GV LÊ VĂN HỢP

CHƯƠNG II

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

I. TẬP HỢP:

1.1/ KHÁI NIỆM:

Tập hợp là một bộ sưu tập các phần tử *có chung một số tính chất nào đó.*
Ta thường ký hiệu các tập hợp là A, B, C, … và ký hiệu các phần tử là a, b, c, ... Nếu phần tử a thuộc về tập hợp A, ta viết $a \in A$. Nếu phần tử b không thuộc về tập hợp A, ta viết $b \notin A$.
Khái niệm " *tập hợp tất cả các tập hợp*" là vô nghĩa (không thể có $A \in A$).

Ví dụ:

a) Tập hợp các sinh viên năm thứ nhất khoa Công nghệ thông tin trường Đại học Khoa học tự nhiên TP Hồ Chí Minh (4 tính chất chung).
b) Tập hợp các môn học của ngành Sử học trường Đại học Khoa học xã hội & nhân văn Hà Nội (3 tính chất chung).

1.2/ CÁC TẬP HỢP SỐ:

Tập hợp *các số nguyên tự nhiên* $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$
(với các phép toán + và ×)
Tập hợp *các số nguyên* $\mathbf{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$
(với các phép toán +, − và ×)
Tập hợp *các số hữu tỉ* $\mathbf{Q} = \{ \ldots, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{4}, -6, 0, \frac{2}{3}, 9, \frac{8}{7}, \ldots \}$
(với các phép toán +, − , × và :)
Tập hợp *các số thực*
$\mathbf{R} = \{$ các số hữu tỉ, các số vô tỉ ($\pm\sqrt{2}, \pm\pi, \pm \ln 3, \pm \sin 1, \pm e, \pm\sqrt[3]{5}, \ldots$) $\}$
(với các phép toán +, − , ×, : và rút căn chưa hoàn chỉnh)
Tập hợp *các số phức* $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$ (với các phép toán +, − , ×, : và rút căn hoàn chỉnh).

1.3/ LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP: Cho tập hợp X .

Ký hiệu $|X|$ là *số phần tử* (hay *lực lượng*) của tập hợp X.
Nếu X là tập hợp *hữu hạn* có n phần tử ($n \in \mathbf{N}$) thì ta ghi $|X| = n$.
Nếu X là tập hợp *vô hạn* (có vô số phần tử) thì ta ghi $|X| = +\infty$.

Ví dụ:

a) Các tập hợp số **N**, **Z**, **Q**, **R** và **C** đều là các tập hợp vô hạn.
b) Đặt X là tập hợp các ngày trong tháng 1 năm 2000 và Y là tập hợp những người nhập cảnh vào Việt Nam trong ngày 01 tháng 01 năm 2000.
Ta có X và Y đều là các tập hợp hữu hạn với $|X| = 31$ nhưng không biết được $|Y|$ nếu chưa tra cứu hồ sơ.

1.4/ <u>BIỂU DIỄN TẬP HỢP:</u> Có 3 cách biểu diễn tập hợp

a) *Giản đồ Venn*: vẽ một đường cong khép kín trên mặt phẳng. Các phần tử của tập hợp được vẽ phía trong đường cong. Các phần tử khác (nếu có) được vẽ phía ngoài đường cong.

b) *Liệt kê*: giữa hai dấu { và }, mỗi phần tử được viết ra đúng một lần (theo thứ tự tùy ý) và có dấu phẩy ngăn cách giữa hai phần tử liên tiếp.
Chẳng hạn $A = \{ a, b, c, d, e \} = \{ c, a, d, b, e \} = \{ e, a, d, c, b \} = \ldots$

c) *Nêu các tính chất chung*:
$A = \{ x \mid p(x) \}$ hay $B = \{ x \in C \mid q(x) \}$
($p(x)$ và $q(x)$ là các vị từ theo biến x dùng để mô tả các tính chất của x).
Chẳng hạn $A = \{$ cầu thủ $x \mid x$ đã đoạt giải thưởng quả bóng vàng FIFA $\}$
$B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid -75 < x \leq 100$ và $x \vdots 9 \} = \{ -72, -63, -54, \ldots, 81, 90, 99 \}$

1.5/ <u>TẬP HỢP TRỐNG:</u>

Ta ký hiệu $\varnothing$ là tập hợp *trống*, nghĩa là tập hợp không có phần tử nào cả.
Chẳng hạn $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid 3x^2 - 8x + 11 = 0 \} = \varnothing$ và
$B = \{$ những người Việt nam đã đoạt giải Nobel kinh tế $\} = \varnothing$.

1.6/ <u>TẬP HỢP CON:</u> Cho các tập hợp A và B.

a) Ta nói A là *một tập hợp con* của B (A *chứa trong* B, B *chứa* A) nếu "$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$". Lúc đó ta ký hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

b) Suy ra $A \not\subset B$ (A *không phải là một tập hợp con* của B, A *không chứa trong* B, B *không chứa* A) nếu "$\exists x_o , (x_o \in A$ và $x_o \notin B)$".

<u>Ví dụ:</u>

Cho $A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \vdots 2 \}$, $B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \vdots 3 \}$ và $C = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \vdots 4 \}$.
Ta có $C \subset A$ ($\forall x, x \in C \Rightarrow x = 4r$ với $r \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 2s$ với $s = 2r \in \mathbf{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \vdots 2 \Rightarrow x \in A$) và $C \not\subset B$ ($\exists 4 \in C$ và $4 \notin B$).

1.7/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các tập hợp A, B và C. Khi đó

a) $\varnothing \subset A \subset A$ b) $(A \subset B) \Rightarrow (| A | \leq | B |)$

c) ($A \subset B$ và $B \subset C$) $\Rightarrow$ ($A \subset C$) (tính truyền của quan hệ $\subset$).

1.8/ <u>TẬP HỢP BẰNG NHAU:</u> Cho các tập hợp A và B.

a) Ta nói $A = B$ nếu ($A \subset B$ và $B \subset A$).

b) Suy ra $A = B \Leftrightarrow$ "$\forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$".

c) Suy ra $A \neq B \Leftrightarrow$ ($A \not\subset B$ hay $B \not\subset A$).

<u>Ví dụ:</u>

a) $A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \vdots 4$ và $x \vdots 6 \}$ và $B = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \vdots 12 \}$. Chứng minh $A = B$.
$\forall x, x \in A \Rightarrow x = 4r = 6s$ với $r, s \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2r = 3s \Rightarrow s = 2t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 6(2t) = 12t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in B$. Vậy $A \subset B$.
$\forall x, x \in B \Rightarrow x = 12t$ với $t \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = 4r = 6s$ với $r = 3t \in \mathbf{Z}$ và $s = 2t \in \mathbf{Z}$
$\Rightarrow x \in A$. Vậy $B \subset A$.
Do $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

b) C = { các hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau }
D = { các hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau }
E = { các hình thoi có góc vuông }
F = { các hình thoi có hai đường chéo bằng nhau } và G = { các hình vuông }
Ta có C = D = E = F vì C, D, E, F đều bằng G.

1.9/ TẬP HỢP CÁC TẬP CON: Cho tập hợp E.

Đặt $\wp(E)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của E, nghĩa là
$\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \} = \{ \varnothing, \{a\}, \ldots, \{a, b\}, \ldots, \{a, b, c\}, \ldots, E \}$
(liệt kê các tập hợp con có số phần tử tăng dần lên)

1.10/ MỆNH ĐỀ:

a) Nếu $| E | = n \geq 0$ thì $| \wp(E) | = 2^n$.
b) Nếu $| E | = +\infty$ thì $| \wp(E) | = +\infty$.

Chứng minh:

a) Ta chứng minh kết quả này bằng *phương pháp qui nạp* theo $n \geq 0$.
Khi $| E | = n = 0$ thì $E = \varnothing$ nên $\wp(E) = \{ \varnothing \}$ và $| \wp(E) | = 1 = 2^0$.
Vậy mệnh đề đúng khi $n = 0$.
Xét $k \geq 0$ tùy ý và giả sử các tập hợp có k phần tử đều có 2^k tập hợp con. Xét $| E | = k + 1$. Viết $E = F \cup \{ e \}$ với $e \in E$ và $F = E \setminus \{ e \}$.
Ta có $| F | = k$ nên $| \wp(F) | = 2^k$. Đặt $\prod = \{ A \cup \{ e \} \mid A \in \wp(F) \}$ thì $\wp(E) = \wp(F) \cup \prod$, $\wp(F) \cap \prod = \varnothing$ và $| \prod | = | \wp(F) | = 2^k$. Suy ra $| \wp(E) | = | \wp(F) | + | \prod | = | \wp(F) | + | \wp(F) | = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$, nghĩa là mệnh đề cũng đúng khi $n = k + 1$.
Vậy mệnh đề đúng $\forall n \geq 0$.

b) Đặt $\Delta = \{ \{a\} \mid a \in E \}$ thì $\Delta \subset \wp(E)$ và $| \Delta | = +\infty$ nên $| \wp(E) | = +\infty$.

Ví dụ:
Nếu $| E | = 1$ thì $E = \{ a \}$ và $\wp(E) = \{ \varnothing, E \}$ có $| \wp(E) | = 2 = 2^1$.
Nếu $| E | = 2$ thì $E = \{ a, b \}$ và $\wp(E) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, E \}$ có $| \wp(E) | = 4 = 2^2$.
Nếu $| E | = 3$ thì $E = \{ a, b, c \}$ và
$\wp(E) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{c\}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, E \}$ có $| \wp(E) | = 8 = 2^3$.

II. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP:

Cho các tập hợp A, B, C $\subset$ E (ta nói E là *tập hợp vũ trụ*).

2.1/ PHẦN BÙ:

a) Đặt $\overline{A} = \{ x \in E \mid x \notin A \}$ thì $\overline{A}$ được gọi là *phần bù* của A (trong E).
b) $\overline{\varnothing} = E$, $\overline{E} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$ (luật *bù kép*).
c) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$; $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-\infty, 1]$ và $B = (-5, +\infty)$.
Ta có $\overline{A} = (1, +\infty)$ và $\overline{B} = (-\infty, -5]$.

2.2/ PHẦN GIAO:

a) Đặt $A \cap B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ và } x \in B \}$ là *phần giao* của A và B.

Ta có $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ hay } x \notin B)$

b) $(A \cap B) \subset A$ và $(A \cap B) \subset B$. Hơn nữa $(A \cap B) = A \Leftrightarrow A \subset B$.

c) Phép $\cap$ *giao hoán và kết hợp*, nghĩa là

$B \cap A = A \cap B$ và $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

d) $A \cap A = A$ (luật *lũy đẳng*), $A \cap E = A$ (luật *trung hòa*),

$A \cap \varnothing = \varnothing$ (luật *thống trị*), $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (luật *bù*).

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = [-2, 7)$ và $B = (1, 8]$. Ta có $A \cap B = (1, 7)$.

2.3/ PHẦN HỘI:

a) Đặt $A \cup B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ hay } x \in B \}$ là *phần hội* của A và B.

Ta có $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ hay } x \in B)$

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ và } x \notin B)$

b) $(A \cup B) \supset A$ và $(A \cup B) \supset B$. Hơn nữa $(A \cup B) = A \Leftrightarrow A \supset B$.

c) Phép $\cup$ *giao hoán và kết hợp*, nghĩa là

$B \cup A = A \cup B$ và $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

d) $A \cup A = A$ (luật *lũy đẳng*), $A \cup \varnothing = A$ (luật *trung hòa*),

$A \cup E = E$ (luật *thống trị*), $A \cup \overline{A} = E$ (luật *bù*).

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-4, 5)$ và $B = [0, 7]$. Ta có $A \cup B = (-4, 7]$.

2.4/ PHẦN HIỆU:

a) Đặt $A \setminus B = \{ x \in E \mid x \in A \text{ và } x \notin B \}$ là *phần hiệu* của A và B.

Ta có $x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \notin B)$

$x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ hay } x \in B)$

b) $(A \setminus B) \subset A$. Hơn nữa $(A \setminus B) = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

c) Phép $\setminus$ *không giao hoán* và *không kết hợp*, nghĩa là có thể xảy ra

$(B \setminus A) \neq (A \setminus B)$ và $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

d) $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$,

$A \setminus E = \varnothing$, $E \setminus A = \overline{A}$, $A \setminus \overline{A} = A$, $\overline{A} \setminus A = \overline{A}$.

Ví dụ: Cho $E = \mathbf{R}$, $A = (-\infty, -3)$ và $B = [-10, +\infty)$.

Ta có $A \setminus B = (-\infty, -10)$ và $B \setminus A = [-3, +\infty)$.

2.5/ CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN GIỮA CÁC PHÉP TOÁN:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ và $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (luật *bù DE MORGAN*).

b) $A \cap (A \cup B) = A$ và $A \cup (A \cap B) = A$ (luật *hấp thu*)

c) Phép $\cap$ và $\cup$ *phân phối lẫn nhau*, nghĩa là

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (xóa phép $\setminus$).

2.6/ ÁP DỤNG:

Các tính chất của các phép toán tập hợp dùng để

– *Rút gọn* một biểu thức tập hợp.

– Chứng minh *một đẳng thức* tập hợp.

– Chứng minh *một bao hàm thức* tập hợp.

Ví dụ: Cho các tập hợp $A, B, C \subset E$.

a) Rút gọn $(A \cup B) \setminus [\,(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,]$.

Ta có $(A \cup B) \setminus [\,(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,] = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} =$

$= (A \cup B) \cap \overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$

$= [\,(A \cap \overline{A}) \cup B\,] \cap (\overline{B} \cup A) = (\varnothing \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) =$

$= (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) = \varnothing \cup (B \cap A) = (B \cap A)$

b) Chứng minh $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Ta có $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{A \cap C} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) =$

$= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) =$

$= (\varnothing \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap (B \setminus C)$

c) Chứng minh $[\,(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)\,] \subset (A \setminus C)$ và không có dấu đẳng thức.

Ta có $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = (B \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{A}} = (B \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$

$= (B \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup A) = (B \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) =$

$= (B \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) = (\varnothing \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C} \cap A) =$

$= \varnothing \cup (B \cap \overline{C} \cap A) = (B \cap \overline{C} \cap A) \subset (\overline{C} \cap A) = (A \cap \overline{C}) = (A \setminus C)$

Chọn $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$ và $C = \varnothing$ thì $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) = B \neq (A \setminus C) = A$

III. TÍCH DESCARTES CỦA CÁC TẬP HỢP:

Cho số nguyên $n \geq 2$ và các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều $\neq \varnothing$.

3.1/ ĐỊNH NGHĨA:

$\forall a_j \in A_j \ (1 \leq j \leq n)$, ta có bộ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ được ghép *một cách hình thức.*

Đặt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_j \in A_j \ (1 \leq j \leq n) \,\}$.

Ta nói $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j$ là *tích Descartes* của $A_1, A_2, \ldots$ và A_n.

Khi $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ thì ta viết gọn

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \,\}$.

Ví dụ:

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Q} = \{\, (k, q) \mid k \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Q} \,\} = \{\, (5, \frac{-2}{7}), (0, 9), (-4, \frac{8}{3}), \ldots \,\}$

$\mathbf{R} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{N} \times \mathbf{Z} = \{\, (x, q, m, k) \mid x \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{Q}, m \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z} \,\}$

$= \{\, (\sqrt{2}, \frac{1}{4}, 6, -1), (-\ln 3, \frac{-9}{5}, 0, 7), (\pi, -8, 11, 0), \ldots \,\}$

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{\, (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R} \,\}$ = Tập hợp các điểm trên mặt phẳng (Oxy)

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 = \{\, (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \,\}$

= Tập hợp các điểm trong không gian (Oxyz)

3.2/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* $A, A_1, A_2, \ldots$ và A_n. Khi đó

a) $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| . |A_2| \ldots |A_n|$

b) Suy ra $|A^n| = |A|^n$.

Ví dụ: Cho $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ và $C = \{\alpha, \beta\}$. Khi đó

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$ và $|A \times B| = 6 = |A|.|B| = 2 \times 3$

$A \times B \times C = \{(a,1,\alpha), (a,2,\alpha), (a,3,\alpha), (b,1,\alpha), (b,2,\alpha), (b,3,\alpha), (a,1,\beta), (a,2,\beta),$
$(a,3,\beta), (b,1,\beta), (b,2,\beta), (b,3,\beta)\}$ và $|A \times B \times C| = 12 = |A|.|B|.|C| = 2 \times 3 \times 2$

$A^2 = A \times A = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$ và $|A^2| = 4 = |A|^2 = 2^2$

$A^3 = A^2 \times A = \{(a,a,a), (a,b,a), (b,a,a), (b,b,a), (a,a,b), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,b)\}$ và
$|A^3| = 8 = |A|^3 = 2^3$

IV. ÁNH XẠ:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho các tập hợp X và Y với $X \neq \varnothing \neq Y$.

a) Một *ánh xạ* f từ X vào Y là một qui tắc như sau:

Với mỗi $x \in X$, *có tương ứng duy nhất* $y_x \in Y$ ($\forall x \in X, \exists!\, y_x \in Y$).

Ký hiệu ánh xạ f là $f : X \dashrightarrow Y$ trong đó

$x \mapsto y_x = f(x)$

$y_x = f(x)$ gọi là *ảnh của x qua ánh xạ f* hay là *giá trị của ánh xạ f tại x*.

X là *miền xác định* của ánh xạ f. Y là *miền* (*chứa các*) *ảnh* của ánh xạ f.

b) Khi $X, Y \subset \mathbf{R}$, ta thường gọi ánh xạ f là *hàm số* $y = f(x)$.

Ví dụ:

a) $f : X = \{a, b, c, d\} \to Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ và $f(d) = 2$. Ta có f là một ánh xạ.

b) $g : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = (0, +\infty)$ có $g(x) = \dfrac{2^x}{|x-1|}$ $\forall x \in X$.

Ta có g là một hàm số.

c) $h : X = \mathbf{R} \to Y = [1, +\infty)$ thỏa $h(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$ $\forall x \in X$.

Ta có h không phải là một hàm số vì $\exists 1 \in X$, $h(1)$ không xác định (hoặc nói $\exists 0 \in X$, $h(0) = \ln 2 \notin Y$).

d) $u : X = \mathbf{Q} \to Y = \mathbf{Z}$ có $u(\frac{p}{q}) = p + q$ $\forall x = \frac{p}{q} \in X$. Ta có h không phải là một hàm số vì $\exists x = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \in X$ mà $h(x) = 1 + 2 = 3$ và $h(x) = 2 + 4 = 6$: mâu thuẫn.

4.2/ ÁNH XẠ ĐỒNG NHẤT: Cho tập hợp $X \neq \varnothing$.

Ánh xạ $Id_X : X \to X$ gọi là *ánh xạ đồng nhất* trên X (Id = Identity).

$x \mapsto x$

4.3/ SO SÁNH ÁNH XẠ: Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : X \to Y$.

a) Ta nói $f = g$ nếu $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

b) Suy ra $f \neq g \Leftrightarrow \exists x_o \in X, f(x_o) \neq g(x_o)$.

Ví dụ: Cho f, g, h : X = **R** → Y = **R** thỏa f (x) = sinx, g(x) = | sin | x | | và

$h(x) = \cos(x + \frac{7\pi}{2})$ ∀x ∈ X. Ta có g ≠ f và h = f vì

$\exists(-\frac{\pi}{2}) \in X, g(-\frac{\pi}{2}) = |\sin|-\frac{\pi}{2}|| = 1 \neq f(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1.$

$\forall x \in X, h(x) = \cos(x + \frac{7\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = f(x).$

4.4/ <u>TÍCH CÁC ÁNH XẠ:</u> Cho f : X → Y và g : Z → T với Y ⊂ Z .

a) Lập ánh xạ h : X → T có h(x) = g[f (x)] ∀x ∈ X. Ta nói h là *ánh xạ tích* của f và g và ký hiệu $h = g_o f$.
Như vậy, ∀x ∈ X, $h(x) = (g_o f)(x) = g[f(x)]$.

b) Tích ánh *xạ có tính kết hợp* nên ta có thể lập *tích của nhiều ánh xạ liên tiếp* nếu miền ảnh của ánh xạ trước *chứa trong* miền xác định của ánh xạ đi sau.

Ví dụ: Cho f : X = **R** → Y = (8, + ∞) thỏa $f(x) = 3e^x + 8$ ∀x ∈ X,
g : Z = [0, + ∞) → T = [−2, + ∞) thỏa $g(x) = \sqrt{x} - 2$ ∀x ∈ Z
và h : U = (– 5, + ∞) → V = **R** thỏa $h(x) = x^4 + 1$ ∀x ∈ X.
Ta có Y ⊂ Z và T ⊂ U nên có các ánh xạ tích $u = g_o f$ và $v = h_o g_o f$.

$\forall x \in X, u(x) = (g_o f)(x) = g[f(x)] = g(3e^x + 8) = \sqrt{3e^x+8} - 2$ và

$v(x) = (h_o u)(x) = h[u(x)] = h(\sqrt{3e^x+8} - 2) = (\sqrt{3e^x+8} - 2)^4 + 1$

4.5/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho f : X → Y . Khi đó

a) $(Id_Y)_o f = f = f_o Id_X$. Hơn nữa nếu X = Y thì $(Id_X)_o f = f = f_o Id_X$.

b) Nếu X ≠ Y và g : Y → X thì tồn tại $g_o f$ và $f_o g$ nhưng $g_o f \neq f_o g$.

c) Nếu f : X → X và g : X → X thì tồn tại $g_o f$ và $f_o g$ nhưng có thể xảy ra $g_o f \neq f_o g$. Như vậy tích ánh xạ *không giao hoán*.

Ví dụ:

a) f : X = **R** → Y = [0, + ∞) thỏa $f(x) = (x + 1)^2$ ∀x ∈ X và
g : Y = [0, + ∞) → X = **R** với $g(x) = \sin\sqrt{x}$ ∀x ∈ Y.

$\forall x \in X, (g_o f)(x) = g[f(x)] = g[(x+1)^2] = \sin\sqrt{(x+1)^2} = \sin|x+1|$

$\forall x \in Y. (f_o g)(x) = f[g(x)] = f(\sin\sqrt{x}) = (\sin\sqrt{x} + 1)^2$

Do X ≠ Y nên $g_o f \neq f_o g$.

b) u : X = **R** → X thỏa $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$ và $v(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ ∀x ∈ X.

$$\forall x \in X, (v_o u)(x) = v[u(x)] = \frac{3(2x^2-5x+1)+2}{(2x^2-5x+1)^2+1} = \frac{6x^2-15x+5}{4x^4-20x^3+29x^2-10x+2}$$

$$\text{và } (u_o v)(x) = u[v(x)] = 2(\frac{3x+2}{x^2+1})^2 - 5(\frac{3x+2}{x^2+1}) + 1 = \frac{x^4-15x^3+10x^2+9x-1}{x^4+2x^2+1}$$

Do $\exists 0 \in X, (v_o u)(0) = \frac{5}{2} \neq (u_o v)(0) = -1$ nên $v_o u \neq u_o v$.

V. ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CỦA TẬP HỢP QUA ÁNH XẠ:

5.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f : X \to Y$ và $A \subset X$.

a) Đặt $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset Y$. Ta nói $f(A)$ là *ảnh của* A *qua ánh xạ* f
$\forall y \in Y$, $[\, y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)\,]$ và $[\, y \notin f(A) \Leftrightarrow \forall x \in A, y \neq f(x)\,]$

b) Khi $A = \varnothing$ thì $f(\varnothing) = \varnothing$. Khi $A = X$ thì $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$.
Ta nói $f(X)$ là *tập hợp tất cả các ảnh của* f và ký hiệu $f(X) = \mathrm{Im}(f)$
(Images of f) .

c) Cho $f : X \to Y$ và $g : Z \to T$. Để lập được ánh xạ tích $h = g \circ f : X \to T$,
ta *chỉ cần có điều kiện* $f(X) \subset Z$ (không cần điều kiện đặc biệt $Y \subset Z$).

Ví dụ:

a) $f : X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \} \to Y = \{ a, b, c, d, e, u, v, w, z \}$ có $f(1) = a$,
$f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = c$, $f(5) = b$, $f(6) = d$ và $f(7) = e$.
Với $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} \subset X$ thì $f(A) = \{ a, b, c \} \subset Y$ và
$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ a, b, c, d, e \} \subset Y$.

b) $g : X = \mathbf{R} \to Y = (0, +\infty)$ thỏa $g(x) = x^2 - 2x + 3$ $\forall x \in X$. Tìm $g(A)$, $g(B)$,
$g(C)$ và $\mathrm{Im}(g) = g(X)$ nếu $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$, $B = [\, 3, 5)$ và
$C = [\, -2, 3\,]$. Ta có $g(A) = \{ 2, 3, 6, 11 \}$ vì $g(-2) = 11$, $g(-1) = g(3) = 6$,
$g(0) = g(2) = 3$ và $g(1) = 2$. Do $g'(x) = 2(x - 1)$ $\forall x \in X$ nên g tăng trên
$(-\infty, 1]$ và giảm trên $[\, 1, +\infty)$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$,
ta có $g(B) = [\, 6, 18\,]$, $g(C) = [\, 2, 11\,]$ và $g(X) = [\, 2, +\infty)$.

5.2/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $f : X \to Y$ và $B \subset Y$.

a) Đặt $f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X$.
Ta nói $f^{-1}(B)$ là *ảnh ngược của* B *bởi ánh xạ* f .
$\forall x \in X$, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$
$x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \notin B$

b) Khi $B = \varnothing$ thì $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$. Khi $B = Y$ thì $f^{-1}(Y) = X$.
Khi $B = \{ b \}$ thì $f^{-1}(B) = f^{-1}(b) = \{ x \in X \mid f(x) = b \}$ là *tập hợp các nghiệm trên* X *của phương trình* $f(x) = b$ (ẩn là $x \in X$).
Ta cũng nói $f^{-1}(b)$ là *tập hợp tất cả các ảnh ngược của* b *bởi ánh xạ* f .

Ví dụ:

a) $f : X = \{ a, b, c, d, e, u, v, w, z \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ với $f(a) = 1$,
$f(b) = 2$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$, $f(e) = 2$, $f(u) = 4$, $f(v) = 1$, $f(w) = 5$ và $f(z) = 7$.
Ta có $f^{-1}(1) = \{ a, c, v \}$, $f^{-1}(2) = \{ b, e \}$, $f^{-1}(3) = \{d\}$ và $f^{-1}(6) = f^{-1}(8) = \varnothing$
Với $B = \{ 1, 2, 3, 6, 8 \} \subset Y$ thì $f^{-1}(B) = \{ a, b, c, d, e, v \} \subset X$ và $f^{-1}(Y) = X$

b) $g : X = \mathbf{R} \to Y = [-3, +\infty)$ thỏa $g(x) = 2x^2 - 1$ $\forall x \in X$. Tìm $g^{-1}(A)$, $g^{-1}(B)$,
$g^{-1}(C)$, $g^{-1}(D)$ nếu $A = \{ -5, -1, 0, 8 \}$, $B = (-\infty, -2\,]$, $C = (-4, 5)$, $D = [\, 1, 6)$.
Ta có $g^{-1}(-5) = \varnothing$, $g^{-1}(-1) = \{ 0 \}$, $g^{-1}(0) = \{ \pm 1/\sqrt{2} \}$ và $g^{-1}(8) = \{ \pm 3/\sqrt{2} \}$
nên $g^{-1}(A) = \{ 0, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2} \}$.
Để ý $g^{-1}(1) = \{ \pm 1 \}$, $g^{-1}(5) = \{ \pm\sqrt{3} \}$, $g^{-1}(6) = \{ \pm\sqrt{7/2} \}$ và $g'(x) = 4x$ $\forall x \in X$
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, ta tìm được
$g^{-1}(B) = \varnothing$, $g^{-1}(C) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ và $g^{-1}(D) = (-\sqrt{7/2}, -1] \cup [\, 1, \sqrt{7/2})$.

5.3/ TÍNH CHẤT: Cho $f : X \to Y$ với $A, A' \subset X$ và $B, B' \subset Y$. Khi đó

a) Nếu $A \subset A'$ thì $f(A) \subset f(A')$. Nếu $B \subset B'$ thì $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

b) $f^{-1}[f(A)] \supset A$ và $f[f^{-1}(B)] \subset B$.

c) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$, $f(A \cap A') \subset [f(A) \cap f(A')]$ và $f(A \setminus A') \supset f(A) \setminus f(A')$.

d) $f^{-1}(A \cup A') = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A')$, $f^{-1}(A \cap A') = [f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A')]$ và $f^{-1}(A \setminus A') = [f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(A')]$.

Ví dụ: Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = (-2, +\infty)$ thỏa $f(x) = x^2 \quad \forall x \in X$.

a) $A = \{1\} \subset X$ có $f(A) = \{1\}$ và $f^{-1}[f(A)] = \{\pm 1\} \supset A$ với $f^{-1}[f(A)] \neq A$.

b) $B = \{\pm 1\} \subset Y$ có $f^{-1}(B) = \{1\}$ và $f[f^{-1}(B)] = \{1\} \subset B$ với $f[f^{-1}(B)] \neq B$.

c) $A = \{1\}, A' = \{-1\} \subset X$ có $A \cap A' = \varnothing$ và $f(A) = f(A') = \{1\}$ nên $f(A \cap A') = \varnothing \subset [f(A) \cap f(A')] = \{1\}$ và $f(A \cap A') \neq [f(A) \cap f(A')]$.
Mặt khác $A \setminus A' = \{1\}$ nên $f(A \setminus A') = \{1\} \supset [f(A) \setminus f(A')] = \varnothing$ và $f(A \setminus A') \neq [f(A) \setminus f(A')]$.

VI. PHÂN LOẠI ÁNH XẠ:

6.1/ ĐƠN ÁNH: Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *đơn ánh* nếu " $\forall x, x' \in X,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ".

b) Suy ra : f là *đơn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\forall x, x' \in X,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ".
$\Leftrightarrow$ " $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ có *không quá một nghiệm* trên X "

Ví dụ:

a) $u : X = \{1, 2, 3\} \to Y = \{a, b, c, d, e\}$ với $u(1) = a, u(2) = b$ và $u(3) = c$.
Ta có u là một đơn ánh vì
Cách 1: $1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$ có $u(1) \neq u(2) \neq u(3) \neq u(1)$.
Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a, u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm duy nhất lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ trên X. Các phương trình $u(x) = d$ và $u(x) = e$ đều vô nghiệm trên X. Như vậy mỗi phương trình trên có không quá một nghiệm trên X.

b) $f : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = \dfrac{5-2x}{x-1} = -2 + \dfrac{3}{x-1} \quad \forall x \in X$.

Ta có f là một đơn ánh vì

Cách 1: $\forall x, x' \in X,\ x \neq x' \Rightarrow 0 \neq x - 1 \neq x' - 1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} \neq \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 + \dfrac{3}{x-1} \neq -2 + \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Cách 2: $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow -2 + \dfrac{3}{x-1} = -2 + \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{x'-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = x' - 1 \Rightarrow x = x'$.

Cách 3: $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y \Rightarrow \dfrac{3}{x-1} = y + 2$ (*).

Nếu $y = -2$ thì phương trình (*) vô nghiệm trên X.

Nếu $y \neq -2$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1 + \dfrac{3}{y+2} \in X$.

Như vậy, $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ có không quá một nghiệm trên X.

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = 2e^x - 3e^{-x}$ $\forall x \in X$.

Ta có $g'(x) = 2e^x + 3e^{-x} > 0$ $\forall x \in X$ nên g tăng ngặt trên X [$\forall x, x' \in X$, $x < x' \Rightarrow g(x) < g(x')$] , nghĩa là g đơn ánh.

d) Cho $h : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $h(x) = 4\cos^2 x - 5x$ $\forall x \in X$.

Ta có $h'(x) = -4\sin 2x - 5 \le -1 < 0$ $\forall x \in X$ nên h giảm ngặt trên X [$\forall x, x' \in X, x < x' \Rightarrow h(x) > h(x')$] , nghĩa là h là một đơn ánh.

6.2/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f *không là đơn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists x, x' \in X$, $x \ne x'$ và $f(x) = f(x')$ ".

b) f *không là đơn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có hơn một nghiệm* trên X ".

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{a, b, c, d\} \to Y = \{1, 2, 3\}$ với $u(a) = 1, u(b) = u(d) = 2$ và $u(c) = 3$. Ta có u không phải là một đơn ánh vì

Cách 1 : $\exists b, d \in X, b \ne d$ và $u(b) = u(d) = 2$.

Cách 2 : $\exists 2 \in Y$, phương trình $u(x) = 2$ có các nghiệm $x = b, x = d$ trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ $\forall x \in X$.

Ta có f không phải là một đơn ánh vì

Cách 1: $\exists 0, 3 \in X, 0 \ne 3$ và $f(0) = f(3) = 1$.

Cách 2: $\exists 1 \in Y$, phương trình $f(x) = 1$ có các nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$ trên X

6.3/ <u>TOÀN ÁNH:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$.

b) Suy ra :

f là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm* trên X "

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ 1, 2, 3, 4 \} \to Y = \{ a, b, c \}$ với $u(1) = a, u(3) = u(4) = c$ và $u(2) = b$. Ta có u là một toàn ánh vì

Cách 1 : $u(X) = \{ a, b, c \} = Y$.

Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a, u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$ trên X.

b) $f : X = \mathbf{R} \to Y = [5, +\infty)$ thỏa $f(x) = x^2 - 4x + 9$ $\forall x \in X$.

Ta có f là một toàn ánh vì

Cách 1: dùng bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thấy $f(X) = Y$.

Cách 2: $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y - 5$ có nghiệm trên X là $x = 2 + \sqrt{y-5}$.

6.4/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f không là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ $f(X) \ne Y$

b) f không là *toàn ánh* $\Leftrightarrow$ " $\exists y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *vô nghiệm* trên X

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ a, b, c \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ với $u(a) = 1, u(b) = 2$ và $u(c) = 3$.

Ta có u không phải là một toàn ánh vì

Cách 1 : $u(X) = \{ 1, 2, 3 \} \neq Y$.

Cách 2 : $\exists 4 \in Y$, phương trình $u(x) = 4$ vô nghiệm trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = (-1, +\infty)$ thỏa $f(x) = 3.2^x + 1 \ \forall x \in X$.

Ta có f không là một toàn ánh vì

Cách 1: $\forall x \in X, f(x) = 3.2^x + 1 > 1$ nên $f(X) \subset (1, +\infty)$ và do đó $f(X) \neq Y$.

Cách 2: $\exists 0 \in Y$, phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3.2^x = -1$ vô nghiệm trên X.

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \setminus \{2\} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = \dfrac{3x+4}{x-2} = 3 + \dfrac{10}{x-2} \ \forall x \in X$.

Ta có g không là một toàn ánh vì

Cách 1: dùng bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$, ta thấy $g(X) = \mathbf{R} \setminus \{3\} \neq Y$.

Cách 2: $\exists 3 \in Y$, phương trình $g(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{10}{x-2} = 0$ vô nghiệm trên X.

6.5/ <u>SONG ÁNH:</u> Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

a) f là *song ánh* nếu f là *đơn ánh* và *toàn ánh*.

b) Suy ra : f là *song ánh* $\Leftrightarrow$ " $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* trên X " (chỉ dùng khi giải được phương trình $f(x) = y$ trên X).

c) Suy ra : f *không là song ánh* $\Leftrightarrow$ f *không đơn ánh* hay f *không toàn ánh*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $u : X = \{ 1, 2, 3 \} \to Y = \{ a, b, c \}$ với $u(1) = a, u(2) = b$ và $u(3) = c$.

Ta có u là một song ánh vì

Cách 1 : u đơn ánh [$1 \neq 2 \neq 3 \neq 1$ cho $u(1) \neq u(2) \neq u(3) \neq u(1)$] và
u toàn ánh [$u(X) = \{a, b, c\} = Y$].

Cách 2 : Các phương trình $u(x) = a, u(x) = b$ và $u(x) = c$ đều có nghiệm duy nhất (lần lượt là $x = 1, x = 2$ và $x = 3$) trên X.

b) Cho $f : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = 2\sin x - 3x \ \forall x \in X$.

f là đơn ánh vì $f'(x) = 2\cos x - 3 \leq -1 < 0 \ \forall x \in X$ và f giảm ngặt trên X.

f là toàn ánh do từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta có $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Vậy f là một song ánh (không giải được phương trình $f(x) = 2\sin x - 3x = y$).

c) Cho $g : X = \mathbf{R} \to Y = \mathbf{R}$ thỏa $g(x) = 3e^x - e^{-x} + 2 \ \forall x \in X$.

$\forall y \in Y$, phương trình $g(x) = y$ (ẩn $x \in X$) $\Leftrightarrow 3e^{2x} + (2-y)e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3t^2 + (2-y)t - 1 = 0$ với $t = e^x > 0$ và $\Delta = (y-2)^2 + 12 \geq 12 > 0$.

$$\Leftrightarrow t = \frac{y-2+\sqrt{(y-2)^2+1}}{6} > 0 \Leftrightarrow x = \ln t = \ln \frac{y-2+\sqrt{(y-2)^2+1}}{6} \in X.$$

Phương trình $g(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* trên X nên g là một song ánh.

d) Cho $h : X = \{ a, b, c, d \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ thỏa $h(a) = h(c) = 1, h(b) = 2$ và $h(d) = 3$. Ta có h không phải là một song ánh vì

Cách 1: h không phải là một đơn ánh (do $\exists a, c \in X, a \neq c$ và $h(a) = h(c) = 1$)

Cách 2 : h không phải là một toàn ánh (do $h(X) = \{ 1, 2, 3 \} \neq Y$)

6.6/ <u>ÁNH XẠ NGƯỢC CỦA SONG ÁNH:</u> Cho *song ánh* $f : X \to Y$.

Ta đã biết $\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ *có nghiệm duy nhất* là x_y trên X.
Lập *ánh xạ* $\varphi : Y \to X$ có $\varphi(y) = x_y \ \forall y \in Y$. Ta nói φ là *ánh xạ ngược* của f và ký hiệu $\varphi = f^{-1}$. Khi đó $\forall x \in X, \forall y \in Y, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Ví dụ:

a)$u : X = \{ a, b, c, d \} \to Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ với $u(a) = 1, u(b) = 2, u(c) = 3,$ $u(d) = 4$.

Ta có u là một song ánh vì các phương trình $u(x) = 1, u(x) = 2, u(x) = 3$ và $u(x) = 4$ đều có nghiệm duy nhất (lần lượt là $x = a, x = b, x = c, x = d$) trên X.

Ta có ánh xạ ngược $v = u^{-1} : Y \to X$ với $v(1) = a, v(2) = b, v(3) = c, v(4) = d$.

b) Cho $f : X = (3, 6] \to Y = [-27, -6)$ thỏa $f(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in X$.

$\forall y \in Y$, phương trình $f(x) = y$ (ẩn $x \in X$) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + y + 3 = 0$ với $\Delta' = 1 - (y + 3) = -(y + 2) \in (4, 25]$, $\sqrt{\Delta'} \in (2, 5]$ và $-\sqrt{\Delta'} \in [-5, -2)$.

Ta có $x_1 = 1 + \sqrt{\Delta'} \in (3, 6] = X$ (nhận x_1) và $x_2 = 1 - \sqrt{\Delta'} \in [-4, -1)$, nghĩa là $x_2 \notin X$ (loại x_2). Vậy phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất trên X là $x_y = x_1 = 1 + \sqrt{-y-2}$. Do đó f là một song ánh và có ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ thỏa $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{-y-2} \quad \forall y \in Y$. Bằng cách đổi biến y thành biến x, ta có thể viết lại $f^{-1} : Y \to X$ với $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-x-2} \quad \forall x \in Y$.

6.7/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$. Khi đó

a) Nếu f là *một song ánh* thì f^{-1} cũng là *một song ánh* và $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Nếu f là *một song ánh* thì $f^{-1} \circ f = Id_X$ và $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

c) Nếu f là *một song ánh* và $X = Y$ thì $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_X$.

d) Nếu f và g là *các song ánh* thì $h = g \circ f$ cũng là *một song ánh* và $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ví dụ:

a) Xét lại $f : X = (3, 6] \to Y = [-27, -6)$ với $f(x) = -x^2 + 2x - 3 \quad \forall x \in X$.

Từ **Ví dụ** của (**6.6**), ta thấy f là một song ánh có $f^{-1} : Y \to X$ thỏa $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-x-2} \quad \forall x \in Y$. Đặt $g = f^{-1}$ thì ta có thể kiểm chứng được g cũng là một song ánh thỏa $g^{-1} = f$, $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$.

b) Cho $h : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $h(x) = 3x + 4 \quad \forall x \in X$. Ta kiểm chứng được h là một song ánh và $h^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3} \quad \forall x \in X$. Do đó $h^{-1} \circ h = h \circ h^{-1} = Id_X$.

c) Cho $\varphi : X = \mathbf{R} \to Y = (1, +\infty)$ thỏa $\varphi(x) = e^x + 1 \quad \forall x \in X$ và $\psi : Y \to Z = (0, +\infty)$ thỏa $\psi(x) = x^2 + 4x - 5 \quad \forall x \in Y$. Ta có $\theta = \psi \circ \varphi : X \to Z$ thỏa $\theta(x) = (e^x + 1)^2 + 4(e^x + 1) - 5 = e^{2x} + 6e^x \quad \forall x \in X$.

Ta kiểm chứng được φ và ψ đều là các song ánh với $\varphi^{-1}(x) = \ln(x - 1) \quad \forall x \in X$ và $\psi^{-1}(x) = \sqrt{x+9} - 2 \quad \forall x \in Y$.

Do đó $\theta = \psi \circ \varphi$ cũng là một song ánh và $\theta^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} : Z \to X$ thỏa $\theta^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x+9} - 3) \quad \forall x \in Z$.

6.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> (nhận diện hai ánh xạ là song ánh và là ánh xạ ngược của nhau)

Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to X$. Các phát biểu sau đây là *tương đương* :

a) f là *một song ánh* và $f^{-1} = g$ b) g là *một song ánh* và $g^{-1} = f$

c) $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$

Ví dụ: Cho $f : X = \mathbf{R} \setminus \{1\} \to Y = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ và $g : Y \to X$ thỏa

$f(x) = \dfrac{3-2x}{x-1}$ $\forall x \in X$ và $g(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ $\forall x \in Y$.

Ta kiểm chứng được $g \circ f = Id_X$ và $f \circ g = Id_Y$.

Như vậy f và g đều là các song ánh thỏa $f^{-1} = g$ và $g^{-1} = f$.

6.9/ <u>PHÉP LŨY THỪA ÁNH XẠ:</u> Cho ánh xạ $f : X \to X$.

a) Đặt $f^o = Id_X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, … và $f^k = f \circ f^{k-1}$ $\forall k \geq 1$.

Ta có các ánh xạ $f^k : X \to X$ $\forall k \geq 0$.

b) Nếu f là *một song ánh* thì ta đặt thêm : f^{-1} là *ánh xạ ngược* của f,

$f^{-2} = (f^{-1})^2$, … và $f^{-k} = (f^{-1})^k$ $\forall k \geq 2$. Ta có $f^{-k} : X \to X$ $\forall k \geq 1$.

Như vậy nếu f là *một song ánh* thì ta có các ánh xạ $f^m : X \to X$ $\forall m \in \mathbf{Z}$

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $f : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in X$.

$\forall k \in \mathbf{N}$, ta tính được $f^k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{kx^2+1}}$ $\forall x \in X$ (phương pháp qui nạp).

b) Cho $g : X = \mathbf{R} \to X$ thỏa $g(x) = 2x + 3$ $\forall x \in X$.

$\forall k \in \mathbf{N}$, ta tính được $g^k(x) = 2^k x + 3(2^k - 1)$ $\forall x \in X$ (phương pháp qui nạp).

Ta kiểm chứng được g là một song ánh và $g^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$ $\forall x \in X$.

Từ đó tính được $g^{-k}(x) = 2^{-k} x + 3(2^{-k} - 1)$ $\forall x \in X, \forall k \in \mathbf{N}$ và $k \geq 2$

(phương pháp qui nạp). Như vậy $\forall m \in \mathbf{Z}$, $g^m(x) = 2^m x + 3(2^m - 1)$ $\forall x \in X$.

6.10/ <u>ÁP DỤNG ÁNH XẠ NGƯỢC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ÁNH XẠ:</u>

a) Cho ánh xạ h và *song ánh* f. Giả sử có ánh xạ φ thỏa $f \circ \varphi = h$.

Ta có $f \circ \varphi = h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ \varphi) = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f) \circ \varphi = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (Id_X) \circ \varphi = f^{-1} \circ h \Leftrightarrow \varphi = f^{-1} \circ h$ (*nghiệm duy nhất*)

b) Cho ánh xạ h và *song ánh* g. Giả sử có ánh xạ ψ thỏa $\psi \circ g = h$.

Ta có $\psi \circ g = h \Leftrightarrow (\psi \circ g) \circ g^{-1} = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow \psi \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ g^{-1}$

$\Leftrightarrow \psi \circ Id_Y = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow \psi = h \circ g^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*)

c) Cho ánh xạ h và *các song ánh* f và g. Giả sử có ánh xạ θ thỏa

$f \circ \theta \circ g = h$. Ta có $f \circ \theta \circ g = h \Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ \theta \circ g) \circ g^{-1} = h \circ g^{-1} \Leftrightarrow$

$(f^{-1} \circ f) \circ \theta \circ (g \circ g^{-1}) = f^{-1} \circ h \circ g^{-1} \Leftrightarrow (Id_X) \circ \theta \circ Id_Y = f^{-1} \circ h \circ g^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = f^{-1} \circ h \circ g^{-1}$ (*nghiệm duy nhất*)

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $f : Y = (-8, +\infty) \to Z = \mathbf{R}$ thỏa $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{x+8}{5} - 1\right)$ $\forall x \in Y$.

Ta có f là một song ánh và $f^{-1} : Z \to Y$ thỏa $f^{-1}(x) = 5e^{4x+1} - 8$ $\forall x \in Z$.

Xét $h : X = \mathbf{R} \to Z$ thỏa $h(x) = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{4x^2-4x+3}{5} - 1\right)$ $\forall x \in X$.

Tìm $\varphi : X \to Y$ thỏa $f \circ \varphi = h$. Ta có $\varphi = f^{-1} \circ h$ và

$\forall x \in X$, $\varphi(x) = (f^{-1} \circ h)(x) = f^{-1}[h(x)] = 4x^2 - 4x - 5$

b) Cho $g : X = [-1, 4] \to Y = [-4, 31]$ thỏa $g(x) = x^2 + 4x - 1\ \ \forall x \in X$.

Ta có g là một song ánh và $g^{-1}: Y \to X$ thỏa $g^{-1}(x) = \sqrt{x+5} - 2\ \ \forall x \in Y$.

Xét $p : X \to Z = \mathbf{R}$ thỏa $p(x) = \sqrt[4]{\ln(x^2+4x+7)} - 3\ \ \forall x \in X$.

Tìm $\psi : Y \to Z$ thỏa $\psi \circ g = p$. Ta có $\psi = p \circ g^{-1}$ và

$\forall x \in Y, \psi(x) = (p \circ g^{-1})(x) = p[g^{-1}(x)] = \sqrt[4]{\ln(x+8)} - 3$

c) Cho $u : X = \mathbf{R} \to Y = (-1, 1)$ thỏa $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ \ \forall x \in X$.

Ta có u là một song ánh và $u^{-1}: Y \to X$ thỏa $u^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \ \forall x \in Y$.

Cho $v : Z = \mathbf{R} \setminus \{-4\} \to T = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ thỏa $v(x) = \dfrac{2x-5}{x+4}\ \ \forall x \in Z$.

Ta có v là một song ánh và $v^{-1}: T \to Z$ thỏa $v^{-1}(x) = \dfrac{4x+5}{2-x}\ \ \forall x \in T$.

Xét $q : X \to T$ thỏa $q(x) = \dfrac{-28x^2-5}{12x^2+4}\ \ \forall x \in X$.

Tìm $\theta : Y \to Z$ thỏa $v \circ \theta \circ u = q$. Ta có $\theta = v^{-1} \circ q \circ u^{-1}$ và

$\forall x \in Y, \theta(x) = (v^{-1} \circ q \circ u^{-1})(x) = v^{-1}\{q[u^{-1}(x)]\} = \dfrac{-4x^2}{x^2+3}$

6.11/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho X, Y là các tập hợp *hữu hạn* và $f : X \to Y$.

a) Nếu f là *một đơn ánh* thì $|X| \leq |Y|$.

b) Suy ra nếu $|X| > |Y|$ thì f *không phải là đơn ánh*.

c) Nếu f là *một toàn ánh* thì $|X| \geq |Y|$.

d) Suy ra nếu $|X| < |Y|$ thì f *không phải là toàn ánh*.

e) Nếu f là *một song ánh* thì $|X| = |Y|$.

f) Suy ra nếu $|X| \neq |Y|$ thì f *không phải là song ánh*.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xét đơn ánh u trong **Ví dụ** của **6.1**. Ta có $|X| = 3 \leq |Y| = 5$.

b) Xét u trong **Ví dụ** của **6.2**. Ta có $|X| = 4 > |Y| = 3$ nên u không đơn ánh.

c) Xét toàn ánh u trong **Ví dụ** của **6.3**. Ta có $|X| = 4 \geq |Y| = 3$.

d) Xét u trong **Ví dụ** của **6.4**. Ta có $|X| = 3 < |Y| = 4$ nên u không toàn ánh.

e) Xét song ánh u trong **Ví dụ** của **6.6**. Ta có $|X| = 4 = |Y|$.

f) Xét u trong **Ví dụ** của **6.1**. Ta có $|X| = 3 \neq |Y| = 5$ nên u không song ánh.
