^2 + 192z + 73 = 0$$

Định nghĩa

Định nghĩa

Một ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là một bảng chữ nhật gồm m dòng, n cột với mn hệ số trong $\mathbb{R}$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Viết tắt: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

a_{ij} là hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A (hệ số này còn được ký hiệu là A_{ij}).
Ký hiệu $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả những ma trận loại $m \times n$ trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R});\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Định nghĩa

Ma trận có các hệ số bằng 0, được gọi là ma trận không, ký hiệu $0_{m\times n}$ (hay 0).

Ví dụ

$$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Định nghĩa

Ma trận vuông cấp n là một ma trận loại $n \times n$, (số dòng bằng số cột). Ký hiệu $M_n(\mathbb{R})$ là tập hợp các ma trận vuông cấp n.

Ví dụ

$$A \in M_3(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \; 0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Định nghĩa

Nếu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính hay đường chéo của A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Định nghĩa

Một ma trận chéo cấp n là một ma trận vuông cấp n mà tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0. Nếu A là một ma trận chéo cấp n, ta ký hiệu $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Ví dụ

$$A = diag(1, 5, 9) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Định nghĩa

Ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu I_n hay I, là ma trận chéo cấp n mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ví dụ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các dạng đặc biệt của ma trận

Định nghĩa

Ma trận tam giác trên (tương ứng ma trận tam giác dưới) là một ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương ứng phía trên) đường chéo chính đều bằng 0.

Nhận xét

Ma trận vuông A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi A vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (so sánh hai ma trận)

Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B = (b_{ij})_{m\times n}$. *Ta nói A bằng B, ký hiệu* $A = B$, *nếu* $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,n}$.

Ví dụ

Tìm x, y, z, t *để*

$$\begin{pmatrix} x+1 & t \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & t+z \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$$

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (phép lấy chuyển vị)

Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận loại $m \times n$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T, là ma trận loại $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng,

nghĩa là nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *thì*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa

Nếu $A^\top = A$ thì ta nói A là ma trận đối xứng. Nếu $A^\top = -A$ thì nói A là ma trận phản xứng.

Tính chất

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó

- $(A^\top)^\top = A$;
- $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

Các phép toán về ma trận

Ví dụ

$$\text{Với } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ ta có } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ là ma trận đối xứng.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ là ma trận phản xứng.}$$

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (Phép nhân vô hướng với ma trận)

Cho ma trận $A = (a_{ij})$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α, nghĩa là

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ma trận $(-1)A$ được ký hiệu là $-A$, được gọi là ma trận đối của A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, *ta có* $2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$,

$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (Phép cộng ma trận)

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Khi đó tổng của A và B, ký hiệu $A+B$, là ma trận được xác định bởi:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

Ký hiệu $A-B := A+(-B)$ và gọi là hiệu của A và B.

Ví dụ

Cho $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Tính $A+B$ và $A-B$.

Các phép toán về ma trận

Tính chất

Với $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, ta có*

i. $A + B = B + A$;

ii. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

iii. $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$;

iv. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$;

v. $(A + B)^T = A^T + B^T$;

vi. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

vii. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

viii. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (phép nhân ma trận)

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})$ loại $m \times n$ và $B = (b_{ij})$ loại $n \times p$. Ta định nghĩa tích của hai ma trận A và B, ký hiệu là AB, là ma trận định bởi:

- *AB có loại $m \times p$.*
- *AB có hệ số ở dòng i, cột j được tính bởi công thức*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Các phép toán về ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, *tìm tích* $AB = ?$

Các phép toán về ma trận

Tính chất

Với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, *ta có*

- $I_m A = A$ *và* $AI_n = A$. *Đặc biệt, với* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$I_n A = AI_n = A.$$
- $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$ *và* $A0_{n\times q} = 0_{m\times q}$. *Đặc biệt, với* $A = M_n(\mathbb{R})$, *ta có*
$$0_{n\times n}A = A0_{n\times n} = 0_{n\times n}.$$
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Các phép toán về ma trận

- Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, nghĩa là

$$(AB)C = A(BC).$$

- Phép nhân ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng , nghĩa là

$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2;$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

Chú ý

Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

Các phép toán về ma trận

Định nghĩa (lũy thừa ma trận vuông)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi lũy thừa bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^k, được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \ldots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ lần}}.$

Các phép toán về ma trận

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* $A^2, A^3, \ldots,$ *từ đó suy ra* A^{200}.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Suy ra } A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi phép biến đổi sơ cấp trên dòng, viết tắt là phép BĐSCTD trên A, là một trong ba loại biến đổi sau:

- *Loại 1: Hoán vị hai dòng i và j ($i \neq j$). Ký hiệu: $d_i \leftrightarrow d_j$.*
- *Loại 2: Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$. Ký hiệu: $d_i := \alpha d_i$.*
- *Loại 3: Cộng vào một dòng i với β lần dòng j ($j \neq i$). Ký hiệu: $d_i := d_i + \beta d_j$.*

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ là ma trận có từ A qua φ.

Ví dụ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nhận xét

1. $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$
2. $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A$
3. $A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A$

Định nghĩa

Cho $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A tương đương dòng với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy $A \sim B \Leftrightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ là các phép BĐSCTD sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} A_2 \cdots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B$$

Ma trận bậc thang

Định nghĩa

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Hệ số khác 0 đầu tiên kể từ bên trái của mỗi dòng được gọi là phần tử cơ sở của dòng đó. Ta nói A là ma trận bậc thang nếu A thỏa hai tính chất sau:

1. *Các dòng khác 0 luôn luôn ở trên các dòng bằng 0 của A.*
2. *Trên hai dòng khác 0 của A, phần tử cơ sở của dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử cơ sở của dòng trên.*

Ma trận bậc thang

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

Ma trận bậc thang

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A là ma trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.

Ma trận bậc thang

Định nghĩa (Ma trận bậc thang rút gọn)

Ma trận A được gọi là ma trận bậc thang rút gọn nếu các tính chất sau được thoả

1. *A có dạng bậc thang.*
2. *Các phần tử cơ sở đều bằng* 1.
3. *Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các hệ số ngoài phần tử cơ sở đều bằng* 0.

Ví dụ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C là ma trận bậc thang rút gọn, D không là ma trận bậc thang rút gọn.

Định nghĩa

*Ma trận B được gọi là một **dạng bậc thang** của ma trận A, nếu B là một ma trận bậc thang, và tương đương dòng với A.*

Nhận xét

Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0.

Ma trận bậc thang

Định nghĩa

Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là dạng bậc thang rút gọn của A. Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và được ký hiệu R_A.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, *tìm* R_A?

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hạng của ma trận

Định nghĩa

Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, *số dòng khác* 0 *của một dạng bậc thang của* A *là* ***hạng*** *của* A, *ký hiệu* $r(A)$.

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Định thức

- Định nghĩa
- Khai triển định thức theo dòng và cột
- Các tính chất của định thức
- Định thức và các phép biến đổi sơ cấp
- Định lý Laplace

Định thức

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Định thức của A, được ký hiệu là det A hay $|A|$, là một số thực được xác định bằng quy nạp theo n như sau:

- *Nếu $n = 1$, $A = (a)$, thì $|A| = a$.*
- *Nếu $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, thì $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.*

Định thức

- Nếu $n > 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, thì $|A| \stackrel{\text{dòng 1}}{=\!=\!=} a_{11}(-1)^{1+1}|A(1|1)| + a_{12}(-1)^{1+2}|A(1|2)| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A(1|n)|$, trong đó $A(i|j)$ là ma trận có được từ A bằng cách xóa đi dòng i và cột j của A.

Định thức

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $|A| = 1.(-2) - (-3).4 = 10$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ $|A| =$

$$1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 10 - 15 + 6 = 1$$

Quy tắc Sarrus

Trong trường hợp $n = 3$, thì ta có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Áp dụng định nghĩa trên ta có thể tính được định thức của A

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Từ đây ta đưa ra quy tắc Sarrus, đưa vào sơ đồ như sau

$$\begin{array}{ccccc} \text{cột1} & \text{cột2} & \text{cột3} & \text{cột1} & \text{cột2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Theo đó định thức bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường liền nét trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số trên các đường không liền nét. Hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \bullet & * & \circ \\ \circ & \bullet & * \\ * & \circ & \bullet \end{matrix} - \begin{matrix} * & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & * \\ \bullet & * & \circ \end{matrix}$$

Định thức của ma trận A được tính bằng tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu đỏ trừ đi tổng các tích số của từng bộ 3 số tương ứng với cùng một ký hiệu trong hình màu xanh.

Ví dụ

Tính định thức $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

$1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1 - 3.2.3 - 1.1.1 - 2.4.5 = -31$

Khai triển định thức theo dòng và cột

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *là một ma trận vuông cấp n với hệ số trong* $\mathbb{R}$. *Với mỗi i,j, ta gọi* $c_{ij} = (-1)^{i+j} detA(i|j)$ *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}, *trong đó* $A(i|j)$ *là ma trận vuông cấp* $(n-1)$ *có được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j.*

Định lý

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Với mỗi i,j, gọi* c_{ij} *là phần bù đại số của hệ số* a_{ij}. *Ta có*

- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo dòng i:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{ik}$.
- *Công thức khai triển* $|A|$ *theo cột j:* $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}c_{kj}$.

Chú ý

Trong việc tính định thức của ma trận ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0 để tính.

Ví dụ

Tính định thức của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Một số tính chất của định thức

Tính chất

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó:*

i. $|A^T| = |A|$.

ii. $|AB| = |A||B|$.

iii. *Nếu ma trận* A *có một dòng hay một cột bằng* 0 *thì* $|A| = 0$.

iv. *Nếu* A *là một ma trận tam giác thì* $|A|$ *bằng tích các phần tử trên đường chéo của* A.

v. *Nếu dòng* i *của* A *là tổng của hai dòng* $(b_1 b_2 \ldots b_n)$ *và* $(c_1 c_2 \ldots c_n)$. *Khi đó* $|A| = |B| + |C|$, *trong đó* B, C *lần lượt là các ma trận có từ* A *bằng cách thay dòng* i *bằng* $(b_1 b_2 \ldots b_n)$ *và* $(c_1 c_2 \ldots c_n)$.

Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Định lý

Cho $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$. *Khi đó*

1. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$, *thì* $|A'| = -|A|$;
2. *Nếu* $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$ *thì* $|A'| = \alpha |A|$;
3. *Nếu* $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$ *thì* $|A'| = |A|$.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{dòng 2}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 2}} 2.3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{d_2:=d_2-d_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{dòng 2}} 6(-11)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

Chú ý

Vì $|A^T| = |A|$ nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.

Ma trận khả nghịch và ma trận nghịch đảo

- Định nghĩa
- Nhận diện ma trận khả nghịch
- Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Định nghĩa

Định nghĩa

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Ta nói* A *khả nghịch nếu tồn tại ma trận* B *sao cho* $AB = BA = I_n$. *Nếu* B *thỏa điều kiện trên được gọi là ma trận nghịch đảo của* A.

Nhận xét

Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A *là* A^{-1}.

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Khi đó* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tính chất

Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có ma trận nghịch đảo là A^{-1}. Khi đó

- A^{-1} *khả nghịch và* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T *khả nghịch và* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, αA *khả nghịch và* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.
- *Nếu A và B khả nghịch thì AB khả nghịch, hơn nữa* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Nhận diện ma trận khả nghịch

Định lý

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

i. *A khả nghịch.*

ii. $|A| \neq 0$.

iii. $r(A) = n$.

iv. *Tồn tại các phép BĐSCTD $\varphi_1, ..., \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n. $A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n$. Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BĐSCTD $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1}:* $I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}$.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 1

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BĐSCTD đưa A về dạng bậc thang rút gọn: $(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \rightarrow \ldots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \ldots$
Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Trong dãy biến đổi trên, tồn tại p sao cho ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- Trường hợp 2: Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng trong dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Phương pháp 2

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = (c_{ij})$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i|j)|$ là phần bù đại số của a_{ij}. Ta gọi ma trận chuyển vị C^T của C là ma trận phụ hợp của A, ký hiệu là $adj(A)$. Khi đó ma trận nghịch đảo của ma trận A được xác định bởi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Ví dụ

Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$|A| = 3c_{31} + 4c_{32} = 3.(-2) + 4.1 = -2 \neq 0$.

Vậy ma trận A khả nghịch.

Tương tự như trên ta có thể tính được $c_{11} = -4; c_{12} = 3; c_{13} = -1; c_{21} = 4; c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{33} = 1$. Từ đó ta có ma trận $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Suy ra $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Hệ quả

Ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *khả nghịch khi và chỉ khi* $ad - bc \neq 0$.

Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Suy ra* $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Giải phương trình ma trận

Định lý

Cho các ma trận $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó

- $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$;
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$;
- $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$.

Giải phương trình ma trận

Ví dụ

Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. *Chứng tỏ A khả nghịch và tìm A^{-1}.*
b. *Tìm ma trận X thỏa $AXA = AB$.*
c. *Tìm ma trận X thỏa $A^2XA^2 = ABA^2$.*

Hệ quả

Cho các ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch và $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ta có

- *Nếu $AB = 0$ thì $B = 0$.*
- *Nếu $CA = 0$ thì $C = 0$.*

Hệ phương trình tuyến tính

1. Một hệ phương trình tuyến tính trên $\mathbb{R}$ gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

trong đó

Định nghĩa

- a_{ij} là các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{R}$ là các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số nhận giá trị trong $\mathbb{R}$;

Nếu các hệ số $b_i = 0$ thì ta nói hệ phương trình tuyến tính trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{R}$.

2. Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận hệ số* của hệ $(*)$.

Ma trận $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ được gọi là cột các *hệ số tự do* của hệ $(*)$.

Ma trận $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là cột các ẩn của hệ $(*)$.

Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng $AX = B$. Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

được gọi là *ma trận bổ sung* (hay *ma trận mở rộng*) của hệ $(*)$.

Ví dụ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases} \qquad (*)$$

Ma trận hệ số của hệ $(*)$ *là* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, *cột hệ số tự do là* $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$, *cột ẩn của hệ là* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa

Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *là nghiệm của hệ phương trình* $(*)$ *nếu ta thay thế* $x_1 := \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n := \alpha_n$ *thì tất cả các phương trình trong* $(*)$ *đều thỏa.*

Định nghĩa

Hai hệ phương trình là tương đương nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- *Hoán đổi hai phương trình cho nhau.*
- *Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác* 0.
- *Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.*

Định lý

Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nhận xét

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

luôn có một nghiệm $u = (0, 0, \dots, 0)$.
Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường.

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính chỉ có 3 trường hợp sau:

- *Vô nghiệm;*
- *Duy nhất một nghiệm;*
- *Vô số nghiệm.*

Giải hệ phương trình tuyến tính

- Phương pháp Gauss
- Phương pháp Gauss-Jordan
- Quy tắc Cramer

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang R.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1. Ma trận R có 1 dòng là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

Phương pháp Gauss

- Trường hợp 2. Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & \alpha_1 \\
0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} & \alpha_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & c_{nn} & \alpha_n \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

Phương pháp Gauss

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
  - Ẩn tương ứng với các cột không chứa phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
  - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Phương pháp Gauss

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array}\right)$

Phương pháp Gauss

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng $\tilde{A}$ là

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 5; \\ x_4 = -3. \end{cases}$

Phương pháp Gauss

Ví dụ

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Phương pháp Gauss

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ có nghiệm: $\left\{\begin{array}{lcr} x_3 & = & t \in \mathbb{R} \\ x_4 & = & s \in \mathbb{R} \\ x_2 & = & -2 + 10t - 17s \\ x_1 & = & 5 - 17t + 29s \end{array}\right.$

Phương pháp Gauss

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Ma trận mở rộng $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right)$. Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương pháp Gauss-Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.
Bước 2. Đưa ma trận $\tilde{A}$ về dạng bậc thang rút gọn R_A.
Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể :

- Trường hợp 1.Ma trận R_A có một dòng $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \neq 0 \end{array}\right)$. Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

Phương pháp Gauss-Jordan

- Trường hợp 2.Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$$

Phương pháp Gauss-Jordan

- Trường hợp 3. Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có vô số nghiệm, và
    - Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở của dòng nào sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
    - Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

  Số ẩn tự do được gọi là bậc tự do của hệ phương trình.

Quy tắc Cramer

Định lý

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ $(*)$ gồm n ẩn và n phương trình. Đặt $\Delta = detA; \Delta_i = detA_i, i \in \overline{1,n}$ trong đó A_i là ma trận có được từ A bằng cách thay cột i bằng cột B. Khi đó

i. *Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ $(*)$ có một nghiệm duy nhất là:*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i \in \overline{1,n}$$

ii. *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_i \neq 0$ với một i nào đó thì hệ $(*)$ vô nghiệm.*

iii. *Nếu $\Delta = 0$ và $\Delta_i = 0, \forall i \in \overline{1,n}$ thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.*

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

Quy tắc Cramer

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

Vì $\Delta \neq 0$, nên hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases}$

Ta có $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$

$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45.$

Vậy hệ vô nghiệm.

Quy tắc Cramer

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases}$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$ Vì $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

Quy tắc Cramer

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m+12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & 2 & m+1 \end{vmatrix} = 0;$$

Quy tắc Cramer

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 6;$$

- $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1}\right)$
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$
  - m=1, $\Delta_1 = 8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
  - $m = 3$, $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Khi đó hệ phương trình là $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$

    Nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$ với t tự do.

Quy tắc Cramer

Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+9 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+9 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+9 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

Biện luận

- Nếu $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, -1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là
$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m(m^2-18m+17)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{m(m-17)}{m^2-1}; \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{m(m^2-15m+14)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{m(m-14)}{m^2-1}; \\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2-1)} = \frac{-36m}{m^2-1}. \end{cases}$$
- Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array} \right.$
  - $m = -1$, $\Delta_1 = -36 \neq 0$, hệ vô nghiệm.
  - $m = 1$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ta có hệ
  $$\begin{cases} -6x + 12y - 6z = 1; \\ -10x + 20y - 10z = 2; \\ -12x + 24y - 12z = 0. \end{cases}$$
  Hệ vô nghiệm.

Định lý Kronecker-Capelli

Định lý (Kronecker-Capelli)

Nếu $\tilde{A} = (A|B)$ *là ma trận mở rộng của hệ gồm n ẩn dạng* $AX = B$ *thì* $r(\tilde{A}) = r(A)$ *hoặc* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$. *Hơn nữa,*

- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ *thì hệ vô nghiệm;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ *thì hệ có nghiệm duy nhất;*
- *nếu* $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ *thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là* $n - r(A)$.

Định lý Kronecker-Capelli

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array}\right)$$

Định lý Kronecker-Capelli

Dạng bậc thang R của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $2m-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$. Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với $m=2$, hệ tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2 \\ \quad\quad - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Định lý Kronecker-Capelli

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 &= 1 - x_4 &= 1 - t; \\ x_2 &= 2 - 3x_3 + 11x_4 &= -1 + 14t; \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 1 - 21t \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Định lý Kronecker-Capelli

Ví dụ

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4. \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array}\right)$$

Định lý Kronecker-Capelli

Dạng bậc thang của ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array}\right)$$

Biện luận

- Với $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$, hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 = m; \\ x_3 = m + 1 - x_4 = 1; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 - 2m; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Định lý Kronecker-Capelli

Vậy khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3-2m, 1, m)$.

- Với $m = 7$, hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Chọn $x_4 = t$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

Vậy khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.