GIẢI TÍCH B2

Vi Tích Phân của Hàm Số Nhiều Biến

JAMES STEWART

Trích Dịch và Soạn Slides:

L. K. Hà   O. T. Hải   N. V. Huy   B. L. T. Thanh

ĐH KHTN, Khoa Toán Tin-Học, Bộ Môn Giải Tích

Ngày 28 tháng 2 năm 2016

1. **Đường & Mặt Trong Không Gian**
   - Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ
   - Mặt trụ và mặt bậc hai
   - Hàm vectơ một biến và đường cong

2. **Đạo hàm riêng và sự khả vi của hàm nhiều biến**
   - Hàm số nhiều biến
   - Giới hạn và Sự liên tục của hàm nhiều biến
   - Đạo hàm riêng
   - Sự khả vi
   - Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient
   - Cực trị (không điều kiện) của hàm số nhiều biến
   - Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

ĐƯỜNG VÀ MẶT TRONG KHÔNG GIAN TỌA ĐỘ

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Không gian có ba trục số vuông góc từng cặp tại gốc O, gồm trục Ox, Oy, Oz được sắp theo qui tắc bàn tay phải như hình dưới được gọi là không gian tọa độ Descartes.

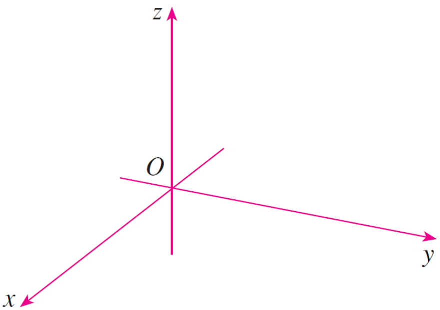


FIGURE 1
Coordinate axes

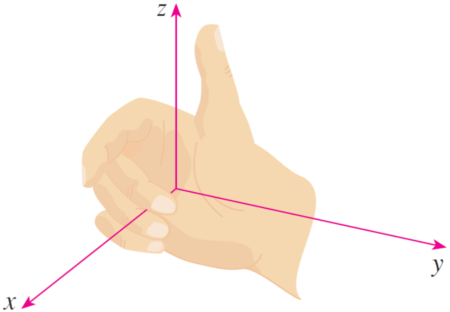
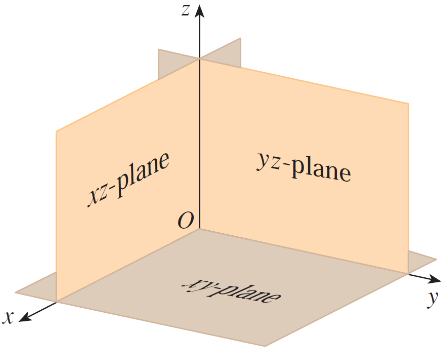
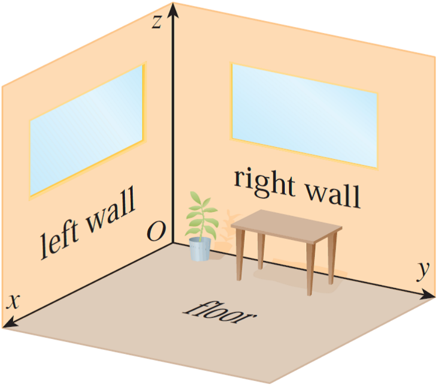


FIGURE 2
Right-hand rule

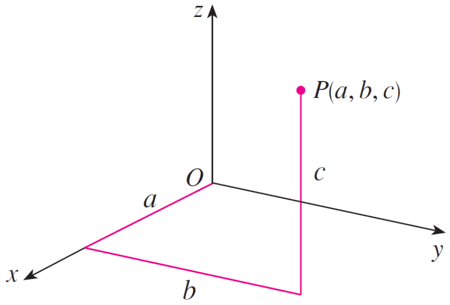
1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ





Trong hình trên, ba trục tạo nên ba mặt phẳng: mặt-xz (bức tường trái), mặt-yz (bức tường phải), mặt-xy (nền nhà); đồng thời chia không gian thành tám phần đều nhau được gọi các **octants** (khối tam diện vuông). Octant thứ nhất là khoảng không trong căn phòng ở trên, định bởi phần dương của các trục.

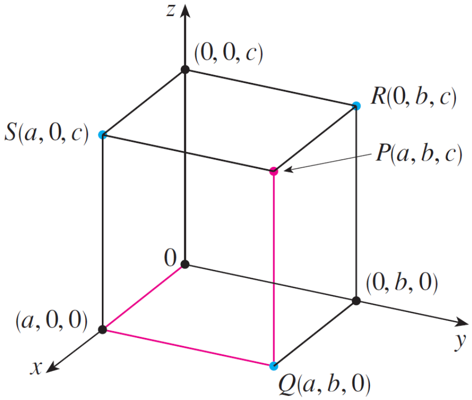
1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Cách định vị một điểm P trong không gian như sau: gọi a là khoảng cách (có hướng) từ mặt-yz đến P; b là khoảng cách từ mặt-xz đến P và c là khoảng cách từ mặt-xy đến P. Khi đó, P được đại diện bởi bộ ba số thực (a, b, c), sẽ được gọi là **tọa độ** của P.

Các số a, b, c lần lượt được gọi là tọa-độ-x, tọa-độ-y, tọa-độ-z của P. Để định vị điểm P, ta bắt đầu từ gốc O đi a đơn vị dọc theo trục-x, tiếp tục đi b đơn vị song song với trục-y, sau cùng đi c đơn vị song song với trục-z.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

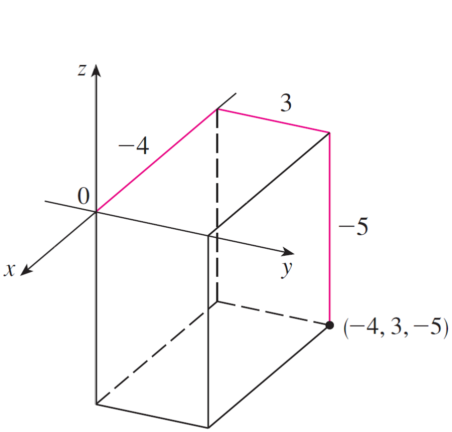


Từ điểm $P(a, b, c)$ đi theo phương vuông góc với mặt-xy sẽ gặp điểm $Q(a, b, 0)$, được gọi là hình chiếu của P lên mặt-xy. Tương tự, $R(0, b, c)$ và $S(a, 0, c)$ là hình chiếu của P lên mặt-yz và mặt-xz tương ứng.

Vậy điểm $P(a, b, c)$ xác định một hình hộp chữ nhật như trên, nên tọa độ (a, b, c) được gọi là **tọa-độ-hộp**, nhưng ta quen gọi là **tọa-độ-Descartes**.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Sau đây là hình ví dụ minh họa cho trường hợp điểm $(-4, 3, -5)$ và điểm $(3, -2, -6)$.



1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Không gian Euclide

Người ta ký hiệu $\mathbb{R}^3$ là tích Descartes

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

là tập hợp tất cả các bộ ba số thực có thứ tự. Tập hợp $\mathbb{R}^3$ được gọi là **không gian Eulide**, được đồng nhất với không gian vật lý ba chiều, vì mỗi điểm P trong không gian vật lý được đại diện bởi một bộ ba $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ như đã nói trên.

Theo thuật ngữ tọa độ, octant thứ nhất của $\mathbb{R}^3$ bao gồm các điểm có các thành phần tọa độ dương.

Tổng quát, với $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall k = \overline{1, n}, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Đường và mặt

Trong hình học tọa độ hai chiều, đồ thị của một phương trình theo x và y là một đường cong trong $\mathbb{R}^2$. Trong hình học tọa độ ba chiều, một phương trình theo x, y, z sẽ biểu diễn một **mặt** trong $\mathbb{R}^3$.

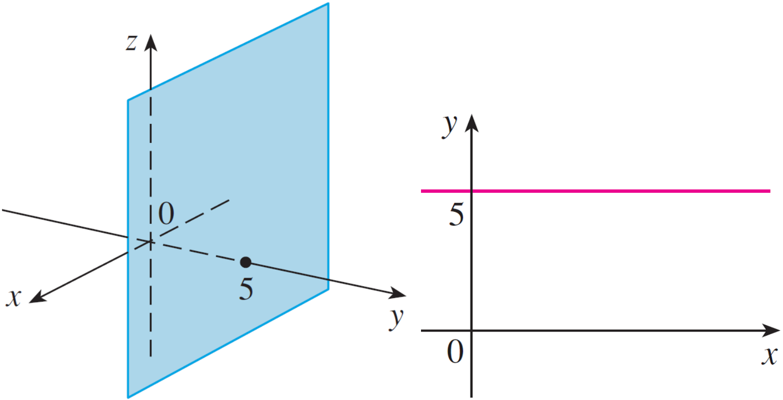
Chú ý

Một phương trình theo x và y biểu diễn một đường trong mặt phẳng, nhưng cũng phương trình đó, lại biểu diễn một mặt trong không gian (xem ví dụ trang sau).

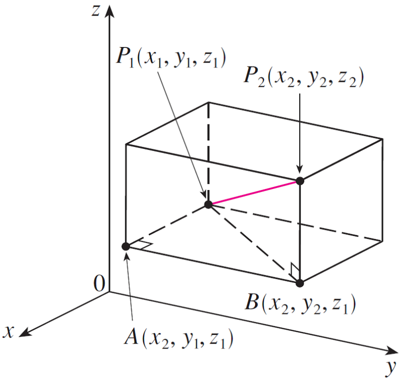
1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Ví dụ

Phương trình $y = 5$ biểu diễn mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$, nhưng lại biểu diễn đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ như minh họa sau



1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

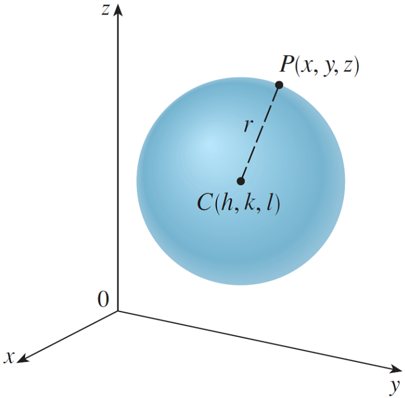


Công thức khoảng cách

Khoảng cách giữa hai điểm $P_1(x_1, y_1, z_1)$ và $P_2(x_2, y_2, z_2)$ được cho bởi

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

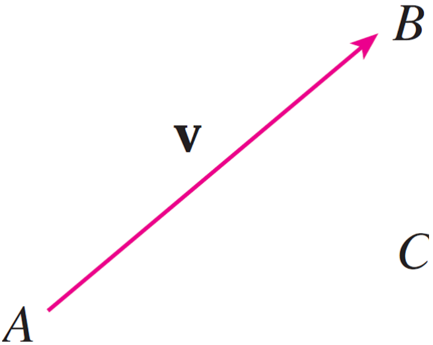


Phương trình mặt cầu

Mặt cầu tâm $C(h, k, l)$ với bán kính r được biểu diễn bởi phương trình

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

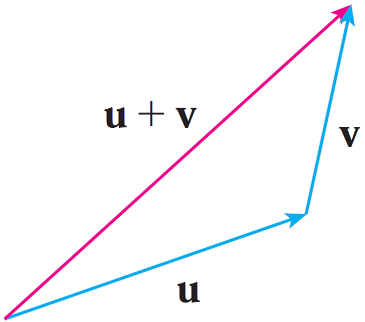
1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

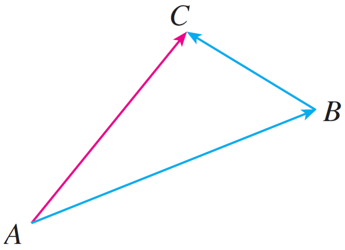


Vectơ-hình-học là đoạn thẳng có một đầu là "mũi tên", (thường gọi là **ngọn**) được dùng để biểu thị vài đại lượng trong khoa học (ví dụ, độ dời hay chuyển dịch, vận tốc, lực v.v..), vì nó thể hiện đủ hai thuộc tính là **độ lớn** và **hướng**.

Hình vẽ bên trình bày vectơ-hình-học, được ký hiệu bởi $\overrightarrow{AB}$, hoặc ngắn gọn hơn là $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



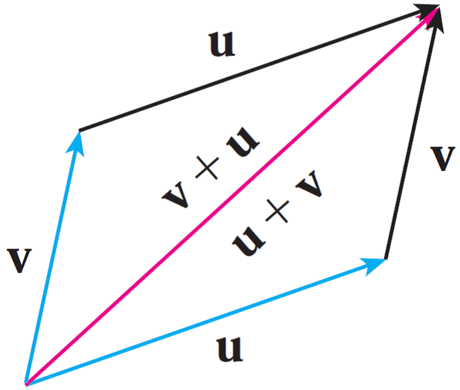


Cộng vectơ: qui tắc nối tiếp

Nếu $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ là hai vectơ sao cho ngọn của $\overrightarrow{u}$ trùng với gốc của $\overrightarrow{v}$, thì **vectơ tổng** $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ là vectơ có gốc của $\overrightarrow{u}$ và có ngọn của $\overrightarrow{v}$. Biểu thị hình học cho phép cộng là qui tắc tam giác:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

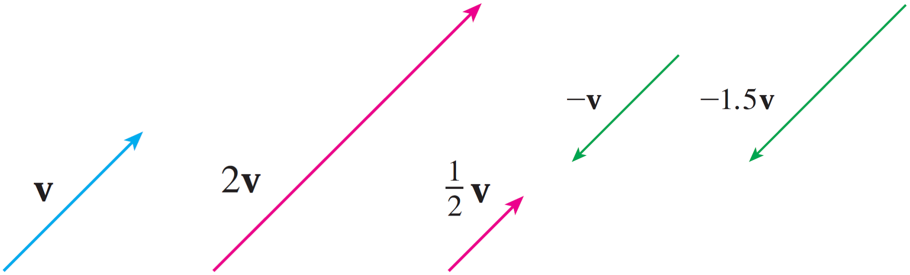


Phép cộng có tính giao hoán

Nhìn vào hình bình hành ở trên, ta thấy phép cộng vectơ có tính giao hoán

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

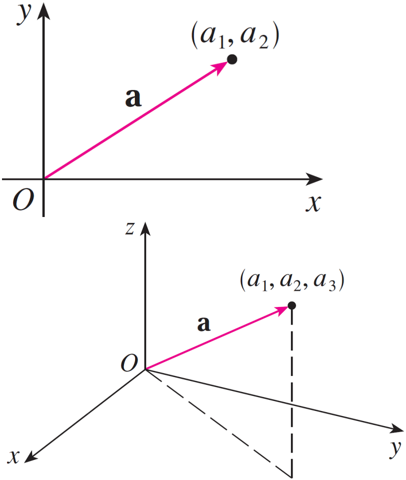
1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Tích-theo-hệ-số

Nếu k là một số thực và $\overrightarrow{v}$ là một vectơ, thì **tích-theo-hệ-số** $k\overrightarrow{v}$ là một vectơ có độ dài bằng $|k|$ nhân với độ dài của $\overrightarrow{v}$, cùng hướng với $\overrightarrow{v}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\overrightarrow{v}$ nếu $k < 0$. Nếu $k = 0$ hoặc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ thì $k\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



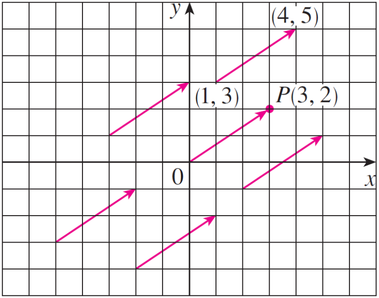
Biểu diễn vectơ bởi tọa độ

Mỗi vectơ-hình-học, là đoạn thẳng có hướng, nếu được tịnh tiến sao cho điểm đầu của nó đặt vào gốc tọa độ, thì điểm ngọn có tọa độ là (a_1, a_2) hay (a_1, a_2, a_3) tùy thuộc vào không gian $\mathbb{R}^2$ hay $\mathbb{R}^3$. Lúc đó ta viết

$$\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2\rangle \text{ hay } \overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

Các số a_1, a_2, a_3 được gọi là các thành phần của $\overrightarrow{a}$, và $\overrightarrow{a}$ là vectơ-đại-số.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



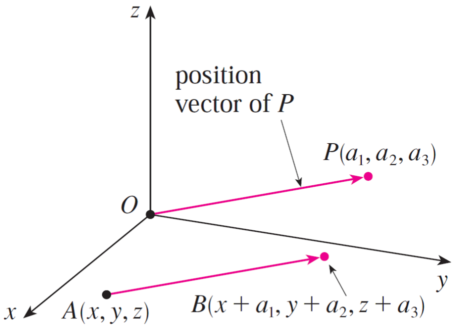
Ví dụ: Hình vẽ bên có nhiều vectơ-hình-học. Vectơ-đại-số $\overrightarrow{a} = \langle 3, 2\rangle$ đại diện cho tất cả vectơ-hình-học này. Chúng có chung một đặc điểm là, từ điểm đầu đến điểm cuối, có thể đi qua phải 3 đơn vị, lên trên 2 đơn vị.

Vectơ-vị-trí

Với mỗi điểm $P(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ (hoặc $P(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$), vectơ $\overrightarrow{OP}$ được gọi là **vectơ-vị-trí** của điểm P.

Như vậy ta có thể đồng nhất không gian Euclide với không gian các vectơ-đại-số, vì mỗi điểm $P(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tương ứng 1-1 với vectơ-vị-trí $\overrightarrow{OP}$, được đại diện bởi vectơ-đại-số $\overrightarrow{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Hình bên trình bày $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ là vectơ vị trí của điểm $P(a_1, a_2, a_3)$ trong không gian. Nếu $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{AB}$, với $A(x, y, z)$ và $B(x_1, y_1, z_1)$, thì ta có $x_1 = x + a_1$, $y_1 = x + a_2$, $z_1 = z + a_3$.

Công thức tính tọa độ cho vectơ-hình-học

Với hai điểm $A(x_1, y_1, z_1)$ và $B(x_2, y_2, z_2)$, ta có vectơ-đại-số $\vec{\boldsymbol{a}}$ đại diện cho vectơ-hình-học $\overrightarrow{AB}$ như sau

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\boldsymbol{a}} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle.$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Các công thức khác về vectơ

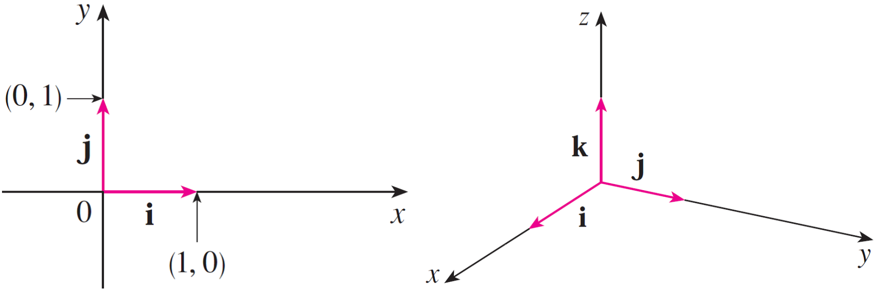
- Nếu $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle a_1, a_2 \rangle$ và $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle b_1, b_2 \rangle$ (hai chiều), $k \in \mathbb{R}$ thì

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$
$$k\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle ka_1, ka_2 \rangle \text{ và } |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- Tương tự trong trường hợp ba chiều, ta có

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} - \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$
$$k\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle \text{ và } |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Vectơ cơ sở đơn vị

Trường hợp hai chiều, $\overrightarrow{i} = \langle 1, 0\rangle$ và $\overrightarrow{j} = \langle 0, 1\rangle$ được gọi là hai vectơ cơ sở (chuẩn tắc). Trường ba chiều, ba vectơ cơ sở gồm $\overrightarrow{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\overrightarrow{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ và $\overrightarrow{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$. Nếu $\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ (hoặc $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$) thì

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} \text{ hoặc } \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}.$$

Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Các tính chất về vectơ

Nếu $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là các vectơ trong $\mathbb{R}^n$ và s, t là hai số thực, thì

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
5. $s(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = s\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b}$
6. $(s + t)\overrightarrow{a} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{a}$
7. $(st)\overrightarrow{a} = s(t\overrightarrow{a})$
8. $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Định nghĩa tích vô hướng

Nếu $\overrightarrow{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ và $\overrightarrow{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ thì *tích vô hướng* của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là số thực $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ được định bởi

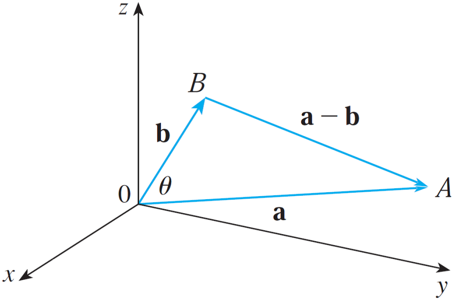
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

Tính chất của tích vô hướng

Nếu $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là các vectơ trong $\mathbb{R}^n$ và t là một số thực thì

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
3. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
4. $(t\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = t(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \cdot (t\overrightarrow{b})$
5. $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{a} = 0$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Định lý

Nếu θ là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\theta; \quad \text{hay} \ \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Do đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Chứng minh. Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC trong hình trên, ta được

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos\theta \tag{1.1}$$

Nhưng $AB = |\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}|$, $OA = |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|$ và $OB = |\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|$, do đó (1.1) trở thành

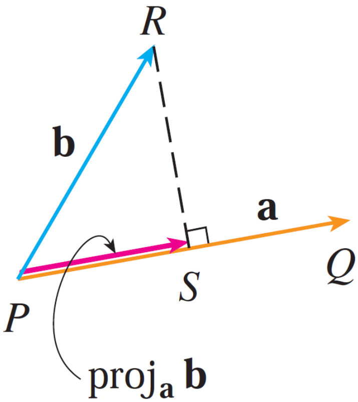
$$|\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}|^2 = |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|^2 + |\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|^2 - 2|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}||\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|\cos\theta \tag{1.2}$$

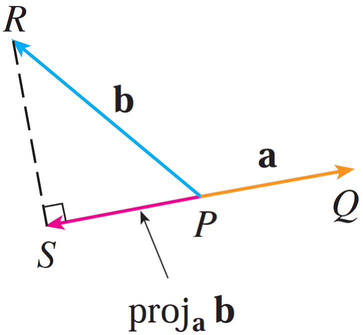
Nhưng theo tính chất 1, 2, 3 của tích vô hướng thì vế trái của (1.2) được viết lại như sau

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}|^2 &= (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{b}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) \\ &= |\overrightarrow{\boldsymbol{a}}|^2 - 2|\overrightarrow{\boldsymbol{a}}||\overrightarrow{\boldsymbol{b}}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{b}}|^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3), ta có điều phải chứng minh.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

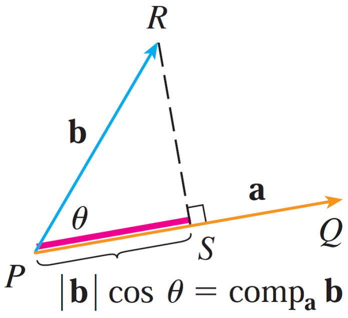




Hình chiếu của một vectơ trên một vectơ khác

Xét $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{PR}$ như hình trên. Vectơ $\overrightarrow{PS}$, với ký hiệu là $\text{proj}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, được gọi là vectơ hình chiếu của $\overrightarrow{b}$ lên $\overrightarrow{a}$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



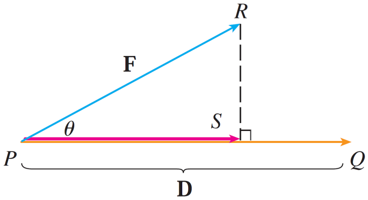
Thành phần của $\vec{b}$ trên $\vec{a}$ là *độ dài đại số* (độ dài có dấu) của $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ trên $\vec{a}$, được tính bởi $|\vec{b}| \cos\theta$, trong đó θ là góc tạo bởi $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Thành phần này được ký hiệu bởi $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b}$. Khi θ là góc tù thì $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} \leq 0$.

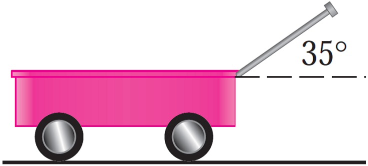
Công thức

- $\text{comp}_{\vec{a}} \vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$
- $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\right) \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

CÔNG CỦA LỰC



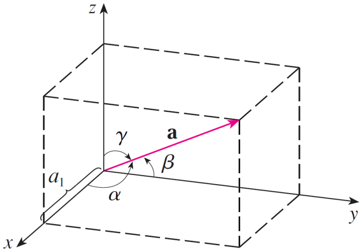


Trong hình trên bên trái, thành phần của lực $\vec{F}$ có công tham gia vào việc dịch chuyển vật từ P đến Q được biểu thị bởi $\overrightarrow{PS}$. Do đó công của lực $\vec{F}$ tham gia việc dịch chuyển vật theo độ dời $\vec{D}$ là

$$W = (|\vec{F}|\cos\theta)|\overrightarrow{PQ}| = \vec{F}\cdot\vec{D}.$$

Nếu θ là góc tù thì công sẽ âm, nghĩa là lực $\vec{F}$ có công cản trở vật dịch chuyển theo hướng $\vec{D}$.

Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Các góc và cosine chỉ hướng của vectơ

Mỗi vectơ $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ sẽ hợp với hướng dương của ba trục Ox, Oy, Oz các góc α, β và γ (trong khoảng $[0, \pi]$), được gọi là các góc chỉ hướng; và $\cos\alpha$, $\cos\beta$ và $\cos\gamma$ được gọi là các cosine chỉ hướng của $\overrightarrow{a}$.

Định lý

Nếu $\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ thì $\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$ là vectơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{a}$, vì

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{i}|} = \frac{a_1}{|\overrightarrow{a}|};\ \text{tương tự}\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\overrightarrow{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\overrightarrow{a}|}$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Định nghĩa tích hữu hướng

Nếu $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ và $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ là hai vectơ thì **tích hữu hướng** của $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ và $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ là vectơ mới được định bởi

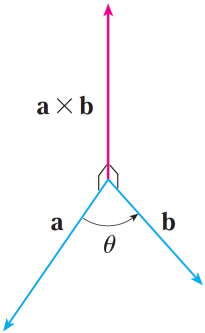
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ (về hình thức, tính như định thức)}\end{aligned}$$

Định lý

Vectơ $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ và $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, nghĩa là

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = 0 \quad \text{và} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = 0.$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Hướng của vectơ $\vec{a} \times \vec{b}$ được xác định theo qui tắc bàn tay phải như hình vẽ trên.

Định lý

1. Nếu θ là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ thì

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta.$$

Suy ra, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ bằng diện tích hình bình hành sinh bởi $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Định lý

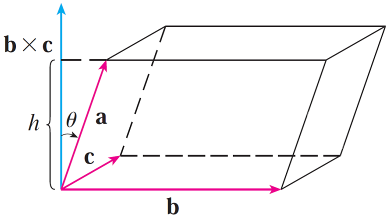
Nếu $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$ là các vectơ, t là số thực thì

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
2. $(t\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = t(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (t\overrightarrow{b})$
3. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$
5. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$
6. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$

Tích hỗn hợp

Trong mục 5 của định lý trên, số $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ được gọi tích hỗn hợp của ba vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{c}$.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Trong hình trên, thể tích hình hộp bằng diện tích hình bình hành đáy $S = |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|$ nhân độ cao $h = |\overrightarrow{a}|\cos\theta$.

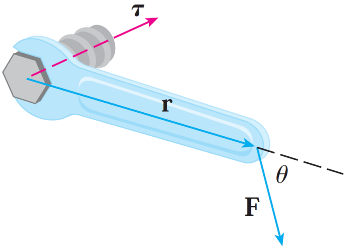
Công thức thể tích hình hộp

Ba vectơ $\overrightarrow{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\overrightarrow{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ và $\overrightarrow{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ sinh ra hình hộp có thể tích cho bởi

$$V = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Mô-men xoắn



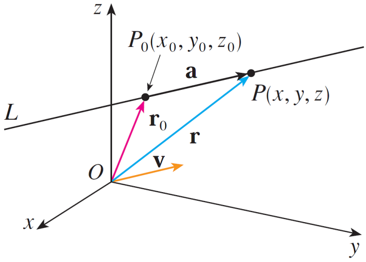
Hướng của vectơ $\overrightarrow{\tau}$ tiến theo trục quay. Với cùng độ lớn của lực $\overrightarrow{F}$, số đo θ là bao nhiêu thì cường độ mô-men quay lớn nhất?

Ý tưởng cho khái niệm tích hữu hướng bắt nguồn từ vật lý. Cụ thể, chúng ta xét một lực $\overrightarrow{F}$ tác động lên vật thể cứng tại một điểm đặt có vectơ vị trí $\overrightarrow{r}$, chẳng hạn như chúng ta xiết bu-loong bằng cách áp một lực lên chìa khóa vặn như hình bên, khi đó sẽ xuất hiện hiệu ứng quay. **Mô-men quay quanh gốc O** được định nghĩa là vectơ

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F},$$

nó nói lên xu hướng quay của vật thể quanh tâm O mạnh hay yếu.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



Trong hình trên, điểm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và $P(x, y, z)$ lần lượt có vectơ-vị-trí là $\vec{r_0}$ và $\vec{r}$.

Phương trình đường thẳng

Nếu P thuộc đường thẳng L đi qua P_0 với vectơ chỉ phương $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$, thì $\vec{r}$ thỏa phương trình

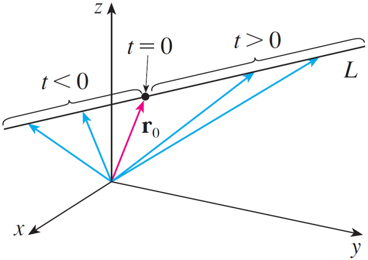
$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

nghĩa là x, y, z thỏa

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct \tag{1.5}$$

Phương trình (1.4) và (1.5) được gọi là phương trình vectơ và phương trình tham số của đường thẳng L.

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ



- Phương trình vectơ biểu diễn đoạn thẳng nối P_0 và P là

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

- Khử t trong phương trình (1.5), ta có dạng chính tắc của đường thẳng

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

1.1. Ôn tập & Mở rộng kiến thức hình học tọa độ

Phương trình mặt phẳng

Trong không gian tọa độ Oxyz, nếu mặt phẳng (α) đi qua điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ và vuông góc với $\overrightarrow{\boldsymbol{n}} = \langle a, b, c\rangle$ thì phương trình của mặt phẳng (α) là một trong các dạng sau

- $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
- $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$
- $ax + by + cz + d = 0$, trong đó $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$
- $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

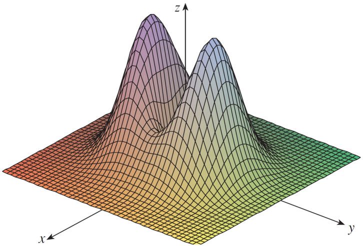
Mặt trụ & Mặt bậc hai

Ở bậc phổ thông, sinh viên đã biết mặt phẳng và mặt cầu. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu mặt trụ (cylinder) và mặt bậc hai (quadric surface)

Định nghĩa

- Mặt trụ là mặt bao gồm các đường thẳng song song (ta gọi là các đường kẻ, rulings) với một đường thẳng cho trước và các đường kẻ này tựa lên một đường cong phẳng cho trước.
- Mặt bậc hai là mặt chứa các điểm có tọa độ thỏa một phương trình bậc hai và chứa đủ ba biến x, y và z.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

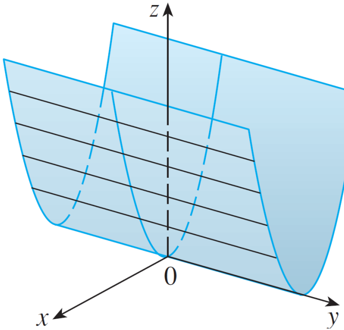


Chú ý

Cách hữu dụng để hiển thị hay phác họa một mặt cong là xác định phần giao của nó với các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ. Các đường giao tuyến cong này được gọi là **vết** (trace) và tạo nên hình ảnh của lưới (gridlines)

Tiếp theo là các ví dụ.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Ví dụ

Mô tả và phác họa mặt (S) có phương trình $z = x^2$.

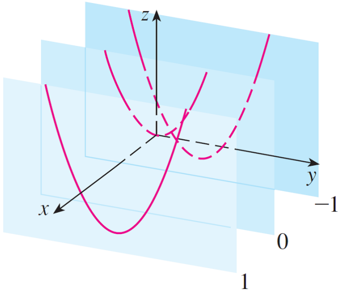
Lưu ý phương trình này không chứa biến y, có nghĩa rằng mọi điểm $P(x, y, z)$ thuộc mặt cong (S) có hình chiếu lên mặt-xz sẽ thuộc parabol "$z = x^2$".

Nói cách khác, **vết** (cắt) của mặt phẳng $y = k$ với mặt (S) là một parabol (mặt $y = k$ song song với mặt-xz). Vết của mặt $x = k$ hay $z = k$ với (S) là các đường thẳng song song với trục Oy (ta gọi là các đường kẻ, rulings). Vậy (S) có dạng một lòng máng parabol, và là mặt trụ.

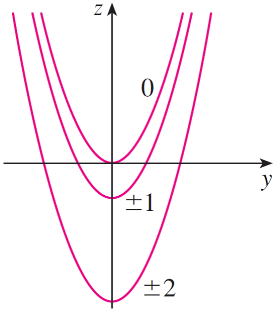
1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

Ví dụ

Phác họa mặt cong $z = y^2 - x^2$.

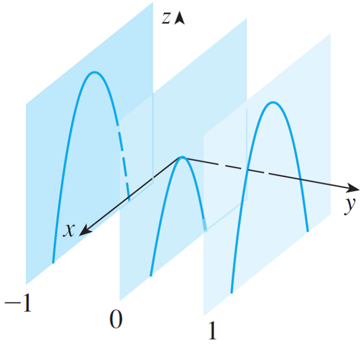


Các vết trong mặt $x = k$

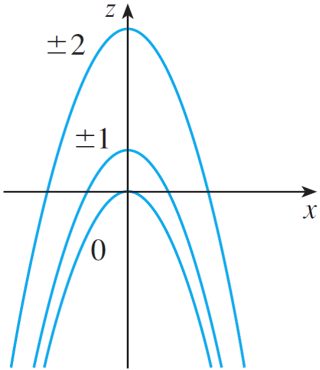


Hình chiếu của các vết trong mặt $x = k$ lên mặt-yz là các parabol $z = y^2 - k^2$

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

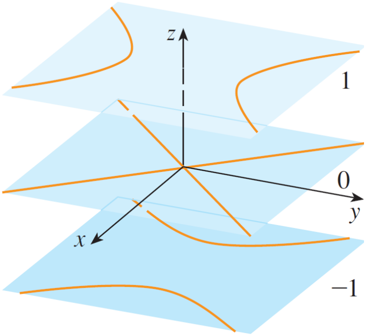


Các vết trong mặt $y = k$

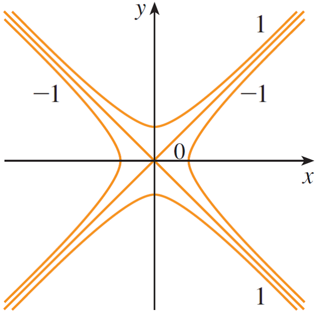


Hình chiếu của các vết trong mặt $y = k$ lên mặt-xz là các parabol $z = k^2 - x^2$

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

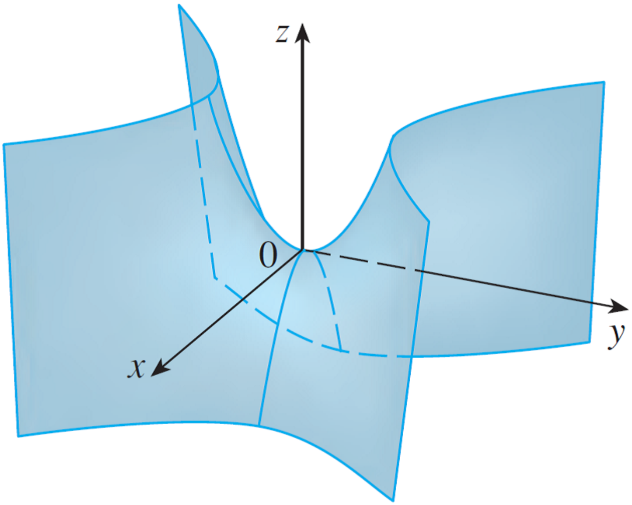


Các vết trong mặt $z = k$



Hình chiếu của các vết trong mặt $z = k$ lên mặt-xy là các hyperbol $k = y^2 - x^2$

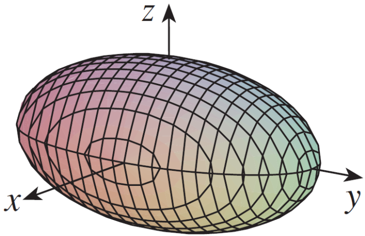
1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Hình phác họa của mặt $z = y^2 - x^2$

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai

Phân loại mặt bậc hai



Ellipsoid

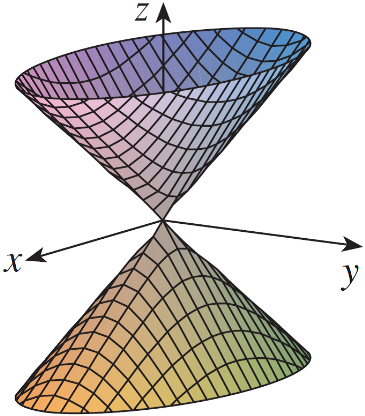
Ellipsoid có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Các vết đều là đường ê-lip.

Trường hợp $a = b = c$ thì Ellipsoid là mặt cầu.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Cone (Nón)

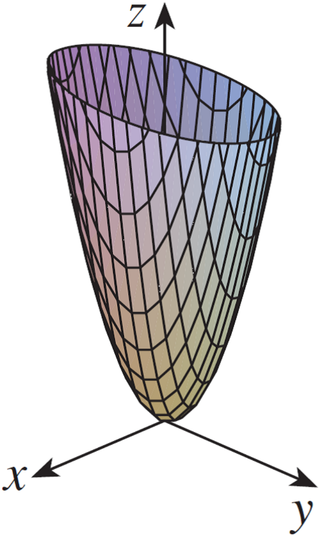
Phương trình mặt nón là

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Các vết ngang đều là đường ê-lip.

Vết đứng trong các mặt phẳng $x = k$, $y = k$, với $k \neq 0$, là các đường hyperbola. Nếu $k = 0$ thì vết là các cặp đường thẳng.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Elliptic Parboloid

Mặt Elliptic Paraboloid có phương trình

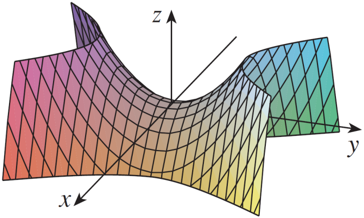
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Các vết ngang là các đường ê-lip.

Vết đứng là các parabola.

Biến bậc nhất của phương trình xác định trục của mặt Elliptic Paraboloid.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Hyperbolic Paraboloid

Mặt Hyperbolic Paraboloid có phương trình

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

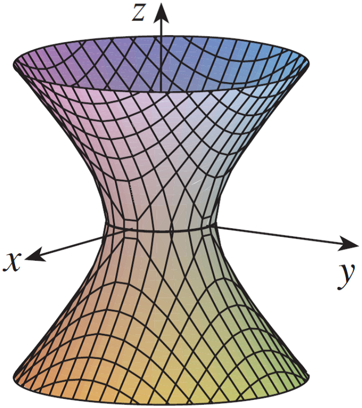
Các vết ngang là các đường hyperbola.

Vết đứng là các parabola.

Biến bậc nhất của phương trình xác định trục của mặt Elliptic Paraboloid.

Hình bên minh họa cho trường hợp $c < 0$.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Hyperboloid Of One Sheet

Mặt Hyperboloid-một-mảnh có phương trình

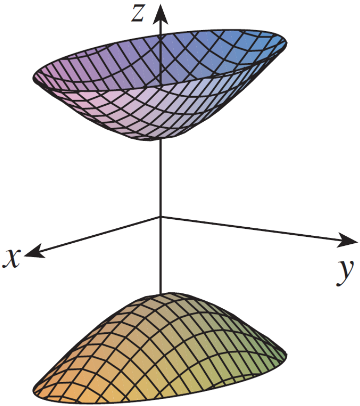
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Các vết ngang là các đường ê-lip.

Vết đứng là các hyperbola.

Trục đối xứng tương ứng với biến mang hệ số âm.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Hyperboloid Of Two Sheets

Mặt Hyperboloid-hai-mảnh có phương trình

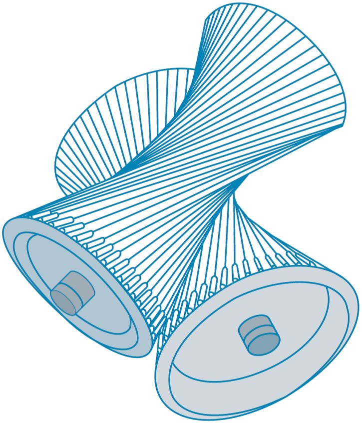
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Các vết ngang trong mặt $z = k$ là các đường ê-lip khi $|k| > |c|$.

Các vết đứng là các hyperbola.

Hai dấu trừ trong phương trình cho biết mặt có hai mảnh.

1.2. Mặt trụ và mặt bậc hai



Bộ truyền động của hộp số trong động cơ xe có hình dạng Hyperboloid một mảnh.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Hàm vectơ một biến & Đường cong

Hàm vectơ một biến

- Cho n hàm số một biến $f_1, \ldots, f_n$. Với mỗi giá trị của biến t (thuộc một khoảng-đoạn nào đó), ta có vectơ trong $\mathbb{R}^n$ như sau

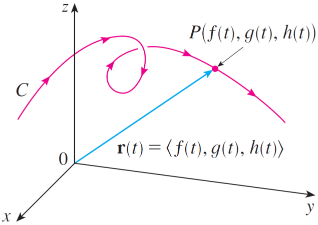
$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t) \rangle$$

  Vậy ta có hàm vectơ một biến $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$.

- Nếu các hàm số f_k có giới hạn tại a, ta định nghĩa

$$\lim_{t \to a} \overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to a} f_n(t) \right\rangle$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong



Nếu $\vec{r}$ là vectơ vị trí của điểm P$\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ thì khi t thay đổi, P sẽ vạch ra một đường cong C trong không gian (với giả thiết rằng hàm vectơ $\vec{r}$ liên tục).

Hàm vectơ liên tục

Hàm vectơ $\vec{r} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ liên tục tại a có nghĩa là

$$\lim_{t \to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a),$$

cũng có nghĩa là các **hàm thành phần** f_k liên tục tại a.

Có một sự liên hệ gần giữa hàm vectơ liên tục và đường cong phẳng hoặc đường cong không gian (xem hình bên).

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Nếu f, g, h là ba hàm số một biến liên tục trên một đoạn-khoảng I nào đó, thì tập hợp C gồm các điểm (x, y, z) sao cho

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{1.6}$$

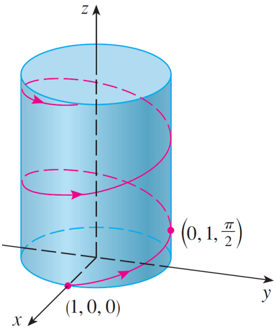
và t thay đổi trên khoảng-đoạn I, là một đường cong trong không gian.

Phương trình (1.6) được gọi là hệ phương trình tham số của C, và t là tham số.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Ví dụ

Phác họa đường cong có phương trình vectơ $\overrightarrow{r}(t) = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$.



Phương trình tham số của đường cong là

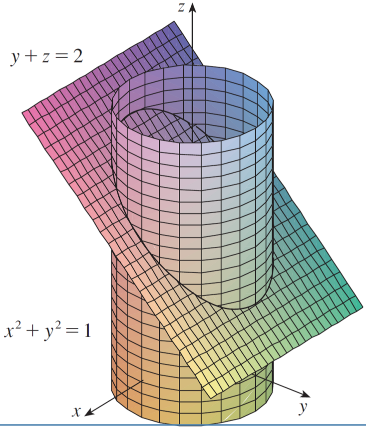
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

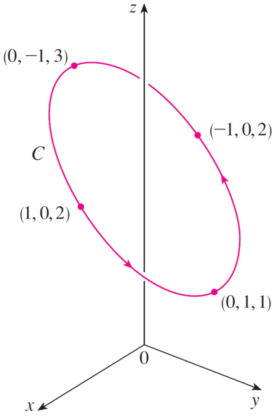
Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đường cong nằm trên mặt trụ tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Điểm (x, y, z) của đường cong có hình chiếu lên mặt-xy là $(x, y, 0)$. Khi t tăng thì điểm $(x, y, 0)$ chạy ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Vì $z = t$ nên đường cong xoắn ốc quanh mặt trụ, hướng lên trên khi t tăng, nó có hình lò xo.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Ví dụ

Tìm phương trình vectơ biểu diễn đường cong giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ và mặt phẳng $y + z = 2$.





1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Hình chiếu của đường cong lên mặt-xy là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, do đó ta có thể đặt

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

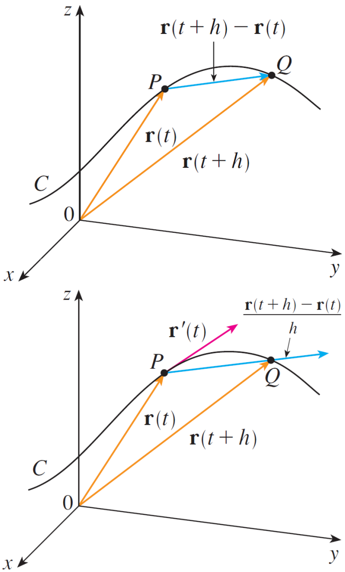
Từ phương trình $y + z = 2$, ta suy ra $z = 2 - \sin t$. Ta có phương trình tham số của đường cong là

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2 - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Và phương trình vectơ tương ứng là

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = \cos t\, \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \sin t\, \overrightarrow{\boldsymbol{j}} + (2 - \sin t)\, \overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong



Sự khả vi và Vectơ tiếp tuyến

Với hàm vectơ $\vec{r}$, ta định nghĩa

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

Ý nghĩa hình học được trình bày trong hình bên. Nếu hai điểm P và Q có vectơ vị trí là $\vec{r}(t)$ và $\vec{r}(t+h)$ tương ứng thì $\overrightarrow{PQ}$ là biểu diễn hình học của $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$, xem như là vectơ cát tuyến của đường cong.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Nếu $h > 0$ thì $[\overrightarrow{r}(t+h) - \overrightarrow{r}(t)]/h$ có cùng hướng với $\overrightarrow{r}(t+h) - \overrightarrow{r}(t)$. Khi $h \to 0$, có vẻ như vectơ này tiếp cận với một vectơ nằm trên đường tiếp tuyến. Vì lý do này mà $\overrightarrow{r}'(t)$ được gọi **vectơ tiếp tuyến** với đường cong định bởi $\overrightarrow{r}$ tại điểm P, miễn là tồn tại $\overrightarrow{r}'(t)$ và $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$. Tiếp tuyến với đường cong tại P là đường thẳng qua P có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{r}'(t)$.

Đôi khi, ta cũng xét **vectơ tiếp tuyến đơn vị** định bởi

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\left|\overrightarrow{r}'(t)\right|}.$$

Định lý

Nếu $\overrightarrow{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, với $f,\ g,\ h$ là các hàm số khả vi, thì

$$\overrightarrow{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle = f'(t)\overrightarrow{i} + g'(t)\overrightarrow{j} + h'(t)\overrightarrow{k}$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Qui tắc đạo hàm

Nếu $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ và $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ là hai hàm vectơ khả vi, c là hằng số thực, f là hàm số thực một biến khả vi, thì

1. $$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)]=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(t)+\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'(t)$$
2. $$\frac{d}{dt}[c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)]=c\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(t)$$
3. $$\frac{d}{dt}[f(t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)]=f'(t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)+f(t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(t)$$
4. $$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)]=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(t)\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)+\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'(t)$$
5. $$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)\times\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)]=\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(t)\times\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t)+\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(t)\times\overrightarrow{\boldsymbol{v}}'(t)$$
6. $$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(f(t))]=f'(t)\overrightarrow{\boldsymbol{u}}'(f(t))$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Hệ quả

Nếu $\vec{r}$ là hàm vectơ khả vi và $\left|\vec{r}(t)\right| = c$ (là hằng số độc lập với t) thì $\vec{r}\,'(t)$ là vectơ vuông góc với $\vec{r}(t)$, với mọi t.

Chứng minh. Từ giả thiết, ta suy ra $\left|\vec{r}(t)\right|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2$. Lấy đạo hàm theo t ở hai vế, ta được

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0, \quad \forall t.$$

Suy ra $2\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$, nghĩa là $\vec{r}\,'(t)$ vuông góc với $\vec{r}(t)$.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Tại một điểm trên một đường cong không gian $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t)$ trơn (khả vi), có nhiều vectơ cùng vuông góc với vectơ tiếp tuyến đơn vị $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)$, mà ta đơn cử hai hai trường hợp: Vì $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)\right| = 1$ (hằng số độc lập với t) nên $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)$ vuông góc với $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)$. Do đó ta có định nghĩa sau

Vectơ pháp tuyến & Vectơ phó pháp tuyến (tạm dịch)

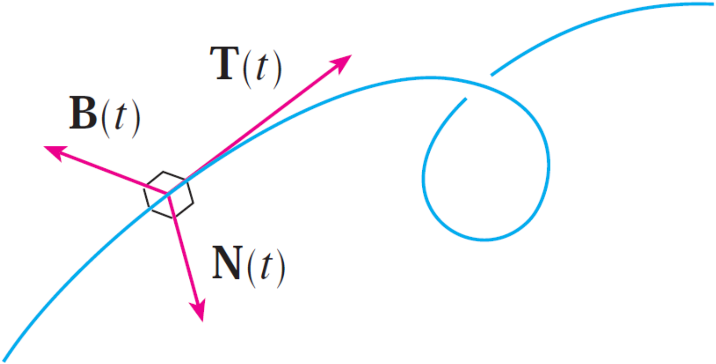
Cho đường cong không gian $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t)$ khả vi. Các vectơ sau

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t) = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)\right|}, \quad \overrightarrow{\boldsymbol{B}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) \times \overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t)$$

lần lượt được gọi là vectơ pháp tuyến (đơn vị) vectơ phó pháp tuyến. Nhắc lại rằng $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'(t)}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'(t)\right|}$ là vectơ tiếp tuyến đơn vị của đường cong.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Hình minh họa cho vectơ tiếp tuyến, pháp tuyến và phó pháp tuyến của đường cong



Ghi chú. Hình trên trích trong J. Stewart, Calculus 6th, Section 13.3. Hướng của $\overrightarrow{B}(t)$ như hình trên bị ngược, lỗi in.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Độ dài đường cong.

Giả sử một đường cong (trong không gian hoặc trong mặt phẳng) có phương trình vectơ là

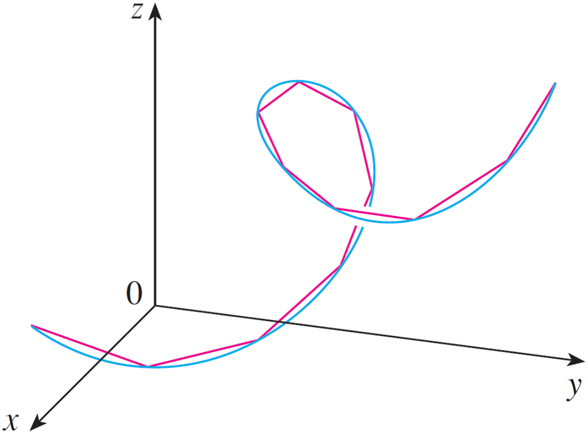
$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle \text{ hoặc } \vec{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle, \text{ với } a \leq t \leq b,$$

trong đó các đạo hàm f', g', h' liên tục trên $[a, b]$. Hơn nữa, khi t tăng từ a đến b, điểm $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ (hoặc là $P\big(f(t), g(t)\big)$) không đi qua khoảng nào của đường cong nhiều hơn một lần. Khi đó, độ dài của đường cong được định nghĩa bởi công thức sau

$$L = \int_a^b \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \tag{1.7}$$

$$\text{hoặc là } L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt. \tag{1.8}$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong



Ý tưởng để thiết lập công thức tính độ dài đường cong ở (1.7)-(1.8) là lấy giới hạn tổng độ dài các đoạn thẳng gấp khúc nối các điểm liên tiếp trên đường cong, khi số điểm dần đến vô hạn.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Công thức độ dài độc lập với cách tham số hóa

Một đường cong được biểu diễn bởi phương trình vectơ, hay tham số theo nhiều cách. Ví dụ, một đường cong đơn C có hai cách biểu diễn sau

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad 1 \leq t \leq 2$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \quad 0 \leq u \leq \ln 2$$

Nếu ta dùng công thức tính độ dài đường cong ở (1.8) theo hai cách tham số hóa trên thì ta có cùng kết quả.

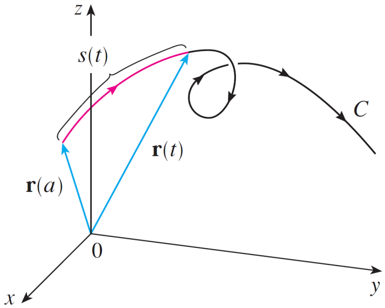
Nói một cách tổng quát, sau đây ta sẽ thấy khi công thức (1.7)-(1.8) được dùng để tính độ dài đường cong, thì kết quả sẽ độc lập với cách tham số hóa đường cong.

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Xét đường cong C cho bởi hàm vectơ

$$\overrightarrow{r}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} + h(t)\overrightarrow{k}$$
$$a \le t \le b$$

trong đó $\overrightarrow{r}'$ liên tục và khi t tăng từ a đến b thì đường cong được vẽ đúng 1 lần (1 nét, không trùng lại). Ta định nghĩa **hàm số độ dài cung** s bởi



$$s(t) = \int_a^t \left|\overrightarrow{r}'(u)\right| du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du \qquad (1.9)$$

Nghĩa là $s(t)$ là độ dài một phần của C từ $\overrightarrow{r}(a)$ đến $\overrightarrow{r}(t)$ như hình bên. Theo định lý cơ bản của giải tích (giáo trình giải tích B1) thì

$$\frac{ds}{dt} = \left|\overrightarrow{r}'(t)\right|$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Người ta thường **tham số hóa đường cong theo độ dài cung**, bởi vì một cách tự nhiên thì độ dài cung là do hình dạng đường cong quyết định và không phụ thuộc vào hệ thống tọa độ nào cả. Nếu đường cong $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t)$ cho trước theo tham số t và $s(t)$ là độ dài cung cho bởi (1.9), thì ta có thể giải t như là một hàm biến s: $t = t(s)$. Vậy ta tham số hóa lại đường cong (tham số s)

$$C : \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(s) = \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\big(t(s)\big)$$

1.3. Hàm vectơ một biến và đường cong

Ví dụ

Hãy tham số hóa lại đường lò xo $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ theo độ dài cung được đo từ $(1,0,0)$ theo hướng tăng của t.

Giải. Điểm đầu $(1,0,0)$ tương ứng với $t = 0$. Ta có

$$\frac{ds}{dt} = \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{(-\sin^2 t)^2 + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

do đó $s = s(t) = \int_0^t \left|\vec{r}\,'(u)\right| du = \int_0^t \sqrt{2}du = t\sqrt{2}$. Thay $t = s/\sqrt{2}$, ta có tham số hóa của lò xo theo độ dài cung như sau

$$\vec{r}\big(t(s)\big) = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{i} + \sin\frac{s}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{k} \qquad s \geq 0$$

□

ĐẠO HÀM RIÊNG
& SỰ KHẢ VI
CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

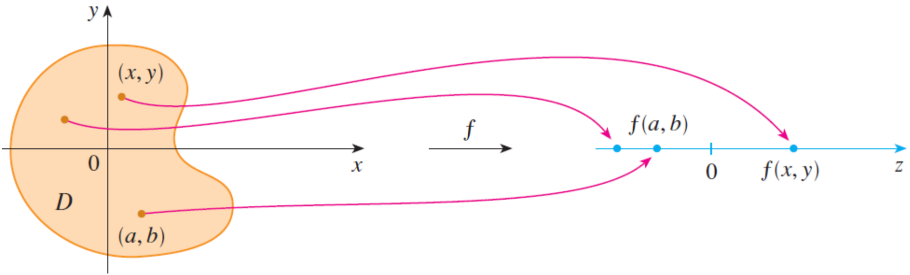
2.1. Hàm số nhiều biến

Hàm số hai biến

- **Hàm số hai biến** $\boldsymbol{f}$ là một qui tắc gán mỗi cặp số thực có thứ tự (x, y), thuộc một tập hợp D, với duy nhất một số thực $f(x, y)$. Tập hợp D được gọi là **miền xác định** của f. **Miền giá trị** của f là tập hợp các giá trị mà f có, nghĩa là tập $\left\{f(x, y) | (x, y) \in D\right\}$.
- Ta thường viết $z = f(x, y)$ để hiển thị giá trị của f tại một điểm (x, y) nói chung của miền xác định.
- Nếu f được biểu diễn bởi một biểu thức mà không được chỉ rõ miền xác định, thì ta hiểu ngầm miền xác định của f là tập hợp các cặp số (x, y) làm cho biểu thức hàm có nghĩa.

2.1. Hàm số nhiều biến

Hàm số hai biến có miền xác định là tập con của $\mathbb{R}^2$, miền giá trị trong $\mathbb{R}$. Do đó, ta có thể dùng sơ đồ mũi tên sau đây để diễn tả hàm số f có miền xác định D là một phần của mặt phẳng xy.



2.1. Hàm số nhiều biến

Có bốn cách biểu diễn một hàm số hai biến

- Diễn đạt bằng lời
- Trưng bảng giá trị
- Diễn đạt bằng công thức đại số
- Biểu diễn bằng đồ thị hoặc các đường đồng mức.

2.1. Hàm số nhiều biến

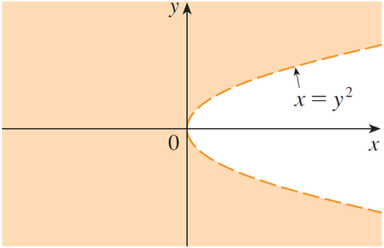
Ví dụ

Hàm số trong mỗi câu sau được biểu diễn bởi công thức đại số. Hãy tính $f(3,2)$ và tìm miền xác định của nó.

(a) $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

Giải

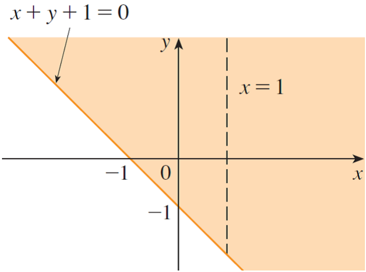
(a) $f(3,2) = 3\ln(2^2 - 3) = 3\ln 1 = 0$.
Vì $\ln(y^2 - x)$ chỉ xác định khi $y^2 - x > 0$, nghĩa là $x < y^2$. Do đó miền xác định là $\{(x,y) | x < y^2\}$. Đây là tập hợp các điểm nằm bên trái parabola $x = y^2$ như hình bên.



2.1. Hàm số nhiều biến

(b) $f(3,2) = \dfrac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
Biểu thức của hàm f có nghĩa khi mẫu khác 0, biểu thức trong căn không âm. Do đó miền xác định của f là

$$\{(x,y) | x+y+1 \geq 0,\ x \neq 1\}.$$



Bất đẳng thức $x+y+1 \geq 0$, hay $y \geq -x-1$, mô tả các điểm (x,y) nằm trên hoặc phía trên đường thẳng $y = -x-1$, trong khi $x \neq 1$ nói lên rằng đường thẳng $x = 1$ bị loại khỏi miền xác định.

2.1. Hàm số nhiều biến

Ví dụ. Chỉ-số-lạnh-cảm-tính là đại lượng W phụ thuộc vào nhiệt độ T và vận tốc gió v, ta viết $W = f(T, v)$. Hàm số f được diễn tả bằng bảng giá trị sau (ví dụ, $f(-5, 50) = -15$)

Wind speed (km/h)

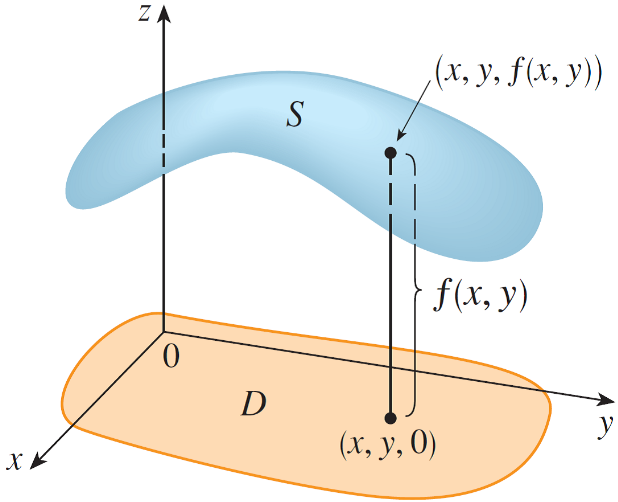
Actual temperature (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

2.1. Hàm số nhiều biến

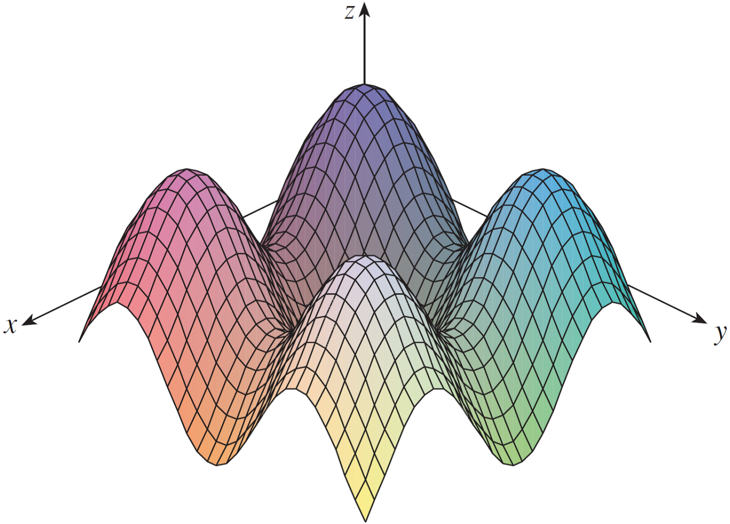
Đồ thị hàm số hai biến

Nếu hàm số hai biến f có miền xác định D thì đồ thị của f là tập hợp các điểm (x, y, z) trong $\mathbb{R}^3$ sao cho $z = f(x, y)$ và (x, y) thuộc D. Nói chung, đồ thị này có dạng mặt cong.



2.1. Hàm số nhiều biến

Ví dụ. Hàm số f định bởi $f(x, y) = \sin x + \sin y$ có đồ thị như hình sau

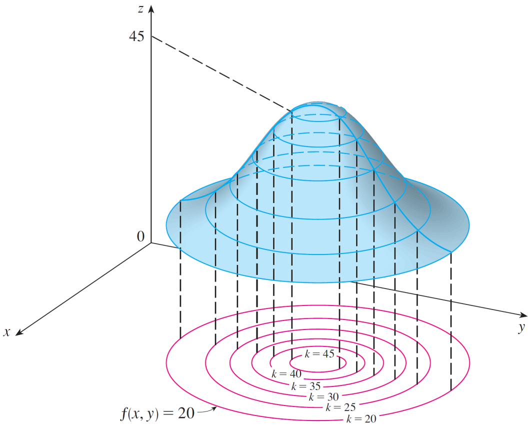


2.1. Hàm số nhiều biến

Các đường đồng mức

Các đường đồng mức của một hàm số f, có hai biến, là những đường cong (trong mặt phẳng xy) có phương trình $f(x, y) = k$, với k là hằng số thuộc miền giá trị của f.

Nói cách khác, vết của đồ thị hàm f với mặt ngang $z = k$ có hình chiếu lên mặt-xy là đường đồng mức.

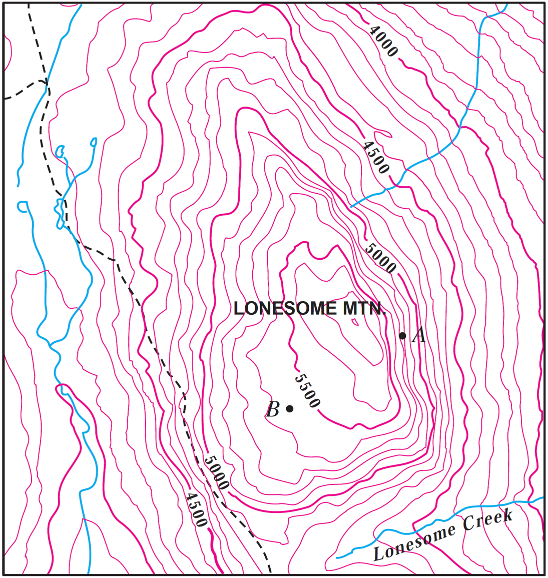


Tập hợp các đường đồng mức trong mặt-xy được gọi là contour map, một thuật ngữ của ngành địa lý, dùng để mô tả địa hình trên bản đồ.

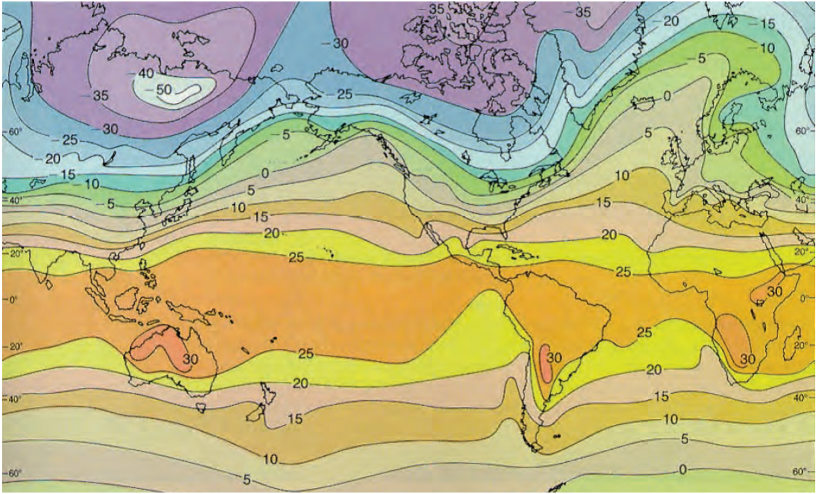
2.1. Hàm số nhiều biến

Hình bên trình bày các đường đồng mức trong bản đồ địa hình của núi Lonesome, mô tả độ cao của các vị trí khác nhau so với mặt nước biển. Bề mặt địa hình xem như đồ thị của hàm số hai biến.

Tương tự, trong ngành địa lý cũng có bản đồ các đường đẳng áp (**isobars**), đường đẳng nhiệt (**isothermals**).

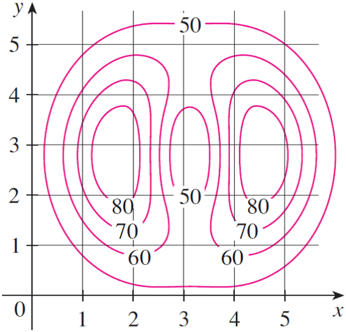


2.1. Hàm số nhiều biến



Bản đồ trên trình bày các đường đẳng nhiệt, mô tả nhiệt độ trung bình của mặt nước biển trên thế giới (độ Celcius) vào tháng Giêng, 1989.

2.1. Hàm số nhiều biến



Ví dụ

Hình bên là contour map của hàm số hai biến f. Dựa vào đó, hãy ước đoán giá trị của $f(1,3)$ và $f(4,5)$.

Giải. Điểm $(1,3)$ nằm ở phần giữa hai đường đồng mức có giá trị z là 70 và 80. Chúng ta ước đoán

$$f(1,3) \approx 73$$

Tương tự, chúng ta ước đoán

$$f(4,5) \approx 56.$$

2.1. Hàm số nhiều biến

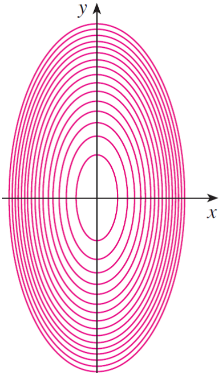
Ví dụ

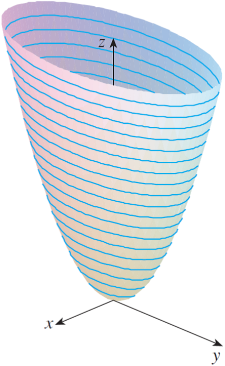
Hãy phác họa vài đường đồng mức và đồ thị của hàm số $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

Giải. Các đường đồng mức là

$$4x^2 + y^2 = k \text{ hay } \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1,$$

với $k > 0$, mô tả họ các đường ê-lip với độ dài các trục là $\sqrt{k}/2$ và $\sqrt{k}$. Hình bên là các đường ê-lip với $k = 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ \ldots;\ 4$.





Nâng các đường đồng mức lên độ cao k tương ứng thì ta được các vết của đồ thị với mặt $z = k$.

2.1. Hàm số nhiều biến

Hàm số ba biến

- **Hàm số ba biến**, f, là một qui tắc gán mỗi bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z), trong miền xác định $D \subset \mathbb{R}^3$, với duy nhất số thực được ký hiệu là $f(x, y, z)$.
- Ta không thể biểu diễn đồ thị của hàm số ba biến bởi hình vẽ. Tuy nhiên ta có thể biểu diễn **các mặt đồng mức** của f, là các mặt cong có phương trình $f(x, y, z) = k$, với k thuộc miền giá trị của f.

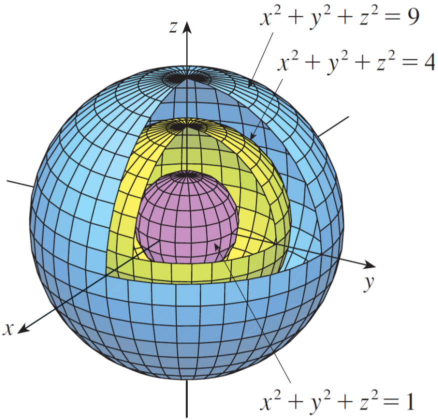
Ví dụ, nhiệt độ T tại mỗi điểm trên mặt đất phụ thuộc vào kinh độ x, vĩ độ y và thời điểm t. Vì thế, ta có thể viết $T = f(x, y, t)$.

2.1. Hàm số nhiều biến

Ví dụ

Tìm các mặt đồng mức của hàm số ba biến $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Giải. Các mặt đồng mức là $x^2 + y^2 + z^2 = k$, $k \geq 0$. Các phương trình này mô tả họ các mặt cầu đồng tâm tại gốc $\mathbf{0}$, bán kính $\sqrt{k}$. Khi điểm (x, y, z) chạy khắp mặt cầu bất kỳ tâm tại gốc $\mathbf{0}$ thì giá $f(x, y, z)$ không đổi.



2.1. Hàm số nhiều biến

Hàm số n biến

- **Hàm số n biến**, f, là một qui tắc gán mỗi bộ-thứ-tự-n-số (n-tuple) thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, với duy nhất một số thực $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Chúng ta ký hiệu không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các n-tuple.
- Mỗi phần tử trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ có thể được ký hiệu ngắn gọn là điểm P, có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hoặc tương ứng 1-1 với một vectơ vị trí $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{OP} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Do đó, ta có ba cách nhìn về một hàm số f xác định trên một tập con của $\mathbb{R}^n$ như sau:
    - Đó là hàm số phụ thuộc n biến thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$
    - Đó là hàm số một biến là **điểm**, $z = f(P)$
    - Đó là hàm số một biến là **vectơ**, $z = f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$.

  Cả ba cách nhìn trên đều hữu dụng theo từng ngữ cảnh.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Định nghĩa giới hạn

Cho f là hàm số hai biến xác định trên D và (a, b) là **điểm tụ** của D, nghĩa là, D luôn chứa những điểm có thể gần (a, b) tùy ý. Ta nói rằng **Giới hạn của $\boldsymbol{f(x, y)}$ khi $\boldsymbol{(x, y)}$ tiến về $\boldsymbol{(a, b)}$** bằng L, và ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L, \tag{2.1}$$

có nghĩa là với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó có một số $\delta > 0$ sao cho

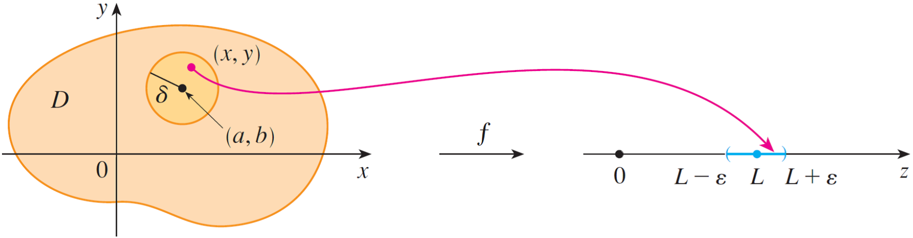
$$\text{nếu } (x, y) \in D \text{ và } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ thì } \left|f(x, y) - L\right| < \varepsilon$$

Những cách viết khác của (2.1) là

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \quad \text{hoặc} \quad f(x, y) \to L \text{ khi } (x, y) \to (a, b)$$

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

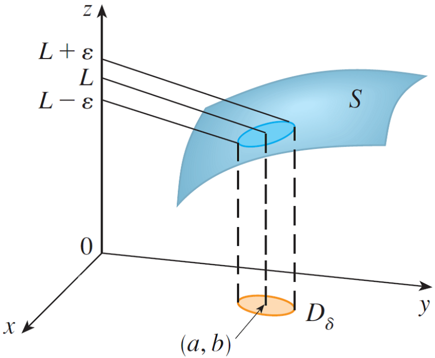
Lưu ý rằng $\left|f(x,y) - L\right|$ là độ lớn sai số giữa $f(x,y)$ và L, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ là khoảng cách giữa hai điểm (x,y) và (a,b). Do đó, định nghĩa trên được hiểu đại khái rằng sai số giữa $f(x,y)$ và L có thể nhỏ tùy ý, miễn là điểm (x,y) đủ gần (và không trùng) điểm (a,b). Hình dưới minh họa ý đó



Với $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó ta tìm được đĩa tròn D_δ tâm (a,b), bán kính δ sao cho mọi điểm trong đĩa tròn được f ánh xạ vào khoảng $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Một cách khác minh họa định nghĩa giới hạn là với số $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó ta tìm được đĩa tròn D_δ sao cho khi (x, y) nằm trong đĩa D_δ thì phần tương ứng của đồ thị nằm giữa hai mặt phẳng ngang $z = L - \varepsilon$ và $z = L + \varepsilon$.



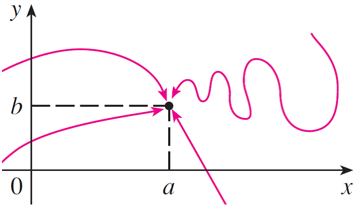
2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Đối với giới hạn hàm số một biến, $\lim_{x \to a} f(x)$, thì x tiến về a theo hai hướng, trái và phải. Nhắc lại rằng giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$.

Đối với giới hạn hàm hai biến, $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$, thì (x, y) có thể tiến về (a, b) theo vô số hướng, miễn là (x, y) vẫn trong miền xác định của f. Do đó

Hệ quả của định nghĩa giới hạn

Nếu $f(x, y) \to L_1$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo đường cong C_1; $f(x, y) \to L_2$ khi $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo đường cong C_2, trong đó $L_1 \neq L_2$, thì không tồn tại $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x)$.



2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Ví dụ

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ không tồn tại.

Giải. Đặt $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Trước hết, cho (x, y) tiến về (nhưng không trùng) $(0, 0)$ dọc theo trục Ox. Khi đó $y = 0$ dẫn đến $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$, do đó

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo Ox.}$$

Tiếp theo, cho (x, y) tiến về (không trùng) $(0, 0)$ dọc theo trục Oy bằng cách lấy $x = 0$. Khi đó $f(0, y) = -y^2/y^2 = -1$, suy ra

$$f(x, y) \to -1 \quad \text{khi } (x, y) \to (0, 0) \text{ dọc theo Oy.}$$

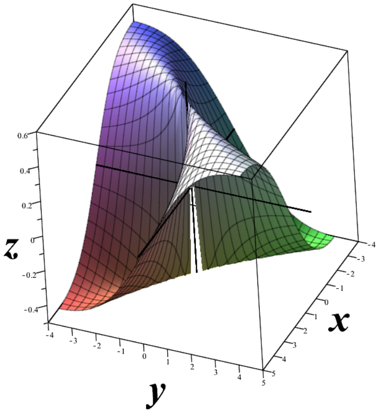
Vì f có hai giới hạn khác nhau dọc theo hai hướng khác nhau nên giới hạn đã cho không tồn tại.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Ví dụ

Cho hàm số $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Khảo sát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.



Hình bên là đồ thị hàm số f, không xác định tại $(0,0)$. Có vẻ như khi (x,y) tiến dần về $(0,0)$ thì điểm $P\big(x,y,f(x,y)\big)$ trên đồ thị không tiến dần về một độ cao nhất định nào. Sinh viên tự chứng minh không tồn tại giới hạn trên.

Tương tự, hãy khảo sát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Ví dụ

Khảo sát giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

Giải. Với mọi $(x,y) \neq (0,0)$, ta có

$$\left|f(x,y) - 0\right| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \qquad (2.2)$$

Từ đó, ta dễ đoán rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Thật vậy, cho trước số $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta thấy số dương $\delta = \varepsilon/3$ thỏa điều sau, dựa vào (2.2),

$$\text{nếu } 0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \text{ thì } \left|f(x,y)-0\right| \leq 3\delta = \varepsilon,$$

nghĩa là ta dựa vào định nghĩa giới hạn để chứng minh $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Các tính chất bảo toàn phép tính của giới hạn (ví dụ như giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn, nếu tồn tại, v.v. . .) trong hàm số một biến cũng đúng cho hàm số hai biến. Định lý giới hạn kẹp cũng vậy:

Định lý giới hạn kẹp

Giả sử

- tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L$
- $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$, đúng với mọi (x,y) trong một đĩa tròn nào đó có tâm (a,b).

Khi đó, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Định nghĩa sự liên tục

Hàm số f hai biến, xác định trên D, được gọi là liên tục tại điểm (a, b) có nghĩa là

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b) \text{ (đương nhiên } (a, b) \in D)$$

Ta nói f liên tục trên D (hoặc nói vắn tắt là liên tục) nghĩa à f liên tục tại mọi điểm thuộc D.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Định lý 1

1. Nếu các hàm số (hai biến) liên tục thì tổng, hiệu, tích và thương (nếu thương có nghĩa) của chúng cũng là một hàm số liên tục.
2. Nếu f là hàm số hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)) và g là số một biến liên tục (hoặc liên tục tại $f(a, b)$) thì hàm hợp $g \circ f$ là hàm hai biến liên tục (hoặc liên tục tại (a, b)).

Ví dụ. Hàm sin là hàm số một biến liên tục, và hàm f định bởi $f(x, y) = x + y$ cũng liên tục (sẽ nói sau). Khi đó hàm hợp $\sin \circ f(x, y) = \sin(x + y)$ cũng liên tục.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Đối với hàm số hai biến f liên tục tại (a, b) thì việc tính giới hạn của $f(x, y)$ khi (x, y) tiến đến (a, b) rất đơn giản, bằng cách thế (x, y) bởi (a, b). Vấn đề đặt ra là những dạng hàm nào là liên tục. Ta bắt đầu với ba hàm đơn giản nhất

Định lý 2

Hàm hằng cùng với hai hàm hình chiếu p_1 và p_2 định bởi

$$p_1(x, y) = x; \qquad p_2(x, y) = y,$$

là các hàm liên tục.

Sinh viên tự kiểm chứng điều trên, dựa vào định nghĩa giới hạn và hai bất đẳng thức sau

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Hàm sơ cấp hai biến

Các hàm sơ cấp một biến, các hàm trong định lý 2, kết hợp với định lý 1 sẽ tạo ra các hàm hai biến mới liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định, mà ta tạm gọi là các hàm hai biến sơ cấp.

Ví dụ. Các hàm số f, g sau đây là các hàm sơ cấp, được thành lập theo cách nói trên

$$f(x,y) = \frac{x-y}{2x^2+y^2},\quad f \text{ liên tục tại } (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(x,y) = \ln\left(\frac{x-y}{2x^2+y^2}\right),\quad \text{liên tục tại } (x,y) \neq (0,0) \text{ sao cho } x > y$$

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Ví dụ

Khảo sát sự liên tục của hàm f và g định bởi

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b)\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Giải. Tại điểm $(a,b) \neq (0,0)$ thì cả f và g đều liên tục, vì chúng là hàm sơ cấp trên tập $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sau đây, ta khảo sát tính liên tục tại (0,0). Trong ví dụ trước, ta đã chứng minh rằng khi $(x,y) \to (0,0)$ thì $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ và $g(x,y) \to 0 \neq 2 = g(0,0)$. Vậy f liên tục tại $(0,0)$ và g không liên tục tại $(0,0)$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Giới hạn và Sự liên tục của hàm *n* biến

Mỗi phần tử $(x_1, \ldots, x_n)$ của $\mathbb{R}^n$ có thể đồng nhất với điểm P (có tọa độ $(x_1, \ldots, x_n)$) hoặc đồng nhất với vectơ $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Nếu xét thêm phần tử khác là $A(a_1, \ldots, a_n)$ hoặc $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, ta ký hiệu

- $AP = \left| \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}} \right| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$
- $P \to A$, hoặc $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, có nghĩa là $AP = \left| \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}} \right| \to 0$.

2.2. Giới hạn và Sự liên tục

Định nghĩa giới hạn và sự liên tục của hàm n biến

Cho f là một hàm số xác định trên tập hợp D_f, con của $\mathbb{R}^n$.

1. Cho điểm A, được đồng nhất với vectơ vị trí $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, là **điểm tụ** của D_f, theo nghĩa D_f luôn chứa những điểm P (đồng nhất với $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$) gần với điểm A một cách tùy ý. Khi đó, ký hiệu $\lim\limits_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{a}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = L$, hoặc $\lim\limits_{P \to A} f(P) = L$, có nghĩa là với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, theo đó tồn tại số $\delta > 0$ sao cho
$$\text{nếu} \quad \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D_f \quad \text{và} \quad 0 < \left|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right| < \delta \quad \text{thì} \quad \left|f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) - L\right| < \varepsilon$$
2. Giả sử $A \in D_f$. Ta nói f liên tục tại A có nghĩa là $\lim\limits_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{a}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = f(\overrightarrow{\boldsymbol{a}})$, hoặc $\lim\limits_{P \to A} f(P) = f(A)$.

2.3. Đạo hàm riêng

Định nghĩa đạo hàm riêng

Cho f là hàm số hai biến x và y. Nếu ta xem y như hằng số và lấy đạo hàm theo x, ta được đạo hàm riêng của f theo x, ký hiệu bởi f_x. Tương tự, ta được đạo hàm riêng của f theo y, ký hiệu bởi f_y. Nói cách khác, f_x và f_y là các hàm số được định bởi

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h},$$

miễn là các giới hạn trên tồn tại.

Tuy nhiên, các công thức đạo hàm một biến vẫn áp dụng được nếu có thể.

2.3. Đạo hàm riêng

Các ký hiệu của đạo hàm riêng

Nếu viết $z = f(x, y)$, người ta cũng có nhiều ký hiệu khác cho đạo hàm riêng như sau

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Ví dụ. Với $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, tìm $f_x(2, 1)$ và $f_y(2, 1)$ như sau: Xem y là hằng số, lấy đạo hàm theo x, ta được

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3, \quad \text{suy ra} \quad f_x(2, 1) = 3(2^2) + 2(2)(1^3) = 16$$

Tương tự, ta có

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y, \quad \text{suy ra} \quad f_y(2, 1) = 3(2^2)(1^2) - 4(1) = 8.$$

2.3. Đạo hàm riêng

Ví dụ

Tìm f_x và f_y với f định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Giải. Để tính $f_x(0,0)$, ta dùng định nghĩa

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h.0/(h^2+0^2) - 0}{h} = 0.$$

Tại điểm $(x,y) \neq (0,0)$, ta có thể xem y như hằng số và tính đạo hàm theo x như hàm một biến và ta được

2.3. Đạo hàm riêng

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vai trò của x và y giống nhau trong biểu thức f, ta đổi vai trò của x và y trong biểu thức f_x sẽ được

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2x}{(y^2+x^2)^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ghi chú. Thay $y = 0$, x tùy ý, ta có $f(x,0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f_x(x,0) = 0$, suy ra $f_x(0,0) = 0$ thay vì dùng định nghĩa đạo hàm như trên. Tương tự $f_y(0,y) = 0$.

2.3. Đạo hàm riêng

Ví dụ: đạo hàm riêng của hàm ẩn

Phương trình $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ là phương trình của một mặt cong trong không gian Oxyz. Nếu một mảnh nhỏ nào đó của mặt cong là đồ thị của một hàm số $z = f(x, y)$, f là ẩn hàm, hãy tìm $\partial z/\partial x$ và $\partial z/\partial y$.

Giải. Xem y như hằng số, lấy đạo hàm hai vế của phương trình theo x, và lưu ý z vẫn phụ thuộc x như là hàm số, ta có

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6y\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Giải phương trình trên để tìm $\partial z/\partial x$, ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}; \text{ tương tự ta cũng có } \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

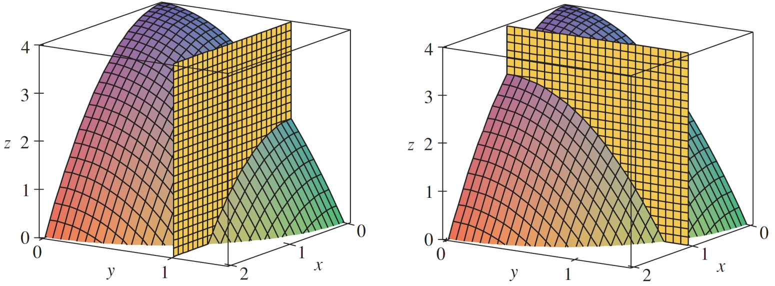
2.3. Đạo hàm riêng

Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM RIÊNG

Ta bắt đầu với ví dụ sau: nếu $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ thì $f_x(1, 1)$ và $f_y(1, 1)$ mang ý nghĩa gì? Ta có

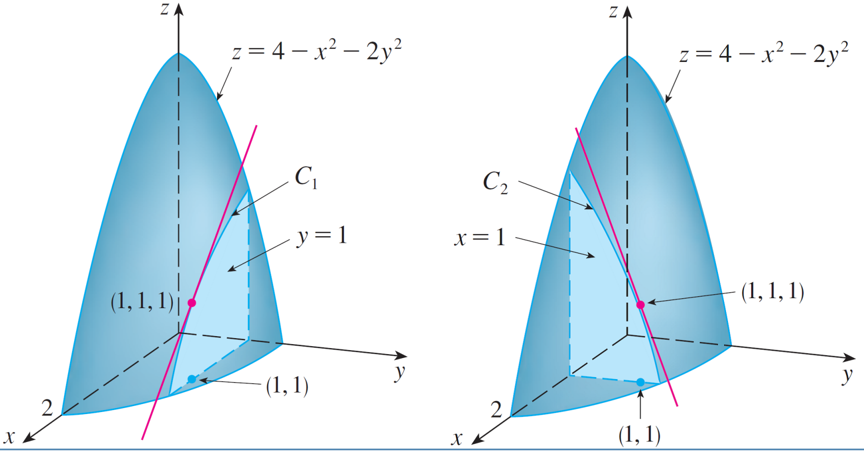
$$f_x(x, y) = -2x,\ \ f_y(x, y) = -4y, \quad \text{suy ra} \quad f_x(1, 1) = -2,\ \ f_y(1, 1) = -4.$$

Đồ thị của f là mặt paraboloid. Vết của đồ thị với mặt $y = 1$ là đường parabola $z = 2 - x^2$; với mặt $x = 1$ là đường parabola $z = 3 - 2y^2$.



2.3. Đạo hàm riêng

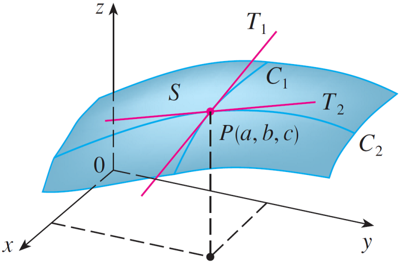
Trong mặt phẳng $y = 1$, đường parabola $C_1 : z = 2 - x^2$) có tiếp tuyến tại điểm $(1, 1, 1)$ với độ dốc (hệ số góc) là $f_x(1, 1) = -2$; vết parabola $C_2 : z = 3 - 2y^2$ trên mặt $x = 1$ có tiếp tuyến tại điểm $(1, 1, 1)$ với độ dốc là $f_y(1, 1) = -4$



2.3. Đạo hàm riêng

Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

Cho S là đồ thị của $z = f(x, y)$ và điểm $P(a, b, c) \in S$, với $c = f(a, b)$. Gọi $C_1 = S \cap \{y = b\}$, xem như là đồ thị hàm một biến $g(x) = f(x, b)$; Gọi $C_2 = S \cap \{x = a\}$, là đồ thị hàm một biến $G(y) = f(a, y)$. Vậy $g'(a) = f_x(a, b)$ và $G'(b) = f_y(a, b)$ là độ dốc của các tiếp tuyến T_1 và T_2 đối với C_1 và C_2 tương ứng, tại điểm $P(a, b, c)$, bên trong các mặt phẳng $y = b$ và $x = a$.



2.3. Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng của hàm *n* biến

Đối với hàm nhiều hơn 2 biến, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ta cũng định nghĩa đạo hàm riêng theo biến x_i theo cách tương tự trên

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Ngoài ra ta cũng có các ký hiệu khác

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f.$$

2.3. Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng bậc cao

Nếu f là hàm số hai biến, f_x và f_y cũng là các hàm số hai biến, vì thế các đạo hàm riêng của chúng là $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ và $(f_y)_y$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp hai. Nếu viết $z = f(x, y)$ thì ta có các ký hiệu sau

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

2.3. Đạo hàm riêng

Định lý Clairaut (cũng gọi là định lý Schwartz)

Nếu f xác định trên một đĩa D tâm (a, b) sao cho tồn tại hai đạo hàm f_{xy} và f_{yx} cùng liên tục trên D. Khi đó

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \qquad \forall (x, y) \in D,$$

nghĩa là đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp không phụ thuộc thứ tự lấy đạo hàm theo các biến, miễn là chúng liên tục.

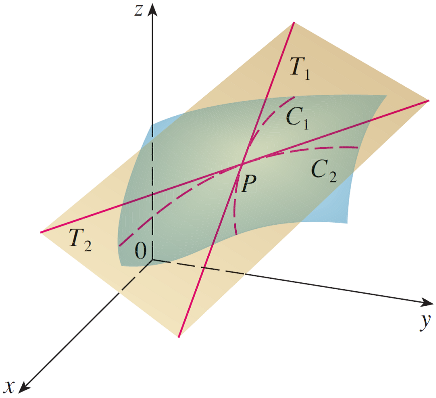
Ghi chú. Ta cũng có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 3 hoặc cao hơn, ví dụ

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}.$$

Sử dụng định lý Clairaut, nếu các đạo hàm riêng f_{xyy}, f_{yxy} và f_{yyx} cùng liên tục thì chúng bằng nhau (định lý Clairaut mở rộng cho đạo hàm bậc cao hơn).

2.4. Sự khả vi

Như đã biết ở mục 2.3, hai đạo hàm riêng $f_x(x_0, y_0)$ và $f_y(x_0, y_0)$ xem như là độ dốc của hai tiếp tuyến T_1 và T_2, tương ứng với vết $C_1 = S \cap \{y = y_0\}$ và $C_2 = S \cap \{x = x_0\}$, tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ trên đồ thị S của hàm số $z = f(x, y)$. Trong hình bên, ta **"có cảm giác"** mặt phẳng chứa T_1 và T_2 tiếp xúc với mặt cong đồ thị S.

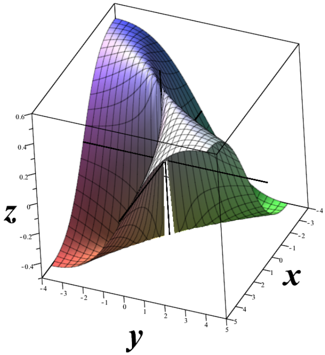


2.4. Sự khả vi

Tuy nhiên, nếu ta xét ví dụ sau thì hình ảnh khác hẳn: Với hàm số f định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ví dụ trước đây đã chứng minh $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Vết của hai mặt phẳng đứng Oxz và Oyz với đồ thị hàm f chính là hai trục Oy và Ox. Tuy nhiên, hình bên cho thấy mặt phẳng chứa hai trục này là Oxy chẳng có vẻ gì tiếp xúc với đồ thị tại điểm O(0, 0, 0).



2.4. Sự khả vi

Vậy sự tồn tại hai đạo hàm riêng không đủ để ta nói mặt cong đồ thị của hàm hai biến có mặt phẳng tiếp xúc với nó. Do đó, người ta đưa ra khái niệm khả vi sau đây

Định nghĩa sự khả vi

Cho hàm số hai biến $z = f(x, y)$ và điểm (a, b) là **điểm trong** của miền xác định, theo nghĩa có một đĩa tròn tâm (a, b) nằm lọt trong miền xác định. Ta ký hiệu $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$ và $\Delta z = f(x, y) - f(a, b)$. Ta nói f **khả vi** tại (a, b) có nghĩa là tồn tại $f_x(a, b)$ và $f_y(a, b)$ sao cho Δz có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \tag{2.3}$$

trong đó ε_1 và ε_2 cùng tiến về 0 khi $(x, y) \to (a, b)$ (cũng có nghĩa là $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$).

2.4. Sự khả vi

Ý nghĩa của sự khả vi.

1. Nếu viết lại đẳng thức (2.3) dưới dạng

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(y-b)$$

thì hàm tuyến tính (bậc nhất) hai biến
$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ là xấp xỉ "tốt" cho $f(x,y)$ khi (x,y) gần với (a,b). Hàm $L(x,y)$ còn gọi là **tuyến tính hóa** của f tại (a,b).

2. Theo nghĩa xấp xỉ tốt ở trên thì đồ thị của L được gọi là mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của f (nói chung là mặt cong) tại điểm $P\big(a,b,f(a,b)\big)$. Nói cách khác, phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị của f tại điểm P là

$$L(x,y) - z = 0.$$

2.4. Sự khả vi

Từ định nghĩa khả vi và đẳng thức (2.3), ta dễ dàng suy ra

Định lý

Nếu hàm số f khả vi tại (a, b) thì f liên tục tại (a, b).

Trong phạm vi của giải tích B1, chúng ta thừa nhận định lý sau

Định lý (điều kiện đủ để khả vi)

Nếu các đạo hàm riêng f_x và f_y tồn tại trong một lân cận của (a, b) và liên tục tại (a, b), thì f khả vi tại (a, b)

Chú ý. Vẫn tồn tại hàm số có các đạo hàm riêng và các đạo hàm riêng này không liên tục tại (a, b), nhưng hàm đã cho vẫn khả vi tại (a, b). Chúng ta sẽ có một ví dụ về hàm như vậy trong các trang sau.

2.4. Sự khả vi

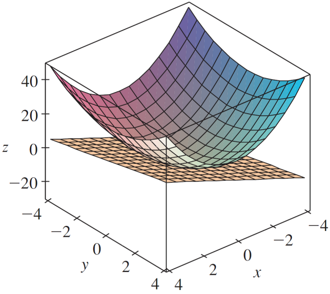
Ví dụ. Hàm số $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ có các đạo hàm riêng $f_x(x,y) = 4x$ và $f_y(x,y) = 2y$ là các hàm sơ cấp, liên tục tại mọi điểm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, do đó f khả vi mọi nơi.

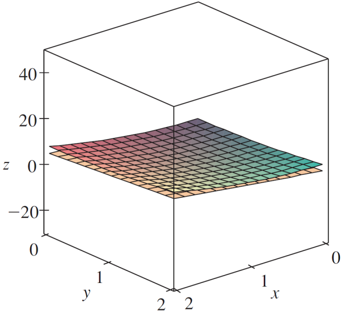
Ta xét điểm $(1,1,3)$ thuộc đồ thị của f, $f_x(1,1) = 4$, $f_y(1,1) = 2$ và ta có phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại $(1,1,3)$ là

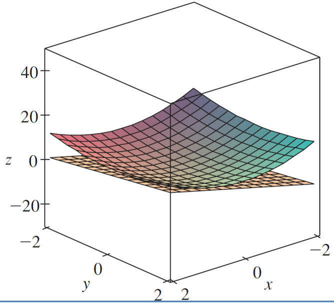
$$z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1).$$

Hình ở trang sau trình bày đồ thị của f cùng với mặt phẳng tiếp xúc tại $(1,1,3)$.

2.4. Sự khả vi







Chúng ta thấy rằng khi càng nhìn gần điểm $(1, 1, 3)$, mặt cong đồ thị của f và mặt phẳng tiếp xúc (đồ thị của L) dường như gần sát nhau hơn, do đó mới nói $L(x, y) = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$ là xấp xỉ tốt cho f khi (x, y) gần $(1, 1)$.

2.4. Sự khả vi

Ví dụ

Cho hàm f định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chứng minh f_x không liên tục tại $(0,0)$, tuy nhiên f vẫn khả tại $(0,0)$.

Giải. Giới hạn sau tồn tại

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h^2 \sin\frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{|h|}\right) = 0,$$

2.4. Sự khả vi

là do bất đẳng thức $0 \leq \left| h \sin \frac{1}{|h|} \right| \leq |h|$ và định lý giới hạn kẹp. Tương tự $f_y(0,0) = 0$. Nếu đặt $\Delta x = x - 0$, $\Delta y = y - 0$, $\Delta z = f(x,y) - f(0,0)$, $\varepsilon_1 = x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ và $\varepsilon_2 = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thì đẳng thức (2.3) thỏa, đồng thời ε_1 và ε_2 cùng tiến về 0 khi $(x,y) \to (0,0)$. Vậy f khả vi tại $(0,0)$. Ngoài ra

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Với dãy điểm $\left(M_n(\frac{1}{2n\pi}, 0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ hội tụ về $(0,0)$ khi $n \to \infty$, ta thay vào f_x thì $f_x(M_n) = -1 \not\to f_x(0,0)$ khi $n \to \infty$. Vậy f_x không liên tục tại $(0,0)$.

2.4. Sự khả vi

Vi phân của hàm hai biến

Giả sử f khả vi tại điểm (x, y) nào đó. Ta ký hiệu dx và dy là hai số tùy ý (thường là nhỏ) và đặt $\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$. Theo định nghĩa của sự khả vi, ta có

$$\Delta z = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy$$

trong đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(dx, dy) \to (0, 0)$.

Biểu thức

$$df = dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.4}$$

được gọi là vi phân của f. Nếu dx và dy mang giá trị rất nhỏ thì

$$\Delta z \approx dz \tag{2.5}$$

2.4. Sự khả vi

Nhận xét.

Nếu f khả vi tại (a, b) và với (x, y) gần (a, b), ta đặt $dx = x - a$, $dy = y - b$, $\Delta z = f(x, y) - f(a, b)$ thì (2.4)-(2.5) cho

$$f(x, y) - f(a, b) = \Delta z \approx dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

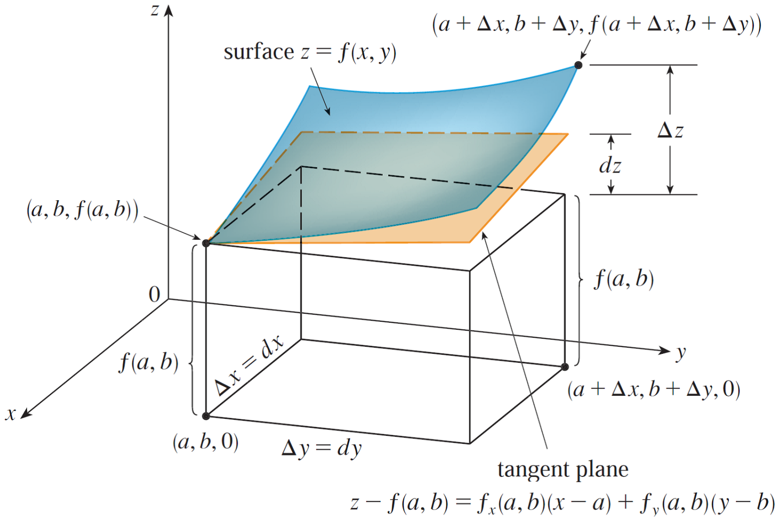
hay cách viết khác là phép xấp xỉ tuyến tính

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz, \text{ nghĩa là } f(x, y) \approx L(x, y)$$

trong đó $L(x, y)$ là tuyến tính hóa của f đã được đề cập ở sau định nghĩa của sự khả vi.

2.4. Sự khả vi

Minh họa cho $\Delta z \approx dz$



2.4. Sự khả vi

Ví dụ

Một hình nón có bán kính đáy 10cm, độ cao 25cm. Giả sử sai số của phép đo độ dài không quá 0,1cm. Dùng vi phân, hãy ước tính sai số khi tính thể tích hình nón theo bán kính và chiều cao nói trên.

2.4. Sự khả vi

Giải. Ký hiệu r và h là bán kính đáy và chiều cao của hình nón, thì thể tích hình nón là $V = f(r,h) = \pi r^2 h/3$, $f_r = 2\pi rh/3$ và $f_h = \pi r^2/3$. Bán kính và chiều cao đo được là 10cm và 25cm, bán kính và chiều cao chính xác (không thể biết) là $10 + dr$ và $25 + dh$. Khi đó, sai số thể tích là

$$|\Delta V| = \left|f(10+dr, 25+dh) - f(10,25)\right| \approx |dV|$$

$$|dV| = \left|f_r(10,25)dr + f_h(10,25)dh\right| = \left|\frac{500\pi}{3}dr + \frac{100\pi}{3}dh\right|$$

$$\le \frac{500\pi}{3}|dr| + \frac{100\pi}{3}|dh|$$

Giả thiết cho $|dr| \le 0,1$ và $|dh| \le 0,1$. Do đó

$$|\Delta V| \approx |dV| \le \frac{500\pi}{3}(0,1) + \frac{100\pi}{3}(0,1) = 20\pi$$

Vậy sai số thể tích (được ước tính) không quá $20\pi\ \mathrm{cm}^3 \approx 63\ \mathrm{cm}^3$.

2.4. Sự khả vi

Một cách tương tự, ta cũng có định nghĩa sự khả vi cho hàm n biến.

Định nghĩa

Cho hàm số n biến $z = f(x_1, \dots, x_n)$ xác định trên D con của $\mathbb{R}^n$. Xét $(a_1, \dots, a_n)$ là điểm trong của D, theo nghĩa có số $\delta > 0$ sao cho $\forall |r| < \delta, (a_1 + r, \dots, a_n + r) \in D$. Với $i = \overline{1, n}$, đặt $\Delta x_i = x_i - a_i$, $\Delta z = f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$. Ta nói hàm f khả vi tại $(a_1, \dots, a_n)$ có nghĩa là tồn tại các đạo hàm riêng $f_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$ với $i = \overline{1, n}$ sao cho Δz có dạng

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a_1, \dots, a_n)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta x_i,$$

trong đó $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \to (0, \dots, 0)$ khi $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \to (0, \dots, 0)$, hay $(x_1, \dots, x_n) \to (a_1, \dots, a_n)$.

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Quy tắc mắt xích (The chain rule), hay đạo hàm hàm hợp

Giả sử $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ là hàm số nhiều biến khả vi. Khi đó

1. Nếu $i = \overline{1, n}, x_i = g_i(t)$, nghĩa là các biến cũ x_i phụ thuộc một biến mới t, và nếu các hàm g_i cũng khả vi thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

2. Nếu $i = \overline{1, n}, x_i = g_i(t_1, \ldots, t_m)$, nghĩa là n biến cũ x_i phụ thuộc vào m biến mới t_k, $k = \overline{1, m}$, và nếu các hàm g_i (m biến) cũng khả vi thì

$$\frac{\partial z}{\partial t_k} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}$$

   với $k = \overline{1, m}$.

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ

Nếu $z = x^2y + 3xy^4$, trong đó $x = \sin 2t$ và $y = \cos t$, tìm dz/dt khi $t = 0$.

Giải. Quy tắc mắt xích cho

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t). \end{aligned}$$

Không cần thiết phải thay x và y theo t, chỉ cần biết rằng khi $t = 0$ thì $x = 0$ và $y = 1$. Do đó

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-\sin 0) = 6.$$

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Ví dụ

Nếu $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$, trong đó f là hàm số hai biến khả vi, hãy chứng minh g thỏa phương trình $t\dfrac{\partial g}{\partial s} + s\dfrac{\partial g}{\partial t} = 0$.

Giải. Đặt $x = s^2 - t^2$ và $y = t^2 - s^2$ thì $g(s,t) = f(x,y)$ và quy tắc mắt xích cho

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Do đó

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

Vấn đề tính đạo hàm của hàm ẩn đã được biết qua ví dụ ở sau định nghĩa sự khả vi, cũng như ở phần giải tích B1. Ta sẽ nhắc lại nó theo cách nhìn của quy tắc mắt xích (đạo hàm hàm hợp) để đi đến hai công thức (2.6) và (2.7) được đề cập ở trang sau.

Ghi chú.

Khi thực hành, ta có thể tính toán trực tiếp như trong ví dụ trước đây, nếu không muốn nhớ hai công thức (2.6) và (2.7).

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Nếu F là hàm số hai biến khả vi, thì phương trình $F(x,y)=0$ biểu diễn một đường cong phẳng nói chung. Giả sử một phần của đường cong này là đồ thị của hàm số $y=f(x)$, f là ẩn hàm chưa biết (điều này xảy ra với một giả thiết của định lý hàm ẩn, không nêu ở đây). Ta sẽ tìm $f'(x)$, tức là $\dfrac{dy}{dx}$. Lấy đạo hàm theo biến x ở hai vế của phương trình $F(x,y)=0$ theo quy tắc mắt xích, ta được

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Vì $dx/dx=1$ và giả sử $\partial F/\partial y\neq 0$, giải tìm dy/dx, ta được

$$\boxed{f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}} \tag{2.6}$$

2.5. Quy tắc mắt xích và Đạo hàm của hàm ẩn

Tương tự, nếu F là hàm số ba biến khả vi. Phương trình $F(x, y, z) = 0$ biểu diễn một mặt cong nói chung. Giả sử rằng một phần của mặt cong là đồ thị của một hàm $z = f(x, y)$, f là ẩn hàm chưa biết (điều này xảy ra với giả thiết của định lý hàm ẩn, không đề cập ở đây). Ta tìm $\partial f/\partial x$ và $\partial f/\partial y$. Dùng quy tắc mắt xích, lấy đạo hàm theo x ở hai vế phương trình $F(x, y, z) = 0$ (xem y là hằng), ta được

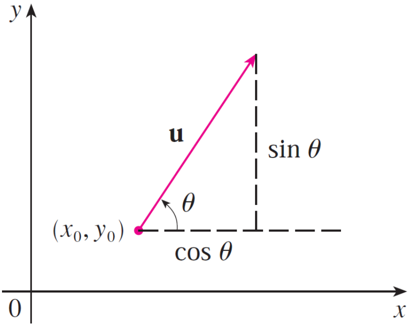
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \text{lưu ý } \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \text{ và } \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ (xem } y \text{ là hằng)}$$

Giả sử $\partial F/\partial z \neq 0$, giải tìm $\partial z/\partial x$, đồng thời công thức $\partial z/\partial y$ cũng đạt được theo cách tương tự

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}} \tag{2.7}$$

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Xét điểm (x_0, y_0) là điểm trong của miền xác định của hàm $z = f(x, y)$, tại đó ta đặt một vectơ đơn vị (có độ dài 1) $\overrightarrow{u} = \langle a, b\rangle$. Vectơ đơn vị $\overrightarrow{u}$ cũng được viết dưới dạng $\overrightarrow{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta\rangle$, với θ là góc quay từ tia Ox đến tia có hướng của $\overrightarrow{u}$, còn gọi là góc chỉ hướng của $\overrightarrow{u}$



Nhắc lại

Với vectơ $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ thì vectơ đơn vị cùng hướng với $\overrightarrow{v}$ là $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$.

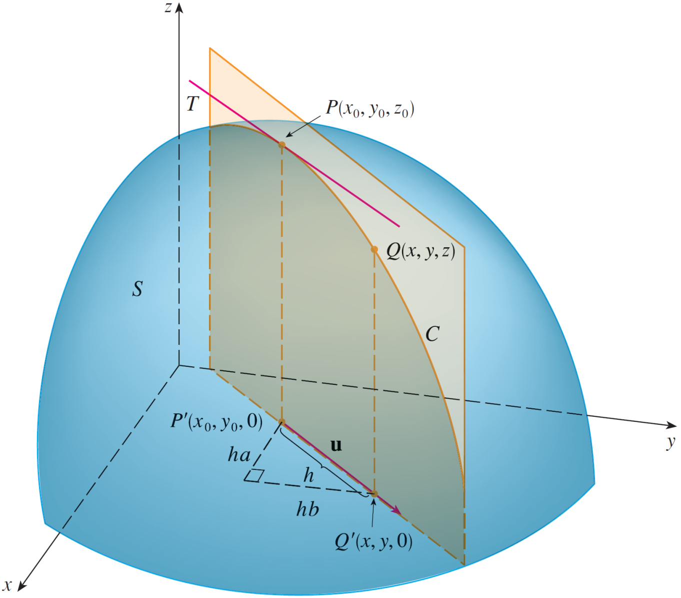
2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Trong mặt phẳng Oxy, điểm $Q'(x, y) = (x_0 + ah, y_0 + bh)$, với $h > 0$ thay đổi, sẽ chạy trên tia có gốc tại $P'(x_0, y_0)$ và có hướng của $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \langle a, b \rangle$. Khoảng cách giữa $Q'(x, y)$ và $P'(x_0, y_0)$ là h (vì độ dài $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ là 1). Đặt $z_0 = f(x_0, y_0)$ và $z = f(x, y)$ Khi đó giá trị hàm có lượng biến thiên là $\Delta z = z - z_0$. Xét hai điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ và $Q(x, y, z)$ trên đồ thị của f, đường thẳng PQ có độ dốc là

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nếu $h \to 0$ (nghĩa là Q' chạy đến P') thì giới hạn của độ dốc PQ (nếu có) sẽ được lấy làm độ dốc của tiếp tuyến tại P theo hướng $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ (xem hình trang sau).

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient



Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Các hình ảnh trước nói lên ý nghĩa trực quan của khái niệm sau đây

Định nghĩa đạo hàm theo hướng

Đạo hàm theo hướng của f tại điểm (x_0, y_0) theo hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \langle a, b\rangle$ là

$$D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

miễn là giới hạn trên tồn tại.

Trường hợp riêng, với $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \langle 1, 0\rangle$ thì $D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f$ trở thành đạo hàm riêng f_x; với $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \langle 0, 1\rangle$ thì $D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f$ trở thành đạo hàm riêng f_y.

Ý nghĩa. Từ một điểm trên mặt cong đồ thị (giống như bề mặt đồi núi), đi về mỗi hướng sẽ có độ dốc riêng, chính là đạo hàm theo hướng đó tại điểm đang xét.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Ghi chú

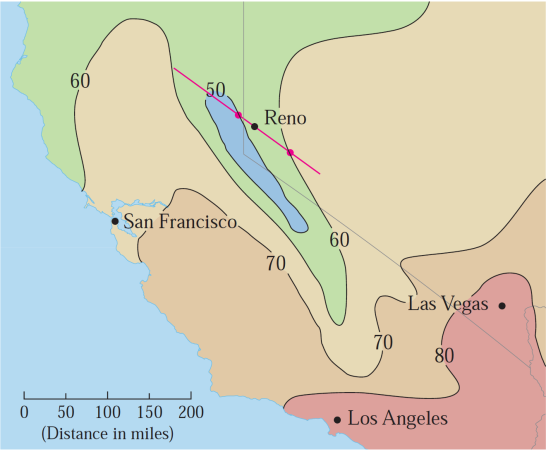
Định nghĩa trên cũng áp dụng cho hàm nhiều biến với hình thức sau

$$D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(P) = D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + h\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) - f(\overrightarrow{\boldsymbol{a}})}{h}$$

trong đó $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \equiv P(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Ví dụ, bản đồ các đường đẳng nhiệt kế bên mô tả nhiệt độ $T(x, y)$ của bang California và Neveda lúc 3:00PM vào một ngày tháng 10, 1997. Hãy ước tính tốc độ biến thiên nhiệt độ theo khoảng cách tại địa điểm Reno, khi đi về hướng Đông-Nam.



2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Giải. Vectơ đơn vị chỉ hướng Đông-Nam là $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, -1\rangle$, tuy nhiên ta không cần quan tâm đến biểu thức này. Thay vào đó, ta vẽ đường thẳng qua Reno, hướng về Đông-Nam như trong bản đồ. Tốc độ biến thiên nhiệt theo khoảng cách, khi hướng về Đông-Nam, tại Reno, tức là $D_{\vec{u}}T(Reno)$, được xấp xỉ bởi tốc độ biến thiên trung bình của nhiệt độ giữa hai điểm bị cắt bởi đường thẳng nói trên với hai đường đẳng nhiệt $T = 50$ và $T = 60$. Khoảng cách giữa hai điểm này khoảng 75 dặm (dựa vào tỉ xích số trên bản đồ). Khi đi về hướng Đông-Nam, T biến thiên từ 50^0F đến 60^0F, cho thấy $D_{\vec{u}}T(Reno) > 0$, là tốc độ tăng nhiệt. Vậy

$$D_{\vec{u}}T(Reno) \approx \frac{60-50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0,13\,^0F/\text{dặm}.$$

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Định lý

Nếu hàm số f khả vi tại (x, y) thì f có đạo hàm theo mọi hướng của vectơ đơn vị $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \langle a, b\rangle$, và được tính theo công thức

$$D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \tag{2.8}$$

Người ta đưa vào ký hiệu sau

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \nabla f(x, y) = \big\langle f_x(x, y), f_y(x, y)\big\rangle \tag{2.9}$$

được gọi là vectơ gradient của f, cũng được gọi là nabla của f hoặc đọc là "del f". Khi đó công thức (2.8) được viết dưới hình thức khác

$$\boxed{D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(x, y) = \operatorname{grad} f(x, y) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \nabla f(x, y) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}} \tag{2.10}$$

Chú ý. Các hình thức (2.8)-(2.10) cũng được mở rộng cho hàm f có n biến, với $\nabla f = \left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Ví dụ

Tính $D_{\vec{u}} f(x,y)$ và $D_{\vec{u}} f(1,2)$ nếu $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ và $\vec{u}$ là vectơ đơn vị có góc chỉ hướng $\theta = \pi/6$.

Giải. Công thức (2.8) cho

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[3x^2\sqrt{3} - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\Big] \end{aligned}$$

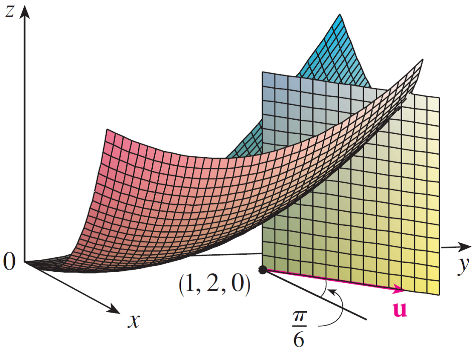
Vì vậy

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \frac{1}{2}\Big[3(1^2)\sqrt{3} - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})(2)\Big] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

$\square$

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Đạo hàm $D_{\vec{u}}f(1,2)$ trong ví dụ trước đại diện cho tốc độ biến thiên của z theo hướng của $\vec{u}$. Đó là độ dốc của đường tiếp tuyến với đường cong giao tuyến của mặt $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ với mặt phẳng đứng đi qua $(1,2,0)$ theo hướng của $\vec{u}$ như hình bên.



2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

CỰC ĐẠI HÓA ĐẠO HÀM THEO HƯỚNG

Xét hàm n biến f và điểm $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ thuộc miền xác định. Giả sử tồn tại $D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ theo mọi hướng $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$. Câu hỏi đặt ra là đi theo hướng nào, giá trị của $f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ sẽ thay đổi nhanh nhất, tức là giá trị của $D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ lớn nhất? Câu trả lời được cho trong định lý sau

Định lý

Giả sử f là hàm số n biến khả vi. Giá trị lớn nhất của $D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$ là $\left|\nabla f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})\right|$, đạt được khi $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ cùng hướng với vectơ $\nabla f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$, nghĩa là khi $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \dfrac{1}{\left|\nabla f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})\right|} \nabla f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})$.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Chứng minh. Gọi ϕ là góc hợp bởi $\overrightarrow{u}$ và $\nabla f(\overrightarrow{x})$. Từ công thức (2.10), ta có

$$\begin{aligned} D_{\overrightarrow{u}} f(\overrightarrow{x}) &= \nabla f(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{u} = \left|\nabla f(\overrightarrow{x})\right| \left|\overrightarrow{u}\right| \cos\phi \\ &= \left|\nabla f(\overrightarrow{x})\right| \cos\phi \quad (\text{vì } |\overrightarrow{u}| = 1) \\ &\leq \left|\nabla f(\overrightarrow{x})\right| \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos\phi = 1$ hay $\phi = 0$, nghĩa là $\overrightarrow{u}$ cùng hướng với $\nabla f(\overrightarrow{x})$, lúc đó $D_{\overrightarrow{u}} f(\overrightarrow{x})$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\nabla f(\overrightarrow{x})\right|$. □

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Ví dụ

Cho hàm số $f(x,y) = xe^y$. Tính đạo hàm của f tại $P(2,0)$ theo hướng từ P đến $Q(1/2,2)$. Xác định hướng làm cho đạo hàm tại P lớn nhất.

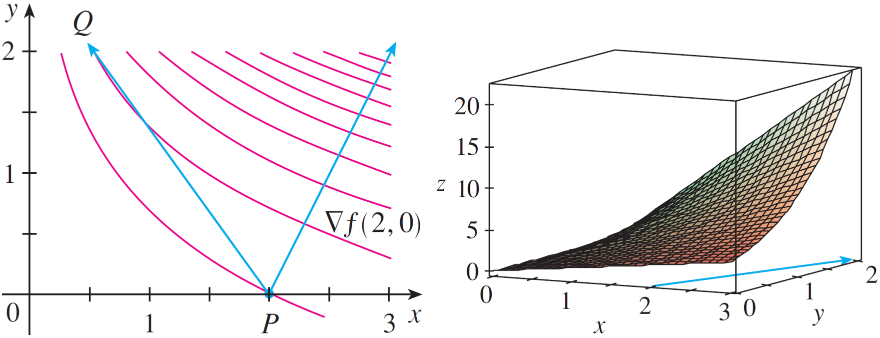
Giải. Ta có $\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle$; $\nabla f(P) = \langle 1,2\rangle$; $\overrightarrow{PQ} = \langle -\dfrac{3}{2}, 2\rangle$; vectơ đơn vị theo hướng $\overrightarrow{PQ}$ là $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \langle -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\rangle$. Đạo hàm của f tại P theo hướng $\overrightarrow{PQ}$ là

$$D_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} f(P) = \nabla f(P)\cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}} = 1\Big(-\frac{3}{5}\Big) + 2\Big(\frac{4}{5}\Big) = 1$$

Đạo hàm của f tại P theo hướng $\nabla f(P) = \langle 1,2\rangle$ sẽ đạt giá trị lớn nhất bằng $\left|\nabla f(P)\right| = \sqrt{5}$ □

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Hình dưới là contour map và đồ thị của hàm f. Hình bên phải cho thấy, nếu tại P đi theo hướng $\nabla f(P) = \langle 1, 2 \rangle$, đồ thị có độ dốc lớn nhất.



Nhận xét. Hình bên trái cho "cảm giác" rằng, vectơ $\nabla f(P) = \langle 1, 2 \rangle$, theo hướng đó hàm số có tốc độ biến thiên lớn nhất, là vectơ vuông góc với tiếp tuyến tại P của đường đồng mức qua P. Tại sao? ...

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT ĐỒNG MỨC

Định nghĩa của sự khả vi tại (a, b) của hàm $z = f(x, y)$ cũng cho khái niệm mặt phẳng tiếp với đồ thị (S) của f tại $P\big(a, b, f(a, b)\big)$, đó là mặt phẳng đồ thị của hàm $L(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(x - b) + f(a, b)$.

Sau đây, ta thiết lập khái niệm mặt phẳng tiếp xúc với mặt đồng mức của hàm 3 biến, có phương trình dạng $F(x, y, z) = k$, cũng được gọi là phương trình dạng chính tắc của mặt cong. Đồ thị (S) của hàm số $z = f(x, y)$ là một trường hợp riêng, đó mặt đồng mức của hàm số ba biến $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, nghĩa là $(S) : F(x, y, z) = 0$.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Mặt phẳng tiếp xúc

1. Cho hàm số 3 biến $F(x, y, z)$ khả vi tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$. Với hằng số $k = F(x_0, y_0, z_0)$, phương trình $F(x, y, z) = k$ biểu diễn một mặt đồng mức (level surface) (S) đi qua điểm P. Giả sử $\nabla F(P) = \langle f_x(P), f_y(P), f_z(P)\rangle \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Khi đó, mặt phẳng qua P nhận $\nabla F(P)$ làm vectơ pháp tuyến, có phương trình

$$f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) = 0 \qquad (2.11)$$

được gọi là mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại P.

2. Giả sử hàm 2 biến $f(x, y)$ khả vi tại điểm $P(x_0, y_0)$ và $\nabla f(P) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Khi đó, đường đồng mức $(C) : f(x, y) = k$, với $k = f(P)$, có tiếp tuyến tại P được định nghĩa là đường thẳng qua P, nhận $\nabla f(P)$ làm vectơ pháp tuyến, và có phương trình

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Giải thích. Sở dĩ người ta gọi mặt phẳng có phương trình (2.11) là mặt phẳng tiếp xúc với $(S) : F(x, y, z) = k$ tại $P(x_0, y_0, z_0)$, $k = F(P)$, là vì lý do sau: với mọi đường cong $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ nằm trong (S), và đi qua P (nghĩa là có t_0 sao cho $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$), nếu đường cong này có tiếp tuyến tại P thì tiếp tuyến đó luôn vuông góc với $\nabla F(P)$. Thật vậy, vì đường cong nằm trong (S) nên $F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$ với mọi t. Lấy đạo hàm theo t ở hai vế của phương trình này, dùng quy tắc mắt xích, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \text{hay} \qquad \nabla F \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

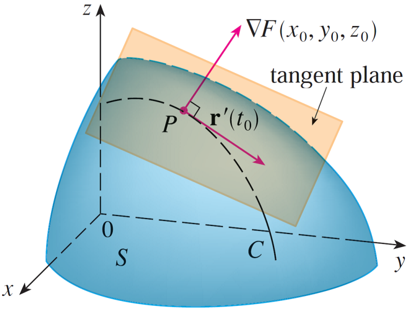
Thay $t = t_0$, ta được $\nabla F(P) \cdot \vec{r}\,'(t_0) = 0$, nghĩa là vectơ $\nabla F(P)$ vuông góc với vectơ chỉ phương tiếp tuyến của đường cong tại P.

Giải thích tương tự cho định nghĩa tiếp tuyến của đường đồng mức $f(x, y) = k$. □

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Người cũng gọi đường thẳng qua $P(x_0, y_0, z_0)$, có vectơ chỉ phương là $\nabla F(P)$, là đường pháp tuyến của mặt cong $(S) : F(x, y, z) = k$, $k = F(P)$, tại điểm P. Phương trình chính tắc của đường pháp tuyến này là

$$\frac{x - x_0}{F_x(P)} = \frac{y - y_0}{F_y(P)} = \frac{z - z_0}{F_z(P)}$$



với giả thiết các mẫu số ở trên khác 0.

Tương tự đối với hàm 2 biến $f(x, y)$, đường thẳng qua $P(x_0, y_0)$ với vectơ chỉ phương $\nabla f(P)$ sẽ vuông góc với tiếp tuyến tại P của đường đồng mức $f(x, y) = f(P)$.

2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

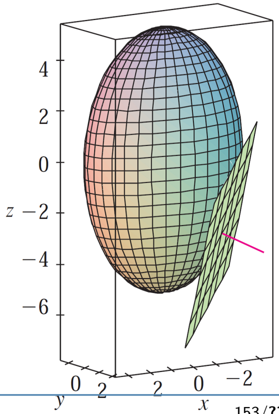
Ví dụ

Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến với mặt ellipsoid $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 3$, tại điểm $P(-2, 1, -3)$.

Giải. Mặt ellipsoid là mặt đồng mức với $k = 3$ của hàm 3 biến $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}$. Ta có $\nabla F = \langle x/2, 2y, 2z/9\rangle$, suy ra $\nabla F(P) = \langle -1, 2, -2/3\rangle$. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc và pháp tuyến tại P là

$$-1(x+2) + 2(y-1) - \frac{2}{3}(z+3) = 0$$

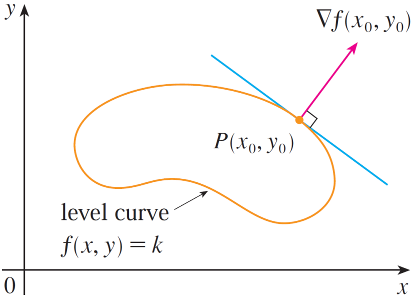
$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}} \qquad \square$$

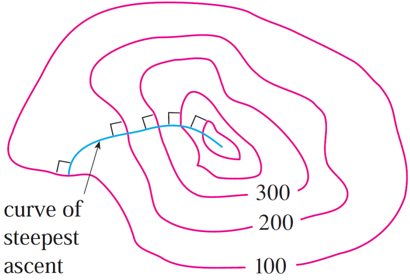


2.6. Đạo hàm theo hướng và vectơ gradient

Ý NGHĨA CỦA VECTƠ GRADIENT

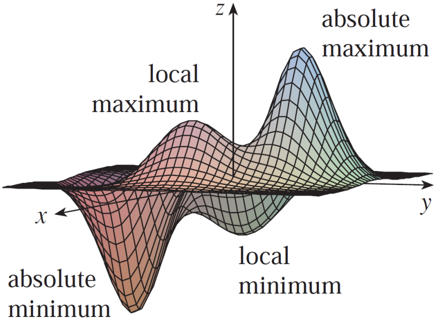
Như đã biết ở trước, vectơ gradient tại một điểm $P(x_0, y_0)$ của hàm số hai biến f, chỉ một hướng mà theo hướng đó giá trị hàm số có tốc độ tăng lớn nhất. Hướng này vuông góc với tiếp tuyến tại P của đường đồng mức $f(x, y) = f(P)$. Tại điểm $\big(x_0, y_0, f(P)\big)$ trên một đường viền của ruộng bậc thang, ta đi theo hướng vuông góc với các đường viền ruộng bậc thang (tượng trưng cho đồ thị của f), ta sẽ lên đỉnh đồi với độ dốc cao nhất.





2.7. Cực trị không điều kiện

Trên đồ thị của một hàm số như hình bên, có hai đỉnh đồi và hai thung lũng. Nếu điểm $(a, b, f(a, b))$ là đỉnh ngọn đồi thì $f(a, b)$ lớn mọi giá trị $f(x, y)$ gần đó, ta nói f có cực đại địa phương tại (a, b). Có một đỉnh đồi cao nhất, tại đó f đạt cực đại tuyệt đối, hay giá trị lớn nhất. Ta cũng có khái niệm tương tự cho điểm đáy thung lũng.



2.7. Cực trị không điều kiện

Định nghĩa

Một hàm số 2 biến f có **cực đại địa phương** (gọi tắt là cực đại) tại điểm (a, b) có nghĩa là tồn tại một đĩa tròn T tâm (a, b) bên trong miền xác định sao cho: $\forall (x, y) \in T, f(a, b) \geq f(x, y)$. Số $f(a, b)$ được gọi là **giá trị cực đại** (địa phương) của f. Nếu bất đẳng thức đúng với mọi (x, y) thuộc miền xác định của f thì ta nói f có **cực đại tuyệt đối** (hay là giá trị lớn nhất) tại điểm (a, b).

Nếu dấu bất đẳng thức ở trên đổi chiều, ta có khái niệm **cực tiểu địa phương**, **cực tiểu tuyệt đối**.

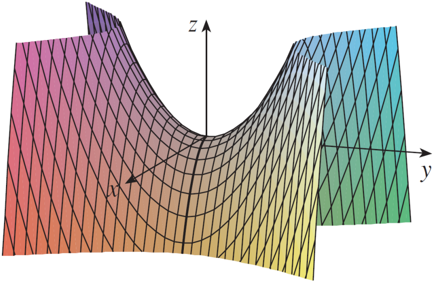
Định lý: điều kiện cần của cực trị

Nếu f đạt cực trị địa phương tại (a, b) thì (a, b) là **điểm dừng** (statonary point) của f, nghĩa là $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

2.7. Cực trị không điều kiện

Nếu thay $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ vào phương trình của mặt phẳng tiếp xúc, ta thấy mặt phẳng này nằm ngang, song song với mặt Oxy.

Chiều đảo của định lý trên không đúng. Ví dụ, xét hàm số $f(x,y) = y^2 - x^2$ có đồ thị như hình bên, thì $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, nghĩa là $(0,0)$ là điểm dừng của f, nhưng tại đó f không có cực trị. Ta gọi điểm dừng này là **điểm yên ngựa** (saddle point) của f.



2.7. Cực trị không điều kiện

Định lý: điều kiện đủ của cực trị

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một đĩa tròn tâm (a, b), đồng thời (a, b) là điểm dừng của f. Đặt

$$D(a,b) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b) \right]^2$$

(a) Nếu $D(a, b) > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì $f(a, b)$ là cực tiểu địa phương.

(b) Nếu $D(a, b) > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì $f(a, b)$ là cực đại địa phương.

(c) Nếu $D(a, b) < 0$ thì (a, b) là điểm yên ngựa, nghĩa là f không có cực trị tại (a, b).

(d) Nếu $D(a, b) = 0$ thì ta không có kết luận tổng quát, tùy bài toán cụ thể mà ta xét.

2.7. Cực trị không điều kiện

Ví dụ

Khảo sát cực trị của $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

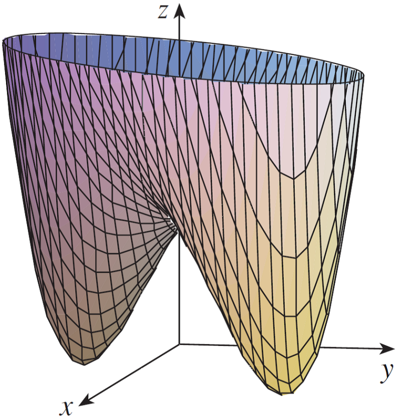
Giải. Sinh viên tự kiểm chứng:

- Các điểm dừng của f là $(0, 0)$, $(1, 1)$ và $(-1, -1)$.
- $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16$.

(a) Vì $D(0, 0) < 0$ nên $(0, 0)$ là điểm yên ngựa.

(b) Vì $D(1, 1) = 128$ và $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$ nên $(1, 1)$ là điểm cực tiểu.

(c) Vì $D(-1, -1) = 128$ và $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$ nên $(1, 1)$ cũng là điểm cực tiểu. $\square$

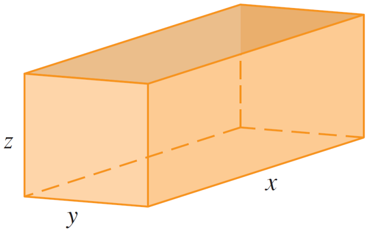


2.7. Cực trị không điều kiện

Ví dụ

Một hộp chữ nhật không có nắp, được làm từ $12\,\mathrm{m}^2$ bìa cứng. Hãy tìm thể tích lớn nhất của hộp này.

Giải. Với kích thước như hình bên thì thể tích hộp là $V = xyz$ với điều kiện $2xz + 2yz + xy = 12$. Từ điều kiện này thì $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, do đó thể tích là



$$V = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2} = 0$$

2.7. Cực trị không điều kiện

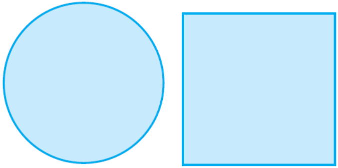
Vì $x > 0$ và $y > 0$ nên ta suy ra được $x = y$. Thay $y = x$ vào phương trình trên ta được $12 - 3x^2 = 0$, điều này cho $x = y = 2$ và $z = (12 - 2.2)/[2(2 + 2)] = 1$. Vậy $(2, 2, 1)$ là điểm dừng duy nhất. Hơn nữa, vật liệu hữu hạn sẽ cho thể tích hộp lớn nhất có thể, đạt được tại điểm dừng $(2, 2, 1)$ mà thôi

$$V_{\max} = 2.2.1 = 4\,(\mathrm{m}^3) \qquad \square$$

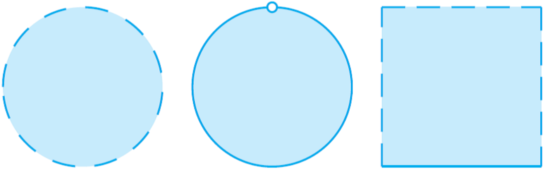
2.7. Cực trị không điều kiện

CỰC TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ta đã biết các bước tìm cực trị tuyệt đối của hàm một biến trên đoạn đóng $[a, b]$. Đối với hàm hai biến, ta đưa ra khái niệm tương tự đoạn đóng, đó là khái niệm **tập hợp đóng** trong $\mathbb{R}^2$, là tập hợp chứa mọi **điểm biên** của nó. Điểm (a, b) được gọi là điểm biên của một tập hợp D trong $\mathbb{R}^2$ có nghĩa là mọi đĩa tròn tâm (a, b) luôn có điểm chung với cả hai phần: D và phần bù $\mathbb{R}^2 \setminus D$.



Hình ảnh minh họa hai tập đóng



Hình minh họa ba tập hợp không đóng

2.7. Cực trị không điều kiện

Tập hợp D được gọi là **bị chặn** nghĩa là có một đĩa tròn chứa D. Nói cách khác, tập bị chặn không trải dài vô tận, nó bị bao quanh bởi một đường tròn. Ta thừa nhận định lý sau

Định lý

Nếu f là hàm số liên tục trên một tập D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, thì f đạt một cực đại tuyệt đối tại $(x_1, y_1) \in D$ và đạt một cực tiểu tuyệt đối tại $(x_2, y_2) \in D$.

Trong định lý trên, nếu (x_1, y_1) không nằm trên biên của D (không là điểm biên của D) mà nằm ở miền trong (là điểm trong của D) thì (x_1, y_1) phải là điểm dừng của f (nếu tồn tại các đạo hàm riêng của f). Tương tự cho điểm (x_2, y_2). Do đó ta có các bước tìm cực trị tuyệt đối như sau

2.7. Cực trị không điều kiện

Cách tìm cực trị tuyệt đối

Để tìm cực trị tuyệt đối của một hàm số f liên tục trên một tập D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^2$:

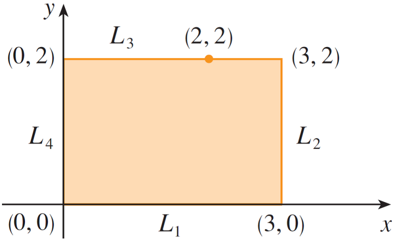
1. Tính các giá trị của f tại các điểm dừng bên trong D.
2. Tìm cực trị tuyệt đối của f *ở trên biên* của D.
3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong số các giá trị ở các bước 1 & 2 là cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối của f trên toàn D.

2.7. Cực trị không điều kiện

Ví dụ

Tìm cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối của $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên hình chữ nhật $D = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$.

Giải. Vì f là đa thức, hàm sơ cấp hai biến, nên liên tục trên D. Hơn nữa hình chữ nhật D bị chặn và đóng, do đó f có max và min trên D.



Bước 1: sinh viên tự kiểm chứng f có một điểm dừng duy nhất bên trong D là $(1,1)$ và $f(1,1) = 1$.

Bước 2: trên cạnh L_1 ta có $f(x,0) = x^2$, suy ra

$$\max_{L_1} f(x,0) = 3^2 = 9 \qquad \min_{L_1} f(x,0) = 0^2 = 0.$$

2.7. Cực trị không điều kiện

Trên cạnh L_2 thì $f(3, y) = 9 - 4y$, suy ra

$$\max_{L_2} f(3, y) = 9 - 4(0) = 9$$

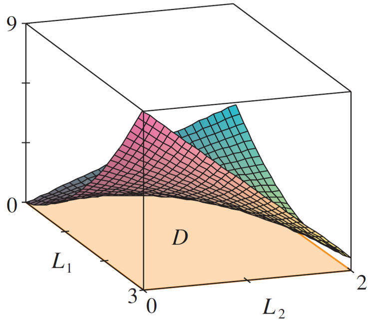
$$\min_{L_2} f(3, y) = 9 - 4(2) = 1.$$

Trên cạnh L_3 thì

$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, suy ra

$$\max_{L_3} f(x, 2) = (0 - 2)^2 = 4$$

$$\min_{L_3} f(x, 2) = (3 - 2)^2 = 1.$$



Trên cạnh L_4 thì $f(0, y) = 2y$, suy ra

$$\max_{L_4} f(0, y) = 2(2) = 4$$

$$\min_{L_4} f(0, y) = 2(0) = 0.$$

Bước 3: so sánh các giá trị ở bước 1 & 2 thì $\max_{D} f(x, y) = f(3, 0) = 9$ và $\min_{D} f(x, y) = f(0, 0) = f(2, 2) = 0.$ □

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

CỰC TRỊ CÓ MỘT ĐIỀU KIỆN

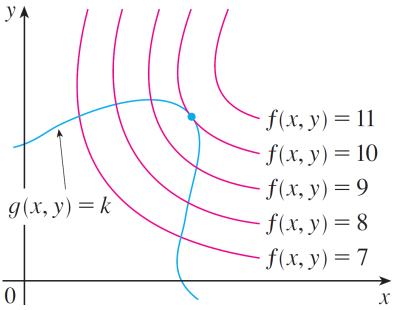
Trong một ví dụ trước đây, ta tìm thể tích lớn nhất, $V = xyz$, của hộp chữ nhật không có nắp với một điều kiện $2xy + 2xz + yz = 12$. Điều kiện này nói rằng vật liệu làm hộp chỉ có $12\,\mathrm{m}^2$ bìa cứng. Trong mục này, ta xét bài toán dạng đó

1. Tìm cực trị của hàm 3 biến $f(x, y, z)$ với một điều kiện $g(x, y, z) = k$, k là hằng số.
2. Tìm cực trị của hàm 2 biến $f(x, y)$ với một điều kiện $g(x, y) = k$.

Lagrange đưa ra một phương pháp giải quyết bài toán trên, được gọi là phương pháp nhân tử Lagrange.

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Cơ sở hình học của phương pháp nhân tử Lagrange được giải thích dễ hơn trong trường hợp hai biến: tìm cực trị của $f(x, y)$ với một điều kiện $g(x, y) = k$, nghĩa là điểm (x, y) bị hạn chế trên đường cong $g(x, y) = k$, (x, y) không chạy tự do trong mặt phẳng. Hình bên trình bày các đường đồng mức $f(x, y) = c$, với $c = \overline{7, 11}$, và đường cong màu xanh $g(x, y) = k$.



Khi (x, y) chạy trên đường xanh, giá trị $c = f(x, y)$ thay đổi. Có vẻ như khi $(x, y) = (x_0, y_0)$ làm cho $c_0 = f(x_0, y_0)$ là cực đại, thì tại đó đường xanh và đường đồng mức tiếp xúc nhau. Nói cách khác, tại điểm (x_0, y_0), vectơ pháp tuyến của đường xanh và đường đỏ cùng phương, nghĩa là có số λ sao cho $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$. Số λ được gọi là **nhân tử Lagrange**.

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Cơ sở hình học của phương pháp nhân tử Lagrange ở trên chỉ có tính trực quan. Lập luận chính xác ở trong phần chứng minh của định lý sau

Định lý: Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

Nếu hàm số 3 biến $f(x,y,z)$ khả vi và đạt cực trị tại $P(x_0,y_0,z_0)$ với một điều kiện $g(x,y,z)=k$, trong đó hàm g cũng khả vi và $\nabla g(P)\neq\overrightarrow{\mathbf{0}}$, thì tồn tại nhân tử Lagrange λ sao cho

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0).$$

Đối bài toán hai biến, kết quả cũng tương tự.

Chứng minh. Gọi (S) là mặt cong $g(x,y,z)=k$ thì $P\in(S)$. Với đường cong bất kỳ $(C):\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t)=\big\langle x(t),y(t),z(t)\big\rangle$ nằm trong (S) và đi qua P khi $t=t_0$, nghĩa là $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t_0)=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$, thì hàm hợp $h(t)=f\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ đạt cực trị tại t_0. Theo định lý Fermat của hàm một biến thì

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'(t_0) \end{aligned}$$

Điều này cho thấy vectơ $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ vuông góc với tiếp tuyến tại P của mọi đường cong (C) nằm trong mặt (S), nghĩa là $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại P, tức là $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$. Vậy có số λ sao cho

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) \qquad \square$$

Căn cứ vào định lý trên, ta có cách để tìm cực trị tuyệt đối (được giả sử rằng tồn tại) trên mặt cong của hàm số 3 biến, hoặc trên đường cong của hàm số 2 biến

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Phương pháp nhân tử Lagrange

Cho hai hàm số 3 biến f và g khả vi. Để tìm cực trị tuyệt đối của f (được giả sử rằng tồn tại) trên mặt cong $(S) : g(x, y, z) = k$, ta thực hiện các bước sau

(a) Tìm tất cả các giá trị của x, y, z và λ sao cho

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \quad \text{và} \quad g(x, y, z) = k$$

(b) Tính các giá trị của f tại các điểm (x, y, z) tìm được ở bước (a). Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong số các giá trị này chính là cực đại (cực tiểu) tuyệt đối của f trên mặt cong (S).

Trong trường hợp hai biến, cách làm tương tự.

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Ví dụ

Một hộp chữ nhật không có nắp, được làm từ $12\,\mathrm{m}^2$ bìa cứng. Tìm thể tích lớn nhất của một hộp như vậy.

Giải. Sự tồn tại của giá trị lớn nhất của thể tích $V = xyz$ với điều kiện $g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$ là điều tự nhiên, vì với vật liệu bìa cứng hữu hạn, không thể nào làm thể tích lớn tùy ý, mà chỉ đạt một thể tích tối đa cần tìm.

Trước hết ta giải hệ

$$V_x = \lambda g_x; \quad V_y = \lambda g_y; \quad V_z = \lambda g_z; \quad g = 12 \quad \text{hay là}$$

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{1}$$

$$xz = \lambda(2z + x) \tag{2}$$

$$xy = \lambda(2x + 2y) \tag{3}$$

$$2xz + 2yz + xy = 12 \tag{4}$$

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Không có phương pháp tổng quát để giải hệ trên, mà đôi khi phải dùng trực giác. Nhân (1) với x; (2) với y; (3) với z ta được

$$xyz = \lambda(2xz + xy) = \lambda(2yz + xy) = \lambda(2xz + 2yz) \tag{5}$$

Nếu $\lambda = 0$ thì từ (1)-(3) sẽ cho $xy = yz = zx = 0$, điều này mâu thuẫn với (4). Do đó $\lambda \neq 0$, và từ (5) ta suy ra $xz = yz$, $xy = 2xz$. Hơn nữa $x,\ y,\ z > 0$ nên ta suy ra $x = y = 2z$, thay tất cả vào (4) ta được

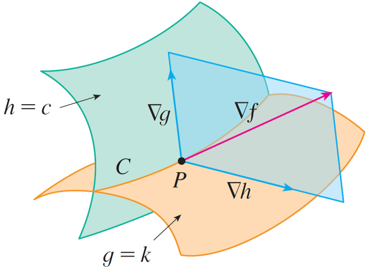
$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Rightarrow z = 1 \text{ và } x = y = 2$$

Thể tích lớn nhất cần tìm là $V_{\max} = 2.2.1 = 4\,\mathrm{m}^3$. $\square$

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

CỰC TRỊ CÓ HAI ĐIỀU KIỆN

Ta xét bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của hàm số 3 biến f với hai điều kiện $g(x,y,z)=k$ và $h(x,y,z)=c$. Về mặt hình học, điều này có nghĩa là khi điểm (x,y,z) chạy trên đường cong giao tuyến C của hai mặt cong $g(x,y,z)=k$ và $h(x,y,z)=c$ (hình bên), vị trí nào của (x,y,z) làm cho $f(x,y,z)$ đạt giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất)?



Giả sử vị trí đó là $P(x_0, y_0, z_0)$, thì theo chứng minh của điều kiện cần cực trị có điều kiện ở trước, $\nabla f(P)$ vuông góc với (tiếp tuyến của) C tại P, đồng thời $\nabla g(P)$ và $\nabla h(P)$ cũng vậy. Điều này cho thấy ba vectơ đồng phẳng. Do đó tồn tại hai nhân tử Lagrange λ và μ sao cho

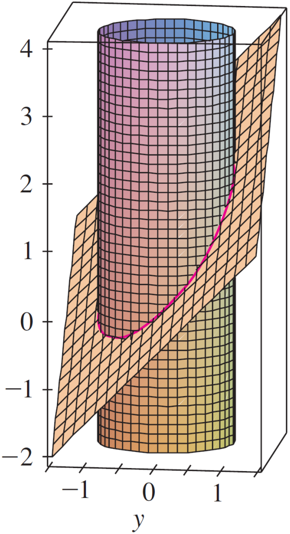
$$\boxed{\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P)}$$

2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ trên đường cong giao tuyến của mặt phẳng $x - y + z = 1$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Đường cong giao tuyến (xem hình bên) là tập hợp đóng (vì mỗi điểm thuộc đường cong đều là điểm biên của nó), đồng thời bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Hơn nữa hàm số f liên tục nên f có max và min trên đường cong này. Điều kiện Lagrange là $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, do đó ta giải hệ



2.8. Nhân tử Lagrange: cực trị có điều kiện

$$1 = \lambda + 2x\mu \tag{6}$$
$$2 = -\lambda + 2y\mu \tag{7}$$
$$3 = \lambda \tag{8}$$
$$x - y + z = 1 \tag{9}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{10}$$

Thay $\lambda = 3$ ở (8) vào (6)-(7), ta được $x\mu = -1$ và $2y\mu = 5$, suy ra $x = -1/\mu$ và $y = 5/(2\mu)$. Thay tất cả vào (10), ta được

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1 \Rightarrow \mu^2 = \frac{29}{4} \Rightarrow \mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Do đó $(x, y) = \left(\frac{\pm 2}{\sqrt{29}}, \frac{\mp 5}{\sqrt{29}}\right)$. Từ (9) ta suy ra $z = 1 - x + y = 1 \mp \frac{7}{\sqrt{29}}$.
Tính f tại các giá trị này, ta có $\max f$ và $\min f$ là $3 \pm \sqrt{29}$. □