Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Combinatorial Theory

Fall 2008

Nội dung

1. Mở đầu
2. Bài toán đếm tổ hợp (Counting Problem)
3. Bài toán tồn tại tổ hợp (Existence Problem)
4. Bài toán liệt kê tổ hợp (Enumeration Problem)
5. Bài toán tối ưu tổ hợp (Combinatorial Optimization Problem)

0. Mở đầu

NỘI DUNG

0.1. Tổ hợp là gì?

0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp

0.3. Tập hợp và ánh xạ

0.1 Tổ hợp là gì?

- Đối tượng nghiên cứu
- Nội dung nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của tổ hợp

- Lý thuyết tổ hợp gắn liền với việc nghiên cứu ***sự sắp xếp*** của các phần tử trong các tập hữu hạn và ***sự phân bố*** của các phần tử vào các tập hữu hạn. Mỗi cách sắp xếp hoặc phân bố như thế được gọi là một ***cấu hình tổ hợp.***
- Có thể nói vắn tắt: Tổ hợp là lý thuyết về các tập hữu hạn.

Phân loại bài toán

- Trong các tài liệu về tổ hợp, thường gặp các dạng bài toán dưới đây:
  1. Bài toán đếm tổ hợp (Counting Problem)
  2. Bài toán tồn tại tổ hợp (Existence Problem)
  3. Bài toán liệt kê tổ hợp (Enumeration Problem)
  4. Bài toán tối ưu tổ hợp (Combinatorial optimization Problem)

Bài toán đếm – Counting Problem

- Đây là các bài toán nhằm trả lời câu hỏi: "Có bao nhiêu cấu hình thoả mãn các điều kiện cho trước?".
- Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý cơ bản và một số kết quả đếm các cấu hình đơn giản.
- Bài toán đếm được áp dụng một cách có hiệu quả vào những công việc mang tính chất đánh giá như tính xác suất của một sự kiện, tính độ phức tạp của một thuật toán, ...

Bài toán tồn tại tổ hợp
(Existence Problem)

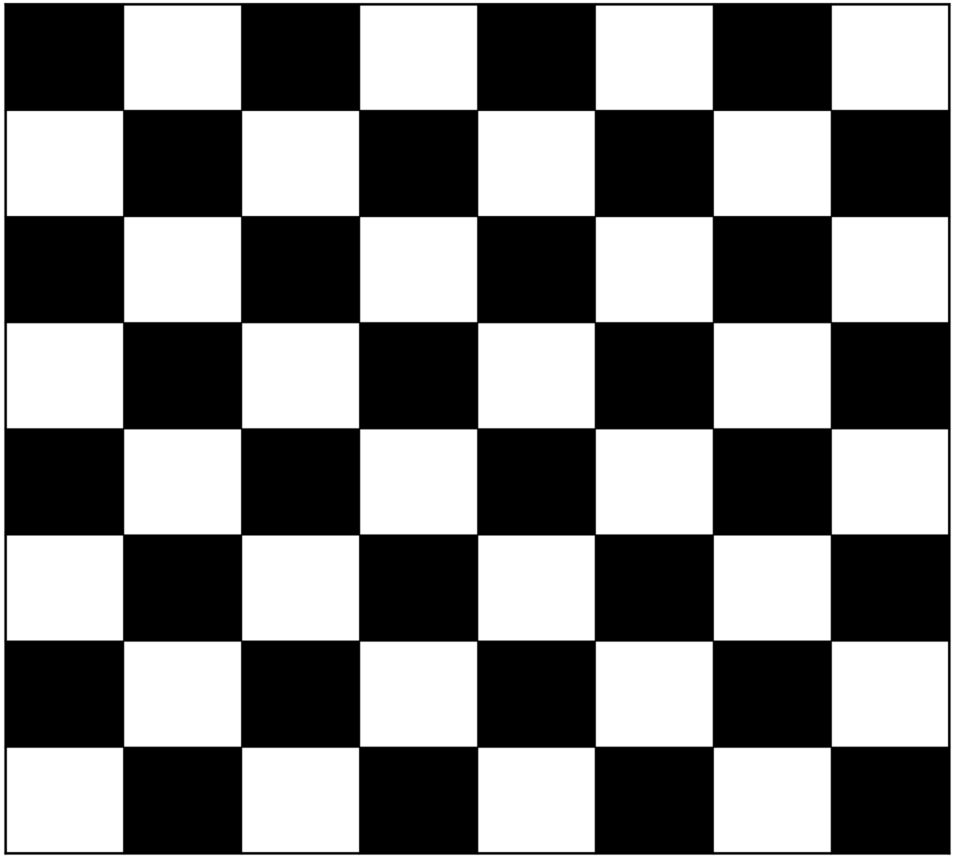
- Khác với bài toán đếm, trong bài toán tồn tại tổ hợp chúng ta cần trả lời câu hỏi: “Tồn tại hay chăng cấu hình tổ hợp thoả mãn các tính chất đã cho?”
- Rõ ràng nếu có thể đếm được số lượng cấu hình tổ hợp thoả mãn các tính chất đó cho thì ta cũng giải quyết được bài toán tồn tại tương ứng!
- Có thể coi bài toán tồn tại như trường hợp riêng của bài toán đếm được không?

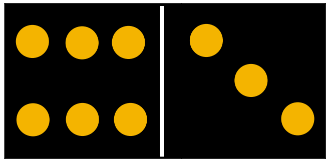
Ví dụ

- **Bài toán phủ bàn cờ quốc tế bởi các quân bài domino:**

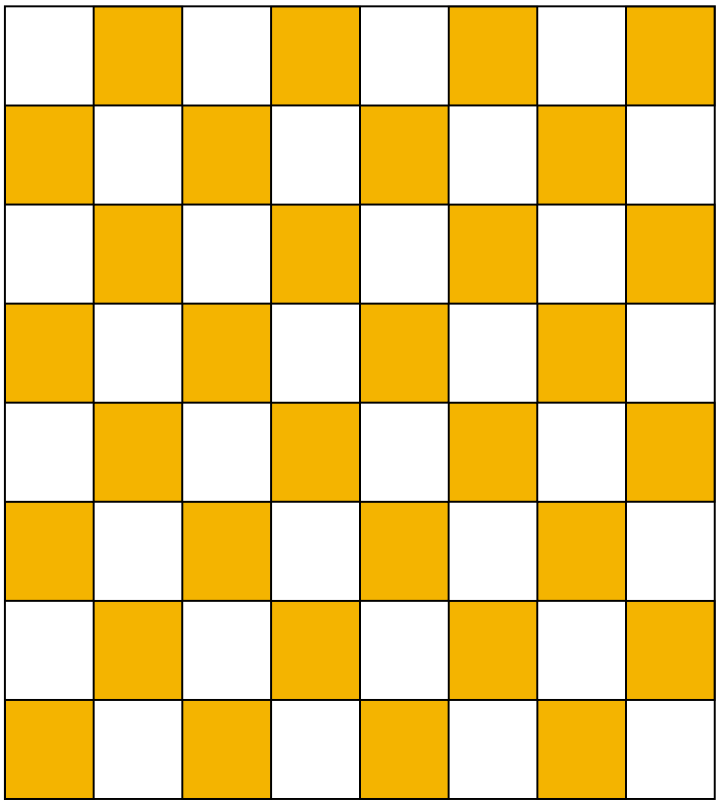
"Cho bàn cờ quốc tế kích thước 8×8 bị đục đi 2 ô ở hai góc đối diện và bộ bài domino, mỗi quân bài phủ kín 2 ô của bàn cờ. Hỏi có thể phủ kín bàn cờ đã cho bởi 31 quân bài domino?"

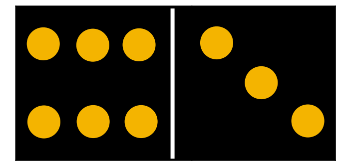
Bàn cờ quốc tế và quân bài domino



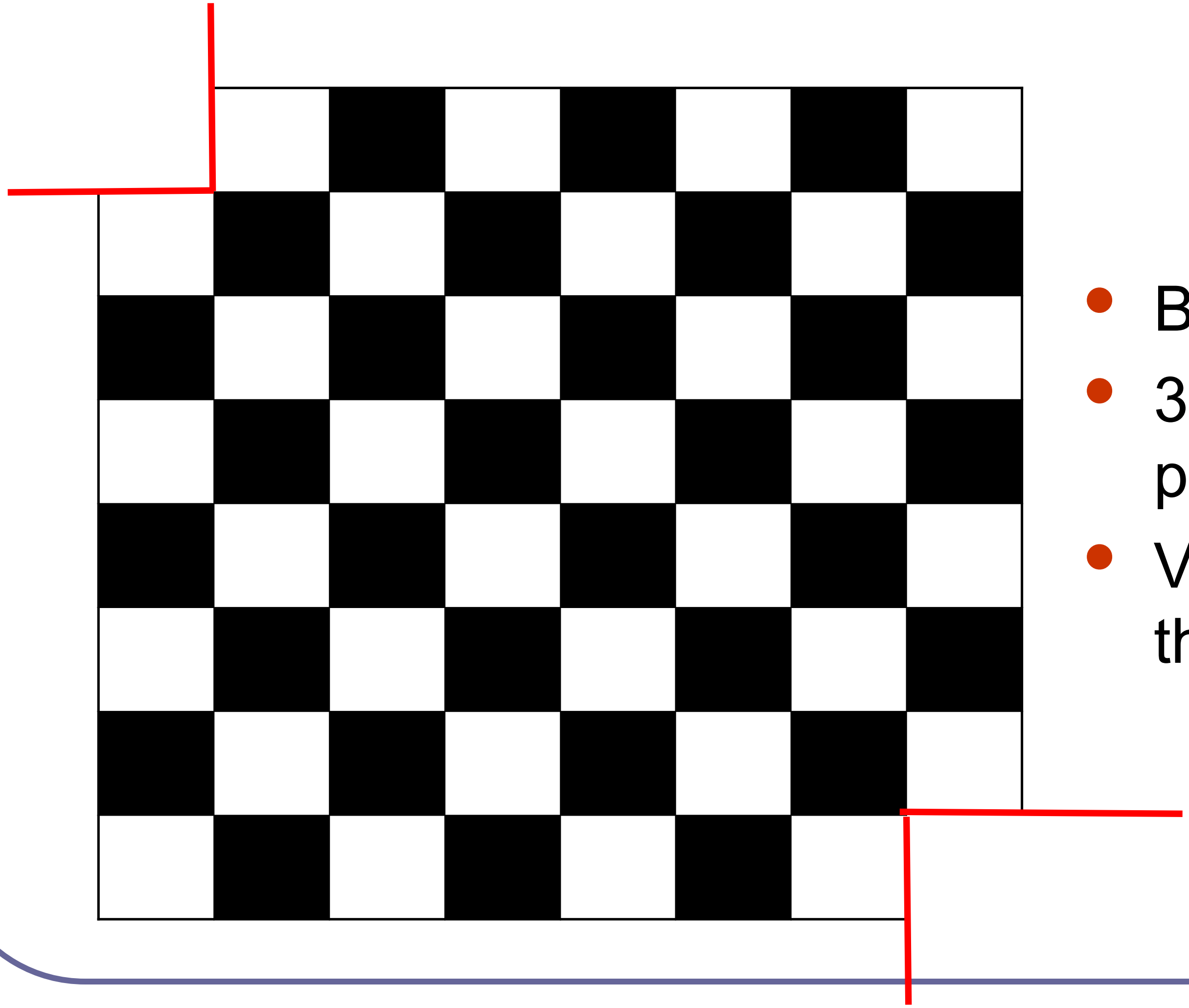


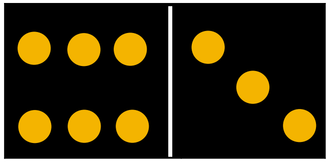
Bàn cờ quốc tế và quân bài domino





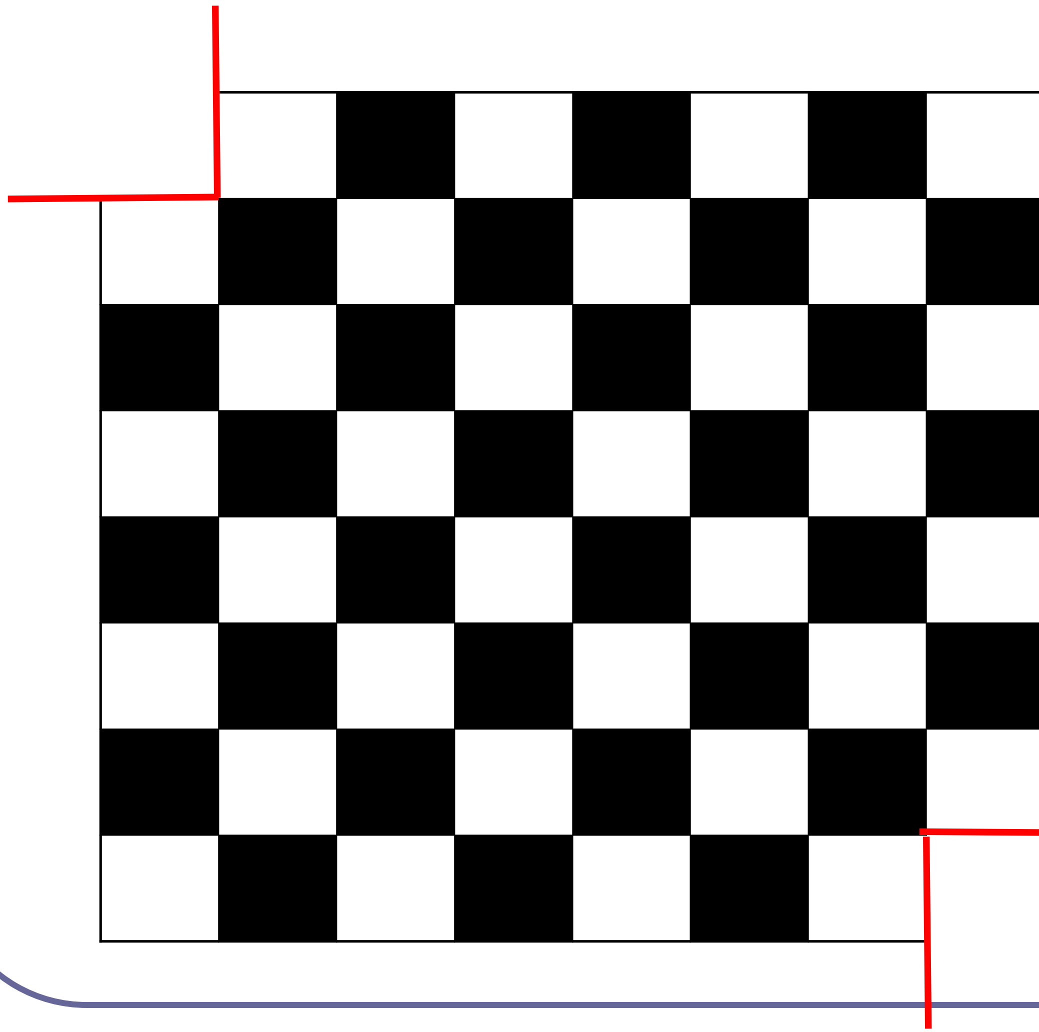
Có thể phủ bàn cờ như vậy bởi 31 quân bài domino?





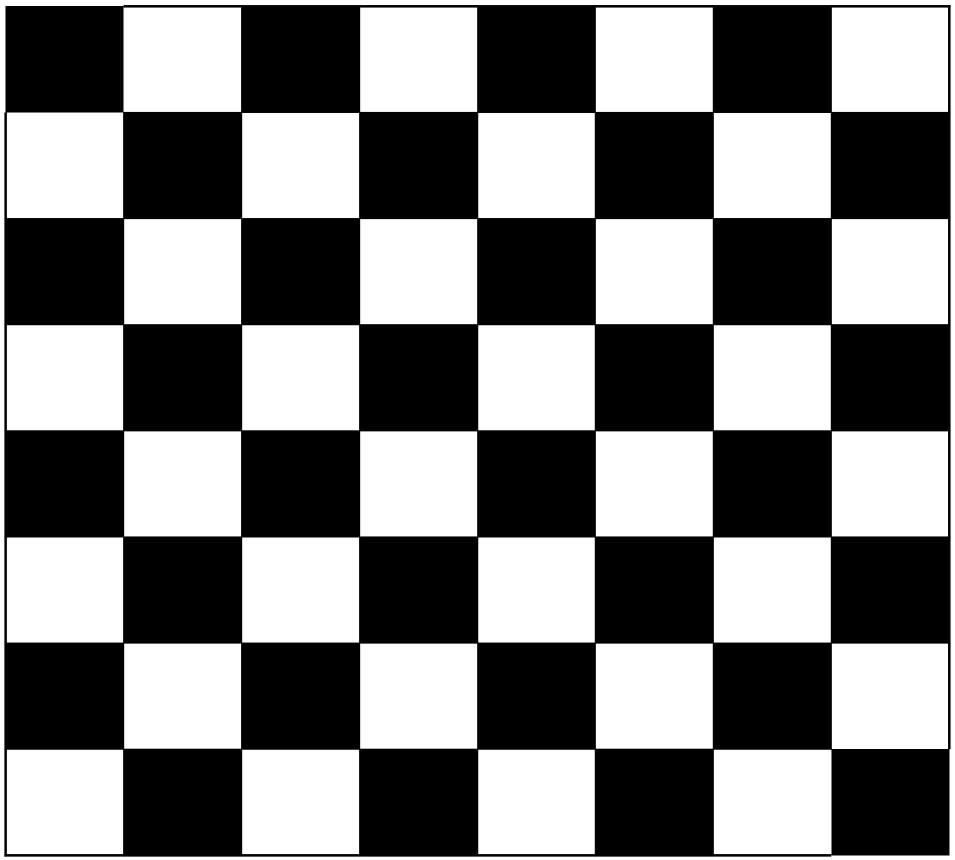
- Bàn cờ còn 62 ô
- 31 quân bài có thể phủ kín được 62 ô
- Về diện tích là có thể phủ được

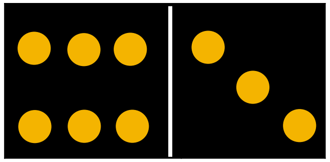
Không tồn tại cách phủ bàn cờ như vậy bởi 31 quân bài domino!



- **Chứng minh**
- Mỗi quân bài phủ kín 1 ô trắng và một ô đen.
- Suy ra số lượng ô trắng và ô đen bị phủ bởi 31 quân domino là bằng nhau.
- Thế nhưng số lượng ô trắng và ô đen trên phần còn lại của bàn cờ là khác nhau
- ***Từ đó suy ra không tồn tại cách phủ!***

Có bao nhiêu cách phủ bàn cờ bởi 32 quân bài domino?





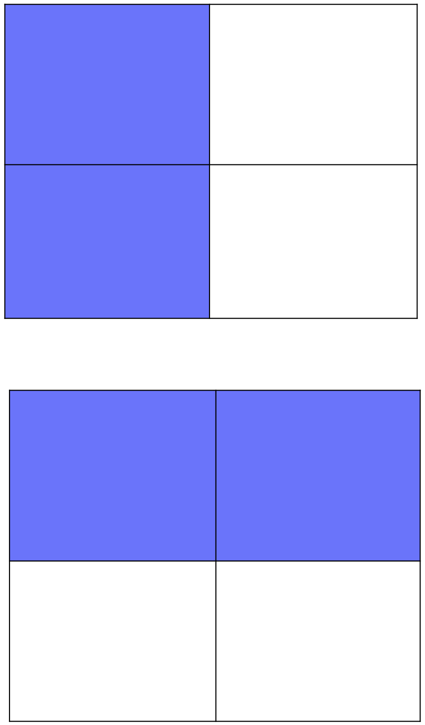
- Sự tồn tại cách phủ là hiển nhiên. Dễ dàng có thể chỉ ra vài cách phủ
- Vấn đề "Có bao nhiêu cách phủ?"
- Không dễ dàng trả lời!

Có bao nhiêu cách phủ bàn cờ bởi 32 quân bài domino?

- Nếu chỉ phân biệt hai cấu hình bởi dạng hình học của cách phủ thì có tất cả

  12 988 816

  cách phủ.



Có 2 cách phủ bàn cờ kích thước 2×2

Phân biệt hai bài toán đếm và tồn tại

- Trong bài toán đếm, sự tồn tại cấu hình là hiển nhiên và vấn đề là cần đếm xem có bao nhiêu.
- Trong bài toán tồn tại, bản thân sự tồn tại cấu hình là vấn đề nghi vấn. Cần giải quyết vấn đề "có hay không có" cấu hình như vậy.
  - Việc chỉ ra được một cấu hình là đủ để khẳng định là tồn tại
  - Nhưng để chỉ ra sự không tồn tại cấu hình đòi hỏi phải đưa ra những lập luận tin cậy

Bài toán liệt kê tổ hợp
(Enumeration Problem)

- Bài toán này quan tâm đến việc đa ra tất cả cấu hình thoả mãn các điều kiện cho trớc.
  - Vì thế lời giải của nó cần đợc biểu diễn dới dạng thuật toán "vét cạn" tất cả các cấu hình. Lời giải trong từng trờng hợp cụ thể sẽ đợc máy tính điện tử giải quyết theo thuật toán đã nêu.
  - Bài toán liệt kê đợc làm "nền" cho nhiều bài toán khác. Hiện nay, một số bài toán đếm, tối u, tồn tại vẫn cha có cách nào giải, ngoài cách giải liệt kê.
  - Nếu trớc đây, cách giải liệt kê còn mang nặng tính lý thuyết, thì bây giờ nó ngày càng khả thi nhờ sự phát triển nhanh chóng của máy tính điện tử.

Bài toán tối ưu tổ hợp
(Combinatorial Problem)

- Khác với bài bài toán liệt kê, bài toán tối ưu chỉ quan tâm đến một cấu hình "tốt nhất" theo một nghĩa nào đấy.
- Trong các bài toán tối ưu, mỗi cấu hình được gán cho một giá trị số (là giá trị sử dụng hoặc chi phí xây dựng cấu hình), và bài toán đặt ra là trong số những cấu hình thoả mãn các điều kiện cho trước hãy tìm cấu hình với giá trị số gán cho nó là lớn nhất hoặc nhỏ nhất.
- Đây là bài toán có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và lý thuyết tổ hợp đã đóng góp một phần đáng kể trong việc xây dựng được những thuật toán hữu hiệu.

0. Mở đầu

NỘI DUNG

0.1. Tổ hợp là gì?

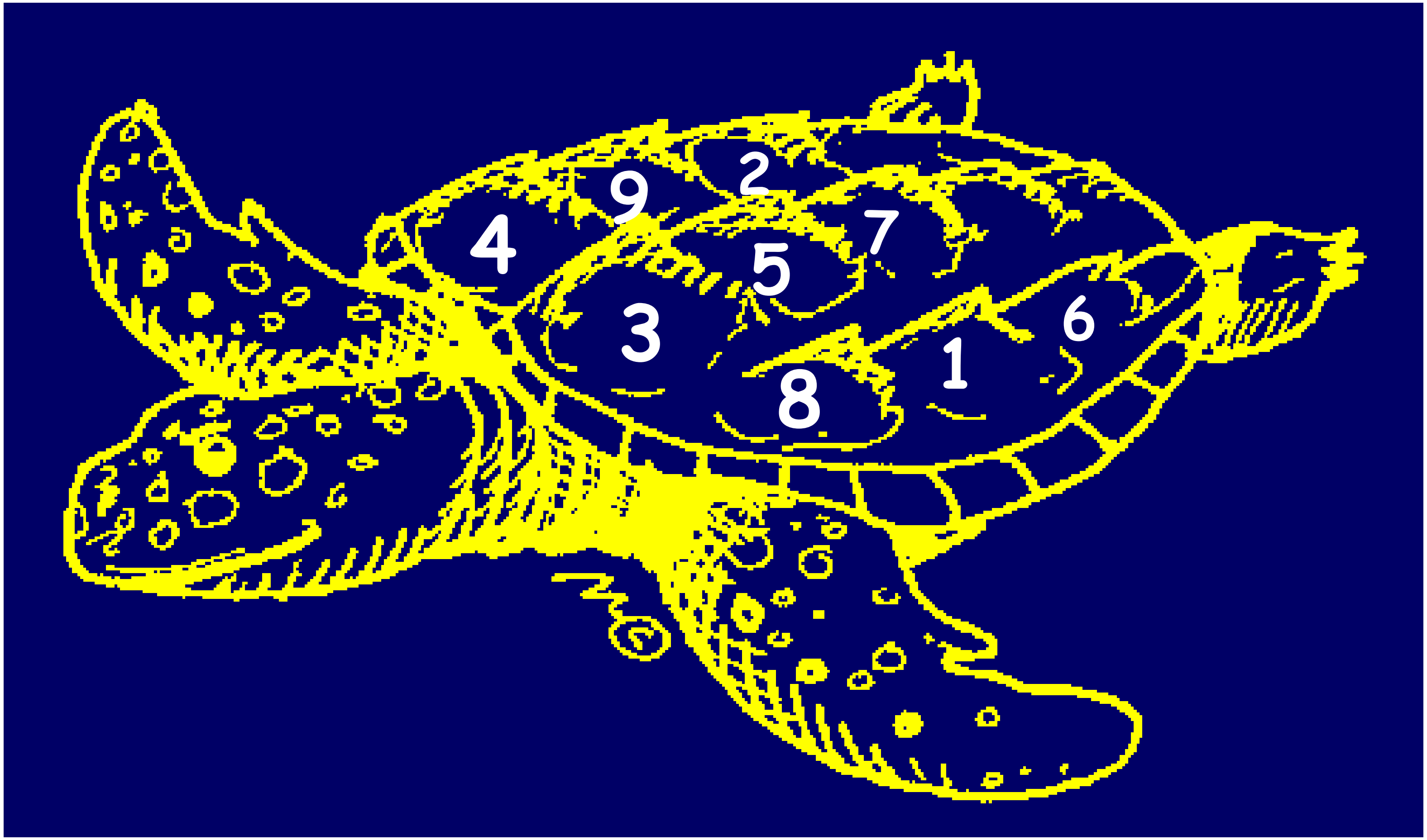
0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp

0.3. Tập hợp và ánh xạ

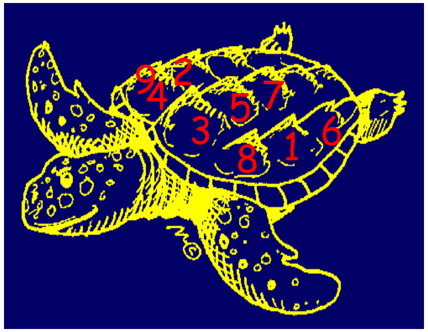
0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển

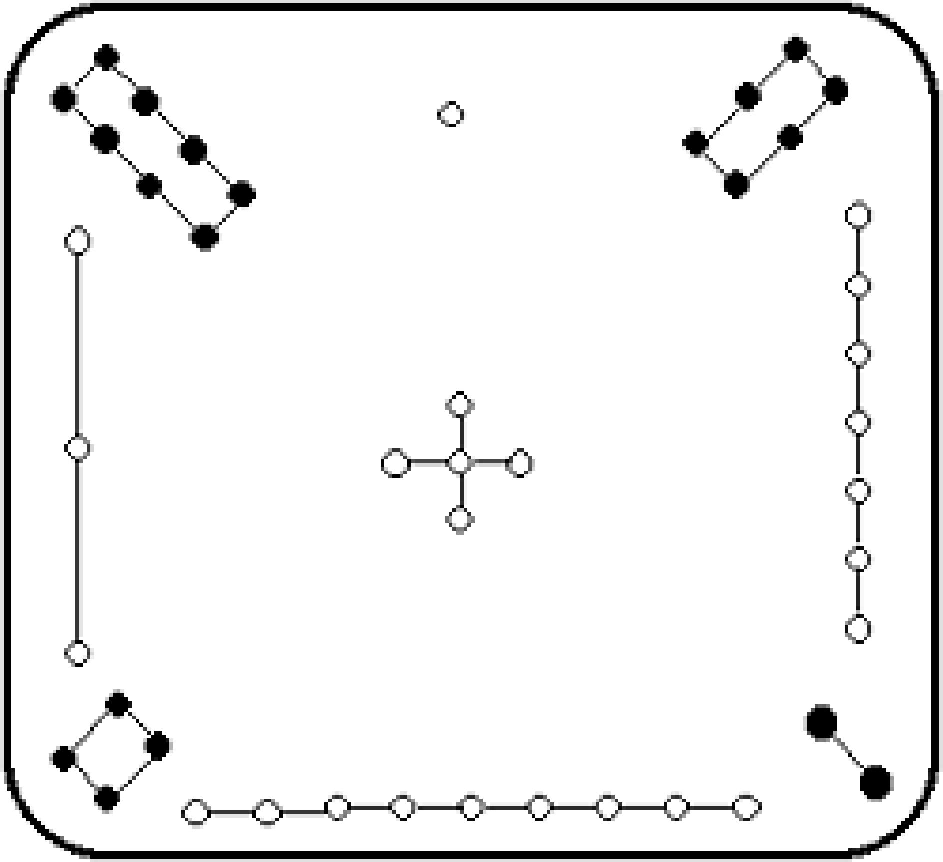
- Có thể nói là tổ hợp là một trong những lĩnh vực có lịch sử phát triển lâu đời nhất của toán học
- Nói về lịch sử phát triển của tổ hợp cũng chính là nói về lịch sử phát triển của toán học
- Vì vậy, chúng ta sẽ chỉ điểm qua vài nét về lịch sử, thông qua một số bài toán nổi tiếng trong lịch sử phát triển của tổ hợp

Hình vuông thần bí - Ma phương
Magic Square

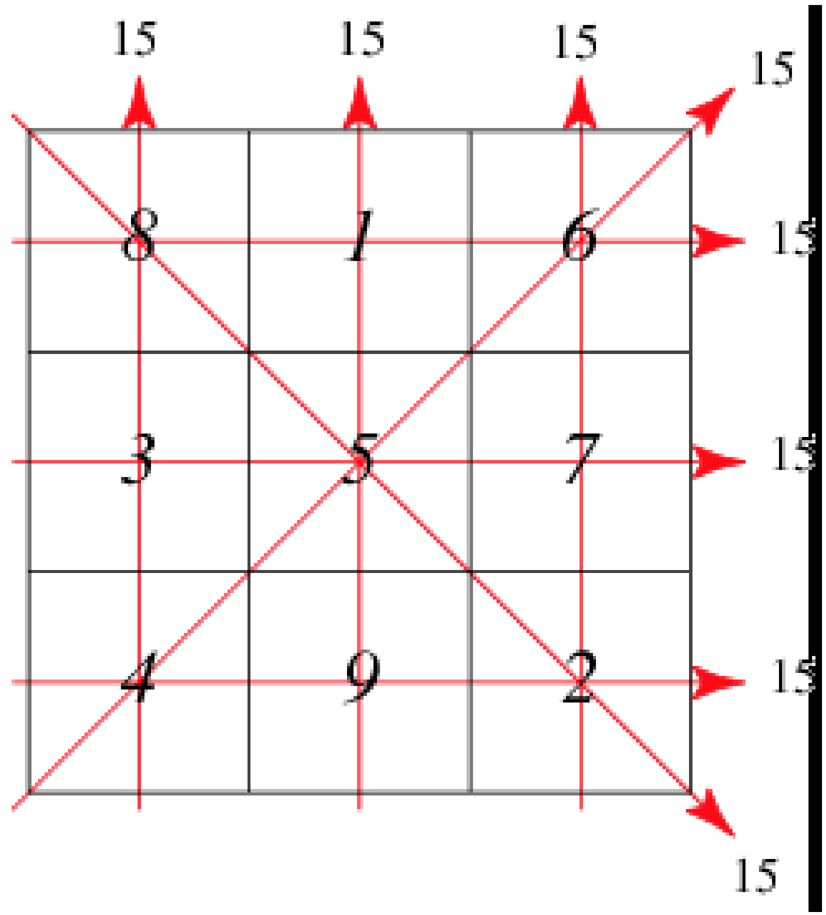


Hình vuông thần bí - Ma phương
Magic Square





Tổng theo mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc cũng như mỗi đường chéo đều bằng 15



Ma phương

- Bảng số này được biết từ thời nhà Chu (quãng 2200 năm trước công nguyên)
- Hãy chú ý đến những tính chất đặc biệt của bảng số này để có thể thấy tại sao nó được gọi là ma phương và được người Trung hoa cổ đại tôn thờ
  - Con số 5 nằm ở giữa biểu hiện Ngũ hành nằm ở trung tâm vũ trụ
  - Các số lẻ biểu thị cho "dương", các số chẵn biểu thị cho "âm" đều đối xúng nhau qua trung tâm
  - Nếu tính định thức của ma trận cấp 3 này ta được giá trị 360 = số ngày trong một năm
  - Giá trị tuyệt đối của các định thức con cũng là các con số đáng chú ý: 7, 23, 37, 53.

Ma phương bậc tuỳ ý

- Ma phương cấp n là bảng gồm n^2 số 1, 2, ..., n^2 được xếp thành n hàng ngang và n hàng dọc sao cho tổng các số trên mỗi hàng ngang và mỗi hàng dọc cũng như hai đường chéo đều bằng nhau
- Hiện nay có thuật toán xây dựng ma phương mọi cấp. Thuật toán xây dựng ma phương bậc lẻ là đơn giản hơn rất nhiều so với thuật toán xây dựng ma phương bậc chẵn

Thuật toán xây dựng ma phương bậc lẻ

Thuật toán:

Điền lần lượt các giá trị số 1, 2, ..., n^2 vào các vị trí của bảng, bắt đầu từ ô ở giữa dòng thứ nhất điền số 1. Tiếp đến di chuyển lên trên và sang phải để điền số tiếp theo.

Chú ý:

- Trên dòng 1 là dòng n, bên phải cột n là cột 1.
- Nếu gặp vị trí đã có số thì số tiếp theo điền xuống ngay dưới số vừa điền.

Số lượng ma phương
(loại trừ những cấu hình thu được bởi phép quay và phản xạ)

n	**# Magic Squares**	**Chú thích**
1	1	
2	0	
3	1	
4	880	Frénicle de Bessy (1693)
5	275 305 224	R. Schroeppel (1973)
6	$(1.7745 \pm 0.0016)10^{19}$	Berlekamp *et al.* (1982) *Approximation by Monte Carlo Backtracking*
7	$(3.79809 \pm 0.00050) \cdot 10^{34}$	*Approximation by Monte Carlo Backtracking*

Number of distinct magic squares (excluding those obtained by rotation and reflection)

To determine the numbers of magic squares following methods were used:

- *Exhaustive search by Standard Backtracking: orders 4 and 5*
- *Approximation by Monte Carlo Backtracking: orders 6 to 20*
- *Estimation by statistical considerations on magic series combined with extrapolations of known approximations: orders greater than 20*

8	$(5.2225 \pm 0.0018) \cdot 10^{54}$	0.035 %
9	$(7.8448 \pm 0.0038) \cdot 10^{79}$	0.049 %
10	$(2.4149 \pm 0.0012) \cdot 10^{110}$	0.049 %
11	$(2.3358 \pm 0.0014) \cdot 10^{146}$	0.059 %
12	$(1.1424 \pm 0.0010) \cdot 10^{188}$	0.087 %
13	$(4.0333 \pm 0.0054) \cdot 10^{235}$	0.14 %
14	$(1.5057 \pm 0.0024) \cdot 10^{289}$	0.16 %
15	$(8.052 \pm 0.022) \cdot 10^{348}$	0.27 %
16	$(8.509 \pm 0.027) \cdot 10^{414}$	0.31 %
17	$(2.314 \pm 0.009) \cdot 10^{487}$	0.39 %
18	$(2.047 \pm 0.008) \cdot 10^{566}$	0.40 %
19	$(8.110 \pm 0.035) \cdot 10^{651}$	0.44 %
20	$(1.810 \pm 0.008) \cdot 10^{744}$	0.44 %

Các tính chất đặc biệt của các con số

- **36** = 1+2+3+4+5+6+7+8

  (Tổng của 4 số lẻ và 4 số chẵn đầu tiên)
- **36** = $1^3+2^3+3^3$
- Con số 36 được người Trung hoa rất tôn sùng = Số quẻ trong Kinh dịch
- Các nhà triết học Ai cập cổ đại cũng rất tôn sùng các con số: "*Mọi hiện tượng trong tự nhiên cũng như trong xã hội đều cố gắng giải thích bằng các con số*"

Số hoàn hảo

- **Biểu thị tính hoàn hảo:** Dùng *số hoàn hảo* (*perfect number*). Số tự nhiên *a* được gọi là số hoàn hảo, nếu số này bằng tổng các ước số của nó.
- Ví dụ:
  - 6 = 1+2+3
  - 28 = 1+2+4+7+14
- So sánh: Số lượng số hoàn hảo và Số lượng số nguyên tố trên đoạn [*a*, *b*]

Cặp số hữu nghị

- **Biểu thị tình hữu nghị:** Dùng *cặp số hữu nghị* (*pair of friendship numbers*). Hai số tự nhiên *a*, *b* được gọi là cặp số hữu nghị nếu số này bằng tổng các ước số của số kia và ngược lại
- Ví dụ: (220, 284), (1184, 1210),

  (2620,2924), (5020, 5564), (6232, 6368)

Trò chơi với con súc sắc

- Người chơi sẽ gieo một (một vài) con súc sắc và đặt cá cược vào khả năng xuất hiện của các mặt.
- Hầu tước de Mere phát hiện khi gieo các con súc sắc số khả năng có thể xuất hiện của các tổng điểm là khác nhau:
- Ví dụ: Gieo hai con súc sắc,
  - Tổng điểm 7 có 6 khả năng: (1, 6), (2, 5), (3, 4)
  - Tổng điểm 6 có ? khả năng: (1, 5), (2, 4), (3, 3)

Các khả năng xuất hiện tổng điểm khi gieo hai con súc sắc

	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Tôn Tẫn đấu ngựa

- Có 3 vòng đấu 1, 2, 3. Người thắng cuộc là người thắng ở nhiều vòng đấu hơn
- Vua: Có 3 con ngựa A (loại 1), B (loại 2) và C (loại 3)
- Tôn Tẫn: Có 3 con ngựa a (loại 1), b (loại 2) và c (loại 3)

Lịch thi đấu của Tôn Tẫn

Vòng đấu	Vua	Điểm	Tôn Tẫn	Điểm
Vòng 1	A	1	c	0
Vòng 2	B	0	a	1
Vòng 3	C	0	b	1
Tổng điểm		1		2

Bài toán tối ưu tổ hợp

- Trong số tất cả các cách tổ chức thi đấu hãy tìm cách đem lại nhiều điểm nhất
- Có tất cả bao nhiêu cách tổ chức thi đấu ?

=> Dễ dàng tìm được cách đạt được nhiều điểm nhất và may thay đó cũng là cách dẫn đến thắng lợi!

- Nếu số lượng vòng đấu nhiều hơn, cách tính điểm phức tạp hơn thì không dễ dàng *nhẩm* ra được cách đem lại nhiều điểm nhất!

0. Mở đầu

NỘI DUNG

0.1. Tổ hợp là gì?

0.2. Sơ lược về lịch sử phát triển của tổ hợp

0.3. Tập hợp và ánh xạ

TẬP HỢP

- Các khái niệm cơ bản
- Các phép toán tập hợp
- Sơ đồ Venn
- Các đẳng thức

Tập hợp

- Ta hiểu: ***Tập hợp như là sự tụ tập của các phần tử.***
  - Ta nói tập hợp chứa các phần tử của nó.
  - Các tập hợp được ký hiệu bởi *A-Z*, các phần tử *a-z*
  - Thông thường phải có một tập vũ trụ *U* mà tất cả các phần tử được xét trong nó. Tập *U* có thể được chỉ rõ hoặc được ngầm định.
- **Xác định tập hợp:**
  - Danh sách các phần tử:

    $S = \{ a, b, c, d \} = \{ b, c, a, d, d \}$

    (Chú ý: Việc liệt kê lặp lại một phần tử không dẫn đến tập mới. Thứ tự liệt kê là không có vai trò.)

Tập hợp

- Xác định tập hợp (tiếp):
  - Mô tả cách xây dựng tập hợp bằng việc sử dụng mệnh đề lôgic:

    $$S = \{\ x \mid P(\mathrm{x})\ \}$$

    S chứa các phần tử thoả mãn mệnh đề *P*.
    - Ví dụ, $S = \{\ x \mid x$ là sinh viên ĐHBK HN$\}$

      đọc là "*S* là tập tất cả các phần tử x sao cho x là sinh viên ĐHBK HN."
  - Liệt kê các phần tử:

    $S = \{\ \cdots, -3, -2, -1\ \}$ - tập các số nguyên âm.

Tập hợp

- Các tập vũ trụ thường dùng
  - $\boldsymbol{R}$ = tập số thực
  - $\boldsymbol{N}$ = tập số tự nhiên = $\{\, 0,1, 2, 3, \cdots \}$
  - $\boldsymbol{Z}$ = tập các số nguyên = $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \}$
  - $\boldsymbol{Z}^+$ tập các số nguyên không âm

Tập hợp

- **Nhận biết các phần tử của tập hợp**
  - Ký hiệu:
    - x là phần tử của S hay còn nói x thuộc S: $x \in S$
    - x không là phần tử của S: $x \notin S$
  - **Ví dụ:** Gọi S là tập các số nguyên từ 1 đến 12. Khi đó

    $5 \in S$ nhưng $15 \notin S$
- **Chú ý:** Việc biết một phần tử có thuộc một tập cho trước hay không là vấn đề không phải lúc nào cũng là dễ dàng:

  Ví dụ: Gọi P là tập các số nguyên tố. Hỏi

  x=1212121212121212121211111111111111111111

  có thuộc P?

Tập con

- Tập A được gọi là ***tập con*** của tập B nếu mỗi phần tử của A đều là phần tử của B, nghĩa là

$$\forall x\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

  - **Ký hiệu:**

$$A \subseteq B \qquad \text{hoặc} \qquad B \supseteq A$$

  - **Ví dụ:**
    - Nếu $S = \{\ 1, 2, 3, \cdots, 11, 12\ \}$ và $T = \{\ 1, 2, 3, 6\ \}$

    Thế thì $T \subseteq S$.

Tập con

- Một số định nghĩa:
  - Một tập luôn là tập con của chính nó.
  - Hai tập là bằng nhau khi và chỉ khi mỗi phần tử của tập thứ nhất đều là phần tử của tập thứ hai và ngược lại, nghĩa là

    $A = B$ khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$
  - Nếu $A \subseteq B$, nhưng $A \neq B$ khi đó ta nói A là *tập con thực sự* của B. Ký hiệu: $A \subset B$.
  - **Ví dụ:**
    - Giả sử $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2, 3, 1 \}$, $C = \{ 3 \}$
    - Khi đó

$$B = A,\ C \subset A,\ C \subset B.$$

Tập con

- Một số định nghĩa:
  - ***Tập rỗng (trống)*** là tập không có phần tử nào cả.
    - Ký hiệu: $\varnothing$.

    $\forall$ $\varnothing$ là tập con của mọi tập
  - ***Tập tất cả các tập con (Power set)*** của tập A
    - Ký hiệu: 2^A (đôi khi dùng ký hiệu: $P(A)$)
    - Ví dụ, nếu $A = \{1\}$ thì $2^A = \{\varnothing, \{1\}\}$
    - Tập gồm n phần tử có 2^n tập con.

Tập con

- ***Lực lượng (cardinality)*** của tập A là số phần tử trong A.
  - Ký hiệu: $|A|$ (đôi khi còn ký hiệu là $\#A$, $N(A)$).
  - Nếu lực lượng của một tập hợp là số tự nhiên thì nó được gọi là ***tập hữu hạn***, nếu trái lại nó là ***tập vô hạn***.
    - **Ví dụ:** $\boldsymbol{N}$ (tập các số tự nhiên) là vô hạn, bởi vì $|\boldsymbol{N}|$ không là số tự nhiên.
  - **Chú ý:** Nếu $|A| = n$ thì $|P(A)| = 2^n$.

Tập con

- **Ví dụ:**
  - Nếu $A = \{\ a,\ b\ \}$ thì
    - Tập các tập con của A:

$$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

    - Lực lượng của A:

$$|A| = |\{a, b\}| = 2$$

$$|2^A| = 4$$

    - A và 2^A là các tập hữu hạn.

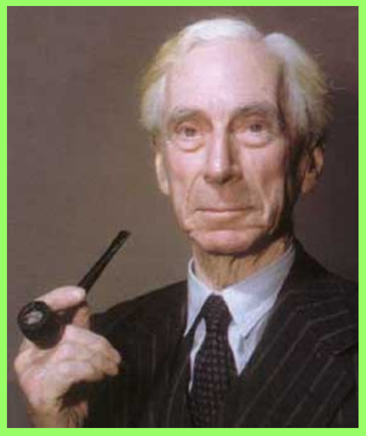
Lý thuyết tập hợp là không hoàn chỉnh

Nghịch lý Russell (Russell's paradox):

- Xét $\boldsymbol{S}$ là tập các tập hợp không chứa chính nó như là phần tử của nó:

$$\boldsymbol{S} = \{x \mid x \notin x\}.$$

- Câu hỏi: Có phải $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{S}$?



Bertrand Russell
1872-1970

Nghịch lý Russell

- *Cho* $S = \{x \mid x \notin x\}$. Hỏi $S \in S$?
  - Nếu $S \in S$, thì S không là đối tượng x thoả mãn $x \notin x$.

    Suy ra, $S \notin S$?!
  - Nếu $S \notin S$, thì S là một đối tượng x thoả mãn $x \notin x$.

    Suy ra, $S \in S$?!

  Vì vậy ta không thể kết luận được $S \in S$ và cũng không thể kết luận được $S \notin S$?!
- **Paradox!**

Các phép toán tập hợp

- ***Giao (intersection)*** của 2 tập A và B:
  - là tập các phần tử vừa thuộc vào A vừa thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

  - Nếu giao là tập rỗng, thì A và B được gọi là không giao nhau.

Các phép toán tập hợp

- ***Hợp (union)*** của 2 tập A và B:
  - là tập tất cả các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A \cup B$

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}$$

- Lực lượng của hợp của hai tập A và B:

Có quan hệ so sánh nào ?

$$|A \cup B| \;\; ? \;\; |A| \;\; ? \;\; |B| \;\; ? \;\; |A \cap B|$$

Các phép toán tập hợp

- ***Hiệu (difference)*** của A và B:
  - là tập hợp các phần tử của A không thuộc vào B.
  - Ký hiệu: $A - B$ hoặc $A \setminus B$

$$A - B = \{\ x \mid x \in A \wedge x \notin B\ \}$$

- ***Hiệu đối xứng (symmetric difference)*** *của* A và B:
  - là tập $(A - B) \cup (B - A)$
  - Ký hiệu: $A \oplus B$

Các phép toán tập hợp

- ***Phần bù (complement)*** của tập A:
  - là tập $U - A$, trong đó U là tập vũ trụ.
  - phần bù của A là phụ thuộc vào U !
  - Ký hiệu: $\overline{A}$

$$\overline{A} = \{ x \mid \neg(x \in A) \}$$

  - Cách ký hiệu khác: A^c.

Các phép toán tập hợp

- Ví dụ:
  - U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }
  - A= { 1, 2, 3, 4, 5 }, B = { 4, 5, 6, 7, 8 }.
  - Khi đó
    - $A \cup B =$
    - $A \cap B =$
    - $\overline{A} =$
    - $\overline{B} =$
    - $A - B =$
    - $B - A =$
    - $A \oplus B =$

Tích Đề các

René Descartes
(1596-1650)

- ***Tích Đề-các (Cartesian product)*** của A với B:
  - Là tập bao gồm tất cả các cặp có thứ tự (a, b), trong đó a thuộc A và b thuộc B.
  - Ký hiệu: $A \times B$. Theo định nghĩa
    $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$
  - **Ví dụ:**
    - Cho $A = \{ 1, 2, 3 \}$ và $B = \{ 3, 4 \}$. Khi đó
      $A \times B = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4) \}$
      $B \times A = \{ (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3) \}$
    - Thông thường $A \times B \neq B \times A$
    - $|A \times B| = ?$

Tích Đề các

- **Ví dụ:**
  - A = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
  - B = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
  - $A \times B$ = { (T, Mai), ..., (T, Muỗm}, ...,(C, Muỗm) }
- Tích Đề các được mở rộng cho nhiều tập:
  - Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hợp
  - $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m): a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$

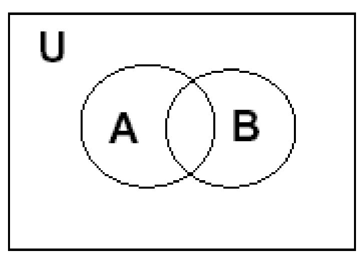
Tích Đề các

- **Ví dụ:**
  - A = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
  - B = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }
  - C = { P30 - B4, P55-B3, P17-A1 }
  - $A \times B \times C$ = {(Thắng, Mai, P30-B4), ... }
- Ký hiệu

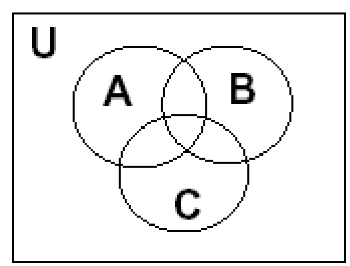
$$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ lần}} = X^n$$

SƠ ĐỒ VENN
(John Venn 1834-1923)

- **Venn diagrams:**
  - Là cách biểu diễn rất trực quan giúp chỉ ra mối liên hệ giữa 2 hoặc 3 tập hợp.
    - Tập vũ trụ *U* được biểu diễn bởi hình chữ nhật.
    - Mỗi tập con của *U* được biểu diễn bởi phần trong của một vòng kín.
- **Ví dụ:**

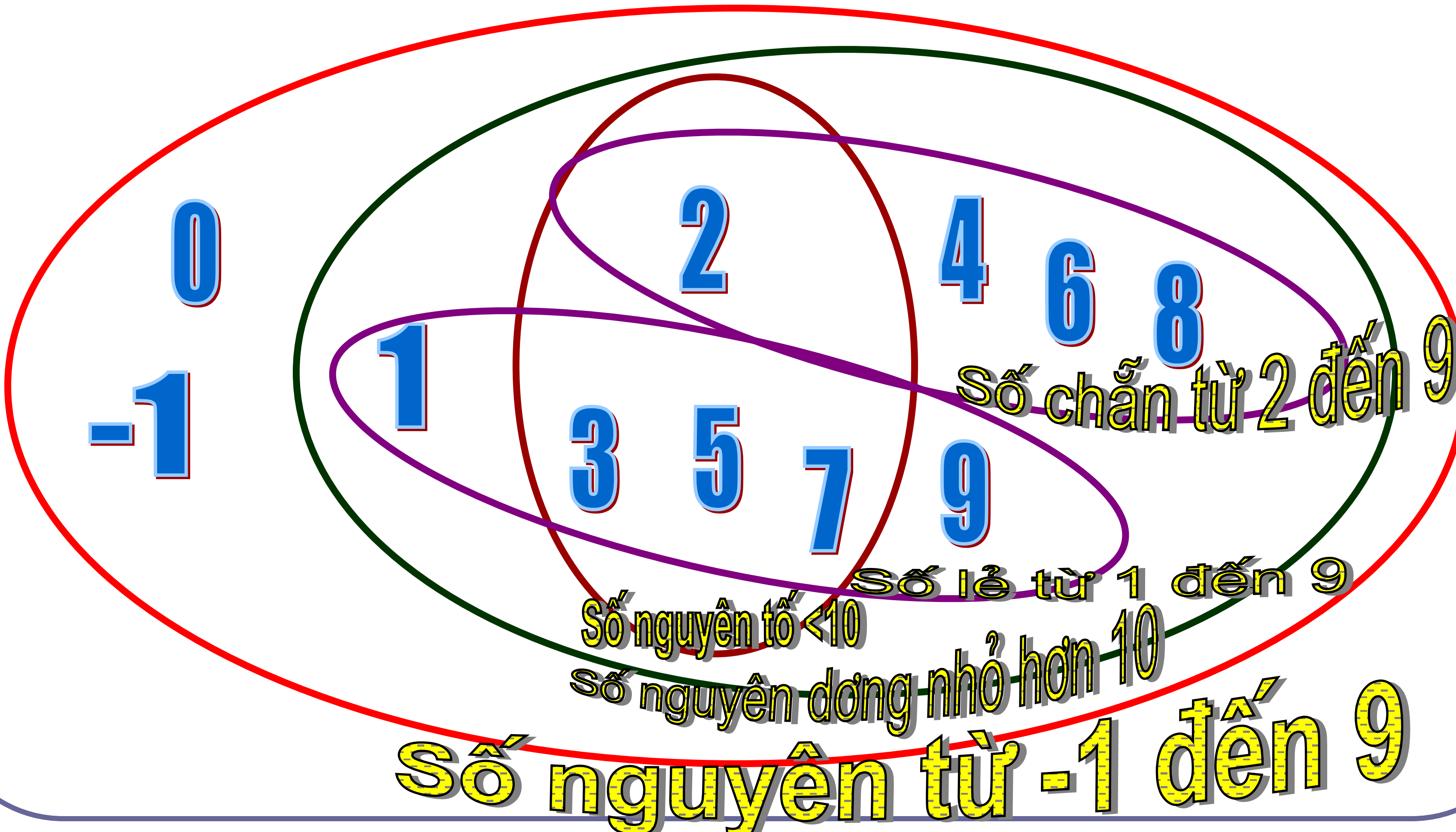


Cho 2 tập



Cho 3 tập

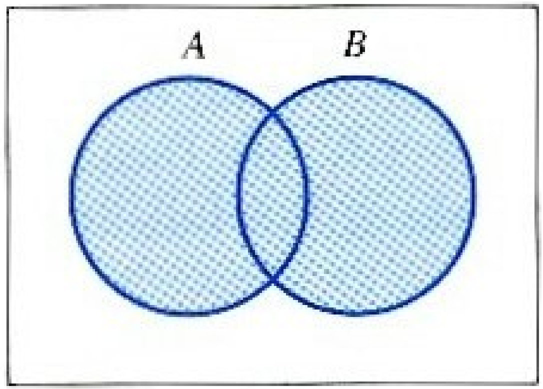
Ví dụ: Nhiều tập sẽ rất rối mắt!



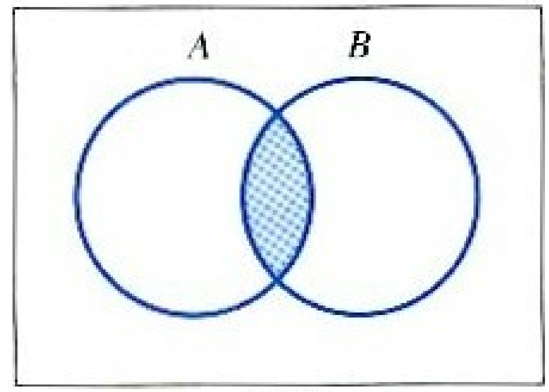
SƠ ĐỒ VENN

- **Ví dụ:** Vẽ sơ đồ Venn cho thấy tác động của các phép toán tập hợp.
  - Các miền tương ứng với kết quả sẽ tô đen để chỉ ra tác động của phép toán tập hợp.

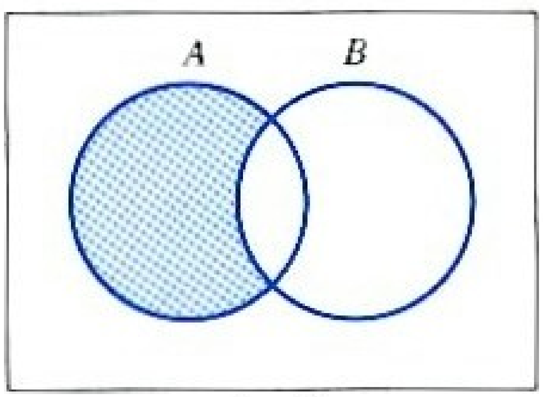
Sơ đồ Venn



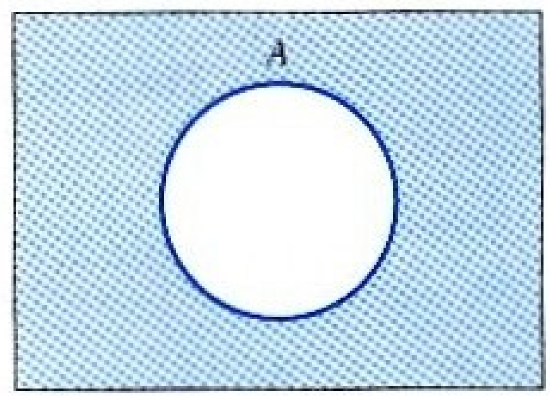
$A \cup B$



$A \cap B$

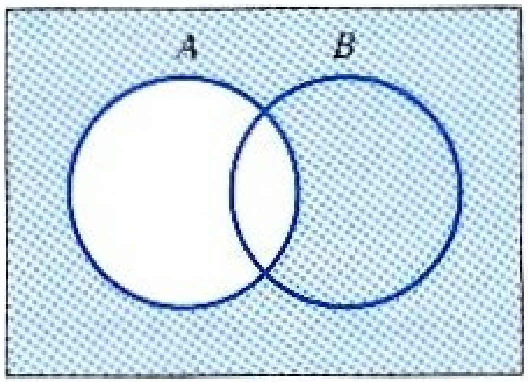


$A - B$

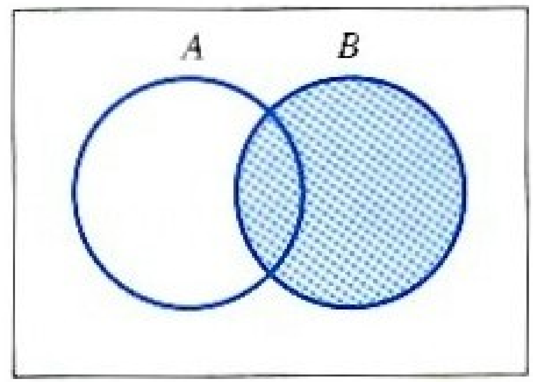


$\overline{A}$

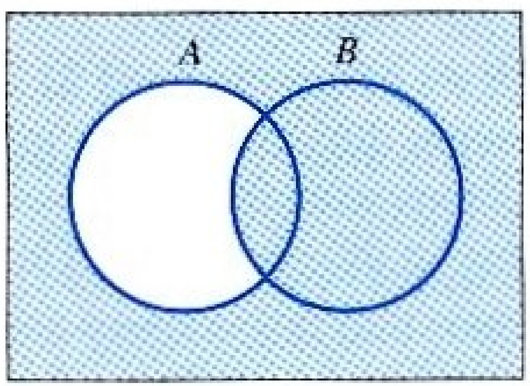
Sơ đồ Venn



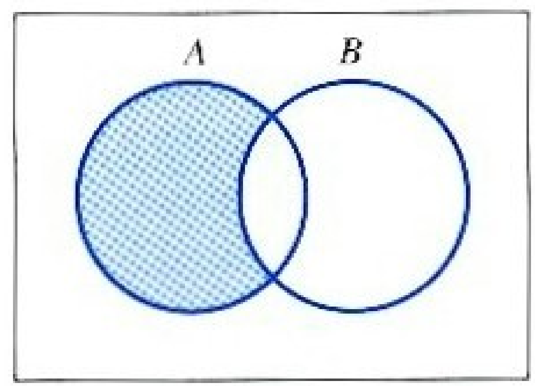
$\overline{A}$



B



$\overline{A} \cup B$



$\overline{(\overline{A} \cup B)}$

Sơ đồ Venn

- Câu hỏi:
  - Hãy vẽ sơ đồ Venn của $A \oplus B$
  - Phép $\oplus$ được sử dụng trong logic như là phép toán Exclusive OR?

Các đẳng thức tập hợp

- Các đẳng thức tập hợp tương tự như các đẳng thức logic.
- Các đẳng thức quan trọng:

Đẳng thức	**Tên gọi**
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	Đồng nhất (Identity laws)
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Trội (Domination laws)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Đồng nhất Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Bù (Complementation laws)

Các đẳng thức tập hợp

- Tiếp theo:

Đẳng thức	**Tên gọi**
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Giao hoán Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Kết hợp Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Phân phối Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Luật De Morgan De Morgan's laws

Chứng minh các đẳng thức tập hợp

- Để chứng minh đẳng thức tập hợp

$$A = B,$$

có thể sử dụng các kỹ thuật thường dùng sau:

1. Chứng minh $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.
2. Sử dụng định nghĩa và sự tương đương của các mệnh đề logic xác định tập hợp.
3. Sử dụng bảng quan hệ thành viên.

Ví dụ 1.

CM đẳng thức: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

- **Phần 1:** CM $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Giả sử $x\in A\cap(B\cup C)$, cần chỉ ra $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Ta biết $x\in A$, và hoặc là $x\in B$ hoặc là $x\in C$.
    - TH 1: $x\in B$. Khi đó $x\in A\cap B$, vì thế $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
    - TH 2: $x\in C$. Khi đó $x\in A\cap C$, do đó $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Suy ra, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
  - Vậy $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
- **Phần 2:** CM $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$. (tương tự)

Ví dụ 2

- Chứng minh rằng
- **CM:** $$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{theo định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{theo định nghĩa } \notin \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{theo định nghĩa giao} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B)\} && \text{theo luật DeMorgan} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})\} && \text{theo định nghĩa phần bù} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B})\} && \text{theo định nghĩa hợp}
\end{aligned}
$$

- Q.E.D.

Bảng quan hệ thành viên

- Xây dựng bảng:
  - Các cột ứng với các biểu thức tập hợp.
  - Các dòng ứng với mọi tổ hợp có thể về quan hệ thành viên trong các tập đang xét.
- Điền vào bảng:
  - Sử dụng "1" để ghi nhận là thành viên, "0" để chỉ ra không là thành viên.
- Đẳng thức là được chứng minh nếu hai cột tương ứng với hai biểu thức ở hai vế là ***giống hệt nhau***.

Ví dụ 3

Chứng minh: $(A \cup B) - B = A - B$.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) - B$	$A - B$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

Ví dụ 4

- Sử dụng bảng quan hệ thành viên, chứng minh rằng

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

A B C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1 1 1	1				
1 1 0	1				
1 0 1	1				
1 0 0	0				
0 1 1	1				
0 1 0	1				
0 0 1	1				
0 0 0	0				

Các đẳng thức tập hợp

- Ví dụ 5:
  - Cho *A*, *B*, và *C* là các tập hợp. Chứng minh rằng

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

  - CM:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap (\overline{B \cap C}) && \text{theo luật De Morgan} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{theo luật De Morgan} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{theo luật giao hoán đối với phép giao} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{theo luật giao hoán đối phép hợp}
\end{aligned}$$

Hợp của nhiều tập

- Hợp của hai tập: $A \cup B$
- Hợp của n tập:
  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cup A_2) \cup \ldots) \cup A_n)$
  (ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)
- Ký hiệu:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Giao của nhiều tập

- Giao của hai tập: $A \cap B$
- Giao của n tập:
$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cap A_2) \cap \ldots) \cap A_n)$
(ghép nhóm và thứ tự là không quan trọng)
- Ký hiệu:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Biểu diễn tập hợp bởi xâu nhị phân

- Đối với tập vũ trụ $U = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ gồm không quá nhiều phần tử. Ta có thể sử dụng biểu diễn tập $S \subseteq U$ bởi xâu nhị phân $b_1 b_2 \ldots b_n$ trong đó

$$b_i = 1 \leftrightarrow x_i \in S.$$

- **Ví dụ.** $U = \{1,\ldots,11\}$. Xét các tập con $S, T \subseteq U$.
  - $S = \{2,3,5,7,11\} \leftrightarrow 01101010001.$
  - $T = \{1,2,4,11\} \leftrightarrow 11010000001.$
- Trong cách biểu diễn này các phép toán tập hợp $\cup, \cap, \bar{}$ được thực hiện nhờ phép toán logic OR, AND, NOT với từng bít!
- **Ví dụ:** $S \cup T =$ 01101010001

$$\begin{array}{rl} & 01101010001 \\ \vee & 11010000001 \\ = & \mathbf{11111010001} \end{array}$$

Phân hoạch

- Giả sử $X_1, X_2, ..., X_m$ là các tập con của X. Ta nói $X_1, X_2, ..., X_m$ tạo thành một phân hoạch của X (hoặc X được phân hoạch thành các tập $X_1, X_2, ...,$ X_m) nếu:
    - $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_m$;
    - $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j.$

ÁNH XẠ

- Định nghĩa
- Cách xác định ánh xạ
- Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Ánh xạ

- Ta nói f là ánh xạ từ tập X vào tập Y nếu nó đặt tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in Y$ nào đó.
  - Ký hiệu: $f: X \rightarrow Y$ hoặc $y = f(x)$
  - x gọi là gốc, y gọi là ảnh.
- Trong giáo trình giải tích chúng ta đã làm quen với hàm số thực f đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbf{R}$ với một giá trị thực $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Xác định ánh xạ

- Cho hai tập hữu hạn X và Y.
- Để xác định một ánh xạ f từ X vào Y (f: $X \rightarrow Y$) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:
  - Bảng giá trị đầy đủ
  - Sơ đồ ánh xạ
  - Ma trận ánh xạ

Xác định ánh xạ: Bảng giá trị đầy đủ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, \ Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$
- Một ánh xạ f từ X vào Y (f: $X \to Y$) có thể xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau đây

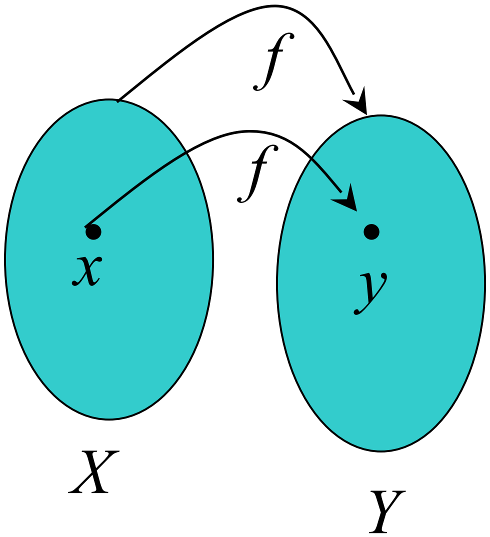
x	x_1	x_2	…	x_m
$y=f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_m)$

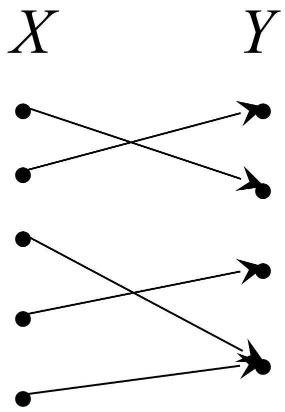
Như vậy mỗi ánh xạ từ tập m phần tử X vào tập n phần tử Y hoàn toàn xác định bởi bộ ảnh

$$(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))$$

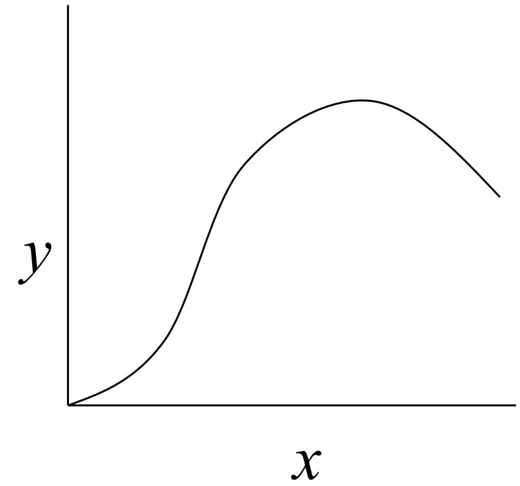
Sơ đồ ánh xạ

- Ánh xạ có thể xác định bởi sơ đồ như sau:





Sơ đồ



Đồ thị hàm số

Ma trận ánh xạ

- Giả sử
  - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$,
  - $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,
- Một ánh xạ f từ X vào Y (f: $X \to Y$) có thể xác định bởi ma trận $A_f = \{a_{ij}\}$ kích thước $m \times n$ với các phần tử được xác định theo qui tắc sau đây:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } y_j \text{ là phần tử t ơng ứng với } x_i \text{ qua ánh xạ } f \\ 0, \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

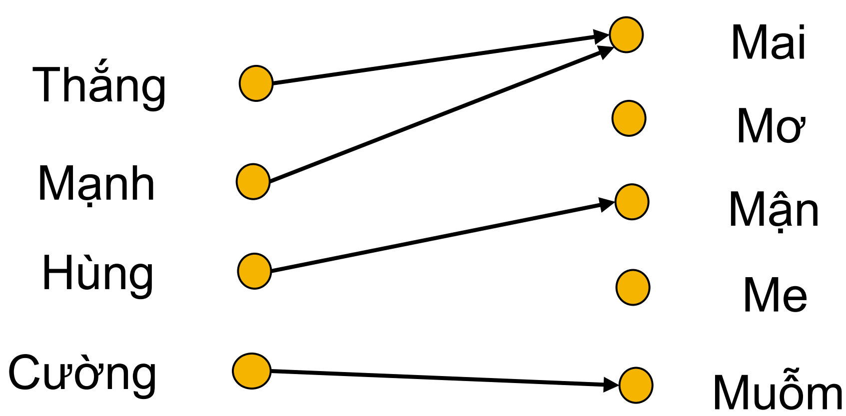
Ví dụ

- X = { Thắng, Mạnh, Hùng, Cường };
- Y = { Mai, Mơ, Mận, Me, Muỗm }

- Xét ánh xạ f từ X vào Y xác định bởi bảng giá trị đầy đủ sau:

x	Thắng	Mạnh	Hùng	Cường
y=f(x)	Mai	Mai	Mận	Muỗm

- Ánh xạ nói trên có thể cho bởi sơ đồ và ma trận như sau:



$$A_f = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Mai} & \text{Mơ} & \text{Mận} & \text{Me} & \text{Muỗm} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Thắng} \\ \text{Mạnh} \\ \text{Hùng} \\ \text{Cường} \end{array} \end{array}$$

Một số loại ánh xạ hay dùng

- Xét 3 loại ánh xạ hay dùng
  - Đơn ánh
  - Toàn ánh
  - Song ánh
- Giả sử X, Y là các tập hợp.
- **Đơn ánh:** Ánh xạ f : X → Y được gọi là *đơn ánh* (*injection*) nếu nó đặt tương ứng hai phần tử khác nhau của X với hai phần tử khác nhau của Y.

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Một số loại ánh xạ hay dùng

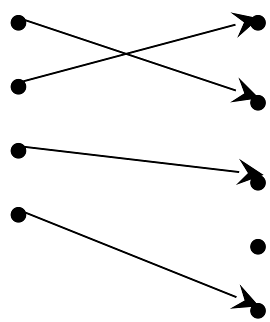
- **Toàn ánh:** Ánh xạ f từ X vào Y được gọi là *toàn ánh* (*surjection*) nếu mỗi phần tử của Y đều là ảnh của ít nhất một phần tử nào đó của X qua ánh xạ f.

$$\forall y \in Y, \exists\, x \in X: y = f(x) \quad .$$

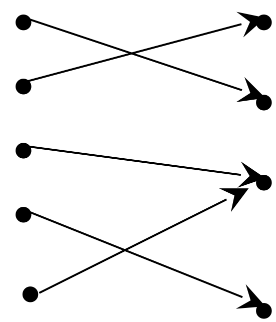
- **Song ánh:** Ánh xạ f từ X vào Y được gọi là *song ánh* (*bijection, one to one*) hay còn gọi là tương ứng 1-1(*one-to-one correspondence*), ***sánh***, nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ví dụ

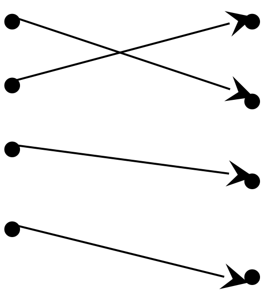
- Sơ đồ của một số ánh xạ:



Đơn ánh



Toàn ánh



Song ánh

Ứng dụng

- **Xét bài toán:** Đếm số phần tử của tập X. Giả sử Y là tập mà số phần tử của nó là đã biết: $n_y = |Y|$. Giả sử ta có thể xây dựng được ánh xạ f từ X vào Y. Khi đó
  - Nếu f là đơn ánh, thì ta có $|X| \leq n_y$
  - Nếu f là toàn ánh, thì ta có $|X| \geq n_y$
  - Nếu f là song ánh, thì ta có $|X| = n_y$
- Trong tình huống thứ ba ta giải được bài toán đếm đặt ra, nhờ xây dựng được song ánh từ tập các cấu hình tổ hợp cần đếm (tập X) vào tập các cấu hình tổ hợp mà ta đã biết trước số phần tử (tập Y).

Ví dụ

- **Hỏi có bao nhiêu số có 5 chữ số mà mỗi chữ số đứng sau lại lớn hơn chữ số đứng trước?**

Giải: Mỗi một số cần đếm tương ứng với một cách chọn ra 5 chữ số từ 9 chữ số 1, 2, ..., 9, và ngược lại mỗi một cách lấy ra 5 chữ số từ 1, 2, ..., 9 sau khi sắp xếp theo thứ tự tăng dần cho ta đúng một số cần đếm. Vậy số lượng số cần đếm là C(9, 5).

- Lập luận tương tự ta cũng có số lượng số cần đếm chính bằng số cách loại bỏ 4 chữ số từ dãy 1 2 3 ... 9. Vậy số lượng số cần đếm là C(9, 4)
- Như vậy bằng lập luận tổ hợp ta đã chứng minh được C(9,5) = C(9,4).

Ask questions!