Bài giảng Toán 1

Giảng viên
Nguyễn Anh Thi

2016

Chương 3

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Định nghĩa

Cho $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ và $x_0\in(a,b)$, nếu giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tồn tại, ta nói f khả vi tại x_0, và giá trị của giới hạn này được gọi là đạo hàm của f tại x_0. Ký hiệu $f'(x_0)$.

- $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ được gọi là đạo hàm phải của f tại x_0.
- $f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ được gọi là đạo hàm trái của f tại x_0.

- Nếu f có đạo hàm tại mọi $x_0 \in (a, b)$ thì f' là một hàm số
- Nếu hàm số này có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$ thì ta nói f có đạo hàm cấp hai tại x_0. Ký hiệu: $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.
- Nếu f có đạo hàm cấp n là $f^{(n)}$ thì đạo hàm cấp $n+1$ được định nghĩa là: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$.
- Các đạo hàm của $y = f(x)$ còn được ký hiệu:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx}, f"(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$$

Mệnh đề

Nếu f có đạo hàm tại x thì f liên tục tại x.

Tính chất

Nếu f, g *có đạo hàm tại* $x \in (a, b)$ *thì:*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$, *với* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
4. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
5. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

Đạo hàm các hàm sơ cấp

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x lna$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$		
$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$		

Ví dụ

Tính $f'(x)$:

1. $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$
2. $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$

Vi phân

Nếu f khả vi tại x_0, thì ta có

$$f'(x) = \lim_{s \to x} \frac{f(s) - f(x)}{s - x}$$

Đặt $\epsilon(s - x) = \frac{f(s) - f(x)}{s - x} - f'(x)$. Khi đó

$$f(s) - f(x) = f'(x)(s - x) + (s - x)\epsilon(s - x)$$

và $\epsilon(s - x) \to 0$ khi $s \to x$.
Giá trị $s - x$ được gọi là số gia của x, ký hiệu Δx, và $f(s) - f(x)$ gọi là số gia của $y = f(x)$, ký hiệu Δy, khi Δx đủ nhỏ, ta có

$$\Delta y \approx f'(x).\Delta x$$

Δy được gọi là vi phân của hàm $y = f(x)$ tại x, ký hiệu dy (hay df).
Ta có đẳng thức xác định vi phân của $y = f(x)$ tại điểm x,

$$dy = f'(x)dx.$$

Ví dụ

1. Tìm df, biết $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
2. Cho $f(x) = \cos(x + \sin x)$. Tính $df(0)$.

Định nghĩa

Vi phân cấp 2 của hàm f là: $d^2f = f''(x)dx^2$. Tương tự, vi phân cấp n của f là: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$

Ví dụ

1. Tìm d^2y, biết $y = \arcsin x$.
2. Cho $y = \sqrt{2x+1}$. Tính d^ny và $d^ny(0)$.

Tính gần đúng (xấp xỉ tuyến tính)

Khi f khả vi tại x_0 thì:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \epsilon(\Delta x)$$

Cho nên ta có thể xấp xỉ:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Vế phải được gọi là xấp xỉ tuyến tính của f tại x_0. Ký hiệu $L = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Ví dụ

Tính gần đúng $\sin 46^\circ$.

Giải: đặt $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, và $\Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &\approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0) \\ &\approx \cos\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{180} + \sin\frac{\pi}{4}. \\ &\approx 0.7071.0.0175 + 0.7071 \\ &\approx 0.7194 \end{aligned}$$

Ví dụ

Dùng vi phân tính xấp xỉ các giá trị sau:

1. $\sqrt[3]{28}$
2. $\tan 44^\circ$
3. $\arctan 0.97$

Định lý

Cho f và g là hai hàm khả vi và $g'(x) \neq 0$ trên một khoảng mở chứa a. Nếu

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, *hoặc*
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *(nếu giới hạn bên phải tồn tại).*

Ví dụ

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.
3. $\lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{\sin x}{1-\cos x}$.

Định lý giá trị trung bình

Định nghĩa

Ta nói f đạt cực đại địa phương tại c nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x nằm trong lân cận của c, f cực tiểu địa phương tại c nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x nằm trong lân cận của c.

Định lý (Fermat)

Nếu f đạt cực trị tại c, và nếu $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

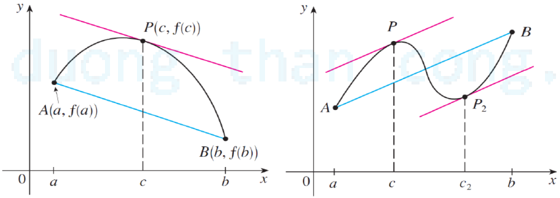
Định lý (Rolle)

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Khi đó nếu $f(a) = f(b)$ thì sẽ có $c \in [a, b]$ sao cho: $f'(c) = 0$.

Ta có định lý giá trị trung bình

Định lý (Lagrange)

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trên khoảng (a,b). Khi đó có $c \in (a,b)$ sao cho: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Mệnh đề

1. *Nếu* $f' > 0$ *trên đoạn* $[a, b]$ *thì f tăng trên đoạn* $[a, b]$.
2. *Nếu* $f' < 0$ *trên đoạn* $[a, b]$ *thì f giảm trên đoạn* $[a, b]$.
3. *Nếu* $f' = 0$ *trên đoạn* $[a, b]$ *thì f là hằng số trên đoạn* $[a, b]$.

Mệnh đề

Nếu $f'(c) = 0$*, ta có:*

1. *Nếu f' đổi dấu từ dương sang âm tại c thì f đạt cực đại (địa phương) tại c.*

2. *Nếu f' đổi dấu từ âm sang dương tại c thì f đạt cực tiểu (địa phương) tại c.*
3. *Nếu f' không đổi dấu tại c thì f không đạt cực trị tại c.*

Ngoài ra ta có thể xét cực trị bằng đạo hàm cấp 2.

Mệnh đề

1. *Nếu* $f'(c) = 0$ *và* $f''(c) > 0$ *thì f đạt cực tiểu tại c.*
2. *Nếu* $f'(c) = 0$ *và* $f''(c) < 0$ *thì f đạt cực đại tại c.*

Ví dụ

Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số
$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), nhỏ nhất (GTNN) của hàm số trên đoạn $[a, b]$

Bước 1: Tìm cực trị địa phương trong khoảng $[a, b]$.
Bước 2: Tính các giá trị biên $f(a)$ và $f(b)$.
Bước 3: So sánh các giá trị tính được trong bước 1 và bước 2 để tìm GTLN, và GTNN.

Ví dụ

Tìm GTLN và GTNN của $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ trên $[-2, 4]$.

Bài tập: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau:

1. $y = x + \cos x$ trong đoạn $[-1, 1]$;
2. $y = e^x - e^{-x}$ trong đoạn $[-2, 4]$;
3. $y = \ln x - x^2$ trong đoạn $[e, e^2]$;
4. $y = \sqrt{x^2 + 1} - 2x$ trong đoạn $[0, 1]$.

Khai triển Taylor

Cho $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là hàm số có đạo hàm đến cấp n trên (a, b), ta có:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\
\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \\
= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)
\end{aligned}
$$

Trong đó $R_n(x)$ là phần dư trong khai triển trên.

Ví dụ

Tính gần đúng $\sin 46^\circ$ bằng công thức Taylor với $n = 3$.

Xét $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$. Đặt $x = 46^\circ$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x - x_0 = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Ta có

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) \\
&\simeq \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.\cos\frac{\pi}{4} - \frac{(\pi/180)^2}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{(\pi/180)^3}{6}\cos\frac{\pi}{4} \\
&\simeq 0.7071 + 0.0175.0.7071 - \frac{0.0175^2}{2} 0.7071 - \frac{0.0175^3}{6}.0.7071 \\
&\simeq 0.7193
\end{aligned}
$$

Khai triển Mac Laurin

Khai triển Taylor với $x_0 = 0$ gọi là khai triển Mac Laurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

Ví dụ

1. Viết khai triển Taylor tới cấp 3 của $f(x) = \sqrt{3x-2}$, tại $x_0 = 2$.
2. Viết khai triển Mac Laurin tới cấp 3 của: $f(x) = arcsinx$
3. Viết khai triển Mac Laurin tới cấp 4 của: $f(x) = e^{-x^2}$

Chú ý: Khai triển Taylor tại $x = x_0$ là khai triển theo lũy thừa của $x - x_0$.