Bài giảng Toán 1

Giảng viên
Nguyễn Anh Thi

2016

Chương 2

HÀM SỐ VÀ LIÊN TỤC

Định nghĩa

Cho hai tập hợp $X, Y \subset \mathbb{R}$. Hàm số f xác định trên X, nhận giá trị trong Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi số x thuộc X với một số y duy nhất thuộc Y. Ta viết

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Nghĩa là với mỗi $x \in X$, tồn tại duy nhất $y \in Y$ sao cho $y = f(x)$.

Ví dụ

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Định nghĩa

Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm a và viết $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, nếu với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, ta có thể tìm được $\delta(\epsilon) > 0$ sao cho $|x-a| < \delta(\epsilon)$ thì $|f(x)-L| < \epsilon$. Dùng ký hiệu toán, ta có thể viết

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in D, |x-a| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

Định nghĩa

Giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về bên trái a là bằng L nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : a - \delta(\epsilon) < x < a \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

Giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về bên phải a là bằng L nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : a < x < a + \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

Định lý

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Ví dụ

Tính

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$;

Định nghĩa

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ nếu: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ nếu: $\forall N \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N.$$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ nếu: $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}$:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ nếu: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$:

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tương tự cho các giới hạn

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

Tính chất

Nếu tồn tại $\lim_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim_{x\to a} g(x)$ *thì*

1. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
5. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$
6. $\lim_{x\to a} c = c$ *và* $\lim_{x\to a} x = a$
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ *(*$\lim_{x\to a} f(x) > 0$ *nếu n chẵn.)*

Nếu f là *một đa thức* *hay* *hàm hữu tỉ* *và a nằm trong miền xác định của nó thì*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Ví dụ

Tính các giới hạn

1. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - x - 2)$
2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 + \sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

Mệnh đề

Nếu $f(x) = g(x), \forall x \neq a$ *thì* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Ví dụ

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$

Mệnh đề (giới hạn kẹp)

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *ở xung quanh a (có thể ngoại trừ tại a) và* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ *thì khi đó:* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

Chú ý

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Định nghĩa

Các hàm mũ, lũy thừa, logarit, lượng giác, lượng giác ngược được gọi là các hàm hàm sơ cấp cơ bản. Tổng, hiệu, tích, thương, hợp nối các hàm sơ cấp cơ bản được gọi là các hàm sơ cấp.

Mệnh đề

Nếu a thuộc miền xác định của hàm sơ cấp f thì:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Tính toán với $\pm\infty$-dạng vô định

Khi gặp giới hạn có dạng $\pm\infty$, ta tính như sau ($\forall a \in \mathbb{R}$)

1. $a + (\pm\infty) = \pm\infty$ và $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$.
2. $a.(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{nếu } a > 0 \text{ hoặc } a = +\infty \\ \mp\infty, & \text{nếu } a < 0 \text{ hoặc } a = -\infty \end{cases}$
3. $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu mẫu dương} \\ -\infty, & \text{nếu mẫu âm} \end{cases}$
4. Các biểu thức có dạng:

$$\infty - \infty, 0.\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

là các dạng vô định.

Ví dụ

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x}$
5. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x}$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x - \sqrt[3]{x}} - \sqrt{x}$

Tính toán với $\pm\infty$-dạng vô định

5. Với $\alpha > 0$: $(+\infty)^\alpha = +\infty$
6. Với $a > 1$: $a^{+\infty} = +\infty$ và $a^{-\infty} = 0$
7. Với $a > 1$: $log_a(+\infty) = +\infty$ và $log_a(0^+) = -\infty$
8. $\sin(\pm\infty), \cos(\pm\infty), \tan(\pm\infty), \cot(\pm\infty)$ đều không tồn tại.
   $\tan(\frac{\pi}{2}^-) = +\infty$, $\tan(-\frac{\pi}{2}^+) = -\infty$
   $\cot(0^+) = +\infty$, $\cot(\pi^-) = -\infty$
9. $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$
10. Các biểu thức có dạng:

$$\infty^0, 0^0, 1^\infty$$

là các dạng vô định.

Một số giới hạn quan trọng

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0;$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1;$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1;$
8. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty;$ $\lim\limits_{x\to -\infty} x^k e^x = 0;$
9. Với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0;$ $\lim\limits_{x\to 0} x^k \ln x = 0.$

Ví dụ

1. $\lim\limits_{x \to 0} ln \frac{sinx}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos e^{-x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 1^-} [\sin(e^{\frac{1}{1-x}})]$
4. $\lim\limits_{x \to 1^+} [\sin(e^{\frac{1}{1-x}})]$
5. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Bài tập

Tính các giới hạn của $f(x)$ khi $x \to a$

1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2})$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(4+x)^2} - \frac{1}{16}\right)$;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\ln x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{1+(\ln x^2)^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0+} 3^{-1/x}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{-1/x}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^{100}$.

Định nghĩa

Hàm f được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu ứng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ với mọi $x \in D$, $|x - a| < \delta$.

Ta có thể nói cách khác

Hàm số f được nói là liên tục tại $x \in D$ nếu f xác định tại a, giới hạn khi $x \to a$ của f tồn tại, và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Nếu f không liên tục tại a ta nói f gián đoạn tại a .

Định nghĩa

Hàm số f được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Mệnh đề

Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên miền xác định của nó.

Ví dụ

Tìm a để hàm số

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1}, & \text{nếu } x \neq 1 \\ a, & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại 1.
2. $f(x) = \begin{cases} \ln|x-2|, & \text{nếu } x \neq 2 \\ a, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại 2.

Tính chất

1. *Nếu f và g đều liên tục tại x thì các hàm sau cũng liên tục tại x:*

$$f \pm g, cf, f.g, \frac{f}{g} \text{ với } g(a) \neq 0$$

2. *Nếu f liên tục tại b và* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *thì:*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b).$$

3. *Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại* $g(a)$ *thì hàm hợp nối* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *liên tục tại a.*

Hàm liên tục trên khoảng đóng

Định lý (Định lý giá trị trung gian)

Giả sử f liên tục trên khoảng $[a,b]$, và N là giá trị bất kỳ sao cho $f(a) < N < f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = N$.