TOÁN RỜI RẠC

Chương 2. Phép đếm

Nội dung

- Các nguyên lý
- Giải tích tổ hợp
- Hoán vị lặp, tổ hợp lặp
- Hệ thức đệ qui

I. Các nguyên lý

1. Nguyên lý cộng

Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp

- Phương pháp 1 có n cách làm
- Phương pháp 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n+m

Ví dụ. An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo thì An có mấy cách

I. Các nguyên lý

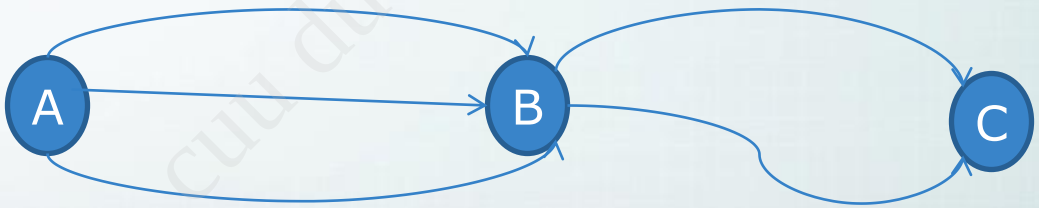
2. **Nguyên lý nhân**

Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước

- Bước 1 có n cách làm
- Bước 2 có m cách làm

Khi đó số cách làm công việc A là n.m

Ví dụ:



Có 3.2 =6 con đường đi từ A đến C

I. Các nguyên lý

Ví dụ: Cho tập X ={1,2,3,4,5,0}

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2

Giải. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$

TH1 . c=0. Khi đó

c có 1 cách chọn

a có 5 cách chọn (a$\in$X\{0})

b có 4 cách chọn (b$\in$X\{a, 0})

TH1 có 1.4.5 =20

TH2 . c≠0. Khi đó

c có 2 cách chọn

a có 4 cách chọn (a$\in$X\{c, 0})

b có 4 cách chọn (b$\in$X\{a, c})

TH2 có 2.4.4 =32

Vậy có 20+32 =52

I. Các nguyên lý

3. **Nguyên lý chuồng bồ câu** (Derichlet)

Gọi $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng x.

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\lceil n/k \rceil$ bồ câu trở lên.

Ví dụ. Có 20 chim bồ câu ở trong 7 cái chuồng. Khi đó sẽ có ít nhất 1 chuồng có 3 con bồ câu trở lên

- Trong 1 nhóm có 367 người thì ít nhất có 2 người sinh cùng ngày

I. Các nguyên lý

Ví dụ. Cho tập X ={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Lấy A là tập hợp con của X gồm 6 phần tử. Khi đó trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.

Giải.

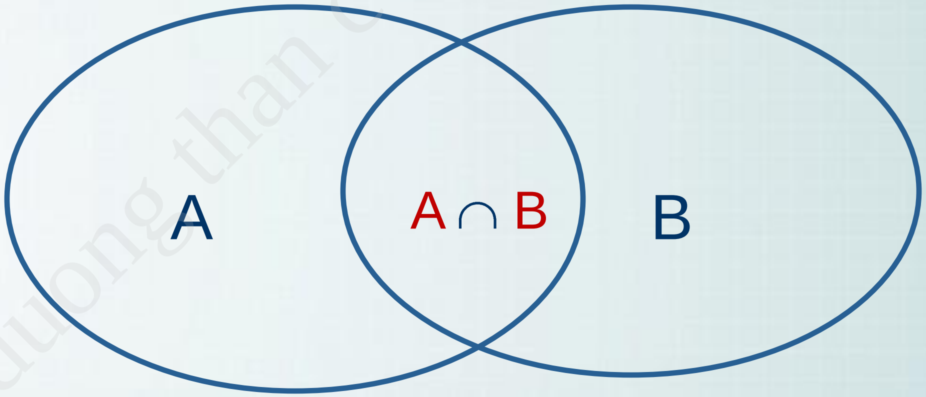
Ta lập các chuồng như sau: {1,9} {2,8} {3,7} {4,6} {5}
Do A có 6 phần tử nên trong 6 phần tử đó sẽ có 2 phần tử trong 1 chuồng. Suy ra đpcm

I. Các nguyên lý

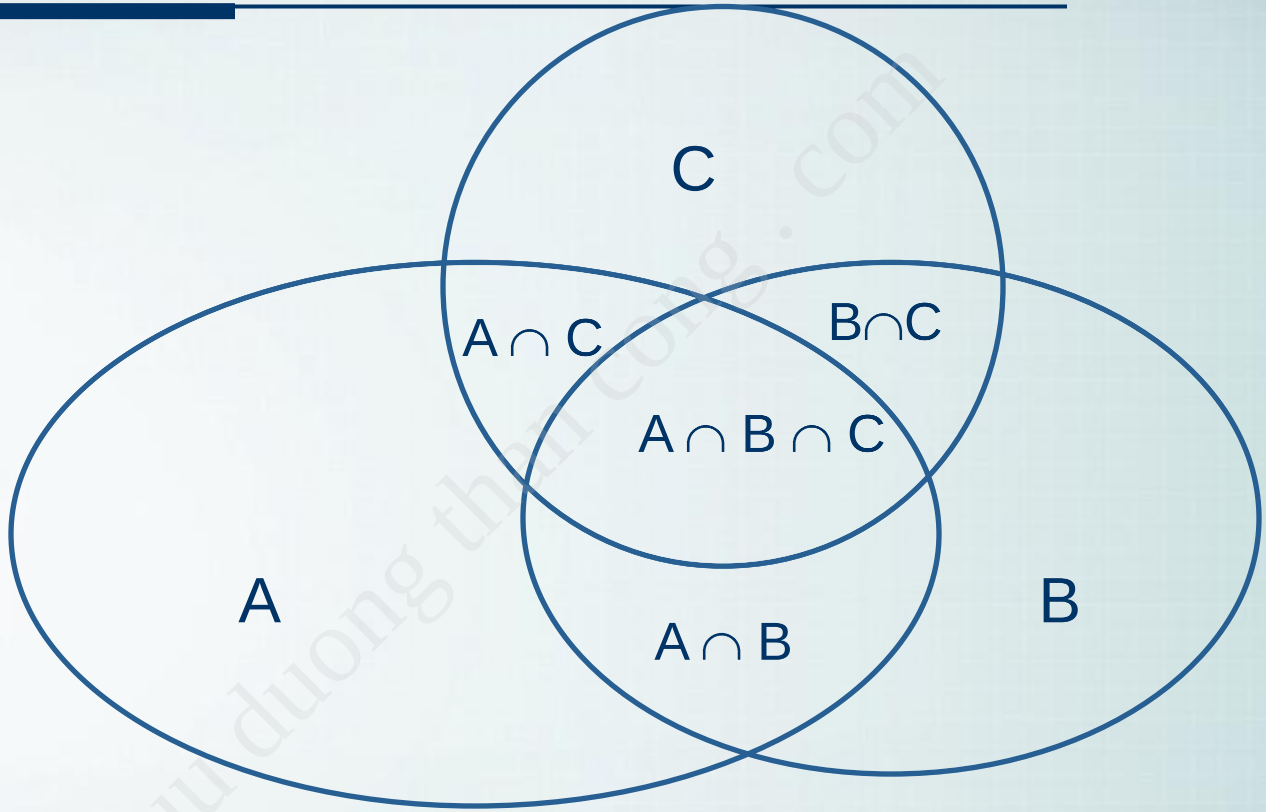
4. **Nguyên lý bù trừ.**

Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



I. Các nguyên lý



$|A \cup B \cup C| = ?$

I. Các nguyên lý

Ví dụ. Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 HS học Tiếng Pháp, 26 học sinh học Tiếng Anh. 15 học sinh học Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người

Giải.

Gọi A là những học sinh học Tiếng Pháp

B là những học sinh học Tiếng Anh

Khi đó. Số học sinh của lớp là $|A \cup B|$. Theo nguyên lý bù trừ ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24+26-15=35$

II. Giải tích tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một *hoán vị của n* phần tử. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)\dots1$$

Quy ước $0! = 1$

Ví dụ. Cho A ={a,b,c}. Khi đó A có các hoán vị sau

abc,acb,

bac,bca,

cab,cba

Ví dụ. Nếu A là tập hợp n phần tử thì số song ánh từ A vào A là n!

Cho X ={1,2,3,4,5}. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập X → 5!

II. Giải tích tổ hợp

2. Chỉnh hợp.

Định nghĩa. Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một *chỉnh hợp chập k của n* phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k

- Công thức

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ. Cho X ={abc}. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 1,2,3,4,5,6.

Kết quả: A_6^3

II. Giải tích tổ hợp

3.Tổ hợp.

Định nghĩa. Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử.*

Số *tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là* C_n^k *hay* $\binom{n}{k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tính chất $\quad C_n^{n-k} = C_n^k \qquad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Cho X = {1,2,3,4}. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4} , {2,3,4}

Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn

- Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30. C_{30}^{10}

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

1. Hoán vị lặp

Định nghĩa. Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k ; $n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$).

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n.

Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có
n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1,
n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,…,
n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k, là

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

II. Giải tích tổ hợp

Ví dụ. Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Giải. Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

.

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

2. Tổ hợp lặp

Định nghĩa. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là *tổ hợp lặp chập k của n*

Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là K_n^k

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ. Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn.

Ta có mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Cụ thể AA, AB, AC, BB, BC, CC

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

Hệ quả. Số nghiệm nguyên không âm ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) (mỗi x_i đều nguyên không âm) của phương trình

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \text{ là}$$

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Ví dụ. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (1)$$

Thỏa điều kiện $x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 > 4$ $(*)$.

Giải. Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \le 3; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5$.

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \qquad (**)$$

$$x_1 \ge 4; x_2 \ge 2; x_3 \ge 5 \quad (***)$$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện $(*)$, $(**)$, $(***)$. Ta có:

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

$p = q - r.$

Trước hết ta tìm q.

Đặt

$x_1' = x_1;\ x_2' = x_2 - 2;\ x_3' = x_3 - 5;\ x_4' = x_4$

Phương trình (1) trở thành

$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13$ (2)

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (∗∗) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

III. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp

Số nghiệm đó là $K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$

Vậy $q = C_{16}^{13}$.

Lý luận tương tự, ta có $r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$

$$p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Suy ra. Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340