Bài giảng Toán 1

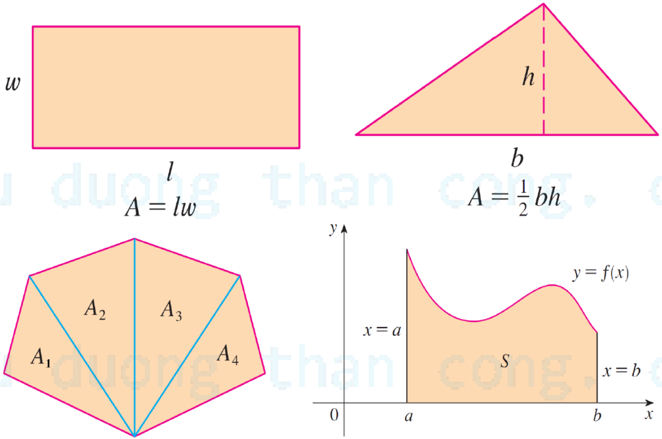
Giảng viên
Nguyễn Anh Thi

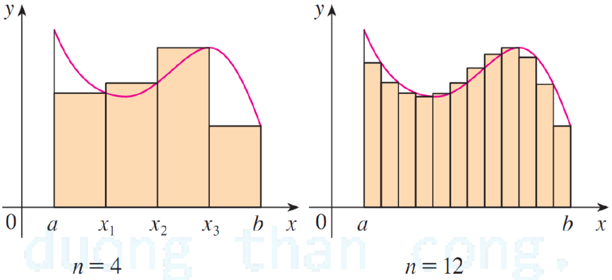
2016

Chương 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

Bài toán tìm diện tích



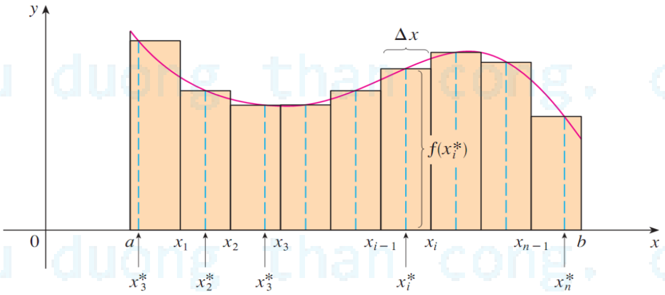


Ta có tổng Rieman: $R_n = f(x_1)\Delta(x) + f(x_2)\Delta(x) + \cdots + f(x_n)\Delta(x)$.
Khi đó ta có diện tích

$$A = \lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} [f(x_1)\Delta(x) + f(x_2)\Delta(x) + \cdots + f(x_n)\Delta(x)]$$

Thay vì lấy giá trị của f tại các đầu mút x_i như trên, ta có thể chọn tại điểm bất kỳ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Ta có diện tích

$$A = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1^*)\Delta(x) + f(x_2^*)\Delta(x) + \cdots + f(x_n^*)\Delta(x)]$$



Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho f là hàm xác định trên đoạn $[a,b]$, ta chia đoạn $[a,b]$ thành n khoảng con với độ rộng $\Delta(x) = (b-a)/n$. Gọi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ là các đầu mút của các khoảng con đó. Trên mỗi khoảng con ta lấy $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Thì tích phân (xác định) của f từ a đến b được định nghĩa là:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta(x)$$

nếu nó tồn tại.
Nếu tích phân của f tồn tại ta nói f khả tích.

Các tính chất cơ bản của tích phân

Mệnh đề

Cho f, g *khả tích trên* $[a, b]$, $k \in \mathbb{R}$ *khi đó:*

1. $\int_a^b [f(x) + kg(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx$
2. *Nếu* $c \in (a, b)$ *thì* f *cũng khả tích trên các khoảng* $[a, c]$ *và* $[c, b]$, *và khi đó:*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
3. *Nếu* $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ *thì* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. *Suy ra nếu* $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ *thì*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
4. *Hàm* $|f|$ *khả tích và* $\int_a^b |f(x)|dx \geq |\int_a^b f(x)dx|$

Định lý (Định lý cơ bản của vi tích phân 1)

Cho f liên tục trên đoạn $[a,b]$, đặt: $F(x) = \int_a^x f(t)dt, (a \leq x \leq b)$.
Thì F liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $F'(x) = f(x)$.

Định lý (Định lý cơ bản của vi tích phân 2, Công thức Newton-Leibnitz)

Cho f liên tục trên $[a,b]$, thì:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trong đó F là một nguyên hàm bất kỳ của f, nghĩa là $F'(x) = f(x)$.

Ví dụ

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

Nguyên hàm

- F được gọi là nguyên hàm của f nếu $F' = f$.
- Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân khẳng định sự tồn tại nguyên hàm của các hàm liên tục.
- Nếu F là một nguyên hàm của f thì khi đó mọi nguyên hàm G của f đều có dạng $G(x) = F(x) + C$.
- Tập các nguyên hàm của f được ký hiệu là:

$$\int f(x)dx$$

- Nguyên hàm còn được gọi là tích phân bất định.

Một số nguyên hàm

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, với $a \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a}) + C$, $a > 0$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$, $a > 0$.

Phương pháp đổi biến

Quy tắc đổi biến cho tích phân bất định

Cho $u = g(x)$ là hàm khả vi, miền giá trị của nó là I, và f liên tục trên I. Khi đó:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Ví dụ

Tính

1. $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$
2. $\int x^5 \sqrt{1 + x^2}dx$

Quy tắc đổi biến cho tích phân xác định Giả sử g' là hàm liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên miền xác định của $u = g(x)$. Khi đó

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Ví dụ

1. $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$
2. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
3. $\int_0^{\pi/3} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

Tích phân từng phần

Từ công thức đạo hàm một tích, ta có công thức tích phân từng phần sau:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

hay

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ví dụ

Tính

1. $\int (2x-1)\cos(3x)dx$
2. $\int \ln x dx$
3. $\int e^{x^2}\sin(3x)dx$

áp dụng công thức Newton-Leipnitz ta được công thức tính tích phân từng phần xác định:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

hay

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Ví dụ

1. $\int_0^2 \arctan \frac{x}{2} dx$
2. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx$

Một số ví dụ

Ví dụ

1. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$
3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, với $x > 3$.
4. $\int_2^3 \frac{x^3+x}{x-1} dx$
5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$
6. $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} dx$
7. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$
8. $\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
9. $\int_0^\pi e^{\cos t} \sin(2t) dt$

Định nghĩa

1. Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ thì:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

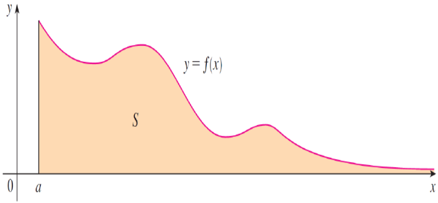
   trong trường hợp giới hạn tồn tại (hữu hạn).

2. Nếu $\int_t^b$ tồn tại với mọi $t \leq b$ thì:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

   trong trường hợp giới hạn tồn tại (hữu hạn).

Các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ được gọi là hội tụ nếu giới hạn nói trên tồn tại và hữu hạn. Ngược lại, ta nói nó phân kỳ.



Định nghĩa

Nếu các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ đều hội tụ, ta định nghĩa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Ví dụ

Tính các tích phân sau:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$
3. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} dx$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} dx$
7. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$

Mệnh đề

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ *hội tụ nếu* $p > 1$ *và phân kỳ nếu* $p \leq 1$.

Định nghĩa

1. Nếu f liên tục trên $[a, b)$ và $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ thì:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

trong trường hợp giới hạn tồn tại.

2. Nếu f liên tục trên $(a, b]$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ thì:

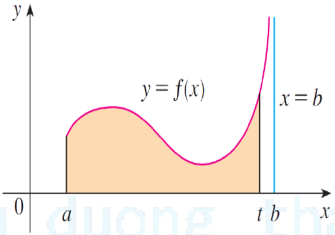
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

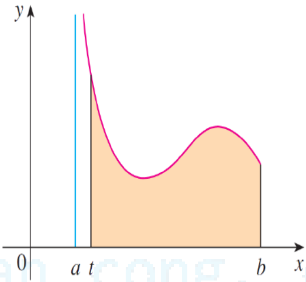
trong trường hợp giới hạn tồn tại.

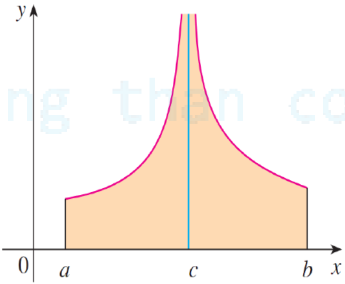
3. Nếu $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, $a < c < b$, và cả hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ đều hội tụ, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Các tích phân suy rộng nói trên được gọi là hội tụ nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn. Ngược lại, ta nói nó phân kỳ.


y
y = f(x)
x = b
0
a
t
b
x


y
0
a
t
b
x


y
0
a
c
b
x

Ví dụ

Tính các tích phân

1. $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$;
3. $\int_0^1 \ln x dx$.
4. $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$
5. Với giá trị nào của p thì tích phân sau hội tụ?

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ hội tụ nếu $p < 1$ và phân kỳ nếu $p \geq 1$.

Mệnh đề (Tiêu chuẩn trị tuyệt đối)

1. *Cho f khả tích trên mọi khoảng* $[a,x]$, $x > a$. *Nếu* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*
2. *Cho f khả tích trên mọi khoảng* $[a,x]$, $x > a$. *Nếu* $\int_a^{b} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{b} f(x)dx$ *hội tụ.*

Mệnh đề (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho f, g *là các hàm số dương thỏa* $f(x) \leq g(x)$

1. *Nếu* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Nếu* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*
2. *Nếu* $\int_a^{b} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{b} f(x)dx$ *hội tụ. Nếu* $\int_a^{b} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int_a^{b} g(x)dx$ *phân kỳ.*

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+1} dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sin^2 x} dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x} dx$

Mệnh đề

Cho f và g là các hàm số dương.

1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in (0, +\infty)$, *thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*
2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \in (0, +\infty)$, *thì* $\int_a^b f(x)dx$ *và* $\int_a^b g(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\ln x+1}{x^5+3x^2+3}dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+2x-1}{x^4+x^3+\sqrt{x}+2}dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2(2+x)}}dx$
4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$