LOGIC VỊ TỪ

Nhắc lại tập hợp

Định nghĩa: **Tập hợp** là một bộ sưu tập gồm các vật. Mỗi vật được gọi là một phần tử của tập hợp.

Kí hiệu: A, B , X,…

Nếu x là phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $x \in A$

Ví dụ:

- **N** ={0,1,2,…} là tập hợp các số tự nhiên.
- **Z** = {0,1,-1,2,-2,…} tập hợp các số nguyên.
- **Q** = {m/n | m,n $\in$ Z, n≠0 } tập hợp các số hữu tỉ.
- **R**: tập hợp các số thực.
- **C**: Tập hợp các số phức.

IV. Logic vị từ

1. Định nghĩa Vị từ là một khẳng định p(x,y,..), trong đó x,y...là các biến thuộc tập hợp A, B,… cho trước sao cho:

- Bản thân p(x,y,..) không phải là mệnh đề.
- Nếu thay x,y,… thành giá trị cụ thể thì p(x,y,..) là mệnh đề.

Ví dụ. Các phát biểu sau là vị từ (chưa là mệnh đề)

- p(n) = "n +1 là số nguyên tố".
- q(x,y) = "$x^2 + y = 1$" .
- r(x,y,z) = "$x^2 + y^2 > z$".

Khi thay các giá trị cụ thể của n,x,y,z thì chúng là các MĐ.

2. Các phép toán trên vị từ

Cho trước các vị từ p(x), q(x) theo một biến $x \in A$. Khi ấy, ta cũng có các phép toán tương ứng như trên mệnh đề

- *Phủ định* $\neg p(x)$
- *Phép nối liền* $p(x) \wedge q(x)$
- *Phép nối rời* $p(x) \vee q(x)$
- *Phép kéo theo* $p(x) \rightarrow q(x)$
- *Phép kéo theo hai chiều* $p(x) \leftrightarrow q(x)$

IV. Logic vị từ

Khi xét một mệnh đề p(x) với x $\in$ A. Ta có các trường hợp sau

- TH1. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH2. Với một số giá trị a $\in$ A, ta có p(a) đúng.
- TH3. Khi thay x bởi 1 phần tử a tùy ý $\in$ A, ta có p(a) sai.

Ví dụ. Cho các vị từ p(x) sau với x $\in$ **R**

- p(x) = "x^2 +1 >0" đúng với x tuỳ ý (với mọi x).
- p(x) = "x^2 -2x+1=0" chỉ đúng với x = 1.
- p(x) = "x^2 -2x+3=0" sai với x tuỳ ý (với mọi x).

Lượng từ

Định nghĩa. Cho p(x) là một vị từ theo một biến xác định trên A. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x) như sau:

- Mệnh đề *"Với mọi x thuộc A, p(x)* ", kí hiệu bởi

"$\forall$x $\in$ A, p(x)",

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi p(a) luôn đúng với mọi giá trị a $\in$ A.

- Mệnh đề "*Tồn tại (ít nhất)hay có (ít nhất) một x thuộc A, p(x))"* kí hiệu bởi **:**

"$\exists$x $\in$ A, p(x)" ,

là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một giá trị x = a_0 nào đó sao cho mệnh đề p(a_0) đúng.

Lượng từ

$\forall$: *được gọi là lượng từ* ***phổ dụng***

$\exists$: *được gọi là lượng từ* ***tồn tại***

Ví dụ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- "$\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 3x + 1 \leq 0$"
- "$\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 1 \geq 2x$"
- "$\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 1 < 0$"

Mệnh đề lượng từ hoá

Định nghĩa. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Ta định nghĩa các mệnh đề lượng từ hóa của p(x, y) như sau:

"$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\forall x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y))$"

"$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" = "$\exists x \in A, (\exists y \in B, p(x, y))$"

Ví dụ 1

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \forall y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề sai vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 1 \in R$ mà $x_0 + 2y_0 \geq 1$.

- Mệnh đề "**$\forall x \in R, \exists y \in R, x + 2y < 1$**" đúng hay sai?

Mệnh đề đúng vì với mỗi $x = a \in R$, tồn tại $y_a \in R$ như $y_a = -a/2$, sao cho $a + 2y_a < 1$.

Ví dụ 2

- Mệnh đề "$\exists x \in$ **R**, $\forall y \in$ **R**, $x + 2y < 1$" đúng hay sai

Mệnh đề sai vì không thể có $x = a \in R$ để bất đẳng thức $a + 2y < 1$ được thỏa với mọi $y \in R$ (chẳng hạn, $y = -a/2 + 2$ không thể thỏa bất đẳng thức này).

- Mệnh đề "$\exists x \in$ **R**, $\exists y \in$ **R**, $x + 2y < 1$" **đúng hay sai?**

Mệnh đề đng vì tồn tại $x_0 = 0$, $y_0 = 0 \in$ **R** chẳng hạn thỏa $x_0 + 2y_0 < 1$.

IV. Logic vị từ

Định lý. Cho p(x, y) là một vị từ theo hai biến x, y xác định trên $A \times B$. Khi đó:

1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x, y)$"
2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"
3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y)$"

Chiều đảo của 3) nói chung không đúng.

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa vị từ p(x,y,..) có được bằng các thay ∀ thành ∃, thay ∃ thành ∀ và vị từ p(x,y,..) thành ¬ p(x,y,..).

Với vị từ theo 1 biến ta có :

$$\overline{\forall x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists x \in A, p(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \overline{p(x)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Với vị từ theo 2 biến.

$$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{p(x, y)}$$

$$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, p(x, y)} \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{p(x, y)}$$

Phủ định của mệnh đề lượng từ

Ví dụ phủ định các mệnh đề sau

- "$\forall x \in A, 2x + 1 \leq 0$"

- "$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$".

Trả lời

"$\exists x \in A, 2x + 1 > 0$"

"$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R, |x - a| < \delta \wedge (|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$".

Bài tập

- Tại lớp:

- Về nhà:

Đặc biệt hóa phổ dụng

Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng:

Nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến x $\in$ A bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế x bởi a $\in$ A ta sẽ được một mệnh đề đúng

Ví dụ:

"Mọi người đều chết"
"Socrate là người"
Vậy "Socrate cũng chết"

$$\begin{array}{l} \forall x \in A,\ p(x) \\ a \in A \\ \hline \therefore\ p(a) \end{array}$$

QUY NẠP

V. Quy nạp

Chứng minh 1 + 3 + 5 + 7 + …+ (2n-1)= n^2 với n ≥ 1

1. **Phương pháp**

Với những bài toán chứng minh tính đúng đắn của một biểu thức mệnh đề có chứa tham số n, như P(n). Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh P(n) đúng với mọi số tự nhiên n ≥N_0.

- Quá trình chứng minh quy nạp bao gồm 2 bước:

- *Bước cơ sở:* Chỉ ra P(N_0) đúng.
- *Bước quy nạp:* Chứng minh nếu P(k) đúng thì P(k+1) đúng. Trong đó P(k) được gọi là giả thiết quy nạp.

V. Quy nạp

Ví dụ. Chứng minh $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ với mọi số nguyên dương n. (bài tập 15a)

Gọi P(n) = "$1+3+\ldots(2n-1)=n^2$ "

+ Bước cơ sở:

Hiển nhiên P(1) đúng vì $1 = 1^2$.

V. Quy nạp

+ Bước quy nạp:

- Giả sử P(k) đúng, tức là

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

- Ta phải chỉ ra rằng P(k+1) đúng, tức là

$$1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$$

Từ giả thiết quy nạp ta có:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$=(k+1)^2$$

- Suy ra, P(k+1) đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp P(n) đúng với mọi số nguyên dương n

Ví dụ

$$CM \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Bài tập

- Tại lớp:

- Về nhà: