Bài giảng
CƠ HỌC CHẤT LỎNG LÝ THUYẾT

Trịnh Anh Ngọc

1/2016

Dẫn nhập

Về phương diện vật lý, mọi vật thể thực dù nhỏ đến đâu cũng được cấu thành bởi một số rất lớn các phân tử chuyển động không ngừng. Các phân tử này tương tác với nhau do va chạm và lực hút phân tử, hình thành các trạng thái của vật chất: rắn, lỏng và khí. Ở trạng thái rắn, các phân tử tương đối gần nhau (cỡ đường kính phân tử) nên lực hút phân tử tương đối mạnh tạo nên mối liên kết khá bền vững trong cấu trúc phân tử; do đó rất khó thay đổi hình dạng và thể tích của vật thể rắn. Trái lại, ở trạng thái khí khoảng cách giữa các phân tử rất lớn (gấp nhiều lần kích thước phân tử), lực hút phân tử yếu nên chất khí không có hình dạng nhất định và thể tích của chúng rất dễ thay đổi. Chất lỏng cũng như chất khí, nhưng khoảng cách giữa các phân tử tương đối gần hơn nên tuy chất lỏng có hình dạng không nhất định như chất khí song rất khó thay đổi thể tích của nó.

Chất lưu

Trong tài liệu này thuật ngữ chất lưu được dùng để chỉ chung chất lỏng và chất khí. Tính chất xác định chất lưu nằm trong sự dễ dàng bị biến dạng (thay đổi hình dạng và thể tích) của chúng. Một thể tích chất rắn có hình dạng xác định, và sự thay đổi hình dạng chỉ xảy ra khi có sự thay đổi điều kiện bên ngoài. Một thể tích chất lưu thì khác, nó không có hình dạng định trước, và các phần tử khác nhau của chất lưu thuần nhất có thể "sắp xếp" lại một cách tự do mà không ảnh hưởng đến các tính chất vĩ mô của thể tích chất lưu. Một cách đơn giản, ta có thể hiểu vật rắn là vật liệu mà hình dạng, vị trí tương đối của các phần tử cấu tạo nên nó chỉ thay đổi một lượng nhỏ khi có sự thay đổi nhỏ trong lực tác dụng lên nó. Tương ứng, ta hiểu chất lưu là vật liệu mà vị trí tương đối của các phần tử của nó thay đổi một lượng không nhỏ khi chịu tác dụng của lực cho trước có độ lớn nhỏ.

Sự phân biệt chất lưu với chất rắn thì không rõ ràng. Có nhiều vật liệu ở phương diện này ứng xử giống vật rắn, nhưng ở phương diện khác lại giống như chất lưu. Các chất thixotropic như thạch hoặc sơn ứng xử như vật rắn đàn hồi sau khi nó được để yên trong một thời gian, nhưng nếu chúng bị "vặn vẹo" mạnh bằng cách lắc hay quét, nó mất đi tính chất đàn hồi và ứng xử như một chất lỏng. Uranit thông thường ứng xử như chất rắn, nhưng nếu một lực được đặt lên nó trong một khoảng thời gian dài thì biến dạng của nó gia tăng vô hạn, như thể nó là chất lỏng. Phức tạp hơn là các hợp chất polimer mà ứng xử của chúng thể hiện đồng thời tính lỏng và tính rắn.

Giả thiết liên tục và cơ học môi trường liên tục

Trong các bài toán cơ học, cấu trúc phân tử của vật thể rất nhỏ so với kích thước đặc trưng của bài toán. Do đó theo quan điểm vĩ mô ta có thể bỏ qua cấu trúc phân tử của vật thể thực, xem vật thể như được cấu thành bởi các điểm vật chất hay chất điểm phân bố liên tục. Giả thiết này được gọi là mô hình môi trường liên tục, vật thể được mô hình như vậy gọi là môi trường liên tục hay vắn tắt là môi trường. Ngành cơ học nghiên cứu vật thể dựa trên mô hình môi trường liên tục là cơ học môi trường liên tục.

Trong cơ học môi trường liên tục các đại lượng cơ học liên quan đến chất điểm được hiểu là giá trị trung bình của đại lượng tương ứng trên "thể tích" của chất điểm. Như vậy, muốn mô hình môi trường liên tục có hiệu lực, các chất điểm trong vật thể phải chứa một số đủ lớn các phân tử để phép lấy trung bình có ý nghĩa, và như thế thể tích thực của chất điểm không phải bằng không[1]. Như vậy, một thể tích vô cùng bé của vật là thể tích vô cùng bé về mặt vật lý, nghĩa là rất bé so với thể tích của vật nhưng lại khá lớn so với khoảng cách giữa các phân tử.

Lực thể tích và lực mặt

Lực tác dụng lên các vật thể vật chất xem như môi trường liên tục có thể phân thành hai loại: (1) các lực tương tác xa, thí dụ lực hấp dẫn, chúng giảm chậm khi khoảng cách tương tác gia tăng; (2) các lực tương tác gần xuất hiện do tương tác phân tử.

Các lực tương tác xa tác dụng lên mọi thể tích của vật thể. Ngoài lực hấp dẫn có thể kể đến lực điện từ, lực quán tính như là những trường hợp quan trọng, thường gặp trong các khảo sát cơ học. Do lực tương tác xa biến đổi chậm theo vị trí nên chúng tác dụng như nhau trên mọi thành phần vật chất của thể tích vô cùng bé, lực toàn phần tỉ lệ với thể tích của phần tử. Lực tương tác xa cũng được gọi là lực thể tích.

Để biểu diễn lực toàn phần của tất cả các lực thể tích tác dụng tại thời điểm t lên phần bên trong của thể tích dV bao quanh chất điểm có vị trí $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ta viết

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)dV.$$

[1] Trong một số ứng dụng, thể tích cỡ $10^{-9}mm^3$ được xem là kích thước chất điểm, chứa khoảng 3×10^7 phân tử.

Đối với hai loại lực thường gặp là lực hấp dẫn và lực quán tính, lực tỉ lệ với khối lượng của phần tử thể tích vô cùng bé, ta sẽ viết

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\rho dV,$$

trong đó thừa số $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ là mật độ khối lượng của thể tích dV, trường hợp này $\mathbf{F}$ gọi là lực khối.

Lực tương tác gần có nguồn gốc phân tử, chúng giảm nhanh khi khoảng cách giữa các phần tử tương tác tăng, và chỉ đáng kể khi có sự tiếp xúc cơ học giữa các phần tử tương tác, tương tự như sự tiếp xúc giữa hai cố thể. Nếu không có sự tiếp xúc giữa các phần tử tương tác thì không có phân tử nào trong phần tử tương tác này đủ gần phân tử trong phần tử tương tác kia để gây ra lực tác dụng gần (hay lực tương tác không đáng kể).

Nếu một thể tích vô cùng bé của vật chịu tác dụng bởi lực tương tác gần do các thành phần vật chất bên ngoài, thì lực này chỉ có thể tác động lên một lớp vật chất rất mỏng kề với mặt biên của thể tích. Lực toàn phần, vì vậy, tỉ lệ với diện tích bề mặt. Vì pháp tuyến của các phần khác nhau của mặt biên có hướng khác nhau, nên thay vì xét lực tác dụng trên toàn bộ mặt biên ta chỉ xét một phần tử diện tích phẳng. Lực này gọi là lực mặt.

Để biểu diễn lực toàn phần tại thời điểm t tác dụng lên thể tích vô cùng bé qua phần tử diện tích phẳng dS của thể tích chứa chất điểm ở vị trí $\mathbf{x}$, ta viết

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{x}, t)dS,$$

trong đó $\mathbf{n}$ là pháp vectơ đơn vị ngoài của thể tích.

Như vậy, khác với cơ hệ gồm các chất điểm rời rạc lực tác dụng là lực tập trung, trong cơ học môi trường liên tục, lực tác dụng lên vật thể là lực phân bố; nghĩa là, có thể biểu diễn chúng dưới dạng một hàm vectơ xác định trên một miền trong không gian. Có hai loại: lực thể tích và lực mặt. Lực thể tích là lực tác dụng trên một đơn vị thể tích, còn lực mặt là lực tác dụng trên một đơn vị diện tích bề mặt của môi trường liên tục.

Thực nghiệm cho thấy mọi vật thể thực dưới tác dụng của lực đều bị biến dạng, nghĩa là khoảng cách giữa các chất điểm trong vật bị thay đổi. Thí dụ, biến dạng của lò xo khi treo vật nặng, thanh kim loại bị dãn dài dưới tác dụng của lực kéo tại đầu thanh. Trong cơ học lý thuyết, khi khảo sát chuyển động của vật ta thường bỏ qua khả năng gây biến dạng của lực, xem chất điểm như là điểm "hình học" (không có kích thước), cũng như cố thể gồm các chất điểm mà khoảng cách giữa chúng không đổi. Thế nhưng, thực tế cho thấy, nhiều vấn đề xuất hiện trong kỹ thuật đòi hỏi phải chú ý đến biến dạng của vật dưới tác dụng của lực. Thực chất, biến dạng cũng là chuyển động, việc nghiên cứu biến dạng cũng dựa trên các định luật, định lý của cơ học Newton. Tuy nhiên, khái niệm biến dạng nhấn mạnh đến sự thay đổi khoảng cách tương đối giữa các phần của vật, dẫn đến sự thay đổi lực tương tác (ứng suất) giữa chúng. Chuyển động là đối tượng nghiên cứu của cơ học các chất điểm, còn trong cơ học các môi trường liên tục ta chỉ quan tâm đến biến dạng của vật dưới tác dụng của lực ngoài, bỏ qua chuyển động của vật xem như cố thể.

Nội dung giáo trình là Động lực học chất lưu (fluid dynamics) - nghiên cứu chuyển động tương đối của các phần tử khác nhau của thể tích chất lưu dưới tác dụng của lực. Mục tiêu căn bản của giáo trình là trình bày các nguyên lý quan trọng của khối lượng, động lượng và năng lượng khi chúng được áp dụng cho chất lưu. Hầu hết các ứng dụng này là cho dòng chảy không nén được (incompressible flow), cả không nhớt (inviscid) lẫn nhớt (viscous).

Ngoài Cơ học lý thuyết là môn tiên quyết, sinh viên theo học Cơ học chất lưu được xem như đã biết về phép tính vectơ, nhiệt động lực học. Một tóm tắt về phép tính vectơ có thể tìm đọc [1] chương 0, hoặc đầy đủ hơn trong ba chương đầu giáo trình [3] của Prieve. Về nhiệt động lực học ở đây chỉ đòi hỏi kiến thức về nhiệt trong chương trình đại cương. Giáo trình này cũng không yêu cầu sinh viên đã học qua môn Cơ học môi trường liên tục, những kiến thức có liên quan đến môn học này, chẳng hạn phép tính tenxơ, cũng sẽ được nhắc lại ở mức độ vừa đủ.

Trong giáo trình có giới thiệu cách tính toán số cho một số bài toán cơ học chất lưu trên cơ sở phương pháp sai phân và dùng phần mềm Matlab, tuy nhiên cách trình bày là tự chứa đựng nên sinh viên không cần phải biết gì thêm.

Chương 1

Thủy tĩnh học

Chất lưu tĩnh (static fluid) là chất lưu không chuyển động. Hệ lực tác dụng lên chất lưu ở trạng thái cân bằng. Thủy tĩnh học nghiên cứu: cách thức duy trì sự cân bằng lực, ảnh hưởng của sự cân bằng lực lên các kết cấu chứa đựng hoặc bao quanh bởi chất lưu.

1.1 Ứng suất trong chất lưu

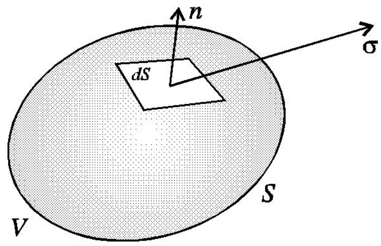
Có hai loại lực tác dụng lên một phần tử chất lưu:

• Lực mặt (surface force) là lực do các phân tử (molecule) trong môi trường chung quanh tác dụng lên các phân tử (molecule) trên bề mặt phần tử. Lực mặt là tương tác gần (short-range), nó chỉ đáng kể khi khoảng cách giữa các phân tử nhỏ hơn 10^{-10} m. Trong chất lưu, lực mặt phụ thuộc vào vị trí tương đối của các phân tử gần bề mặt, và chuyển động (trung bình) tương đối của chúng.

• Lực thể tích (body force) là lực tương tác xa (long-range force), chúng tác dụng lên toàn thể phần tử chất lưu. Thường lực thể tích ảnh hưởng lên chuyển động của chất lưu là lực trọng trường (gravity force).

Xét thể tích hữu hạn V, giới hạn bởi mặt kín S chứa đầy chất lưu (hình 1.1). Tại một điểm trên mặt S, các phân tử chất lưu trên hay gần bề mặt chịu tác dụng của lực trên đơn vị diện tích mặt, gọi là ứng suất σ, gây ra do các phân tử bên ngoài. Nói chung, vectơ ứng suất σ có thành phần pháp tuyến với mặt (gọi là ứng suất pháp (normal stress)) và thành phần tiếp tuyến với mặt (gọi là ứng suất trượt (shear stress)). Do định luật tác dụng và phản tác dụng của Newton, ứng suất tác dụng lên chất lưu bên trong mặt S bằng và ngược hướng với ứng suất tại điểm này tác dụng lên phía ngoài của mặt S.

Đối với điểm P bên trong thể tích chất lưu, để mô tả ứng suất, ta đưa



Hình 1.1: Ứng suất tại một điểm trên mặt có pháp vectơ đơn vị ngoài **n**.

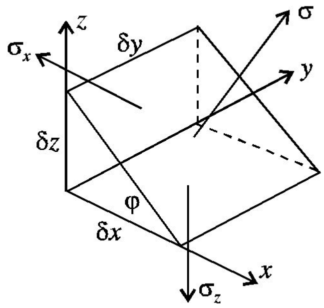
vào ba vectơ ứng suất ứng với ba mặt đôi một trực giao nhau. Chín thành phần của các vectơ này lập thành cái gọi là tenxơ ứng suất (stress tensor).

1.2 Áp suất trong chất lưu tĩnh

Đối với chất lưu tĩnh, lực tác dụng lên bề mặt phần tử chỉ có thành phần pháp tuyến và là lực nén[1]

Định luật Pascal

Tại mọi điểm trong chất lưu tĩnh, (vectơ) ứng suất có cùng độ lớn đối với mọi hướng.
Chứng minh. Xét sự cân bằng lực trên phần tử chất lưu (hình 1.2). Các ứng



Hình 1.2: Lực tác dụng trên một phần tử chất lưu.

suất tác dụng vuông góc với hai mặt có diện tích $dydz$ và $dy(dz/\sin\varphi)$ được ký hiệu bởi σ_x và σ, tương ứng. Vì chất lưu không chuyển động, tổng các lực

[1]Nhận xét này được rút ra từ quan sát, và có thể xem là định nghĩa chất lưu tĩnh.

theo phương x phải bằng không

$$\begin{aligned} -\sigma_x dydz + (\sigma \sin\varphi)\left(dy\frac{dz}{\sin\varphi}\right) &= 0 \\ (-\sigma_x + \sigma)dydz &= 0 \\ \sigma &= \sigma_x. \end{aligned}$$

Khi phần tử chất lưu co về không, ứng suất pháp σ và σ_x được xác định tại P. Tuy nhiên, độ lớn của σ phải như nhau với bất kỳ hướng nào vì ta có thể chọn z hay y thay vì x trong hình 1.2. ■

Ta có thể viết ứng suất tác dụng lên phần tử diện tích có pháp vectơ đơn vị ngoài $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{n}, \tag{1.1}$$

trong đó p (độ lớn của ứng suất), bởi định nghĩa, là áp suất (pressure) của chất lưu tại điểm P. Đơn vị áp suất trong hệ SI là N/m^2, tên riêng là Pascal (Pa).

Áp lực

Nhờ phương trình (1.1), ta có thể xác định áp lực (pressure force) mà thể tích V của chất lưu phải chịu do ứng suất tác dụng lên bề mặt S của nó. Áp lực toàn phần (total pressure force) bằng tích phân áp lực trên đơn vị diện tích mặt

$$\text{Áp lực toàn phần} = \int_S (-p\mathbf{n})dS. \tag{1.2}$$

Áp dụng định lý Gauss, chuyển tích phân mặt thành tích phân thể tích

$$\text{Áp lực toàn phần} = \int_V (-\bigtriangledown p)dV. \tag{1.3}$$

Vì áp lực toàn phần là tích phân của đại lượng $-\bigtriangledown p$ trên thể tích V nên

$$\text{Áp lực trên đơn vị thể tích} = -\bigtriangledown p. \tag{1.4}$$

Nói khác đi, một phần tử thể tích vô cùng bé $dxdydz$ sẽ chịu áp lực gây ra bởi sự chênh lệch áp suất trên các mặt của nó. Lực này tác dụng theo hướng áp suất giảm. Thí dụ, sự chênh lệch áp suất theo hướng x là $(\partial p/\partial x)dx$ gây ra áp lực tương ứng là $-(\partial p/\partial x)dx(dydz)\mathbf{i}$.

Thí dụ 1.1. Gần mặt đất, áp suất khí quyển (atmospheric pressure) giảm khi độ cao z so với mặt biển tăng, xấp xỉ theo luật

$$p = p_0 \exp(-\alpha z),$$

trong đó p_0 là áp suất trên mặt biển khoảng $1,0133 \times 10^5\ Pa$ và $\alpha = 1,2 \times 10^{-4}\ m^{-1}$. Hãy tính áp lực trên đơn vị thể tích tại $z = 0$ và $z = 5\ km$.

Giải. Ta có

$$-\bigtriangledown p = -\frac{dp}{dz}\mathbf{k} = \alpha p_0 \exp(-\alpha z)\mathbf{k}.$$

Tại $z = 0\ km$,

$$-\bigtriangledown p = 1,2 \times 10^{-4} \times 1,033 \times 10^5\mathbf{k} = 12,396\mathbf{k}\ (N/m^3)$$

Tại $z = 5\ km$,

$$\begin{aligned} -\bigtriangledown p &= 1,2 \times 10^{-4} \times 1,033 \times 10^5 \exp(-1,2 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^3)\mathbf{k} \\ &= 6,8031\mathbf{k}\ (N/m^3). \end{aligned}$$

◇

Điều kiện cân bằng thủy tĩnh

Phần tử chất lưu vô cùng bé vẫn giữ trạng thái nghỉ vì có sự cân bằng của các lực tác dụng theo phương thẳng đứng, trọng lực (hướng xuống dưới) được cân bằng bởi áp lực (hướng lên trên)

$$-\bigtriangledown p + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Phương trình (1.5), được gọi là phương trình cân bằng thủy tĩnh (hydrostatic equilibrium), chỉ ra rằng áp suất p phải tăng theo hướng của $\mathbf{g}$ và độ lớn của gradient áp suất là ρg. Chất lưu càng "dầy đặc" thì sự gia tăng áp suất theo độ sâu càng lớn. Hơn nữa, mặt phẳng nằm ngang bất kỳ trong chất lưu là mặt đẳng áp, bởi vì $\bigtriangledown p$ không có thành phần theo phương ngang.

Trường hợp chất lưu có mật độ khối ρ là *hằng* ta có thể lấy tích phân phương trình vi phân (1.5) dọc theo đường cong bất kỳ nằm hoàn toàn trong chất lưu nối hai điểm, **1** và **2**. Ký hiệu phần tử đường bởi $d\mathbf{r}$, ta có

$$\begin{aligned} -\int_1^2 \bigtriangledown p \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \rho\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} &= 0 \\ -\int_1^2 \bigtriangledown p \cdot d\mathbf{r} + \rho\int_1^2 \bigtriangledown(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= 0 \\ p_1 - p_2 + \rho\mathbf{g}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= 0 \end{aligned}$$

hay

$$p_1 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_1 \;\;=\;\; p_2 - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_2. \tag{1.6}$$

Chú ý, ở đây ta đã dùng công thức $\mathbf{g} = \bigtriangledown(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})$.

Thông thường hệ tọa độ Descartes được chọn với trục z hướng lên, ngược với hướng của gia tốc trọng trường. Khi đó, $\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = -gz$, và phương trình (1.6) có dạng

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2. \tag{1.7}$$

Nhận xét 1.1. Có một cách đơn giản để hiểu mối quan hệ của phương trình (1.7). Giả sử ta cố định một cột thẳng đứng chứa chất lưu hình trụ diện tích đáy A và độ cao $z_2 - z_1$. Áp suất p_1 tại đáy của cột vượt quá áp suất p_2 ở đỉnh một lượng $p_1 - p_2$, tạo áp lực thẳng đứng hướng lên với độ lớn $(p_1 - p_2)A$. Lực này phải cân bằng với lực kéo xuống của trọng trường đặt lên chất lưu bên trong cột, bằng tích của g với khối lượng $\rho(z_2 - z_1)A$. Như vậy, *sự chênh lệch áp suất bằng trọng lượng của cột chất lưu có diện tích đáy bằng đơn vị*. Điều này tương đương với (1.7). Chú ý, vì mặt xung quanh của cột chất lưu thẳng đứng, nên áp lực gây ra do mặt xung quanh không có thành phần thẳng đứng •

Quan hệ (1.7) không chỉ đúng giữa hai điểm mà còn đúng giữa tất cả các điểm bên trong chất lưu. Nói cách khác, tổng $p + \rho g z$ có giá trị như nhau tại tất cả các điểm mà có thể nối với nhau bằng một đường nằm hoàn toàn trong chất lưu. Kết luận này được diễn tả nhờ phương trình

$$p + \rho g z = const, \tag{1.8}$$

trong đó *const* có thể được đánh giá từ p và z tại một điểm trong chất lưu, chẳng hạn, tại điểm **1** áp suất bằng p_1.

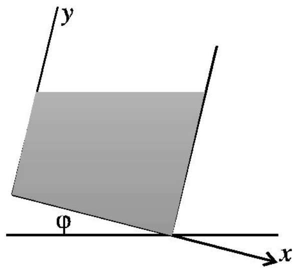
Áp suất $p(z)$ như là hàm của độ cao z có thể tìm được từ:

$$p(z) = p_1 + \rho g(z_1 - z). \tag{1.9}$$

Thí dụ 1.2. Một thùng nước hình hộp chữ nhật được đặt nghiêng một góc φ so với mặt phẳng nằm ngang (hình 1.3). Để tính ứng suất trong thùng, người thiết kế cần biết áp suất của chất lỏng như là hàm của các tọa độ x và y tính từ góc của thùng. Hãy thiết lập biểu thức của $p(x, y)$ tương đương với phương trình (1.9).

Giải. Gia tốc trọng trường có các thành phần theo hướng x và y:

$$\mathbf{g} = g\sin\varphi\mathbf{i} - g\cos\varphi\mathbf{j}$$



Hình 1.3: Thí dụ 1.2.

và bất biến $p - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}$ trở thành

$$p - \rho\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = p - \rho(g\sin\varphi\mathbf{i} - g\cos\varphi\mathbf{j})\cdot(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = p - \rho g(x\sin\varphi - y\cos\varphi).$$

Công thức tương đương với (1.9) là

$$p(x, y) = p_1 - \rho g(x_1\sin\varphi - y_1\cos\varphi) + \rho g(x\sin\varphi - y\cos\varphi).$$

Với sự phân bố áp suất này, các đường đẳng áp là các đường nằm ngang, $y = x\tan\varphi + const$.
◇

Dạng tích phân của phương trình cân bằng thủy tĩnh

Tích phân hai vế phương trình (1.5) trên thể tích hữu hạn V, ta được (áp dụng định lý Gauss):

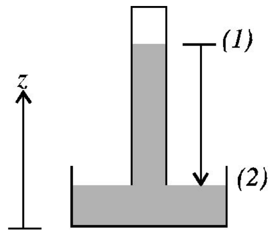
$$\begin{aligned}\int_V(-\bigtriangledown p)dV + \int_V \rho\mathbf{g}dV &= 0\\ \int_S -p\mathbf{n}dS + \int_V \rho\mathbf{g}dV &= 0. \qquad (1.10)\end{aligned}$$

Phương trình (1.10) phát biểu rằng, *áp lực tác dụng lên bề mặt của thể tích chất lưu và lực trọng trường tác dụng lên khối chất lưu bên trong thể tích cộng lại bằng không.* Các phương trình (1.5) và (1.10) là dạng vi phân và tích phân của sự cân bằng lực thủy tĩnh.

1.3 Đo áp suất

Đo áp suất không khí (atmosphere pressure)

Dụng cụ đo áp suất không khí là phong vũ biểu thủy ngân (mercucy barometer). Nó gồm một ống thủy tinh dài khoảng một mét, bít kín một đầu. Sau



Hình 1.4: Sơ đồ một phong vũ biểu.

khi đổ đầy thủy ngân, ống được úp ngược vào chậu đựng thủy ngân sao cho miệng ống nằm bên dưới mặt thoáng của chậu. Do trọng lượng, thủy ngân trong ống hạ xuống tạo thành một khoảng chân không hầu như tuyệt đối (hình 1.4). Áp suất không khí tại mặt thoáng của chậu thủy ngân được tính từ chiều cao cột thủy ngân, khoảng cách h giữa mực thủy ngân trong ống (1) và trong chậu (2), bằng cách dùng phương trình cân bằng thủy tĩnh (1.7):

$$p_2 = \rho g h, \tag{1.11}$$

ở đây ta đã thay $p_1 = 0$, là áp suất của chân không. Mật độ khối (khối lượng riêng) của thủy ngân tại $0^o\ C$ là $1,360 \times 10^4\ kg/m^3$ và g lấy giá trị bằng $9,8066\ m/s^2$. Nếu lấy giá trị tiêu chuẩn của áp suất khí quyển bằng $1,0133 \times 10^5\ Pa$ thì chiều cao cột thủy ngân là $h = 0,760\ m = 760\ mm$.

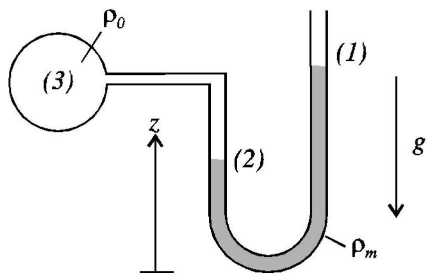
Nhận xét 1.2. Trong các phép đo áp suất không khí, người ta hay dùng đơn vị đo là milimet thủy ngân ($mmHg$), còn gọi là Torr để tưởng nhớ Evangelius Torricelli, người sáng chế ra phong vũ biểu thủy ngân. $1\ mmHg = 133,3698\ Pa$ là áp suất tác dụng bởi cột thủy ngân cao $1\ mm$ tại điểm có gia tốc trọng trường $g = 9,8066\ m/s^2$ và ở nhiệt độ 0^0C.

Một đơn vị thông dụng khác của áp suất là atmosphere (atm). $1\ atm = 1,01 \times 10^5\ Pa$ là áp suất trung bình gần đúng của khí quyển tại mặt biển.

Áp suất không khí không phải là hằng số, nó thay đổi theo độ cao giống như áp suất trong cột thủy ngân. Trong không khí, gradient áp suất ($= -\rho g$) nhỏ hơn nhiều lần so với cùng đại lượng này trong thủy ngân vì mật độ khối của không khí nhỏ hơn nhiều lần so với thủy ngân (vào khoảng 10^4 lần). Với các chênh lệch về độ cao khoảng vài mét thì áp suất chỉ thay đổi khoảng 10^{-4} atmosphere, một lượng quá nhỏ như thế có thể bỏ qua trong hầu hết các mục đích kỹ thuật. Vậy ta có thể giả thiết rằng, trong phạm vi phòng thí nghiệm, áp suất không khí là hằng số •

Đo áp suất áp kế (gage pressure)

Nguyên lý của phong vũ biểu có thể mở rộng để đo áp suất trong bình chứa đóng kín bằng áp kế (manometer) như hình 1.5. Một ống thủy tinh hình chữ



Hình 1.5: Áp kế ống chữ U.

U chứa một lượng chất lỏng, nước hoặc thủy ngân. Một đầu ống thông với không khí, trong khi đầu còn lại được nối với bình chứa chất lưu mà ta cần đo áp suất. Áp dụng phương trình (1.7) cho chất lỏng trong áp kế (có mật độ khối là ρ_m) giữa các mức **2** và **1**, ta có

$$p_2 = p_{at} + \rho_m g(z_1 - z_2), \tag{1.12}$$

ở đây ta đã thay p_1 bằng áp suất không khí p_{at}. Áp suất p_2 không nhất thiết bằng áp suất p_3 tại tâm của bình chứa nếu bình chứa chất lỏng. Để tính sự khác biệt này, ta áp dụng phương trình (1.7) cho chất lỏng đựng trong bình chứa (có mật độ khối ρ_0) giữa hai điểm **3** và **2**:

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2 - \rho_0 g(z_3 - z_2) \\ &= p_{at} + \rho_m g(z_1 - z_2) - \rho_0 g(z_3 - z_2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Nếu bình chứa chất khí, thì mật độ khối ρ_0 của nó nhỏ hơn mật độ khối ρ_m của chất lỏng trong áp kế nhiều lần, và p_2 và p_3 hầu như bằng nhau. Trường hợp bình đựng chất lỏng thì sai lệch áp suất $p_2 - p_3 = \rho_0(z_3 - z_2)$ có thể góp phần quan trọng trong sự xác định áp suất của bình chứa và không thể không lưu ý.

Dùng áp kế ta chỉ có thể tính được *hiệu số giữa áp suất chất lưu trong bình và áp suất không khí*. Để biết áp suất tuyệt đối ta phải dùng số liệu đo áp suất không khí bằng phong vũ biểu[2]. Giống như áp kế, hầu hết các thiết bị đo áp suất đo sự chênh lệch áp suất của chất lưu chịu nén và áp suất

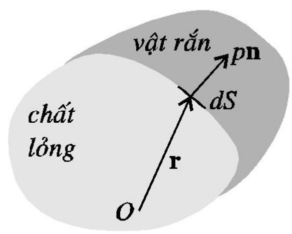
[2]Áp suất tuyệt đối là số liệu quan trọng nếu chất lưu chứa trong bình là chất khí và ta muốn tính mật độ khối của nó từ áp suất tuyệt đối và nhiệt độ.

không khí. Khi sự chênh lệch này là dương, áp suất chỉ thị (trên thiết bị đo) được gọi là áp suất áp kế

$$\text{Áp suất áp kế } = \text{Áp suất tuyệt đối} - \text{Áp suất không khí.} \tag{1.14}$$

1.4 Áp lực trên bề mặt vật rắn

Một phần quan trọng của cơ học chất lưu là xác định áp lực mà kết cấu phải chống lại để thực hiện các chức năng được thiết kế cho nó.



Hình 1.6: Áp lực tác dụng trên phần tử diện tích dS của vật rắn.

Trong nhiều trường hợp, ta chỉ cần xác định lực tương đương tác dụng trên phần kết cấu do áp suất gây ra khi chất lưu tiếp xúc với bề mặt. Áp lực $d\mathbf{F}$ và mômen áp lực $d\mathbf{T}$ tác dụng lên phần tử mặt dS ở vị trí $\mathbf{r}$ (hình 1.6):

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= p\mathbf{n}dS, \\ d\mathbf{T} &= \mathbf{r} \times (p\mathbf{n})dS. \end{aligned}$$

Để ý rằng vectơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài thể tích chất lỏng. Tích phân trên mặt S, ta thu được áp lực tổng hợp và mômen tổng hợp

$$\mathbf{F} = \int_S p\mathbf{n}dS, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{T} = \int_S \mathbf{r} \times (p\mathbf{n})dS. \tag{1.16}$$

Nói chung, mặt cong S không nhất thiết là mặt cong đóng mà có thể là một phần bề mặt kết cấu chịu tác dụng của chất lưu.

Áp lực tác dụng lên mặt có thể được thay bằng một lực duy nhất $\mathbf{F}$ tác dụng tại điểm $\mathbf{r}_{Cp}$, gọi là tâm áp suất (center of pressure). Đặt tại vị trí này $\mathbf{F}$ cho cùng mômen $\mathbf{T}$ như áp lực

$$\mathbf{r}_{Cp} \times \mathbf{F} = \mathbf{T}. \tag{1.17}$$

Sau khi tính được **F** và **T**, vị trí của tâm áp suất có thể được xác định nhờ phương trình (1.17).

Nhận xét 1.3. Trong tính toán áp lực lên các kết cấu mà toàn bộ hay một phần của nó được bao bởi không khí, ta có thể thay áp suất tuyệt đối p bằng áp suất áp kế $p - p_{at}$ vì áp lực toàn phần lên kết cấu là độc lập với độ lớn của áp suất không khí

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_S (p - p_{at})\mathbf{n}dS + \int_S p_{at}\mathbf{n}dS = \int_S (p - p_{at})\mathbf{n}dS - \int_V \nabla p_{at} dV \\ &= \int_S (p - p_{at})\mathbf{n}dS \quad (p_{at} = const.). \end{aligned}$$

Vậy một áp suất đều tác dụng lên bề mặt của kết cấu không phát sinh lực thực hay mômen •

Thí dụ 1.3. Một đập chắn như hình 1.7 để giữ nước có độ sâu H và bề rộng W. Tính lực tương đương do nước tác dụng lên đập.

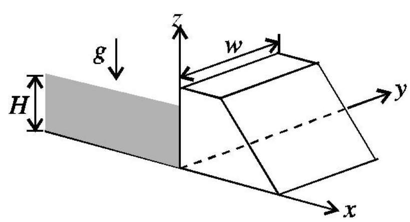
Giải. Trước hết ta xác định áp suất áp kế trên mặt ở độ cao z so với đáy đập bằng cách áp dụng điều kiện cân bằng thủy tĩnh, phương trình (1.9)

$$p(z) = p_1 + \rho g(z_1 - z) = \rho g(H - z),$$

ở đây ta đã lấy điểm **1** tại mặt hồ chứa nước và chú ý rằng áp suất áp kế của không khí bằng không. Sau đó, xác định **F** bằng cách thay biểu thức của p ở trên vào phương trình (1.15)

$$\mathbf{F} = \int_0^W \int_0^H \rho g(H - z)\mathbf{i}dydz = \rho g \left(\frac{WH^2}{2}\right)\mathbf{i}.$$

Chú ý rằng áp suất trung bình mà đập phải chịu là $\rho gH/2$ và độ lớn của lực **F** là tích của áp suất trung bình với diện tích WH.



Hình 1.7: Sơ đồ đập chắn nước.

Mômen **T** được xác định bằng cách thay biểu thức của áp suất vào phương trình (1.16)

$$\mathbf{T} = \int_0^H \int_0^W (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times \rho g(H - z)\mathbf{i}dydz = \frac{\rho g W H^3}{6}\mathbf{j} - \frac{\rho g W^2 H^2}{4}\mathbf{k}.$$

Mômen **T** của áp lực có hai thành phần. Thành phần T_y theo hướng y có độ lớn bằng độ lớn F (của lực **F**) nhân với khoảng cách $H/3$

$$T_y = \frac{\rho g W H^3}{6} = \rho g \frac{W H^2}{2}\frac{H}{3} = F\frac{h}{3}$$

trong khi thành phần T_z có độ lớn bằng F nhân với khoảng cách $W/2$

$$T_z = -\frac{\rho g W^2 H^2}{4} = \rho g \frac{W H^2}{2}\frac{W}{2} = -F\frac{W}{2}.$$

Dùng (1.17), ta xác định được vị trí tâm áp suất

$$\mathbf{r}_{Cp} = \frac{W}{2}\mathbf{j} + \frac{H}{3}\mathbf{k}.$$

Đập chắn phải có độ dầy đủ lớn để chống lại cả áp lực **F** lẫn mômen **T** có thể làm trượt và lật đập.

Áp lực trên mặt phẳng

Một trường hợp đơn giản của phương trình (1.15) và (1.16) là mặt tiếp xúc giữa vật rắn với chất lưu là phẳng. hình 1.8 mô tả một mặt phẳng có hình dạng tùy ý nằm bên dưới bề mặt chất lưu, trên bề mặt này áp suất bằng p_a. Chọn hệ tọa độ Descartes với gốc là trọng tâm (centroit) C của tấm và các trục x và y nằm trong mặt phẳng của tấm. Gọi O là điểm nằm trên bề mặt chất lưu, vectơ định vị **R**, đối với O, của điểm bất kỳ trên mặt phẳng của tấm là

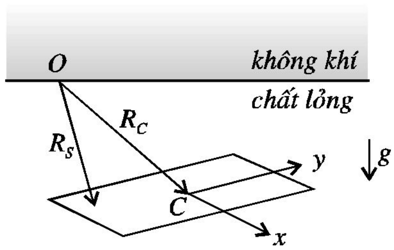
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_C + x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \tag{1.18}$$

trong đó $\mathbf{R}_C$ là vectơ định vị của trọng tâm C

$$\mathbf{R}_C = \frac{1}{S}\int \mathbf{R} dS. \tag{1.19}$$

Từ phương trình (1.6), chú ý rằng $p = p_a$ và $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = 0$ trên bề mặt chất lưu, áp suất p tại điểm trên mặt phẳng là

$$p - \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} = p_a;$$



Hình 1.8: Hệ tọa độ gắn với tấm.

đặc biệt, áp suất tại trọng tâm là

$$p_C = p_a + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}_C.$$

Suy ra

$$p = p_C + \rho(g_x x + g_y y), \tag{1.20}$$

trong đó g_x và g_y là các thành phần của $\mathbf{g}$ theo hướng x và hướng y.

Vì C là trọng tâm của mặt phẳng nên các mômen đối với trục x và y của áp suất đơn vị trên mặt phải bằng không, $\int xdS = \int ydS = 0$ (*). Dùng các hệ thức này, ta có thể xác định lực $\mathbf{F}$ từ phương trình (1.15)

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}\int p_S dS = \mathbf{n}\int p_C dS + \rho\mathbf{n}\int (g_x x + g_y y) dS = (p_C A)\mathbf{n}, \tag{1.21}$$

trong đó A là diện tích tấm. Như vậy, lực $\mathbf{F}$ tác dụng trên một mặt phẳng có hướng bất kỳ bằng tích của áp suất tại trọng tâm C với diện tích A của tấm và tác dụng theo hướng pháp tuyến của tấm.

Với các hình "đều", chẳng hạn như hình vuông, chữ nhật, tròn, elip hay tam giác, vị trí trọng tâm dễ dàng xác định nhờ tính đối xứng. Trường hợp hình không đều, ta có thể nhận được tọa độ của trọng tâm nhờ điều kiện (*).

Tâm áp suất Cp là điểm nằm trên mặt phẳng mà đối với nó mômen của áp lực bằng không

$$\int p(x - x_{Cp})dS = 0, \qquad \int p(y - y_{Cp})dS = 0, \tag{1.22}$$

trong đó $x_{Cp}\mathbf{i} + y_{Cp}\mathbf{j}$ là vectơ bán kính của tâm áp suất Cp đối với trọng tâm C. Để thỏa mãn điều kiện này, thay phương trình (1.20) vào (1.22) và đơn giản nhờ (*)

$$\begin{aligned}\int [p_C(x - x_{Cp}) + \rho(g_x x + g_y y)(x - x_{Cp})]dS &= 0\\ -p_C x_{Cp} A + \rho(g_x I_{xx} + g_y I_{xy}) &= 0,\end{aligned}$$

trong đó $I_{xx} = \int x^2 dS$ và $I_{xy} = \int xydS$ là các mômen quán tính của mặt phẳng đối với trọng tâm C. Giải ra x_{Cp} và tương tự với y_{Cp}, ta tìm được

$$x_{Cp} = \frac{\rho(g_x I_{xx} + g_y I_{xy})}{p_C A}, \qquad y_{Cp} = \frac{\rho(g_y I_{yy} + g_x I_{xy})}{p_C A}. \tag{1.23}$$

Mômen $\mathbf{T}$ của áp lực đối với gốc O đơn giản là mômen của lực $\mathbf{F}$ (phương trình (1.21)) có đường tác động đi qua tâm áp suất Cp. Theo (1.17)

$$\mathbf{T} = (\mathbf{r}_C + x_{Cp}\mathbf{i} + y_{Cp}\mathbf{j}) \times (p_0 A)\mathbf{n}. \tag{1.24}$$

Thí dụ 1.4. Một tấm phẳng hình tròn đường kính $D = 1\ m$ bít lỗ hổng ở thân tàu tại khoảng cách $h = 3\ m$ bên dưới mặt nước. Tấm nghiêng một góc 45^0 so với phương thẳng đứng (hình 1.9). Cho biết mật độ khối của nước $\rho = 10^3\ kg/m^3$, hãy tính lực toàn phần do nước tác dụng lên tấm và khoảng cách giữa tâm áp suất Cp và trọng tâm của tấm. Với hình tròn, $I_{yy} = \pi D^4/64$.

Giải. Áp suất áp kế p_C tại trọng tâm của tấm

$$p_C = \rho g h = 10^3 \times 9,807 \times 3 = 2,942 \times 10^4\ Pa,$$

do đó lực F tác dụng lên tấm

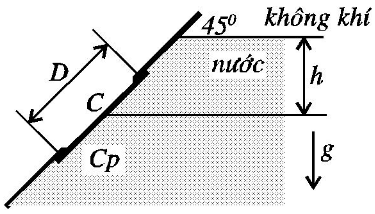
$$F = p_C A = 2,942 \times \frac{\pi}{4} = 2,311 \times 10^4\ N.$$

Lấy trục y hướng lên dọc theo tấm và trục x nằm ngang (thẳng góc với mặt phẳng hình vẽ), $g_x = 0$ và $g_y = -g/\sqrt{2}$. Từ (1.23), ta có

$$\begin{aligned} y_{Cp} &= \frac{\rho(-g/\sqrt{2}) I_{yy}}{p_C A} = -\frac{\rho g D^2}{16\sqrt{2} p_C} \\ &= -\frac{10^3 \times 9,807 \times 1}{16\sqrt{2} \times 2.942 \times 10^4} = -1,473 \times 10^{-2}\ m \diamond \end{aligned}$$

Áp lực trên mặt cong

Đối với mặt cong, không có sự đơn giản chung cho các biểu thức của lực $\mathbf{F}$ và mômen $\mathbf{T}$ như trường hợp mặt phẳng. Với những mặt cong là một phần của những mặt đối xứng như mặt cầu, mặt tru hay mặt nón, có thể đưa vào hệ tọa độ thích hợp cho phép tính được dễ dàng phần tử diện tích dS và pháp vectơ đơn vị $\mathbf{n}$, nhờ đó các tích phân (1.15), (1.16) có thể được đánh giá dễ



Hình 1.9: Thí dụ 1.4.

dàng. Cũng có thể tạo (tưởng tượng) một mặt cong kín S mà mặt cong đang xét là một phần của nó. Phần còn lại là mặt phẳng hoặc mặt trụ, với những mặt này việc tính toán lực và mômen gây ra do chất lưu chung quanh là dễ dàng. Bằng cách thiết lập sự cân bằng lực và mômen trên mặt cong kín S, ta có thể tính được lực và mômen chưa biết tác dụng lên mặt cong.

Thí dụ 1.5. Trong thành phẳng của thùng chứa nước có một mặt hình bán cầu đường kính D ở khoảng cách h bên dưới mặt nước (hình 1.10). Hãy thiết lập biểu thức của lực toàn phần do nước tác dụng lên bán cầu.

Giải. Thay mặt bán cầu bằng một thể tích bán cầu kín chứa đầy nước. Một thể tích như vậy sẽ cân bằng với áp lực trên bề mặt của nó. Theo hướng ngang, áp lực F_h trên phần mặt bán cầu sẽ được cân bằng bởi lực tác dụng lên phần mặt phẳng thẳng đứng hình tròn có diện tích $\pi D^2/4$ và áp suất tại trọng tâm của nó $p_C = p_a + \rho g h$, do đó

$$F_h = (p_a + \rho g h)\frac{\pi d^2}{4}.$$

Theo hướng thẳng đứng, áp lức hướng lên F_v trên mặt bán cầu (không có thành phần thẳng đứng tác dụng lên phần mặt phẳng) phải cân bằng với trọng lực tác dụng lên phần chất lỏng bên trong thể tích $= (1/2)(4\pi/3)(D/2)^3 = \pi D^3/12$

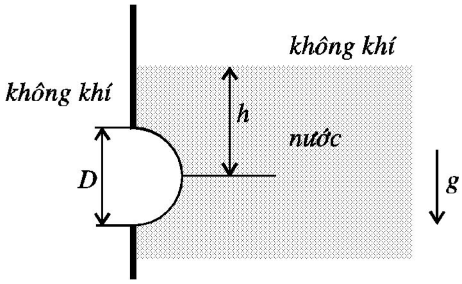
$$F_v = \frac{\pi \rho g D^3}{12}.$$

◇

1.5 Áp lực trên các vật nhúng trong chất lưu

1.5.1 Nguyên lý Archimedes

Áp lực toàn phần tác dụng lên vật nhúng chìm trong chất lưu, ký hiệu $\mathbf{F}_b$, được gọi là lực nổi (buoyant force). Lực này có thể được tính từ phương trình



Hình 1.10: Thí dụ 1.5.

(1.15)

$$\mathbf{F}_b = \int_S p\mathbf{n}dS = -\int_V \nabla p dV = -\int_V \rho\mathbf{g}dV = -\rho\mathbf{g}V \tag{1.25}$$

Phương trình (1.25) là nội dung của nguyên lý Archimedes
Áp lực (lực nổi) trên một vật chìm trong chất lưu bằng về độ lớn nhưng ngược chiều với trọng lực tác dụng lên khối chất lưu bị choán chỗ[3].

Gọi $\mathbf{r}_b$ là vectơ bán kính của khối tâm của thể tích chất lưu bị choán chỗ

$$\mathbf{r}_b = \frac{1}{V}\int_V \mathbf{r}dV. \tag{1.26}$$

Do nguyên lý Archimedes, mômen $\mathbf{T}_b$ của lực nổi bằng môment của trọng lực tác dụng lên thể tích chất lưu bị choán chỗ

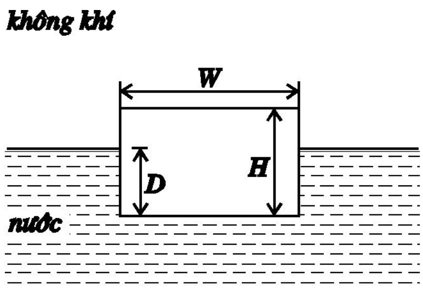
$$\begin{aligned}\mathbf{T}_b &= -\int_V (\mathbf{r}\times\rho\mathbf{g})dV = \int_V \mathbf{r}dV \times (-\rho\mathbf{g}) = \mathbf{r}_b V \times (\mathbf{F}_b/V) \\ &= \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_b. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Suy ra điểm đặt của lực nổi, được gọi là tâm nổi (center of buoyancy), chính là khối tâm của thể tích chất lưu bị choán chỗ.

Nhận xét 1.4. Khi một vật nổi trên mặt phân cách hai chất lưu, thí dụ con thuyền trên mặt nước, mỗi chất lưu sẽ góp phần vào lực nổi toàn phần một lượng bằng trọng lực tác dụng lên phần thể tích chất lưu tương ứng bị choán chỗ. Tuy nhiên, trong trường hợp con thuyền trên mặt nước, mật độ khối của không khí quá nhỏ so với mật độ khối của nước nên ta chỉ xét đến trọng lực của thể tích nước bị choán chỗ khi tính lực nổi.

[3]Archimedes (287(?)-212 B.C.) là nhà toán học quan trọng nhất trong thiên niên kỷ của ông. Ông đã góp phần vào tĩnh học và động học cũng như thủy tĩnh học của các vật nổi và chìm trong chất lỏng.

Thí dụ 1.6. Một thỏi xà phòng nổi trên mặt nước, đáy của nó cách mặt nước khoảng cách D (hình 1.11). Thỏi xà phòng rộng W, dầy H và dài L (bề dài theo phương vuông góc với mặt phẳng hình vẽ). Tìm tỉ trọng s của thỏi xà phòng.



Hình 1.11: Thí dụ 1.6.

Giải. Gọi ρ là mật độ khối của nước. Mật độ khối của xà phòng là $s\rho$. Trọng lực tác dụng lên xà phòng là $s\rho\mathbf{g}WHL$. Theo nguyên lý Archimedes, lực này bằng về độ lớn với trọng lực tác dụng lên khối nước bị choán chỗ

$$s\rho gWHL = \rho gDWL \Rightarrow s = \frac{D}{H}.$$

◇

1.5.2 Cân bằng của vật chìm trong chất lưu

Cân bằng tĩnh

Một vật khối lượng M chìm trong chất lưu, chịu tác dụng của các lực: trọng lực $M\mathbf{g}$, lực nổi $\mathbf{F}_b$, lực ngoài $\mathbf{F}_e$. Vật sẽ không di chuyển nếu các lực tác dụng ở trạng thái cân bằng. Phương trình cân bằng lực

$$M\mathbf{g} - \rho V\mathbf{g} + \mathbf{F}_e = 0. \tag{1.28}$$

Nếu không có lực ngoài, vật sẽ giữ trạng thái dừng chỉ khi khối lượng M của nó bằng khối lượng của khối chất lỏng bị choán chỗ.

Phương trình cân bằng mômen

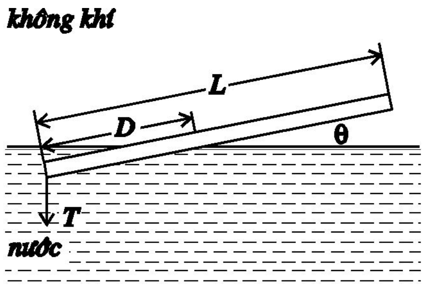
$$\mathbf{r}_g \times M\mathbf{g} - \mathbf{r}_b \times \rho V\mathbf{g} + \mathbf{r}_e \times \mathbf{F}_e = 0 \tag{1.29}$$

trong đó $\mathbf{r}_g$, $\mathbf{r}_e$ lần lượt là vectơ định vị trọng tâm của vật, điểm tác dụng của lực ngoài. Nếu không có lực ngoài thì các phương trình cân bằng (1.28), (1.29) cho

$$(\mathbf{r}_g - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{g} = 0, \tag{1.30}$$

nghĩa là trọng tâm và tâm nổi nằm trên cùng một đường thẳng đứng.

Thí dụ 1.7. Một thanh trụ nổi trong hồ nước bị neo một đầu, như hình vẽ, để một đầu chìm trong nước còn đầu kia ngoi lên trong không khí. Thanh trụ nghiêng một góc θ so với phương ngang. Thanh trụ có chiều dài L, diện tích tiết diện (đều) A và mật độ khối ρ nhỏ hơn một ít so với mật độ khối ρ_w của nước (hình 1.12). Thiết lập công thức tính độ dài D của phần chìm trong nước của thanh trụ và lực căng T của dây neo, theo các tham số ρ, ρ_w, A và L.



Hình 1.12: Thí dụ 1.7.

Giải. Tính các mômen của trọng lực ρgAL và lực nổi $\rho_w gAD$ đối với điểm thanh trụ cột với dây neo, điều kiện cân bằng quay (rotational equilibrium) cho

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{2}\cos\theta\right)\rho gAL - \left(\frac{D}{2}\cos\theta\right)\rho_w gAD &= 0 \\ D &= \left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{1/2} L. \end{aligned}$$

Áp dụng nguyên lý Archimedes, cân bằng các lực trên phương thẳng đứng cho

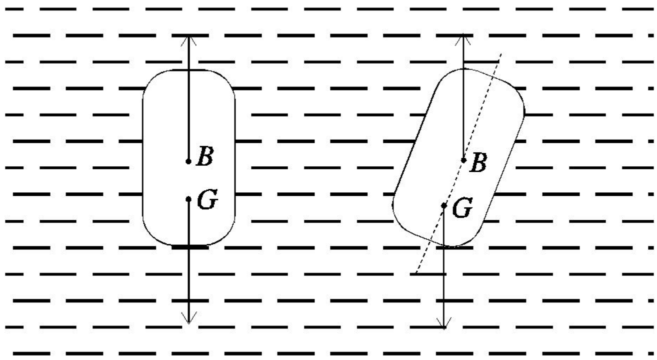
$$\begin{aligned} T + \rho gAL &= \rho_w gAD \\ T &= \rho_w gA\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{1/2} L - \rho gAL \\ T &= \rho gAL\left[\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right)^{1/2} - 1\right]. \end{aligned}$$

Chú ý, D và T độc lập với góc θ.

◇

Cân bằng ổn định

Sự cân bằng của lực và mômen là cần thiết để một vật chìm trong chất lưu giữ nguyên trạng thái dừng. Tuy nhiên, sự cân bằng này có thể không ổn định, giống như cây kim đặt thăng bằng trên đầu nhọn của nó. Cân bằng ổn định đòi hỏi, khi bị "kéo" lệch một chút ra khỏi vị trí cân bằng vật sẽ trở lại vị trí đó.

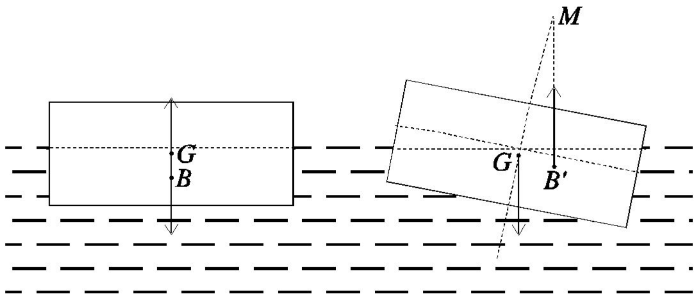


Hình 1.13: Cân bằng ổn định của vật chìm trong chất lưu.

Ta hãy xét xem làm thế nào nguyên lý này có thể được áp dụng cho trường hợp vật *chìm hoàn toàn trong chất lưu*. Trong hình 1.13, lực nổi $\mathbf{F}_b$ có đường tác dụng đi qua tâm nổi B trong khi trọng lực $\rho \mathbf{g} V = -\mathbf{F}_b$ có đường tác dụng đi qua trọng tâm G của vật. Khi B và G cùng nằm trên một đường thẳng đứng vật ở trạng thái cân bằng tĩnh. Giả sử từ vị trí này vật bị quay theo chiều kim đồng hồ một góc ϵ nhỏ (hình 1.13). Nếu G nằm bên dưới B, lực nổi và trọng lực làm phát sinh ngẫu hồi phục có độ lớn $\rho g V l \epsilon$ ($l = BG$) "kéo" vật trở về vị trí cân bằng ban đầu. Ngược lại, nếu G nằm trên B, ngẫu phát sinh sẽ làm tăng góc quay, và vật bị lật ngược để cho trọng tâm nằm bên dưới tâm nổi. Tóm lại, ta có thể kết luận rằng, sự ổn định của vật chìm trong chất lưu đòi hỏi trọng tâm nằm bên dưới tâm nổi.

Cùng một nguyên lý có thể áp dụng cho *vật nổi trên bề mặt của chất lưu* hay không? Xét trường hợp thỏi xà phòng nổi tự do trên mặt nước (hình 1.14). Ở trạng thái cân bằng, trọng tâm nằm ở mặt giữa hai đáy của thỏi xà phòng, trong khi tâm nổi lại ở giữa đáy dưới và mặt nước, nghĩa là tâm nổi nằm dưới trọng tâm của thỏi xà phòng. Tuy nhiên, như ta biết thỏi xà phòng là ổn định vì nó sẽ trở về vị trí cân bằng ban đầu khi bị kéo lệch khỏi vị trí này.

Xét cách mà trường hợp này khác với trường hợp vật chìm hoàn toàn trong chất lưu. Ứng xử của thỏi xà phòng nổi trên mặt nước khi bị quay theo



Hình 1.14: Cân bằng ổn định của vật nổi.

chiều kim đồng hồ một góc nhỏ ϵ được cho trên hình 1.14. Trong khi thể tích nước bị choán chỗ không đổi thì tâm nổi lệch khỏi vị trí ban đầu sang phải đến vị trí B' (vì phía phải chìm nhiều hơn phía trái). Nếu tâm nổi mới, B', mằm về bên phải trọng tâm, thì thỏi xà phòng sẽ trở về vị trí ban đầu của nó.

Giao điểm của đường tác dụng của lực nổi với trục của thỏi xà phòng, ký hiệu M, được gọi là tâm khuynh hay tâm định khuynh (metacenter). Nếu tâm khuynh nằm trên trọng tâm như hình vẽ thì thỏi xà phòng là ổn định và trở về vị trí ban đầu khi bị xô nghiêng.

Để xác định tâm khuynh của thỏi xà phòng, trước hết ta tìm biểu thức cho mômen của thể tích bị chiếm chỗ đối với tâm nổi mới B'. Thể tích bị chiếm chỗ gồm hai phần, thể tích bị chiếm chỗ ban đầu DWL (L là chiều dài của thỏi xà phòng) cộng với phần hình nêm có thể tích $(1/2)(W/2)(\epsilon W/2) = \epsilon W^2 L/8$ dời đi từ mặt bên trái và cộng vào mặt bên phải, trọng tâm của nó xê dịch đi một khoảng là $2W/3$. Tổng mômen của cả hai thành phần đối với B' phải bằng không

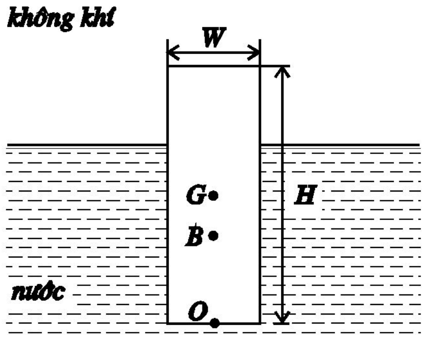
$$\begin{aligned} -DHL \times BB' + \epsilon\left(\frac{W^2L}{8}\right)\left(\frac{2W}{3}\right) &= 0 \\ BB' &= \epsilon\left(\frac{W^2}{12D}\right). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Tuy nhiên, khoảng cách BB' bằng ϵBM nên

$$BM = \frac{W^2}{12D}. \tag{1.32}$$

Ta có thể kết luận rằng sự ổn định của vật nổi được cải thiện bằng cách làm cho chiều rộng W lớn, độ sâu D phần chìm nhỏ và giữ cho tâm khối càng thấp càng tốt (GM càng lớn). Điều này giải thích tại sao thuyền chèo ổn định hơn nhiều so với canô, và tại sao nó gây mất ổn định khi đứng lên trên canô. Nó giải thích tại sao thỏi xà phòng không nổi ổn định trên cạnh của nó (nghĩa là trên mặt có kích thước nhỏ nhất).

Thí dụ 1.8. Một khối gỗ nổi trên mặt nước, như hình 1.15. Khối gỗ có chiều rộng W, chiều cao H và tỉ trọng s. Tìm tỉ số W/H nhỏ nhất để bảo đảm khối gỗ ổn định (khi đó $GM = 0$).



Hình 1.15: Thí dụ 1.8.

Giải. Ký hiệu O là tâm đáy dưới khối gỗ, G và B lần lượt là trọng tâm và tâm nổi. Ta có: $OG = H/2$, $OB = sH/2$ (giải thích ?). Vậy,

$$BG = (1-s)\frac{H}{2}.$$

Gọi M là tâm khuynh thì khoảng cách BM có thể đánh giá từ phương trình (1.32) bằng cách chú ý rằng $D = sH$

$$BM = \frac{W^2}{12sH}.$$

Bằng cách đặt $BM = BG$ ta được điều kiện ổn định, $GM = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{W^2}{12sH} &= (1-s)\frac{H}{2}\\ \frac{W}{H} &= \sqrt{6s(1-s)}.\end{aligned}$$

Nếu khối gỗ hình lập phương $W = H$ để nổi thẳng đứng, s phải nhỏ hơn s_1 hay lớn hơn s_2, trong đó s_1, s_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $6s(1-s) = 1$

$$s \le \frac{3-\sqrt{3}}{6} = 0,2113, \quad s \ge \frac{3+\sqrt{3}}{6} = 0,7887.$$

◇

1.6 Chất lưu phân lớp

Chất lưu phân lớp là chất lưu mà mật độ khối ở trạng thái tĩnh, trong trường trọng lực, không đều. Thí dụ, mật độ không khí trong khí quyển giảm theo độ cao. Mật độ nước ở đáy biển lớn hơn mật độ ở mặt biển. Khi chất lưu gồm các thành phần không trộn lẫn được, chẳng hạn nước và không khí hay dầu và nước, thành phần nặng hơn nằm ở đáy của bình chứa. Trong các trường hợp vừa kể, quan hệ tích phân giữa áp suất và độ cao z trình bày trong mục trước không còn đúng nữa do mật độ chất lưu không là hằng số.

Ổn định của chất lưu phân lớp

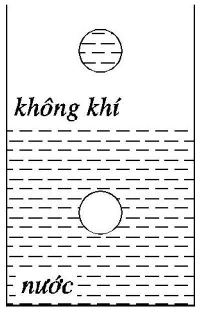
Ổn định tĩnh. Lấy rot phương trình cân bằng thủy tĩnh

$$\begin{aligned} -\nabla \times (\nabla p) + \nabla \times (\rho \mathbf{g}) &= 0 \\ \rho(\nabla \times \mathbf{g}) + (\nabla \rho) \times \mathbf{g} &= 0 \\ (\nabla \rho) \times \mathbf{g} &= 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Đây là điều kiện ổn định tĩnh (static stability) của chất lưu phân lớp. Theo điều kiện này, ở trạng thái tĩnh, mật độ khối của chất lưu phân lớp là hàm chỉ của độ cao.

Điều kiện ổn định tĩnh thể hiện trong nhiều hiện tượng. Mặt thoáng của nước chứa trong bình chứa luôn nằm ngang. Ở đây mật độ khối của chất lưu thay đổi đột ngột từ nước sang không khí khi qua mặt thoáng. Chất lưu sẽ nổi lên trên, khi được rót vào bình đã chứa một chất lưu nặng hơn nó. Kinh nghiệm cho thấy, chất lưu nặng hơn luôn nằm dưới chất lưu nhẹ hơn. Nếu lật ngược một bình chứa nước và không khí, nước luôn luôn chảy xuống đáy bình. Để lớp nước có thể ở trên lớp không khí mà không vi phạm điều kiện ổn định tĩnh thì mặt phân cách giữa chúng phải nằm ngang. Điều này hầu như không xảy ra vì mặt phân cách chất lưu nặng trên chất lưu nhẹ hơn là không ổn định tĩnh, giống như trạng thái cân bằng của cây kim đặt thẳng đứng trên đầu nhọn của nó.

Ổn định động. Xét bình chứa nước và không khí. Giả sử ta hoán chuyển vị trí một giọt nước và một phần tử khí có cùng thể tích, kết quả sự hoán chuyển được cho trên hình 1.16, bọt khí nằm trong nước còn giọt nước lơ lững trên mặt nước. Để thực hiện điều này cần đến công, không chỉ để nâng giọt nước lên cao và kéo bọt khí vào sâu trong nước, mà còn hình thành mặt phân cách nước - không khí trên bề mặt của bọt khí và giọt nước, ở đó sự căng bề mặt tồn tại. Nếu ta giải phóng giọt nước và bọt khí, giọt nước sẽ rơi xuống còn bọt khí sẽ trồi lên mặt thoáng, cuối cùng chúng "thủ tiêu" lẫn nhau. Vì hệ trở về cấu hình tự nhiên ban đầu sau khi bị xáo trộn, ta nói hệ ổn định động (dynamic stability).



Hình 1.16: Ổn định động.

Trường hợp lớp nước nằm trên lớp không khí (lộn ngược hình 1.16). Khi giải phóng bọt khí và giọt nước, hiện tượng xảy ra sẽ khác đi. Bọt khí đi lên trong nước, còn giọt nước chìm xuống trong không khí. Với cấu hình đảo lộn này, hệ không ổn định động (dynamic instability) vì nó đi xa khỏi trạng thái ban đầu. Chú ý rằng, công để dịch chuyển giọt nước và bọt khí là âm, mặc dù để hình thành mặt ngoài cần đến công dương để chống lại sức căng bề mặt. Với các mẫu nước rất nhỏ, thí dụ giọt nước hình thành bên dưới ống nhỏ mắt, nó có thể ổn định động.

Khi chất lưu phân lớp ổn định động, nó sẽ chống lại các chuyển dịch nhỏ theo phương thẳng đứng. Với chất lỏng có mật độ khối giảm theo độ cao, một phần tử chất lỏng di chuyển lên trên sẽ bị bao bọc bởi các phần tử chất lỏng có mật độ khối nhỏ hơn, và vì vậy, ngay tức khắc nó trở về vị trí ban đầu. Như vậy, chất lỏng với các lớp chồng lên nhau theo mật độ khối nhỏ dần sẽ ổn định động. Ta có thể biểu diễn điều kiện ổn định động cho trường hợp này như sau:

$$\frac{d\rho}{dz} < 0. \tag{1.34}$$

Tuy nhiên, trong trường hợp chất khí, ta phải tính đến sự kiện: mật độ khối của chính phần tử chất lỏng cũng giảm (do nó đi vào vùng có áp suất thấp và thể tích của nó nở ra). Như vậy, để hệ ổn định động mật độ khối của chất khí chung quanh không chỉ giảm theo độ cao mà còn phải giảm nhanh hơn độ giảm mật độ khối gây ra do sự di chuyển của phần tử khí

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &< \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \frac{dp}{dz} \\ &< \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S (\rho g), \end{aligned} \tag{1.35}$$

trong đó sự thay đổi mật độ khối theo áp suất của phần tử khí (khi di chuyển) được tính với entropy S không đổi (do sự thay đổi này là đoạn nhiệt và thuận nghịch).

Phân bố áp suất trong chất lưu phân lớp

Khi mật độ khối của chất lưu là hàm đã biết của độ cao z trong trường trọng lực, $\rho = \rho(z)$. Từ phương trình cân bằng thủy tĩnh, ta có

$$\frac{dp}{dz} + \rho(z)g = 0. \tag{1.36}$$

Tích phân phương trình này giữa hai điểm, một là z_0 với áp suất p_0 đã biết và điểm z bất kỳ trong chất lưu

$$p(z) = p_0 - g\int_{z_0}^{z} \rho(z)dz. \tag{1.37}$$

Nhận xét 1.5. Bầu khí quyển của chúng ta là một thí dụ về chất lưu phân lớp. Ấy là một lớp khí tương đối mỏng "gắn" với bề mặt trái đất nhờ lực hút trọng trường. Hầu hết khối lượng của khí quyển chứa trong 10 km đầu tiên theo chiều cao tính từ mặt đất.

Để tính áp suất và mật độ khối của khí quyển ta xem không khí là khí lý tưởng, nghĩa là tuân theo luật khí lý tưởng

$$p = \rho RT, \tag{1.38}$$

trong đó hằng số khí R không thay đổi theo độ cao. Thay luật khí lý tưởng vào phương trình (1.36)

$$\begin{aligned} dp + g\left[\frac{p}{RT(z)}\right]dz &= 0 \\ \frac{dp}{p} + \frac{g}{R}\frac{dz}{T(z)} &= 0 \end{aligned}$$

và tích phân ta được

$$p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T(z)}\right], \tag{1.39}$$

trong đó p_0 là áp suất không khí tại mặt đất, $z = 0$. Mật độ khối $\rho(z)$ có thể tìm được bằng cách chia phương trình trên cho $RT(z)$. Tất nhiên, nhiệt độ tuyệt đối của khí quyển phải được cho trước.

Trong những năm gần đây, lượng khí thải vào khí quyển đã làm suy giảm lượng ozone, gây ra sự gia tăng nhiệt độ khí quyển do tương tác với ánh sáng mặt trời. Điều này làm thay đổi sự phân bố áp suất trong khí quyển ảnh hưởng trầm trọng đến khí hậu trái đất.

Một xấp xỉ cho sự phân bố áp suất khí quyển có thể nhận được từ phương trình trên bằng cách cho $T(z) = T_0$ (const.)

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right). \tag{1.40}$$

Ta cũng có thể tính áp suất nhờ định luật Boyle - Mariotte

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}, \tag{1.41}$$

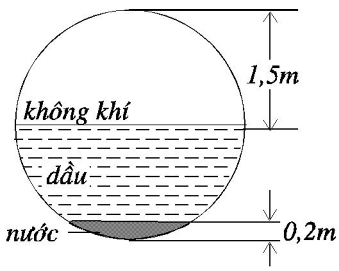
trong đó ρ_0 là mật độ khối của không khí ở mặt đất. Ta có

$$\begin{aligned} dp + g\rho_0 \frac{p}{p_0} dz &= 0 \\ \frac{dp}{p} + \frac{\rho_0 g}{p_0} dz &= 0. \end{aligned}$$

Tích phân ta được

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right). \tag{1.42}$$

Thí dụ 1.9. Một bồn nhiên liệu hình trụ nằm ngang, đường kính trong 3 m, chứa đầy nửa bồn dầu hỏa có tỉ trọng $s = 0,87$ trên lớp nước dầy $0,2$ m (hình 1.17). Nửa trên bồn thông với không khí. Tính áp suất áp kế tại đáy bồn.



Hình 1.17: Thí dụ 1.9.

Giải. Tính độ cao z từ mặt phân cách dầu hỏa - không khí. Đáy thùng ở $z = -1,5\ m$, mặt phân cách dầu hỏa - không khí ở $-1,3\ m$. Áp suất tại đáy bồn

$$p_b = p_0 - g\int_0^{-1,3} \rho_0 dz - g\int_{-1,3} 0^{-1,5} \rho_w dz.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} p_b - p_0 &= \rho_w g(s \times 1,3 + 0,2) \\ &= 10^3 \times 9,807 \times (0,87 \times 1,3 + 0,2) = 1,3053 \times 10^4\ (Pa). \end{aligned}$$

◇

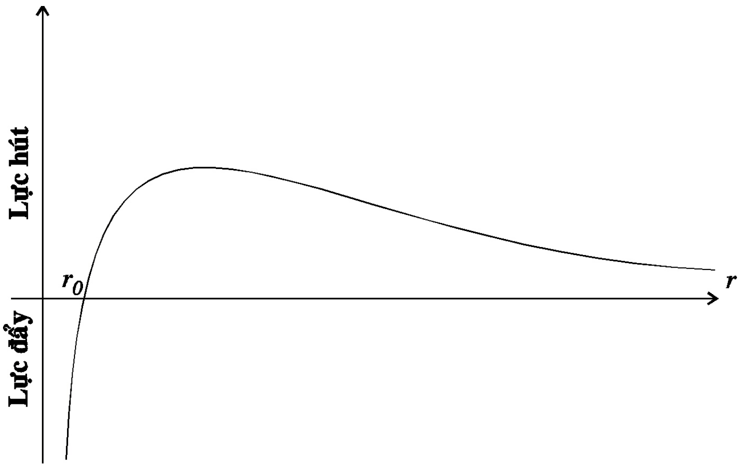
1.7 Hiện tượng bề mặt của chất lỏng

Chất lỏng chảy khỏi ống truyền dịch không thành một dòng liên tục mà nhỏ từng giọt. Chiếc kim khâu thoa mỡ nếu được đặt cẩn thận có thể nằm yên trên mặt nước mà không bị chìm. Nước đọng thành giọt trên mui xe trơn láng chứ không lan ra. Tất cả những hiệu tượng này có liên quan đến tính chất của lớp mặt ngoài, phân cách chất lỏng với một chất nào đó (hình 1.18).

Hình 1.18: Hiện tượng bề mặt của chất lỏng.

1.7.1 Cơ chế phân tử

Tất nhiên, giữa các phân tử tồn tại lực hấp dẫn nhưng ảnh hưởng của chúng rất nhỏ so với lực tương tác phân tử nên có thể bỏ qua khi khảo sát hiện tượng xảy ra trên bề mặt chất lỏng. Lực tương tác phân tử, gọi tắt là lực phân tử có nguồn gốc điện, là nguyên nhân chính giữ các phân tử chất lỏng



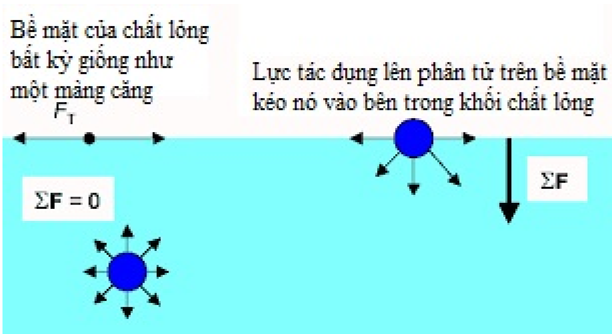
Hình 1.19: Lực phân tử.

lại với nhau. Lực phân tử là lực hút hoặc lực đẩy tùy thuộc vào khoảng cách giữa các phân tử với nhau. Dáng điệu biến đổi của lực phân tử theo khoảng cách giữa các phân tử được thể hiện trên hình 1.19.

Bây giờ ta thử mô tả trạng thái của phân tử chất lỏng dưới ảnh hưởng của lực tương tác do các phân tử lân cận gây ra. Ta bắt đầu bằng một trường hợp được đơn giản hóa. Một cặp phân tử có thể ở trạng thái cân bằng khi khoảng cách giữa chúng bằng r_0. Nếu chúng bị tách xa nhau một ít thì lực tương tác giữa chúng là lực hút sẽ kéo chúng lại gần nhau. Ngược lại, nếu chúng bị ép lại gần nhau thì lực tương tác giữa chúng là lực đẩy sẽ làm chúng giãn ra. Nếu chúng bị ép hoặc bị tách ra rồi thôi, chúng sẽ dao động với khoảng cách thay đổi qua lại giá trị r_0. Dựa vào sự tương tác giữa hai phân tử khó có thể mô tả hành vi của chất lỏng, thực tế bao gồm vô số phân tử. Tuy nhiên, tương tác giữa các phân tử bên trong chất lỏng không thể quá khác biệt so với trường hợp chỉ có hai phân tử. Ta biết rằng, do nhiệt năng, các phân tử nằm trong chất lỏng chuyển động liên tục, và ta hình dung chúng như đang thực hiện dao động xung quanh vị trí cân bằng. Trạng thái của các phân tử ở gần sát bề mặt thì khác so với các phân tử bên trong khối chất lỏng. Thật vậy, giả sử một phân tử ở gần bề mặt chuyển động ra phía ngoài. Do không có phân tử chất lỏng bên ngoài đẩy nó, nên phân tử này có thể chuyển động ra phía ngoài và làm khoảng cách từ nó đến các phân tử khác lớn hơn khoảng cách giữa các phân tử nằm bên trong khối chất lỏng. Điều này làm xuất hiện lực hút của các phân tử kéo nó về phía trong[4]. Như

[4]Nếu động năng của phân tử đủ lớn nó có thể thoát ra ngoài. Quá trình này được gọi là sự bay hơi.

vậy, khác với các phân tử nằm bên trong chịu lực đẩy và lực hút, các phân tử ở trên bề mặt chất lỏng luôn luôn chịu lực hút kéo nó về bên trong. Đây là nguyên nhân chính của hiện tượng mặt ngoài của chất lỏng (hình 1.20).



Hình 1.20: Lực tác dụng lên phân tử bên trong, và trên bề mặt chất lỏng.

1.7.2 Sự căng mặt ngoài

Năng lượng mặt ngoài

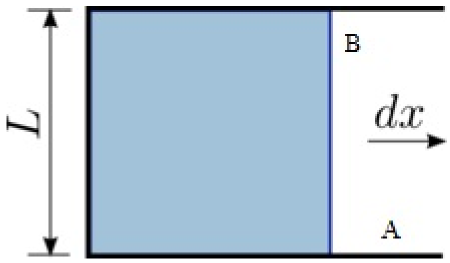
Một phân tử khi di chuyển từ bên trong khối chất lỏng ra đến mặt ngoài thì thế năng của nó tăng thêm. Một khối chất lỏng bị biến đổi hình dạng thì diện tích mặt ngoài của nó có thể bị biến đổi theo. Nếu diện tích này tăng lên thì phải có thêm những phân tử mới xuất hiện trên bề mặt mà trước đó chúng nằm bên trong khối chất lỏng. Phần thế năng gia tăng của các phân tử tạo thành lớp mặt ngoài so với thế năng của chính các phân tử đó nếu chúng ở trong khối chất lỏng được gọi là *năng lượng mặt ngoài*. Thực nghiệm cho thấy năng lượng mặt ngoài, ký hiệu W_S, tỉ lệ với diện tích lớp mặt ngoài S

$$W_S = \Upsilon S. \tag{1.43}$$

Hệ số tỉ lệ Υ được gọi là *hệ số sức căng mặt ngoài* có đơn vị là N/m, phụ thuộc vào bản chất của chất lỏng và môi trường mà chất lỏng đó tiếp xúc. Thực nghiệm còn cho thấy hệ số sức căng mặt ngoài giảm khi nhiệt độ tăng hoặc khi có một lượng nhỏ chất khí lẫn vào khối chất lỏng.

Sức căng mặt ngoài

Hệ số sức căng mặt ngoài có thể định nghĩa nhờ lực. Lúc đó ta gọi nó là *sức căng mặt ngoài*. Thiết bị mô tả trên hình 1.21, gồm một khung kim loại A và



Hình 1.21: Khung kim loại A và thanh trượt B.

thanh trượt B, dùng để chứng tỏ ảnh hưởng của lực căng mặt ngoài. Nhúng thiết bị vào dung dịch xà phòng, một mành mỏng dung dịch hình thành phủ kín khoung và thanh trượt. Vì lớp mặt ngoài của màng có xu hướng chuyển về bề mặt có diện tích nhỏ nhất nên màng sẽ co lại, kéo thanh trượt vào bên trong. Gọi F là lực tác dụng lên thanh trượt làm nó di chuyển khoảng cách dx, diện tích của bề mặt mới tăng thêm một lượng bằng $2Ldx$, hệ số 2 xuất hiện trong công thức là do màng xà phòng có hai mặt. Công của lực F thực hiện chuyển dịch dx là số gia tương ứng của năng lượng mặt ngoài

$$dW_S = Fdx.$$

Từ công thức năng lượng mặt ngoài $dW_S = 2\Upsilon Ldx$ ta suy ra

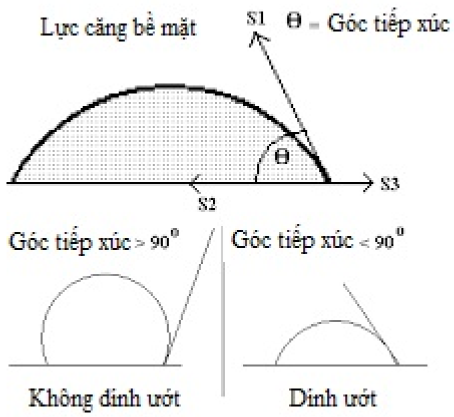
$$F = 2\Upsilon L.$$

Nghĩa là, mỗi mặt của màng xà phòng kéo thanh trượt một lực có độ lớn bằng ΥL, hay với lực Υ trên một đơn vị dài. Lực do mặt ngoài tác dụng gọi là *lực căng mặt ngoài*, lực này độc lập với diện tích của bề mặt và được biểu thị bằng vectơ vuông góc với cung đường cong vạch trên mặt ngoài và tiếp xúc với phần mặt ngoài của khối chất lỏng tại điểm xét.

1.7.3 Sự dính ướt - Hiện tượng mao dẫn

Một que thủy tinh khi nhúng vào nước rồi rút ra thì trên que vẫn còn nước bám vào, nếu nhúng vào thủy ngân thì khác, trên que không còn dấu vết thủy ngân khi được lấy ra. Hiện tượng này được gọi là sự dính ướt hoặc không dính ướt của vật rắn khi nhúng vào chất lỏng. Dựa vào cơ chế phân tử ta có thể giải thích hiện tượng này như sau. Khi vật rắn tiếp xúc với chất lỏng, nếu lực hút giữa các phân tử chất lỏng và các phân tử chất rắn mạnh hơn lực hút phân tử của các phân tử chất lỏng với nhau thì chất lỏng sẽ làm ướt vật rắn. Ngược lại, nếu lực hút giữa các phân tử chất lỏng với nhau lớn hơn lực hút giữa các các phân tử chất lỏng với các phân tử chất rắn thì chất lỏng không làm ướt vật rắn.

Vì có hiện tượng dính ướt (hoặc không dính ướt) nên dạng bề mặt chất lỏng ở chỗ tiếp xúc với thành bình bị cong đi. Góc tiếp xúc θ là góc tạo bởi tiếp tuyến của bề mặt chất lỏng và thành bình (hình 1.22), có giá trị phụ thuộc vào bản chất vật lý của chất lỏng (sức căng mặt ngoài) và thành rắn mà không phụ thuộc vào hình dạng bình chứa. Trường hợp mặt chất lỏng lõm xuống, góc θ là góc nhọn, chất lỏng bám (dính) vào thành bình. Khả năng bám vào thành bình càng kém thì góc θ càng lớn. Khi $\theta > 90^o$ chất lỏng được xem là không dính ướt thành bình.

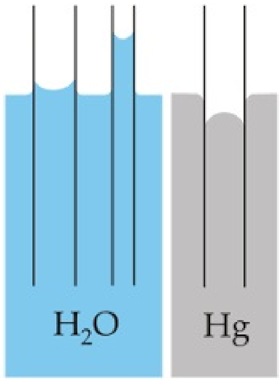


Hình 1.22: Góc tiếp xúc.

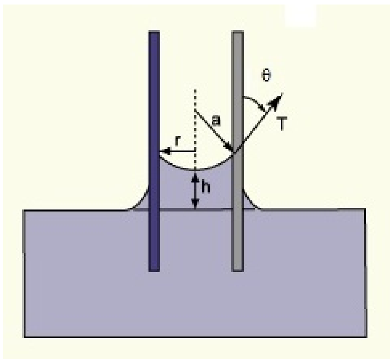
Khả năng dính ướt của chất lỏng vào thành bình là nguyên nhân của hiện tượng mao dẫn, xảy ra trong các ống có tiết diện nhỏ (mao quản). Khi có sự dính ướt thì trong ống nhỏ chất lỏng sẽ dâng cao hơn mặt thoáng, còn khi không có sự dính ướt nó hạ thấp. Trên hình 1.23, khi ống thủy tinh được nhúng vào cậu nước, nước dâng cao trong ống, ống càng nhỏ mực nước càng cao. Nếu nhúng ống đó vào thủy ngân, thì mực thủy ngân trong ống thấp hơn trong chậu,

Hiện tượng mao dẫn đóng vai trò quan trọng trong đời sống (giấy thấm hút mực, dầu lửa thấm lên tim đèn,...). Cũng nhờ hiện tượng mao dẫn mà nhựa cây từ gốc được chuyển vận lên trên để cung cấp dinh dưỡng cho mọi phần của cậy. Nước ngầm ở sâu trong đất có thể theo các khe hở (mao quản) trong đất thấm lên lớp đất bên trên tạo nên độ ẩm giúp cây cối mọc được trên đất.

Nhờ khái niệm lực căng mặt ngoài ta có thể tính được độ chênh lệch giữa mực chất lỏng bên trong và bên ngoài ống (hình 1.24).



Hình 1.23: Hiện tượng mao dẫn.



Hình 1.24: Độ chênh của mực chất lỏng bên trong và bên ngoài ống nhỏ.

Gọi r là bán kính trong của tiết diện ống nhỏ. Mặt chất lỏng bám vào thành ống theo một đường tròn có chu vi $2\pi r$. Thành phần của lực căng mặt ngoài trên phương thẳng đứng bằng $2\pi r\Upsilon\cos\theta$, trong đó Υ là sức căng mặt ngoài, θ là góc tiếp xúc. Nếu độ cao của cột chất lỏng bằng h thì trọng lượng của cột chất lỏng là $\pi r^2 h\rho g$ (ρ là khối lượng riêng của chất lỏng, g là gia tốc trọng trường). Vì cột chất lỏng trong ống cân bằng nên

$$2\pi r\Upsilon\cos\theta = \pi r^2 h\rho g,$$

suy ra

$$h = \frac{2\Upsilon\cos\theta}{r\rho g}.$$

Chương 2

Sự bảo toàn khối lượng

Nguyên lý bảo toàn khối lượng là cơ sở cho mọi ngành khoa học, nó đặt ràng buộc lên cách thức chuyển động của chất lưu. Chương này trình bày cách thiết lập phương trình bảo toàn khối lượng và các cách thể hiện nó.

2.1 Động học chất lưu

Trong cơ học chất lưu, chất điểm được tham chiếu đến nhờ vị trí "ban đầu" (còn gọi là vị trí tham chiếu) của nó. Ký hiệu $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ là vị trí tham chiếu của một chất điểm[1]. Vị trí của chất điểm $\mathbf{x}^0$ tại thời điểm t được ký hiệu là $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Chuyển động của một vật được xác định khi biết vị trí của các chất điểm $\mathbf{x}^0$ (thuộc nó) tại mọi thời điểm t như là hàm của $\mathbf{x}^0$ và t

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{x}^0, t). \tag{2.1}$$

Hai quan điểm mô tả chuyển động

Muốn nghiên cứu chuyển động của vật, về nguyên tắc, ta phải nghiên cứu chuyển động của mọi chất điểm (của vật) một cách riêng biệt; nghĩa là quan tâm đến các đại lượng cơ học gắn với từng chất điểm theo thời gian. Quan điểm khảo sát chuyển động này gọi là quan điểm Lagrange, các biến x^0, y^0, z^0, t được gọi là biến Lagrange. Trong thực tế, thường ta không cần biết đầy đủ chuyển động của tất cả các chất điểm mà chỉ cần quan tâm đến các đại lượng cơ học tại một địa điểm hay một vùng cho trước trong không gian. Thí dụ, để nghiên cứu chuyển động của dòng sông, ngoài cách xem xét chuyển động của tất cả các hạt nước từ thượng nguồn đến cửa sông, ta còn có thể khảo sát bằng cách quan sát sự thay đổi của dòng chảy tại một số

[1] Có thể xem vị trí tham chiếu của một chất điểm như là tên của nó.

vị trí quan trọng mà dòng sông chảy qua. Quan điểm khảo sát này là quan điểm Euler, các biến $\mathbf{x}, t$ được gọi là biến Euler.

Trong tài liệu này ta khảo sát chuyển động của chất lưu theo biến Euler. Mô tả chuyển động của một dòng chảy theo quan điểm Euler bao gồm việc chỉ ra trường vận tốc $\mathbf{v}$ như là hàm của vị trí $\mathbf{x}$ và thời gian t, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Các đại lượng vật lý khác, như áp suất p và mật độ khối ρ, cũng được xét như là các hàm của $\mathbf{x}$ và t. Một cách toán học, ta nói $\mathbf{v}, p, \rho$, v.v. là các biến phụ thuộc của dòng chảy, là hàm của các biến độc lập $\mathbf{x}$ và t. Cách mô tả dòng chảy này được gọi là mô tả trường, và các biến phụ thuộc được gọi là các biến trường. Như vậy, ta sẽ gọi trường vận tốc và trường áp suất để ám chỉ sự phụ thuộc của vận tốc và áp suất theo $\mathbf{x}$ và t. Miền xác định của chúng (trong không gian) được gọi là trường dòng chảy (flow field).

Nhận xét 2.1. Gọi V^0 và V lần lượt là vị trí tham chiếu và vị trí tại thời điểm t của vật. Do $V = V(t)$ thay đổi theo thời gian nên thường được gọi là miền di động. Về phương diện toán học, tại mỗi thời điểm, phương trình (2.1) xác định một phép biến đổi (ánh xạ) từ V^0 lên V, tương ứng điểm $\mathbf{x}^0 \in V^0$ với điểm $\mathbf{x} \in V$. Để có thể sử dụng phép tính vi phân, ta giả giả thiết hàm χ liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai. Hơn nữa, ta giả thiết định thức hàm (Jacobian)

$$J(\mathbf{x}^0, t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \chi_1}{\partial x^0} & \dfrac{\partial \chi_1}{\partial y^0} & \dfrac{\partial \chi_1}{\partial z^0} \\ \dfrac{\partial \chi_2}{\partial x^0} & \dfrac{\partial \chi_2}{\partial y^0} & \dfrac{\partial \chi_2}{\partial z^0} \\ \dfrac{\partial \chi_3}{\partial x^0} & \dfrac{\partial \chi_3}{\partial y^0} & \dfrac{\partial \chi_3}{\partial z^0} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

khác không với mọi $(\mathbf{x}^0, t) \in V^0$; nghĩa là phép biến đổi χ là đơn trị và khả nghịch •

Đạo hàm theo thời gian

Ta phân biệt hai cách lấy đạo hàm của theo thời gian của một đại lượng, thí dụ a

1. *Đạo hàm theo thời gian Lagrange*, còn gọi là *đạo hàm vật chất*,

$$\frac{Da}{Dt} = \left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}^0 = const.} \tag{2.3}$$

2. *Đạo hàm theo thời gian Euler*, còn gọi là *đạo hàm địa phương*,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{\mathbf{x} = const.} \tag{2.4}$$

Theo định nghĩa trên, vận tốc của chất điểm $\mathbf{x}^0$, ký hiệu $\mathbf{v}$, là đạo hàm theo thời gian Lagrange của (2.1)

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}^0=const.} = \frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Giữa đạo hàm theo thời gian Lagrange và đạo hàm theo thời gian Euler của đại lượng a có quan hệ sau

$$\begin{aligned}\frac{Da}{Dt} &= \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\right) a \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)a. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Áp dụng công thức trên cho trường vận tốc $\mathbf{v}$ của dòng chảy, ta thu được trường gia tốc của nó

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{v}. \tag{2.7}$$

Thí dụ 2.1. Một dòng chảy chuyển động theo quy luật

$$\mathbf{x} = x^0(1+bt)\mathbf{i} + y^0\mathbf{j} + z^0\mathbf{k},$$

trong đó b là hằng số. Hãy tính vận tốc của một chất điểm và xác định trường vận tốc của dòng chảy.

Giải. Xét chất điểm $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$. Vận tốc của chất điểm

$$\mathbf{v} = bx^0\mathbf{i}.$$

Để xác định trường vận tốc ta dùng biến Euler. Từ luật chuyển động, ta có

$$x^0 = \frac{x}{1+bt},$$

suy ra trường vận tốc của dòng chảy

$$\mathbf{v} = \frac{bx}{1+bt}\mathbf{i}.$$

◇

Thí dụ 2.2. Một dòng chảy có trường vận tốc được cho bởi

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1+t}(x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}).$$

Hãy tìm luật chuyển động và trường gia tốc của dòng chảy.

Giải. Theo định nghĩa vận tốc, ta có

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{x}{1+t}.$$

Tách biến và lấy tích phân hai vế, ta được

$$x = C(1+t).$$

Vì $x = x^0$ khi $t = 0$ nên $C = x^0$, do đó

$$x = x^0(1+t).$$

Làm tương tự với các thành phần còn lại,

$$y = y^0(1+t)^2, \quad z = z^0(1+t)^3.$$

Từ trường vận tốc, dùng công thức (2.6), ta tìm được các thành phần gia tốc theo biến Euler

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{-x}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t}\frac{Dx}{Dt} = \frac{-x}{(1+t)^2} + \frac{x}{(1+t)^2} = 0.$$

Tương tự,

$$a_y = \frac{2y}{(1+t)^2}, \quad a_z = \frac{6z}{(1+t)^2}.$$

◇

Đường dòng và ống dòng

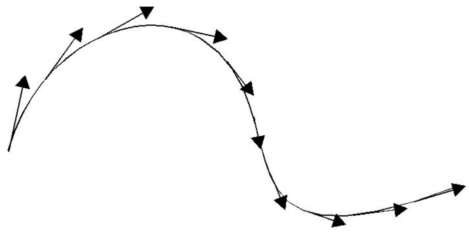
Đường dòng (streamline) là đường trong trường dòng chảy, ở thời điểm t bất kỳ, tiếp xúc với vectơ vận tốc tại mọi điểm của nó. Phương trình tham số của đường dòng có dạng

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda) \tag{2.8}$$

với λ là tham số. Bởi định nghĩa, ta có

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \mathbf{v}. \tag{2.9}$$

Đây là phương trình vi phân xác định đường dòng.



Hình 2.1: Đường dòng.

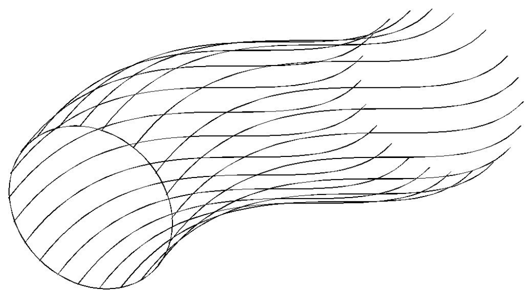
Nhận xét 2.2. Phương trình (2.9) hoàn toàn khác với phương trình xác định quỹ đạo của các chất điểm

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}. \tag{2.10}$$

Thật vậy, thời gian t xuất hiện trong phương trình (2.9) chỉ đóng vai trò tham số không đổi khi tích phân, còn trong phương trình (2.10), t là biến số.

Trong trường hợp chuyển động dừng, do không có tham số t trong phương trình (2.9), đường dòng trùng với quỹ đạo. Hơn nữa, các đường dòng không thay đổi theo thời gian.

Ống dòng (streamtube) là một mặt, trong trường dòng chảy, tạo bởi các đường dòng đi qua tất cả các điểm trên một đường cong kín.



Hình 2.2: Ống dòng.

Thí dụ 2.3. Trường vận tốc của một dòng chảy có dạng

$$\mathbf{v} = k(-x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + a\omega\cos\omega t\mathbf{k}\ (x, y > 0).$$

Hãy xác định quỹ đạo của các chất điểm và các đường dòng. Trường hợp $a = 0$, dòng chảy có đặc điểm gì?

Giải. Đây là dòng chảy không dừng. Quỹ đạo của các chất điểm là nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad \frac{dy}{dt} = ky, \quad \frac{dz}{dt} = a\omega\cos\omega t.$$

Tích phân các phương trình này ta được:

$$x = C_1 e^{-kt}, \quad y = C_2 e^{kt}, \quad z = a\sin\omega t + C_3.$$

Đường dòng là nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\frac{dx}{d\lambda} = -kx, \quad \frac{dy}{d\lambda} = ky, \quad \frac{dz}{d\lambda} = a\omega\cos\omega t,$$

trong đó t được xem là tham số (không đổi).

Tích phân các phương trình trên ta được phương trình tham số của các đường dòng

$$x = C_1 e^{-k\lambda}, \quad y = C_2 e^{k\lambda}, \quad z = (a\omega\cos\omega t)\lambda + C_3.$$

Trường hợp $a = 0$, ta có dòng chảy phẳng, dừng, các đường dòng trùng với quỹ đạo.

◇

Thể tích và mặt kiểm tra

Khi thiết lập nguyên lý Archimedes, ta đã viện dẫn đến khái niệm về một mặt cong đóng bên trong chất lưu giới hạn thể tích chất lưu bị choán chỗ bởi một vật. Trong thủy tĩnh học, những thể tích như vậy là bất động và các mặt giới hạn nó không để cho chất lưu đi qua. Ta có thể nói thể tích và mặt giới hạn nó bị "cứng hóa" trong chất lưu. Ta tìm lực toàn phần tác dụng lên chất lỏng trong thể tích bằng cách tưởng tượng chất lưu bên trong như là một vật rắn[2]. Nếu chất lưu chuyển động, thể tích chất lưu này và mặt giới hạn của nó thay đổi theo thời gian, tuy nhiên, chúng chứa cùng một lượng các chất điểm. Khi khảo sát chuyển động của chất lưu theo quan điểm Euler, ta cần đến một khái niệm tương tự – thể tích kiểm tra.

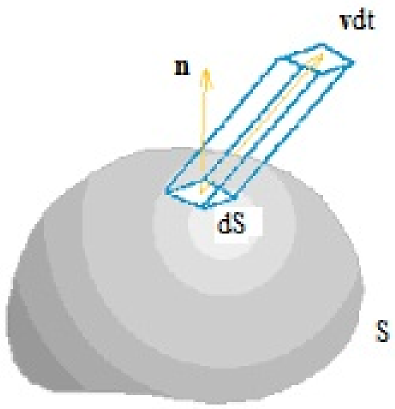
Thể tích kiểm tra, bởi định nghĩa, là thể tích chất lưu trong một trường dòng chảy, giới hạn bởi một mặt cong đóng tưởng tượng, gọi là *mặt kiểm tra*. Khác với khái niệm trước, thể tích kiểm tra cũng như mặt kiểm tra giới hạn nó cố định trong không gian. Trong quá trình chuyển động các chất điểm đi vào (hay ra) thể tích kiểm tra qua mặt kiểm tra. Nói khác đi, tại các thời điểm khác nhau, các chất điểm bên trong thể tích kiểm tra và ở trên mặt kiểm tra là khác nhau.

---

[2]Nguyên lý cứng hóa.

Dòng chảy đi qua mặt kiểm tra

Ta có thể tính lượng chất lưu đi qua một phần tử diện tích dS có vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài[3] $\mathbf{n}$ của mặt kiểm tra S trong khoảng thời gian dt. Như chỉ ra trong hình 2.3, các chất điểm nằm trên phần tử diện tích dS tại thời



Hình 2.3: Lượng chất lưu đi qua mặt kiểm tra.

điểm bắt đầu của khoảng thời gian dt di chuyển một đoạn $\mathbf{v}dt$ trong suốt khoảng thời gian này. Chất lưu chảy ra khỏi thể tích kiểm tra đi vào hình trụ có đáy là phần tử diện tích dS và trục xiên $\mathbf{v}dt$. Thể tích của hình trụ là $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dtdS$. Lượng chất lưu chảy qua mặt kiểm tra trong một đơn vị thời gian được gọi là tốc độ dòng thể tích (volume flow rate), ký hiệu là Q

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{2.11}$$

Thí dụ 2.4. Một dòng chảy dừng trong hình trụ tròn trục z, bán kính a, có vận tốc

$$\mathbf{v} = u\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{k},$$

trong đó r là khoảng cách từ điểm đến trục. Hãy thiết lập biểu thức cho tốc độ dòng thể tích Q trong ống.

[3] Vectơ $\mathbf{n}$ hướng ra ngoài thể tích kiểm tra.

Giải. Áp dụng công thức (2.11) với phần tử diện tích $dS = 2\pi r dr$, ta có

$$\begin{aligned} Q &= \int \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS \\ &= \int_0^a u\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)(2\pi r)dr \\ &= 2\pi u\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{2}u\pi a^2. \end{aligned}$$

◇

Nếu khối lượng của chất lưu trong một đơn vị diện tích là ρ thì khối lượng chất lưu đi qua mặt kiểm tra trong một đơn vị thời gian sẽ là

$$\dot{m} = \int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{2.12}$$

Đại lượng này được gọi là tốc độ dòng khối lượng (mass flow rate). Nó đóng vai trò quan trọng khi thiết lập phương trình mô tả sự bảo toàn khối lượng.

Nhận xét 2.3. Nếu khối lượng của chất lưu trong một đơn vị diện tích ρ giống nhau tại mọi điểm trên mặt kiểm tra thì

$$\dot{m} = \rho Q. \tag{2.13}$$

•

2.2 Tính nén được của chất lưu

Chất lưu có tính dễ chảy. cũng như hình dạng, thể tích của nó có thể bị thay đổi do tác động của môi trường chung quanh (áp suất, nhiệt độ). Ta nói chất lưu có tính nén được.

Mật độ khối

Khái niệm mật độ khối là chung cho các chất (rắn, lỏng hay khí). Bởi định nghĩa, mật độ khối của một chất là tỉ số khối lượng phần tử chất đó với thể tích của nó. Như vậy, khi thể tích của một phần tử thay đổi thì mật độ khối của nó cũng thay đổi theo; nói khác đi, tính nén được của một chất được thể hiện thông qua sự thay đổi mật độ khối của nó. Vì ta mô tả phần tử của một chất như một thể tích bé, bé đến chừng mức mà ta còn có thể đo được, nên mật độ khối có thể được xét như là hàm liên tục của vị trí trong miền chiếm bởi chất đó[4]. Thường ta ký hiệu mật độ khối là ρ và dùng đơn vị đo là kg/m^3.

Mật độ khối của chất lưu ảnh hưởng lên dòng chảy, nó xác định quán tính của đơn vị thể tích chất lưu và vì thế xác định gia tốc của nó dưới tác dụng của lực cho trước. Khi chịu tác dụng của cùng một lực trên đơn vị thể tích, chất lưu có mật độ khối thấp, thí dụ không khí, gia tốc dễ dàng hơn các chất lưu có mật độ khối cao, như nước chẳng hạn. Vì lý do này ta thấy lội trong nước thì khó hơn nhiều khi đi bộ trong không khí.

Ảnh hưởng của áp suất và nhiệt độ lên mật độ khối

Mật độ khối của chất lưu là hàm của áp suất và nhiệt độ của nó $\rho = \rho(p, T)$. Ở một áp suất cố định, khi nhiệt độ chất lỏng tăng, mật độ khối của nó giảm vì khối lượng cố định của chất lỏng nở ra. Ở nhiệt độ cố định, khi áp suất tác dụng lên chất lỏng tăng, nó bị nén lại làm tăng mật độ khối. Đối với chất khí, các thay đổi cũng giống như vậy khi chịu các biến đổi của áp suất và nhiệt độ, nhưng những thay đổi này tương đối lớn hơn nhiều so với các chất lỏng. Trong bảng 2.1 là khối lượng riêng của một số chất. Chú ý, khối lượng riêng của các chất khí tăng rất nhanh theo áp suất, nhưng khối lượng riêng của các chất lỏng thì không.

Thay đổi nhỏ $d\rho$ trong mật độ khối do các thay đổi trong áp suất dp và nhiệt độ dT có thể được biểu diễn nhờ các đạo hàm riêng của ρ đối với áp suất và nhiệt độ

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT.$$

Chia hai vế hệ thức trên cho ρ, ta có biến đổi tương đối $d\rho/\rho$ trong mật độ khối là

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial p} dp + \frac{\partial (\ln \rho)}{\partial T} dT \qquad (2.14)$$

nghịch đảo hệ số của số hạng đầu được gọi là môđun khối (bulk modulus)

$$E = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}, \qquad (2.15)$$

[4]Trong trường hợp mật độ khối của một chất là (hoặc được xem là) như nhau cho mọi phần tử, ta dùng thuật ngữ khối lượng riêng – khối lượng của một đơn vị thể tích – thay vì mật độ khối.

Chất	Khối lượng riêng (kg/m^3)
Không gian giữa các vì sao	10^{-20}
Chân không trong phòng thí nghiệm	10^{-17}
Không khí ở 20^0C và 1 atm	$1,21$
20^0C và 50 atm	$60,5$
Nước ở 20^0C và 1 atm	$0,998 \times 10^3$
20^0C và 50 atm	$1,000 \times 10^3$
Nước biển ở 20^0C và 1 atm	$1,024 \times 10^3$
Nước đá (băng)	$0,917 \times 10^3$
Máu nguyên chất	$1,060 \times 10^3$
Nhôm	$2,7 \times 10^3$
Sắt	$7,9 \times 10^3$
Bạc	$10,5 \times 10^3$
Thủy ngân	$13,6 \times 10^3$
Vàng	$19,31 \times 10^3$
Trái đất (trung bình)	$5,5 \times 10^3$
ở lõi	$9,5 \times 10^3$
ở vỏ	$2,8 \times 10^3$
Mặt trời (trung bình)	$1,4 \times 10^3$
ở lõi	$1,6 \times 10^5$
Nhân nguyên tử urani	$3,0 \times 10^{17}$
Loă đen	10^{19}

Bảng 2.1: Khối lượng riêng của một số chất.

còn trừ hệ số của số hạng thứ hai được gọi là hệ số dãn nở nhiệt (coefficient of thermal expansion)

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}. \tag{2.16}$$

Nhận xét 2.4. Vì phần tử thể tích V có khối lượng ρV không đổi nên

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{v}; \tag{2.17}$$

nghĩa là, biến đổi tương đối trong mật độ khối bằng biến đổi thể tích tương đối dV/V, nhưng mật độ khối và thể tích biến thiên ngược nhau.

Từ hệ thức (2.17), biểu thức của E và β có thể viết lại

$$E = -V\frac{\partial p}{\partial V}, \tag{2.18}$$

$$\beta = \frac{1}{v}\frac{\partial V}{\partial T}. \tag{2.19}$$

Trong trường hợp áp suất p chỉ phụ thuộc mật độ khối ρ hoặc quá trình diễn ra là đẳng nhiệt (isothermal) thì

$$dV = -\frac{1}{E}V dp;$$

nói khác đi, khi áp suất tăng thêm 1 Pa thì một đơn vị thể tích bị nén bớt một lượng bằng $1/E$ (dấu trừ trong hệ thức chỉ sự biến thiên ngược nhau của áp suất và thể tích).

Nếu mật độ khối chỉ phụ thuộc nhiệt độ (không phụ thuộc áp suất) hoặc quá trình diễn ra là đẳng áp (isobaric) thì

$$dV = \beta V dT;$$

nghĩa là, khi nhiệt độ tăng lên 1^0K thì một đơn vị thể tích dãn nở thêm một lượng bằng β.

Với khí lý tưởng

$$p = \rho RT, \tag{2.20}$$

trong đó R là hằng số khí riêng của chất khí[5], còn T là nhiệt độ tuyệt đối (đơn vị đo là Kelvin (K)). Ta có:

$$E = \rho\frac{\partial(\rho RT)}{\partial\rho} = \rho RT = p, \tag{2.21}$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{RT}\right) = \frac{1}{T}. \tag{2.22}$$

Hơn nữa, từ (2.21) và (2.22), thứ nguyên của E và β lần lượt là N/m^2 và K^{-1}.

Các giá trị E của nước và không khí ở nhiệt độ phòng và áp suất khí quyển là $2,1\times10^9$ N/m^2 và $1,0\times10^5$ N/m^2. Như vậy, với một gia tăng nhỏ của áp suất, biến đổi tương đối $d\rho/\rho$ trong mật độ khối của không khí là $2,1\times10^4$ lần lớn hơn so với nước. Sự khác biệt này là do khoảng cách giữa

[5] R bằng hằng số khí phổ biến $R_0 = 8314$ Nm/kgK chia cho phân tử gam chất khí.

các phân tử trong chất lỏng nhỏ hơn nhiều lần so với chất khí ở áp suất khí quyển, dẫn đến các lực đẩy phân tử chất lỏng mạnh hơn so với lực đẩy phân tử chất khí.

Các hệ số dãn nở nhiệt của nước và không khí là $1,53 \times 10^{-4}\ K^{-1}$ và $3,5 \times 10^{-3}\ K^{-1}$, tương ứng, nên không khí dễ dãn nở hơn nước. Đun nóng các chất lưu trong trường trọng lực làm xuất hiện chuyển động nhiệt của các phân tử, với không khí ảnh hưởng sẽ mạnh hơn nhiều so với nước vì không khí có hệ số dãn nở nhiệt lớn hơn.

Sự dãn nở nhiệt của nước rất khác thường với nhiệt độ giữa 0^0C và 4^0C, trong khoảng nhiệt độ này nước bị co lại khi bị đun nóng. Mật độ khối của nước là cực đại ở 4^0C, và sự đun nóng trên hay làm lạnh dưới nhiệt độ này đều làm nước bị dãn nở. Ở những vùng hàn đới, mặt ao, hồ bị đóng băng vào những tháng cuối năm, nước ở bề mặt bị làm lạnh chìm xuống đáy miễn là nhiệt độ của nó vượt quá 4^0C, nhưng khi bị làm lạnh dưới giá trị này, nó nổi lên trên mặt vì mật độ khối của nó nhỏ hơn nước ấm hơn bên dưới. Như vậy, băng hình thành trên mặt ao, hồ vào mùa đông, trong khi ở đáy nước vẫn giữ nhiệt độ ở 4^0C (ấm hơn).

Nhận xét 2.5. Ngoài mật độ khối, trong cơ học chất lưu, ta thường dùng một số đại lượng khác có liên quan đến mật độ khối.

Thể tích riêng (specific volume) ν, xác định bởi

$$\nu = \frac{1}{\rho} \tag{2.23}$$

Trọng lượng riêng γ, là trọng lượng của chất lưu trong một đơn vị thể tích

$$\gamma = \rho g \tag{2.24}$$

Tỉ trọng của một chất lưu là tỉ số mật độ khối của chất lưu với mật độ khối của chất lưu tham khảo ρ_r

$$s = \frac{\rho}{\rho_r}. \tag{2.25}$$

Với chất lỏng, chất lưu tham khảo là nước nguyên chất ở điều kiện tiêu chuẩn (4^0C và $101,330\ Pa$), mật độ khối $\rho_r = 1000\ kg/m^3$. Với tỉ trọng của chất khí, không khí khô được chọn làm chất lưu tham khảo •

Thí dụ 2.5. Nhiệt độ trung bình của bề mặt trái đất được dự báo sẽ tăng lên trong thế kỷ này vì sự gia tăng hiệu ứng nhà kính. Khi nước biển hấp thu nhiệt, nó sẽ nở ra làm mực nước biển dâng lên. Nếu độ sâu trung bình của đại dương là $3800\ m$ và hệ số dãn nở nhiệt trung bình của nó là $1,6 \times 10^{-4}\ K^{-1}$, thì mực nước biển sẽ tăng lên bao nhiêu khi đại dương bi làm nóng lên $1\ K$.

Giải. Một cột nước biển sẽ nở ra theo phương thẳng đứng khi bị làm nóng, vì sự giãn nở mặt bên bị giới hạn bởi các lục địa. Gọi Δh là số gia độ cao của mực nước biển khi nhiệt độ tăng thêm 1 K, thì Δh sẽ bằng tích của hệ số giãn nở nhiệt với độ sâu của đại dương

$$\Delta h = 1,6 \times 10^{-4} \times 3800 = 0,608\ m.$$

◇

2.3 Nguyên lý bảo toàn khối lượng

Sự bảo toàn khối lượng trong chất lưu chuyển động đòi hỏi khối lượng tích lũy bên trong thể tích kiểm tra là do dòng chất lưu đi qua mặt kiểm tra, vì khối lượng không thể được tạo ra hoặc mất đi bên trong thể tích kiểm tra.

Dạng tích phân

Xét một dòng chảy đi qua một thể tích kiểm tra trong khoảng thời gian dt. Dòng khối lượng đi ra khỏi thể tích kiểm tra trong khoảng thời gian này bằng tốc độ dòng khối lượng nhân với dt, $\dot{m}dt = (\int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS)dt$. Số gia khối lượng chất lưu bên trong thể tích kiểm tra, phải bằng trừ của khối lượng chảy ra ngoài qua mặt kiểm tra

$$d \int_V \rho dV = -\left(\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt.$$

Chia hai vế cho dt, ta nhận được biểu thức cho tốc độ thay đổi khối lượng bên trong thể tích kiểm tra

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

hay

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \tag{2.26}$$

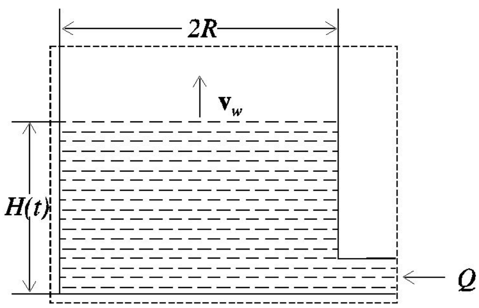
Phương trình này biểu diễn sự bảo toàn khối lượng áp dụng cho thể tích kiểm tra bất kỳ, cụ thể là, *tốc độ tích lũy khối lượng bên trong thể tích kiểm tra cộng với tốc độ dòng khối lượng chảy ra qua mặt kiểm tra bằng không.*

Nhận xét 2.6. Để áp dụng phương trình (2.26) được dễ dàng hơn, ta nên xét tách biệt các thành phần dòng khối lượng đi vào, $\dot{m}_v$, và đi ra, $\dot{m}_r$, thể tích kiểm tra. Khi đó, phương trình (2.26) có thể viết lại

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \dot{m}_v - \dot{m}_r. \tag{2.27}$$

•

Thí dụ 2.6. Một máy bơm đang bơm nước vào bồn hình trụ bán kính $R = 1\ m$ đặt thẳng đứng như hình 2.4, mực nước trong bồn dâng lên với vận tốc $v_w = 1\ mm/s$. Haơy tính tốc độ dòng thể tích Q đi qua máy bơm.



Hình 2.4: Thí dụ 2.6.

Giải. Thể tích kiểm tra được chọn là miền được thể hiện bởi đường không liền nét trong hình 2.4. Ký hiệu $H(t)$ là độ cao của mực nước trong bồn, khối lượng nước trong bồn tại thời điểm t là $\rho_w(\pi R^2 H(t))$. Không xét đến không khí trong thể tích kiểm tra, phương trình bảo toàn khối lượng (2.27) cho

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\rho_w(\pi R^2 H(t))] &= \rho_w Q \\ \pi R^2 \frac{dH}{dt} &= Q. \end{aligned}$$

Suy ra

$$Q = \pi R^2 v_w = 3,14 \times 1 \times 10^{-3} = 3,14 \times 10^{-3}\ m^3/s.$$

◇

Dạng vi phân

Ta có thể thiết lập dạng vi phân của nguyên lý bảo toàn khối lượng bằng cách biến đổi tích phân mặt trong phương trình (2.26) về tích phân thể tích.

Thật vậy, áp dụng định lý divergence vào phương trình (2.26) cho tích phân diện tích, ta có

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho \mathbf{v})\right] dV = 0.$$

vì đẳng thức đúng với mọi thể tích điều khiển nên biểu thức dưới dấu tích phân phải đồng nhất không, nghĩa là

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2.28}$$

Các số hạng trong dạng vi phân của nguyên lý bảo toàn khối lượng có cùng ý nghĩa vật lý như dạng tích phân. Số hạng đầu là tốc độ tích luỹ khối lượng trên đơn vị thể tích của một phần tử thể tích vô cùng bé và số hạng thứ hai là tốc độ dòng khối lượng chảy vào trên đơn vị thể tích.

Thí dụ 2.7. Dòng chảy có trường vận tốc $\mathbf{v} = (x/t)\mathbf{i}$. Giả sử mật độ khối của dòng chảy chỉ phụ thuộc thời gian. tìm $\rho(t)$.

Giải. Phương trình bảo toàn khối lượng (2.28) trong trường hợp này trở thành

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{x}{t}\right) = 0 \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{t} = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dt}{t} = 0. \tag{2.31}$$

Suy ra $\rho t = const$.
◇

2.4 Các thể hiện của nguyên lý bảo toàn khối lượng

Dòng chảy không nén được

Khai triển số hạng divergence, phương trình (2.28) có thể viết lại

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \bigtriangledown)\rho + \rho \bigtriangledown \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \bigtriangledown \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Nếu tốc độ thay đổi mật độ khối của các chất điểm là nhỏ và có thể bỏ qua so với số hạng $\rho \bigtriangledown \cdot\mathbf{v}$, nghĩa là

$$\left|\frac{D\rho}{Dt}\right| \ll \rho|\bigtriangledown \cdot\mathbf{v}|, \tag{2.33}$$

thì phương trình (2.32) trở thành

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2.34}$$

Một dòng chảy thỏa điều kiện (2.33) được gọi là dòng chảy không nén được (incompressible flow), và phương trình (2.34) gọi là điều kiện không nén được.

Cần chú ý rằng, điều kiện (2.34) không đòi hỏi trường mật độ của dòng chảy là hằng mà chỉ yêu cầu mật độ khối không đổi dọc theo quỹ đạo của mỗi chất điểm, nghĩa là

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \tag{2.35}$$

Còn các chất điểm khác nhau có thể có mật độ khối khác nhau. Nếu trường mật độ của dòng chảy không nén được là hằng tại một thời điểm nào đó, thì nó sẽ giưo là hằng ở mọi thời điểm sau đó. Ta sẽ gọi dòng chảy như vậy là dòng chảy mật độ hằng (constant-desity flow).

Thông thường ta có thể giả thiết dòng chảy là không nén được, ngoại trừ các trường hợp sau:

(a) sự thay đổi của mật độ khối là đáng kể, thí dụ không khí bị nén trong buồng đốt nhiên liệu;

(b) vật tốc dòng chảy không nhỏ so với vận tốc âm;

(c) khi thời gian để vật tốc thay đổi đáng kể không dài so với thời gian để sóng âm đi qua trường dòng chảy.

Thí dụ 2.8. Một dòng chảy phẳng có các thành phần vận tốc $u = x/T$, $v = -y/T$ và $w = 0$, trong đó T là hằng có thứ nguyên của thời gian. Dòng chảy này có là không nén được ?

Giải. Tính $\bigtriangledown \cdot \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\bigtriangledown \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{T}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{T}\right)\\ &= \frac{1}{T} - \frac{1}{T} = 0.\end{aligned}$$

Vậy, dòng chảy là không nén được.

◇

Sự bảo toàn các thành phần hóa chất

Khi khảo sát dòng chảy của một hỗn hợp các thành phần hóa chất, thỉnh thoảng ta cần phải theo dõi chuyển động của các thành phần một cách riêng biệt. Thí dụ, trong động cơ xe máy, để quá trình đốt cháy hỗn hợp gồm không khí, bụi nhiên liệu lỏng xảy ra hoàn toàn, giảm thiểu lượng khí thải ta cần phải xác định tỉ lệ các thành phần cần thiết đưa vào xylanh động cơ. Trong những trường hợp như vậy, ta cần phải biểu diễn sự bảo toàn khối lượng cho từng thành phần hóa chất.

Độ tập trung khối lượng (mass concentration) của thành phần hóa chất thứ i, ký hiệu ρ_i, là khối lượng của thành phần này trong một đơn vị thể tích hỗn hợp. Ta có thể gọi ρ_i là mật độ khối riêng, theo nghĩa nó là mật độ khối của thành phần hóa chất thứ i nếu như nó chiếm toàn bộ thể tích của phần tử chất lưu. Tất nhiên, tổng độ tập trung khối lượng của tất cả các thành phần phải bằng mật độ khối của phần tử chất lưu

$$\rho = \sum_i \rho_i. \tag{2.36}$$

Nhận xét 2.7. Trường hợp chất lưu là hỗn hợp các khí lý tưởng, độ tập trung khối lượng ρ_i có thể được xác định từ áp suất riêng (partial pressure) p_i. Theo luật khí lý tưởng, ta có

$$\rho_i = \frac{p_i}{R_i T}. \tag{2.37}$$

Mặt khác, vì áp suất của hỗn hợp bằng tổng các áp suất riêng nên ta còn có

$$p = \sum_i p_i. \tag{2.38}$$

•

Trong trường hợp không xảy ra phản ứng hóa học thì phương trình bảo toàn khối lượng cho thành phần thứ i là

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_i dV + \int_S \rho_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dS = 0. \tag{2.39}$$

Ký hiệu $\dot{m}_i$ là tốc độ dòng khối lượng của thành phần thứ i qua mặt kiểm tra, ta có

$$\dot{m}_i = \int_S \rho_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dS = 0 \tag{2.40}$$

và phương trình trên có thể viết

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_i dV = \dot{m}_{i,v} - \dot{m}_{i,r}. \tag{2.41}$$

Dạng vi phân của sự bảo toàn khối lượng cho thành phần thứ i

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \bigtriangledown \cdot (\rho_i \mathbf{v}) = 0. \tag{2.42}$$

Thí dụ 2.9. Một bồn thể tích $V = 10\ m^3$ chứa đầy dung dịch muối có mật độ khối muối ban đầu là $\rho_s(0) = 3\ kg/m^3$. Ở thời điểm $t = 0$, nước ngọt được bơm vào bồn với tốc độ dòng thể tích $Q = 0,01\ m^3/s$, thế chỗ dung dịch muối chảy ra ngoài với cùng một tốc độ dòng thể tích. Chất lỏng trong bồn được khuấy để sự gia tăng nước ngọt làm loãng đều dung dịch trong cả bồn.

a) Thiết lập và giải phương trình vi phân mô tả sự phụ thuộc thời gian của mật độ khối muối $\rho_s(t)$ trong bồn.

b) Tính thể tích nước ngọt cần dùng để làm giảm mật độ muối xuống còn một nửa.

Giải. a) Áp dụng phương trình (2.41) cho thể tích bồn, chú ý rằng mật độ khối muối của dòng chảy ra giống như trong bồn

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_s}{dt}V &= -\rho_s Q \\
\frac{d\rho_s}{\rho_s} &= -\frac{Q}{V}dt \\
\rho_s &= \rho_s(0)\exp\left(-\frac{Qt}{V}\right) = 3\exp\left(-\frac{t}{10^3}\right)\ (kg/m^3)
\end{aligned}$$

b) Tại thời điểm khi $\rho_s(t) = \rho_s(0)/2$,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{Qt}{V}\right) &= 2 \\
Qt &= V\ln 2 = 10 \times 0,6931 = 6,931\ m^3.
\end{aligned}$$

◇

Khi một thành phần hóa chất chịu một phản ứng hóa học, thí dụ nhiên liệu phản ứng với không khí làm sinh ra các sản phẩm của sự cháy, phương trình bảo toàn khối lượng cho mỗi thành phần hóa chất phải bao gồm sự phát sinh hoặc mất đi của các thành phần này. Để tính đến ảnh hưởng của các phản ứng hóa học, ta đưa một số hạng vào vế phải phương trình (2.39) để diễn tả sự phát sinh thành phần i từ các phản ứng hóa học

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_i dV + \int_S \rho_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V \left(\frac{\partial\rho_i}{\partial t}\right)_{hh} dV, \tag{2.43}$$

trong đó $(\partial\rho_i/\partial t)_{hh}$ là tốc độ khối lượng phát sinh của thành phần i trên đơn vị thể tích bên trong thể tích kiểm tra do tất cả các phản ứng hóa học gây ra.

Dạng vi phân phương trình bảo toàn khối lượng cho trường hợp này là

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot(\rho_i\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial\rho_i}{\partial t}\right)_{hh}. \tag{2.44}$$

Trong cả hai trường hợp, khi lấy tổng các phương trình bảo toàn khối lượng của tất cả các thành phần của hỗn hợp ta sẽ nhận được phương trình bảo toàn khối lượng cho hỗn hợp (dùng (2.36).

Dòng chảy hai pha

Một số dòng chảy chứa đựng một hỗn hợp của hai pha vật lý. Các hạt bụi lơ lửng trong không khí, bong bóng khí trong nước của nước sôi là vài thí dụ của dòng chảy trong đó các thành phần không hòa lẫn với nhau đến mức phân tử như trường hợp các dung dịch và hỗn hợp hóa học. Các dòng chảy loại này được gọi là dòng chảy hai pha (two-phase flow).

Với dòng chảy hai pha, khái niệm mật độ khối riêng của mỗi pha là khái niệm hữu dụng để phân tích. Mật độ khối riêng ρ_i của một pha đơn giản là tỉ lệ khối lượng của pha trong một mẫu chất lưu với thể tích của chất lưu đó. Chú ý, thể tích mẫu phải đủ lớn để chứa một số lớn các phần tử (bóng bóng hay hạt bụi) nhưng đủ nhỏ để bao gồm chỉ một phần nhỏ của trường dòng chảy. Theo nghĩa này thì mật độ khối riêng của pha tương tự với mật độ khối riêng của một thành phần hóa chất trong một hỗn hợp.

Khi thành phần thứ yếu của một hỗn hợp dị thể, thí dụ hạt bụi hay bọt) có kích thước rất nhỏ, nó có khuynh hướng bị kéo theo với tốc độ của chất lưu chung quanh. Trong những trường hợp như vậy, pha có thể được đối xử giống như thành phần hóa chất và mỗi thành phần của chất lỏng hai pha sẽ tuân theo quy luật bảo toàn khối lượng có dạng phương trình (2.42). Mặt khác, khi kích thước của các thành phần không đủ nhỏ, như trong một cơn mưa dông hoặc nước đang sôi, mỗi pha có thể có vận tốc khác nhau, và quy luật bảo toàn khối lượng có dạng

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \bigtriangledown\cdot(\rho_i\mathbf{v}_i) = 0, \tag{2.45}$$

trong đó $\mathbf{v}_i$ là vận tốc của pha thứ i. Sự khác nhau giưoa vận tốc của mỗi pha được xác định bởi các chi tiết của động lực học chất lưu chung quanh mỗi phần tử hay bọt – một trường hợp hoàn toàn phức tạp mà không dễ xử lý bằng các phương pháp thông thường.

Đo thể tích và tốc độ dòng thể tích

Số lượng của hầu hết các chất lưu dùng trong đời sống được đo bằng thể tích của chúng. Thí dụ, để làm bánh ngọt, ta phải đo lượng sữa, vani. Thông thường, ta dùng tách để đo lượng sữa, dùng thìa để ước lượng vani. Ở đây, tách và thìa được dùng làm phương tiện đo thể tích. Tuy nhiên, nhiều chất lưu chảy trong các đường ống, vòi phun, ta phải dùng đến lưu lượng kế (flowmeter). Cấu tạo của lưu lượng kế gồm một rotor quay tỉ lệ với thể tích chất lưu đi qua đồng hồ đo. Chuyển động của rotor kích hoạt bộ phận đếm, đo thể tích chất lưu theo một đơn vị thích hợp.

Trong nhiều trường hợp, ta còn cần biết cả tốc độ dòng thể tích. Trong buồng đốt của động cơ xe máy, tốc độ dòng thể tích của nhiên liệu lỏng và khí phải được giữ ở một tỉ lệ thích hợp đối với tốc độ và công suất máy bằng bộ điều chỉnh cơ điện. Một số thiết bị đo tốc độ dòng thể tích được thiết kế dưới dạng đồng hồ sử dụng các nguyên lý của động lực học chất lưu.

2.5 Phương pháp tính cho cơ học chất lưu

2.5.1 Phương pháp Euler

Bài toán xác định quỹ đạo của một hạt $\mathbf{x}^0 = (a, b, c)$ biết trường vận tốc $\mathbf{v}$: tìm hàm vectơ $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$ thỏa phương trình vi phân

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{2.46}$$

và điều kiện đầu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

Một thuật toán đơn giản giải bài toán này là xét sự thay đổi vị trí của hạt trong khoảng thời gian Δt, và thay phương trình vi phân (2.46) bằng các phương trình đại số

$$\begin{aligned}
\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= v_x(x, y, z, t), \\
\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} &= v_y(x, y, z, t), \\
\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} &= v_z(x, y, z, t).
\end{aligned}$$

Để nhận được các phương trình này ta đã thay đạo hàm theo thời gian bên vế trái phương trình (2.46) bằng sai phân tiến của $\mathbf{x}$ tại t.

Giải các phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \Delta t v_x(x,y,z,t), \\ y(t+\Delta t) &= y(t) + \Delta t v_y(x,y,z,t), \\ z(t+\Delta t) &= z(t) + \Delta t v_z(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Về mặt vật lý, các phương trình trên phát biểu rằng vị trí của một hạt tại thời điểm $t+\Delta t$ bằng vị trí tại thời điểm trước t cộng thêm một dịch chuyển bé trong khoảng thời gian Δt. Trong khoảng thời gian này hạt xem như có vận tốc không đổi bằng vận tốc của hạt tại thời điểm t.

Thuật toán

1. Chỉ định thời điểm đầu ($t = 0$).
2. Chọn bước lưới thời gian.
3. Chỉ định tọa độ đầu $x(0), y(0), z(0)$.
4. Tính các vận tốc $v_x(x,y,z,t)$, $v_y(x,y,z,t)$ và $v_z(x,y,z,t)$.
5. Tính vế phải của (2.47), rồi tọa độ của hạt tại thời điểm $t + \Delta t$.
6. Dừng hoặc trở về tính từ bước 4 đến bước 6.

Thí dụ 2.10. Xác định quỹ đạo của hạt ban đầu ở vị trí $(1,1,1)$ có vận tốc:

$$\mathbf{v} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}.$$

Giải. Nghiệm giải tích (thí dụ 2.3 với $k = 1, a = 1, \omega = 1$)

$$x = e^{-t}, \quad y = e^{t}, \quad z = \sin t + 1.$$

Chương trình viết bằng Matlab

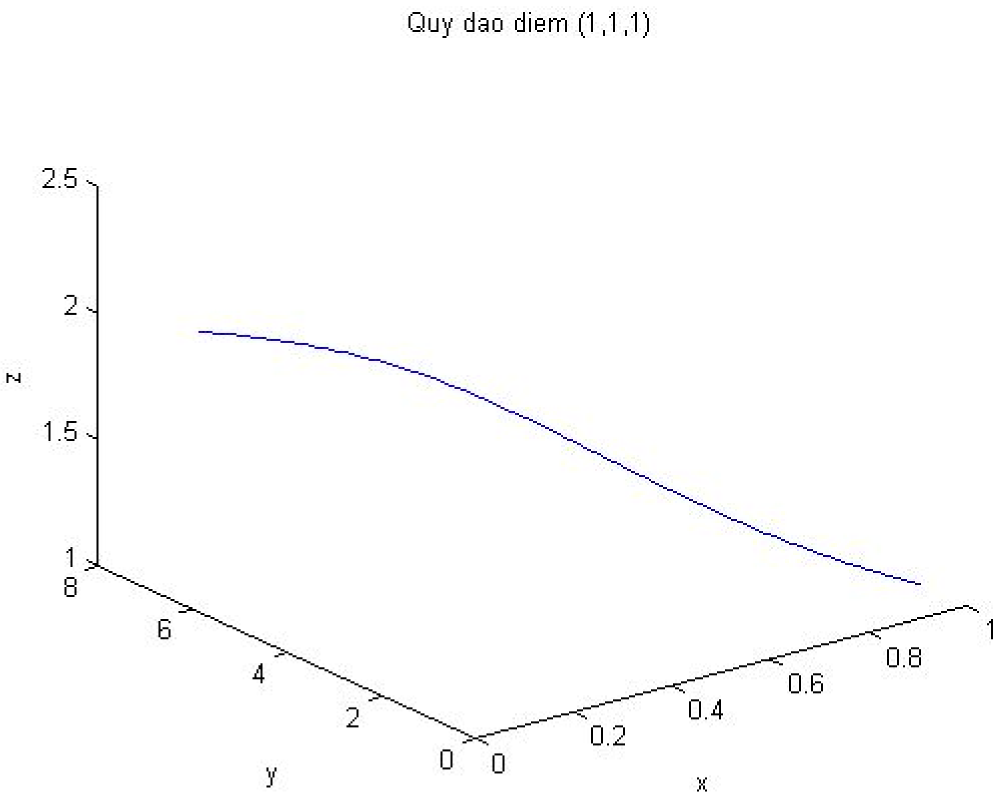
```
% Chuong trinh xac dinh quy dao cua diem bang phuong phap Euler
clear all
tmax=2; % thoi gian khao sat
N = 100; % so nut thoi gian
dt=tmax/(N-1);
t=0:dt:tmax; % cac nut thoi gian
```

```
% vi tri ban dau cua diem
x(1) = 1;
y(1) = 1;
z(1) = 1;
for i = 2:N
     x(i) = x(i-1) + dt*f(x(i-1),y(i-1),z(i-1),t(i-1));
     y(i) = y(i-1) + dt*g(x(i-1),y(i-1),z(i-1),t(i-1));
     z(i) = z(i-1) + dt*h(x(i-1),y(i-1),z(i-1),t(i-1));
end
% ve duong dong
plot3(x,y,z)
```

Chương trình gọi các hàm `f.m, g.m, h.m`

```
function v=f(x,y,z,t)
v=-x;
function v=g(x,y,z,t)
v=y;
function v=h(x,y,z,t)
v=cos(t);
```

Sai số. Khi dùng sai phân tiến để xấp xỉ đạo hàm, sai số của vị trí sẽ có cấp của Δt^2, ta nói phương pháp Euler mang sai số từng bước cấp hai đối với độ lớn của bước thời gian. Nếu gọi N_s là số bước thời gian thực hiện từ $t = 0$ đến $t = t_{\max}$ thì sai số từng bước sẽ tích luơy thành một lượng bằng $N_s \times \Delta t^2 = t_{\max}\Delta t$. Biểu thức này chứng tỏ sai số tích luơy có cấp 1 đối với độ lớn của bước thời gian. Trừ phi Δt đủ nhỏ còn thì mức sai số này là không chấp nhận được trong tính toán khoa học.



Hình 2.5: Thí dụ 2.10.

Chương 3

Dòng chảy không nhớt

Ma sát là nguồn gốc tính nhớt của chất lưu. Trong chương này, ta xét một loại dòng chảy mà ảnh hưởng nhớt có thể bỏ qua. Ta sẽ thiết lập phương trình chuyển động cho dòng chảy, và một tích phân đầu của nó.

3.1 Tính nhớt

Như đã biết, dưới tác dụng của trọng lực, mọi chất lỏng luôn thay đổi hình dạng đến cấu hình phù hợp với hình dáng của bình chứa. Tuy nhiên, một số chất lỏng di chuyển chậm hơn các chất lỏng khác. Thí dụ, so sánh chuyển động của nước và mật ong khi được rót vào đĩa với cùng một điều kiện, mật ong di chuyển (thay đổi hình dạng) chậm hơn. Khả năng chống lại sự thay đổi hình dạng của mật ong lớn hơn nước. Chất khí cũng có khả năng này nhưng thể hiện yếu hơn.

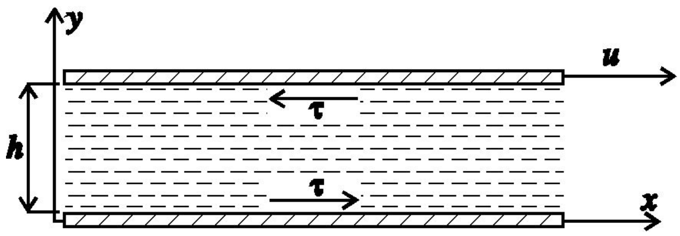
Độ nhớt

Tính chất chống lại sự thay đổi hình dạng của một chất lưu[1] được gọi là tính nhớt (viscosity, viscidity). Số đo tính chất này là độ nhớt.

Tính nhớt có thể được hiểu như là ma sát trong của chất lưu. Để đo độ nhớt, trong trường hợp chất lỏng, người ta rót một lớp mỏng chất lỏng đó vào giữa hai tấm phẳng song song cách nhau một khoảng cách h. Nếu ta di chuyển một tấm với vận tốc tương đối u so với tấm còn lại (hướng chuyển động song song với mặt phẳng tấm) và đo lực cần thiết để thực hiện chuyển động này, thì lực trên đơn vị diện tích của tấm τ tỉ lệ với u và h

$$\tau = \mu \frac{u}{h}$$

[1] Cả chất lỏng lẫn chất khí



Hình 3.1: Thí nghiệm xác định độ nhớt của chất lỏng.

đối với mọi chất lỏng, nhưng hằng số tỉ lệ μ là khác nhau đối với các chất lỏng khác nhau. Ta gọi hằng số tỉ lệ này là hệ số nhớt tuyệt đối (absolute viscosity coefficient), hay đơn giản là độ nhớt.

Trong thí nghiệm, lực tác dụng trên một tấm có độ lớn bằng nhưng ngược hướng với lực đặt trên tấm còn lại. Cả hai lực này được truyền đến chất lỏng, đặt lên hai mặt lớp chất lỏng lực mặt trên đơn vị diện tích τ, gọi là ứng suất trượt (shear stress), có cùng độ lớn nhưng ngược hướng với lực tương ứng đặt trên hai tấm. Lớp chất lỏng bất kỳ có độ dầy Δy nằm giữa hai tấm sẽ chịu cùng ứng suất trượt τ và vận tốc tương đối Δu

$$\tau = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

Qua giới hạn $\Delta y \to 0$, ta có

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.1}$$

Vì τ như nhau tại mọi điểm bên trong chất lỏng trong thí nghiệm này nên vận tốc tương đối u thay đổi tuyến tính theo khoảng cách y vuông góc với tấm. Dòng chảy như vậy được gọi là trượt đơn giản (simple shear).

Biến dạng trượt của chất lưu được đo bởi góc $\Delta\varphi$ (hình 3.2), ta có

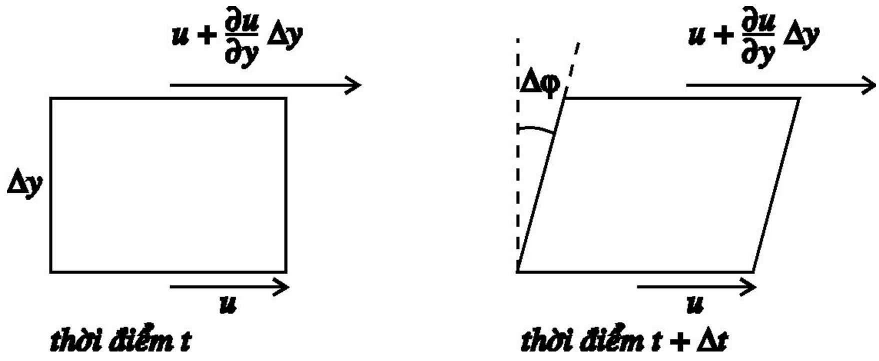
$$\Delta\varphi \approx \tan(\Delta\varphi) = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t.$$

Suy ra

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

và như vậy, ứng suất trượt τ tỉ lệ với tốc độ biến dạng (strain rate) trượt[2].

[2]Tương tự với vật thể đàn hồi, ứng suất trượt tỉ lệ với biến dạng trượt.



Hình 3.2: Trượt đơn giản.

Các chất lưu thể hiện phương trình (3.1) được gọi là chất lưu Newton[3]. Hầu hết các chất lưu là Newton, nhưng có một số chất lưu mà quan hệ giữa ứng suất trượt và đạo hàm vận tốc phức tạp hơn nhiều. Các chất lưu này, được gọi là chất lưu phi Newton, ứng xử khác biệt so với (3.1) là do các phân tử chất lưu rất lớn, giống như các polymer hoặc protein, hoặc chúng chứa các phần tử không phải là chất lưu, như máu chẳng hạn. Rất khó để mô tả ứng suất trượt trong những chất lưu như vậy.

Ứng suất nhớt τ trong chất lưu trượt đơn giản, như trong hình 3.1, là hệ quả của chuyển động (trung bình) tương đối của các phân tử chất lưu. Trong chất lưu ở trạng thái nghỉ, các phân tử cá biệt của nó không ngừng trao đổi năng lượng với các phân tử lân cận, lúc nhận, lúc mất, nhưng nếu lấy trung bình theo thời gian thì năng lượng của các phân tử là không đổi. Nhưng với dòng chảy trượt thì khác, các phân tử có xu hướng nhận năng lượng do va chạm với các phân tử khác, một cách trung bình, di chuyển về phía chúng với vận tốc trung bình tỉ lệ với tốc độ biến dạng trượt $\partial u/\partial y$. Năng lượng này phải được cung cấp từ bên ngoài, ứng suất trượt τ, tác động lên phần tử chất lưu, thực hiện công với tốc độ

$$\tau\frac{\partial u}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

trên một đơn vị thể tích. Năng lượng của các phân tử chất lưu tăng (nhờ công của biến dạng nhớt) làm nhiệt độ của nó cũng tăng lên, do sự phân bố lại năng lượng giữa các phân tử, giống như khi chất lưu bị đun nóng. Quá trình này gọi là sự hao tán nhớt (viscous dissipation).

[3]Newton là người đầu tiên đề nghị quan hệ tuyến tính giữa ứng suất trượt và đạo hàm của vận tốc.

Chất bôi trơn là một chất lỏng được bơm vào giữa bề mặt của hai vật thể rắn với mục đích ngăn cản chúng tiếp xúc trực tiếp với nhau, và làm giảm thiểu ma sát (ứng suất trượt của chất bôi trơn $\mu u/h$ nhỏ hơn rất nhiều so với trường hợp hai mặt rắn trượt trực tiếp lên nhau). Chất bôi trơn có độ nhớt càng lớn thì ứng suất trượt càng lớn (bất lợi), nhưng bù lại khả năng giữ cho hai mặt rắn không tiếp xúc trực tiếp càng cao (có lợi).

Độ nhớt của chất lưu phụ thuộc vào cả nhiệt độ lẫn áp suất, nhưng ảnh hưởng của nhiệt độ lớn hơn nhiều. Độ nhớt của chất lỏng giảm khi nhiệt độ tăng. Thí dụ, vào mùa đông, độ nhớt của dầu nhờn trong các động cơ lớn hơn nên công suất động cơ cần thiết phải lớn hơn để khởi động máy. Trái lại, độ nhớt của chất khí tăng cùng với nhiệt độ. Bảng 3.1 liệt kê tính chất của một số chất lưu ở 20^0C. Đặc biệt, cả tốc độ thay đổi độ nhớt tương đối theo nhiệt độ $d\ln\mu/dT$. Dùng các giá trị này, ta có thể tính độ nhớt ở nhiệt độ T^0C nhờ công thức

$$\mu = \mu_{20} \exp\left[\frac{d\ln\mu}{dT}(T-20)\right]. \tag{3.2}$$

Ngoài độ nhớt, ta còn dùng một đại lượng gọi là độ nhớt động học (kinematic viscosity), ký hiệu ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{3.3}$$

Các thể hiện của tính nhớt

Khi chất lưu di chuyển dọc theo bề mặt của một vật rắn, các phân tử chất lưu ở gần bề mặt này không di chuyển cùng với chất lưu. Ta nói, chất lưu dính vào bề mặt và vận tốc của các phần tử chất lưu tại mặt phân cách chất lưu – vật rắn bằng vận tốc của vật rắn. Chuyển động này trái ngược với chuyển động của các vật rắn tại mặt tiết xúc (chúng trượt lên nhau). Lớp chất lưu "dính" vào bề mặt này được gọi là lớp biên (Boundary layer).

Có thể thấy sự hiện diện của lớp biên trong nhiều hiện tượng xảy ra quanh ta. Hậu quả của nó đôi lúc thật bất ngờ. Thường ta nghĩ rằng một cái quạt đang quay sẽ thổi bay các hạt bụi, làm chúng không thể bám vào cánh quạt. Nhưng thực tế bụi vẫn bám, đặc biệt bám nhiều tại phần cánh "va chạm" với không khí trước tiên.

Cũng do tính nhớt, một dòng chất lưu chuyển động sẽ cuốn theo các phần tử chất lưu lân cận. Ứng dụng hiệu quả này, trong thiết kế nhà ở, để thông gió cho căn nhà người ta tạo các lỗ thông gió ở chân tường và đặt mái gió ở trên nóc. Khi có gió thổi qua, phía trên mái gió dòng khí sẽ đẩy các phần tử không khí đi xa. Do hiệu ứng lớp biên, dòng khí ở sát mặt đất di chuyển

	ρ kg/m^3	μ Pas	ν m^2/s	$d\ln\mu/dT$ K^{-1}
Chất lỏng				
Nước	$9,982 \times 10^2$	$1,00 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-6}$	$-2,84 \times 10^{-2}$
Octan chuẩn	$7,02 \times 10^2$	$5,42 \times 10^{-4}$	$7,72 \times 10^{-7}$	$-1,26 \times 10^{-2}$
Rượu Ethyl	$7,89 \times 10^2$	$1,20 \times 10^{-3}$	$1,52 \times 10^{-6}$	$-1,95 \times 10^{-2}$
Rượu Methyl	$7,92 \times 10^2$	$5,84 \times 10^{-4}$	$7,37 \times 10^{-7}$	$-1,57 \times 10^{-2}$
Benzene	$8,79 \times 10^2$	$6,52 \times 10^{-4}$	$7,42 \times 10^{-7}$	$-1,57 \times 10^{-2}$
Ethylene Glycol	$1,110 \times 10^3$	$1,99 \times 10^{-2}$	$1,79 \times 10^{-5}$	$-6,03 \times 10^{-2}$
Glycerine	$1,260 \times 10^3$	$1,49$	$1,18 \times 10^{-3}$	$-9,23 \times 10^{-2}$
Thủy ngân	$1,355 \times 10^4$	$1,55 \times 10^{-3}$	$1,14 \times 10^{-7}$	$-3,71 \times 10^{-3}$
Khí lý tưởng				
Không khí	$1,204$	$1,82 \times 10^{-5}$	$1,51 \times 10^{-5}$	$2,56 \times 10^{-3}$
Hydrogen	$8,382 \times 10^{-2}$	$8,83 \times 10^{-6}$	$1,05 \times 10^{-4}$	$3,95 \times 10^{-3}$
Helium	$1,664 \times 10^{-1}$	$1,95 \times 10^{-5}$	$1,17 \times 10^{-4}$	$2,15 \times 10^{-3}$
Hơi nước	$7,498 \times 10^{-1}$	$9,57 \times 10^{-6}$	$1,28 \times 10^{-5}$	$3,67 \times 10^{-3}$
Carbon Monoxide	$1,165$	$1,76 \times 10^{-5}$	$1,51 \times 10^{-5}$	$2,62 \times 10^{-3}$
Nitrogen	$1,165$	$1,76 \times 10^{-5}$	$1,51 \times 10^{-5}$	$2,50 \times 10^{-3}$
Oxygen	$1,330$	$2,03 \times 10^{-5}$	$1,53 \times 10^{-5}$	$2,56 \times 10^{-3}$
Argon	$1,660$	$2,25 \times 10^{-5}$	$1,36 \times 10^{-5}$	$2,68 \times 10^{-3}$
Carbon Dionoxide	$1,830$	$1,47 \times 10^{-5}$	$8,03 \times 10^{-6}$	$3,07 \times 10^{-3}$

Bảng 3.1: Tính chất một số chất lưu ở 20^0C và áp suất khí quyển.

chậm hơn, vì thế các phần tử không khí ít bị cuốn đi. Không khí ở mái gió bị cuốn đi nhiều hơn, sẽ "hút" không khí vào các lỗ thông gió, thổi vào nhà và thoát ra khỏi mái gió. Nhờ thế căn nhà được thông gió và thoáng khí.

Dòng chảy không nhớt (inviscid flow)

Nếu chất lưu có độ nhớt bằng không thì nó không chịu ứng suất trượt, và dòng chảy chính xác là dòng chảy không nhớt[4]. Tuy nhiên, trong thực tế, không có chất lưu nào mà không có tính nhớt. Dòng chảy được xem là không nhớt, nếu ảnh hưởng của ứng suất trượt lên chuyển động của nó phải đủ bé so với các ảnh hưởng khác để có thể bỏ qua.

Trong cơ học chất lưu người ta dùng một tham số không thứ nguyên để đặc trưng cho ảnh hưởng của tính nhớt lên dòng chảy, gọi là số Reynolds (Reynolds number), ký hiệu Re. Một dòng chảy dừng, mật độ khối ρ, độ

[4]Dòng chảy không nhớt còn được gọi là dòng chảy lý tưởng (ideal flow).

nhớt μ, chảy qua một đối tượng có kích thước L với vận tốc v, số Reynolds được định nghĩa bằng

$$Re = \frac{\rho L v}{\mu} = \frac{L v}{\nu}. \tag{3.4}$$

Nếu độ nhớt của chất lưu gần bằng không thì (theo (3.1)) ứng suất trượt là rất bé so với biến dạng trượt. Khi đó, số Reynolds của dòng chảy rất lớn. Vậy, điều kiện cần (nhưng không đủ) để bỏ qua ảnh hưởng nhớt là $Re \gg 1$. Tuy nhiên, một dòng chảy có số Reynolds lớn vẫn có thể chịu ảnh hưởng lớn của tính nhớt trong một số trường hợp, chẳng hạn, khi dòng chảy tiếp xúc với các biên rắn. Không phải lúc nào ta cũng có thể tiên đoán được, khi nào thì những dòng chảy như vậy được xem là nhớt, mà phải cần đến các quan sát thực nghiệm.

3.2 Phương trình Euler

Xét phần tử thể tích chất lưu ΔV có khối lượng $\rho\Delta V$. Vì $-\bigtriangledown p$ là áp lực trên đơn vị thể tích nên thể tích này chịu áp lực là $-\bigtriangledown p\Delta V$. Lực trọng trường tác dụng lên thể tích là $(\rho\Delta V)\mathbf{g}$. Áp dụng định luật thứ hai của Newton, ta thu được phương trình mô tả chuyển động

$$(\rho\Delta V)\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{v}\right] = (-\bigtriangledown p)\Delta V + (\rho\Delta V)\mathbf{g}.$$

Chia hai vế cho $\rho\Delta V$, rồi cho $\Delta V \to 0$, ta nhận được phương trình Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\bigtriangledown p + \mathbf{g}. \tag{3.5}$$

Vế trái của phương trình Euler là gia tốc của phần tử chất lưu, trong khi vế phải là tổng của lực tác dụng trên đơn vị khối lượng chất lưu. Chú ý, mật độ khối của chất lưu chỉ xuất hiện ở mẫu số của số hạng áp lực. Với độ lớn cho trước của gia tốc, chất lỏng (có mật độ khối lớn) đòi hỏi một gradient áp suất lớn hơn nhiều lần so với chất khí (có mật độ khối nhỏ). Mặt khác, trong chân không ($\bigtriangledown p = 0$), một giọt nước và một giọt thủy ngân sẽ rơi tự do với cùng gia tốc $\mathbf{g}$ mặc dù mật độ khối của chúng khác nhau. Nếu chất lưu ở trạng thái nghỉ ($\mathbf{v} = 0$), phương trình Euler trở thành phương trình cân bằng thủy tĩnh.

Thí dụ 3.1. Một dòng chảy không nhớt, mật độ khối là hằng, có trường vận tốc:

$$\mathbf{v} = f(x\mathbf{i} - y\mathbf{j}),$$

trong đó f là hằng số có thứ nguyên s^{-1}. Xác định trường áp suất của dòng chảy, nếu $p(0,0,0) = p_0$, và $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$.

Giải. Trước hết, ta tính trường gia tốc

$$\mathbf{a} = f^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Thay vào phương trình Euler, ta được hệ

$$\begin{aligned} f^2 x &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ f^2 y &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ g &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tích phân phương trình đầu theo x,

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{(fx)^2}{2} + h(y,z);$$

thay vào phương trình thứ hai, rồi tích phân theo y

$$\begin{aligned} f^2 y &= -\frac{\partial h}{\partial y} \\ h &= -\frac{(fy)^2}{2} + k(z). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{f^2(x^2+y^2)}{2} + k(z).$$

Thay biểu thức trên vào phương trình thứ ba, rồi tích phân theo z (tương tự như trước)

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{f^2(x^2+y^2)}{2} - gz + C.$$

Cuối cùng, dùng điều kiện $p(0,0,0) = p_0$ để chọn C, ta thu được trường áp suất cần tìm:

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{\rho f^2}{2}(x^2+y^2) \diamond$$

Dòng chảy có mật độ khối hằng. Khi mật độ khối của chất lưu là hằng trên trường dòng chảy và không thay đổi theo thời gian, ta có thể đơn giản hóa dạng của phương trình Euler bằng cách đưa vào biến phụ thuộc mới p^*

$$p^* = p - \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}). \tag{3.6}$$

Khi đó, phương trình (3.5) được đưa về dạng (thay $\mathbf{g} = \bigtriangledown(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \bigtriangledown)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \bigtriangledown p^*. \tag{3.7}$$

Biến p^*, có thứ nguyên của áp suất, là số đo sự khác biệt giữa áp suất p với phân bố áp suất thủy tĩnh[5]. $\bigtriangledown p^*$ là lực thực trên đơn vị thể tích gây ra gia tốc của dòng chảy.

Bằng cách đưa vào biến p^*, ta đã khử gia tốc trọng trường khỏi phương trình Euler. Ngay khi đã giải phương trình (3.7) và nhận được $p^*(\mathbf{r}, t)$, ta có thể xác định được $p(\mathbf{r}, t)$ từ phương trình (3.6).

Thí dụ 3.2. Một dòng sông độ sâu H, chuyển động dừng với vận tốc ngang $\mathbf{v} = u(z)\mathbf{i}$ thay đổi theo chiều sâu tính từ đáy sông (hình 3.3). Thiết lập biểu thức cho phân bố áp suất $p(z)$ trong dòng sông.

Giải. Chú ý, $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ do u không phụ thuộc x, và như vậy, p^* phải là hằng để thỏa phương trình (3.7). Đánh giá hằng số này tại mặt phân cách nước - không khí,

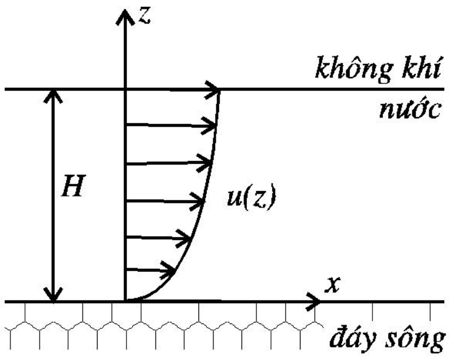
$$\begin{aligned} p(z) + \rho g z &= \rho_0 + \rho g H \\ p(z) &= \rho_0 + \rho g (H - z). \end{aligned}$$

Sự phân bố áp suất này giống như trường hợp khi nước trong sông không chuyển động. Để bảo đảm dòng sông tiếp tục chảy xuôi dòng khi có ma sát ở đáy (dòng chảy nhớt), mặt đáy sẽ phải xoay theo chiều kim đồng hồ một chút. Điều này hiếm khi làm thay đổi sự phân bố áp suất tính được ở trên $\diamond$

3.3 Phương trình Bernoulli

Muốn giải một bài toán liên quan đến dòng chảy không nhớt, nếu dùng tọa độ Descartes, ta phải tích phân phương trình Euler để tìm bốn hàm vô hướng u, v, w và p theo các biến x, y, z và t (giả sử ρ là hằng số). Để có đủ số phương trình xác định ta phải thêm vào phương trình bảo toàn khối lượng cho chất lưu không nén được $\bigtriangledown \cdot \mathbf{v} = 0$. Giải một hệ phương trình phức tạp như vậy thường rất khó khăn. Nói chung, tích phân của hệ chưa được tìm thấy. Ngay

[5] Phân bố áp suất thủy tĩnh bằng $\rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ (sai khác một hằng số cộng).



Hình 3.3: Thí dụ 3.2.

cả lời giải bằng số cho trường hợp 3-chiều cần đến một siêu máy tính. Nhờ thiên tài của Daniel Bernoulli ta có được một tích phân đầu của phương trình Euler, còn được gọi là phương trình Beroulli.

Để thiết lập phương trình Bernoulli, đầu tiên ta áp dụng đồng nhất thức vận tốc

$$(\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{v} = \bigtriangledown\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v}\times(\bigtriangledown\times\mathbf{v}),$$

thay số hạng $(\mathbf{v}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{v}$ trong phương trình Euler (3.5) và sắp xếp lại

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \bigtriangledown\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\bigtriangledown p - \mathbf{g} = \mathbf{v}\times(\bigtriangledown\times\mathbf{v}).$$

Sau đó, lấy tích phân phương trình Euler ở dạng này dọc theo đường cong C trong không gian, phần tử đường của nó là $d\mathbf{c}$, từ điểm **1** đến điểm **2**

$$\int_1^2 \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\cdot d\mathbf{c} + \int_1^2 \bigtriangledown\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{c} + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\bigtriangledown p\cdot d\mathbf{c} - \int_1^2 \mathbf{g}\cdot d\mathbf{c} = \int_1^2 \mathbf{v}\times(\bigtriangledown\times\mathbf{v})\cdot d\mathbf{c}. \tag{3.8}$$

Ta có ngay

$$\begin{aligned}\int_1^2 \bigtriangledown\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{c} &= \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2},\\ \int_1^2 \mathbf{g}\cdot d\mathbf{c} &= \int_1^2 \bigtriangledown(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r})\cdot d\mathbf{c} = \mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_2 - \mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_1.\end{aligned}$$

Để tích phân các số hạng còn lại, chọn C là đường dòng, nghĩa là $d\mathbf{c}$ cùng phương với $\mathbf{v}$ tại mỗi điểm của đường dòng. Để nhấn mạnh, ta ký hiệu $d\mathbf{s}$ là phần tử đường của đường dòng. Khi đó, $d\mathbf{s} \times \mathbf{v} = 0$ và ta có

$$\int_1^2 \mathbf{v} \times (\bigtriangledown \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Tích phân gradient áp suất có thể tính được dễ dàng nhờ giả thiết mật độ khối của chất lưu không đổi dọc theo đường dòng (chất lưu không nén được)

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \bigtriangledown p\right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\rho} \int_1^2 \bigtriangledown p \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1).$$

Thay các kết quả vừa tìm được vào (3.8), ta được phương trình Bernoulli cho trường hợp mật độ khối là hằng dọc theo một đường dòng

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1\right) = 0. \tag{3.9}$$

Trong trường hợp dòng chảy không dừng, số hạng tích phân đầu tiên trong phương trình Bernoulli chỉ có thể tính được nếu biết $\partial \mathbf{v}/\partial t$ tại tất cả các điểm của đường dòng tức thời (đường dòng tại thời điểm đang xét). Nếu dòng chảy dừng thì số hạng tích phân đầu tiên không có mặt, và tổng $v^2/2 + p/\rho - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ có cùng giá trị tại mọi điểm của một đường dòng. Nếu dùng hệ tọa độ Descartes với trục z thẳng đứng hướng lên, thì phương trình Bernoulli có dạng

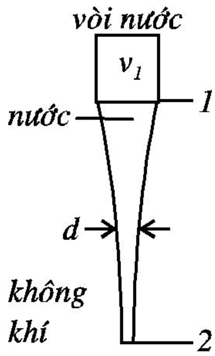
$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - g z_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - g z_1\right) = 0. \tag{3.10}$$

Đây là dạng thường dùng của phương trình Bernoulli.

Các áp dụng của phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli rất hữu ích, nó giúp ta hiểu biết cách ứng xử của nhiều dòng chảy trong kỹ thuật. Ta sẽ xét, dưới đây, cách áp dụng phương trình Bernoulli cho một số dòng chảy không nén.

Luồng chất lưu (fluid stream). Một thí dụ đơn giản nhất về dòng chảy không nhớt là luồng chất lưu (chẳng hạn, nước) chảy qua một chất lưu khác đang ở trạng thái nghỉ mà không trộn lẫn với chất lưu này (chẳng hạn, không khí). Xét trường hợp nước chảy ra từ vòi, như hình 3.4, với vận tốc $\mathbf{v}_1$ như một luồng hình trụ tròn đường kính d_1. Khi nó rơi xuống, tốc độ của nó tăng lên, còn đường kính thì co lại. Cuối cùng, luồng nước trở nên mảnh



Hình 3.4: Luồng nước.

đến nỗi lực căng bề mặt tách nó thành những giọt nước. Nhưng trước khi điều này xảy ra, dòng chảy có thể được mô tả bằng cách áp dụng phương trình Bernoulli (3.10) cho đường dòng ở trung tâm luồng nước. Trên đường dòng này, áp suất của nước sẽ giống như áp suất không khí ở cùng độ cao z bởi vì gia tốc theo phương kính của luồng nước được bỏ qua. Chúng ta sẽ bỏ qua ảnh hưởng của sức căng bề mặt để áp suất bên trong cột nước có thể lấy bằng áp suất không khí bên ngoài. Như vậy, áp suất nước tại điểm **1** và **2** liên quan đến sự phân bố của áp suất không khí:

$$p_2 + \rho_a g z_2 = p_1 + \rho_a g z_1,$$

trong đó ρ_a là mật độ khối của chất lưu bao quanh luồng nước (trong trường hợp đang xét là không khí), được giả thiết là hằng số. Thay biểu thức này vào phương trình Bernoulli (3.10) và giải tìm v_2^2, ta được

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g(z_1 - z_2).$$

Phương trình Bernoulli chỉ ra rằng vận tốc nước tăng theo khoảng cách $z_1 - z_2$. vì mật độ khối ρ_a (của không khí) chỉ vào khoảng 10^{-3} lần của nước nên $\rho_a/\rho \ll 1$, và ta có thể viết phương trình Bernoulli cho trường hợp này:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(z_1 - z_2).$$

Điều này tương đương với giả thiết áp suất chất lưu bao quanh (không khí) là hằng. Tuy nhiên, xấp xỉ này sẽ không hợp lý khi mật độ khối của chất lưu bao quanh cùng cấp về độ lớn với mật độ khối của luồng chất lưu, thí dụ luồng dầu phun vào nước hoặc luồng khí nóng thổi vào khối khí lạnh. Trong những trường hợp như vậy, gia tốc theo phương thẳng đứng của luồng nhỏ hơn g, cụ thể bằng $(1 - \rho_a/\rho)g$.

Đường kính của luồng có thể tìm được bằng cách áp dụng sự bảo toàn khối lượng cho dòng chảy dừng giữa **1** và **2**:

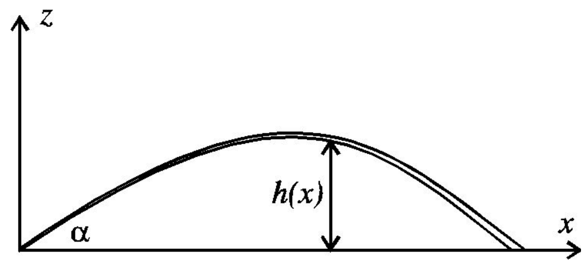
$$\begin{aligned}\rho v_2\left(\frac{\pi d_2^2}{4}\right) &= \rho v_1\left(\frac{\pi d_1^2}{4}\right)\\ d_2 &= d_1\sqrt{\frac{v_1}{v_2}}\\ &= d_1\left[\frac{v_1^2}{v_1^2+2g(z_1-z_2)}\right]^{1/4}.\end{aligned}$$

Chú ý đường kính giảm rất chậm khi $z_1 - z_2$ tăng.

Thí dụ 3.3. Một vòi rồng hướng luồng nước có vận tốc V_1 nghiêng góc α so với phương ngang (hình 3.5).

(a) Thiết lập biểu thức cho độ cao $h(x)$ của luồng so với miệng vòi như là hàm của khoảng cách x theo phương ngang đến miệng vòi.

(b) Tính giá trị cực đại của h, nếu $v_1 = 50\ m/s$ và $\alpha = 45^0$.



Hình 3.5: Thí dụ 3.3.

Giải. (a) Giả sử áp suất không khí là hằng số. Phương trình Bernoulli:

$$\frac{u_1^2+w_1^2}{2}+gz_1=\frac{u^2+w^2}{2}+gz,$$

trong đó u, w là thành phần ngang và đứng của vận tốc. Từ phương trình Euler $Du/Dt = 0$ nên u không thay đổi dọc theo luồng nước, $u = u_1$. Giải phương trình Bernoulli cho w:

$$w=\sqrt{w_1^2-2gh},$$

trong đó $h = z - z_1$. Độ dốc của luồng nước, dh/dx, phải bằng tỉ số w/u:

$$\frac{dh}{dx}=\frac{w}{u}=\frac{\sqrt{w_1^2-2gh}}{u_1}.$$

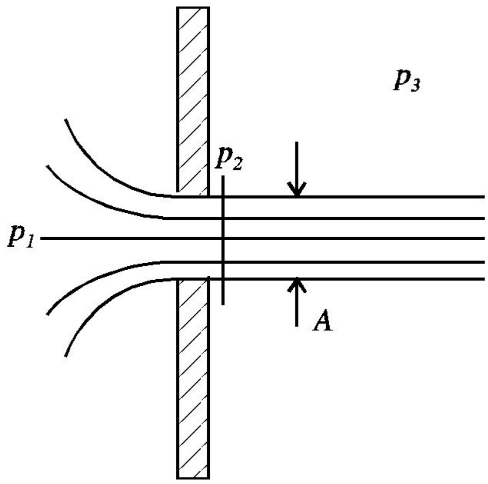
Tích phân phương trình vi phân này cho h từ 0 đến x

$$\begin{aligned}\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{w_1^2 - 2gh}} &= \frac{1}{u_1}\int_0^x dx \\ -\left|\frac{\sqrt{w_1^2 - 2gh}}{g}\right|_0^h &= \frac{x}{u_1} \\ w_1 - \sqrt{w_1^2 - 2gh} &= \frac{gx}{u_1} \\ h(x) &= \frac{w_1 x}{u_1} - \frac{gx^2}{2u_1^2},\end{aligned}$$

trong đó $u_1 = V_1 \cos\alpha$ và $w_1 = V_1 \sin\alpha$. Chú ý rằng luồng nước chạm đất tại $x = 2u_1 w_1/g$.

(b) Giá trị cực trị của h bằng

$$\frac{(50 \times \sin(\pi/4))^2}{2 \times 9,807} = 63,73\ m \diamond$$



Hình 3.6: Dòng chảy không nhớt qua một lỗ.

Dòng chảy qua một lỗ. Chất lưu có thể chảy vào hoặc ra thùng chứa qua một lỗ làm hạn chế tốc độ của dòng. Dòng chảy không nhớt qua các lỗ như vậy chuyển động với vận tốc phụ thuộc vào sự chênh lệch áp suất giữa chất lưu bên trong và bên ngoài bình chứa. hình 3.6 thể hiện một vài đường dòng của dòng chảy dừng, không nhớt, không nén được, qua một lỗ có diện tích A từ thùng bên trái, có áp suất p_1, sang thùng bên phải có áp suất thấp hơn p_3.

Áp suất p_2 tại lỗ thoát nhỏ hơn áp suất trong thùng bên trái làm cho chất lưu tăng tốc khi nó chảy về phía lỗ thoát. Mặt khác, khi chất lưu chảy vào thùng bên phải, nó tiếp tục di chuyển từ trái sang phải với tốc độ không đổi vì không có sự thay đổi nào của áp suất giữa lỗ thoát (áp suất p_2) và chất lưu dừng trong thùng bên phải (áp suất p_3). Từ phương trình Bernoulli cho dòng chảy dừng dọc theo đường dòng trung tâm của dòng chảy giữa một điểm ở xa lỗ thoát, ở đó $v_1 = 0$, và một điểm ở lỗ thoát, ta thấy

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 &= \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \\ \frac{v_2^2}{2} &= \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}}, \qquad (3.11) \end{aligned}$$

ở đây ta đã dùng $p_2 = p_3$. Tốc độ dòng thể tích Q và dòng khối lượng $\dot{m}$ của chất lưu qua lỗ:

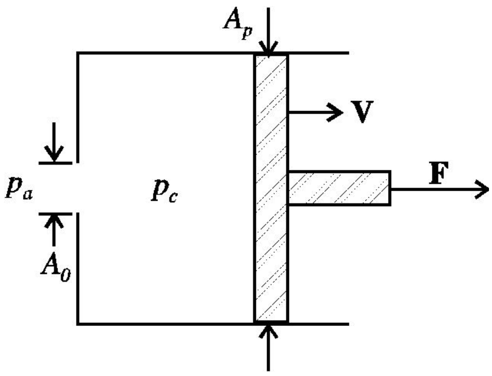
$$\begin{aligned} Q &= A\sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}}, \\ \dot{m} &= A\sqrt{2\rho(p_1 - p_3)} \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Dòng chảy tốc độ hằng vào thùng nhận không tiếp tục một các không hạn định theo hướng xuôi dòng. Các lực nhớt do chất lưu chuyển động và chất lưu đứng yên trong thùng làm cho tia chất lưu trở nên không dừng, vơơ ra thành những xoáy nước và làm tiêu hao động năng của nó. Trong quá trình này không thể xem chất lưu là không nhớt, và vì vậy phương trình Bernoulli không thể áp dụng cho nó. Tuy nhiên, dòng chảy, ngược về phía lỗ thoát, có thể xem là dòng chảy không nhớt.

Thí dụ 3.4. Một ống trụ tròn diện tích A_p được lắp một pittông thụt vào với vận tốc không đổi v nhờ lực F, như hình 3.7. Khi nó bị thụt vào, không khí ở áp suất khí quyển có mật độ khối ρ bị rút vào ống qua một lỗ diện tích A_c, ở đó không khí có áp suất p_c nhỏ hơn áp suất khí quyển p_a.

(a) Giả sử dòng chảy không nén được, thiết lập biểu thức cho hiệu áp suất $p_a - p_c$, lực F và công suất cần thiết để kéo pittông với tại vận tốc v.

(b) Giả sử hình 3.7 là mô hình phù hợp cho dòng không khí vào phổi, tính công suất cần thiết để hít vào $0,5\ l$ không khí trong $2\ s$ qua "lỗ" khí quản có diện tích $A_c = 1\ cm^2$ khi mật độ khối của không khí $\rho = 1,225\ kg/m^3$.



Hình 3.7: Thí dụ 3.4.

Giải. (a) Do sự bảo toàn khối lượng, tốc độ dòng thể tích đi vào ống trụ phải bằng tốc độ gia tăng thể tích của ống trụ:

$$\begin{aligned} A_c\sqrt{2(p_a - p_c)\rho} &= A_p v \\ p_a - p_c &= \frac{\rho}{2}\left(\frac{A_p v}{A_c}\right)^2. \end{aligned}$$

Lực F tác dụng lên pittông bằng hiệu áp suất $p_a - p_c$ qua các mặt của pittông nhân với diện tích pittông A_p

$$F = (p_a - p_c)A_p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{A_p v}{A_c}\right)^2 A_p$$

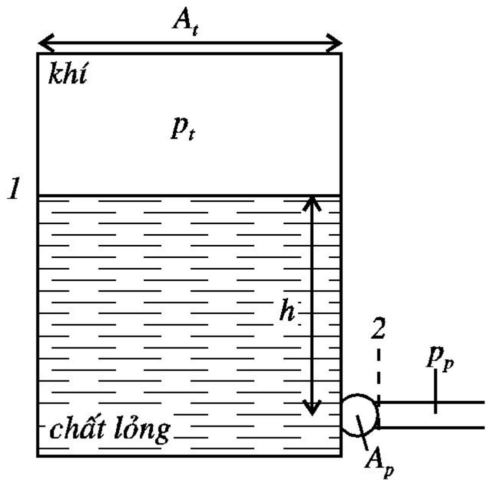
và công suất P là tích của lực F với vận tốc V

$$P = FV = (p_a - p_c)A_p = \frac{\rho}{2}\frac{(A_p v)^3}{A_c^2}.$$

(b) Với phổi người, tốc độ dòng thể tích $A_p v = 0,5/2 = 2,5 \times 10^{-4}\ m^3/s$. Vậy công suất P khi hít vào là

$$P = \frac{1,225 \times 2,5 \times 10^{-4}}{2 \times 1 \times 10^{-4}} = 9,57 \times 10^{-4}\ W \diamond$$

Dòng chảy thoát ra từ thùng chứa chịu nén. Chất lưu thường được chứa trong các bình dưới áp suất lớn hơn áp suất không khí: nước sinh hoạt trong các bể chứa, prôban trong các hệ thống dẫn khí đốt, khí nén trong các phân xưởng, hơi nước trong các nồi hơi, v.v ... Dòng chảy ra khỏi các bình



Hình 3.8: Thùng chứa chất lỏng dưới áp suất của khí nén.

này thường được điều chỉnh nhờ các van thoát chất lưu ở áp suất thấp hơn áp suất mà chất lưu được lưu trữ. Thỉnh thoảng chất lưu bị rò rỉ ra không khí qua những lỗ thủng hoặc khe nứt. Tốc độ thoát của chất lưu dưới những điều kiện này có thể tìm thấy bằng cách áp dụng phương trình Bernoulli.

Xét một chất lỏng chứa trong thùng dưới áp suất p_t giữ bởi lớp khí ở đỉnh thùng, như hình 3.8. Một van ở đáy thùng điều chỉnh dòng chất lỏng thoát ra ống dẫn chất lỏng, ở đó áp suất bằng p_p. Tốc độ dòng chảy qua van v_v có thể tìm được bằng cách áp dụng phương trình Bernoulli cho một đường dòng nối mặt phân cách chất lỏng / khí trong thùng với lỗ van

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1.$$

Thường diện tích A_t của mặt thoáng trong thùng lớn hơn nhiều diện tích của lỗ van A_v. Bởi sự bảo toàn khối lượng, tốc độ v_1 của mặt phân cách khí / chất lỏng nhỏ hơn nhiều vận tốc của chất lỏng qua van

$$\begin{aligned} A_t v_1 &= A_v v_2 \\ \frac{v_1}{v_2} &= \frac{A_v}{A_t} \ll 1. \end{aligned}$$

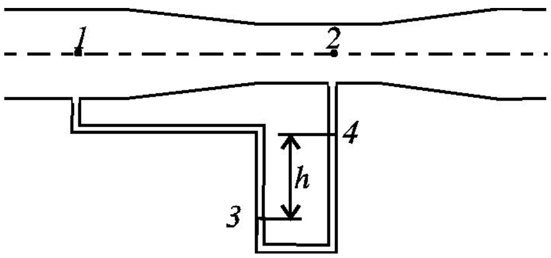
Bỏ qua v_1 so với v_2, phương trình Bernoulli trở thành

$$\begin{aligned} \frac{p_t}{\rho} + gz_1 &= \frac{v_v^2}{2} + \frac{p_p}{\rho} + gz_2 \\ v_v &= \sqrt{2gh + \frac{2(p_t - p_p)}{\rho}}, \end{aligned}$$

trong đó ta đã thay p_1 bằng p_t và $z_1 - z_2$ bằng độ cao h của mặt phân cách chất lỏng / khí trên vị trí van. Chú ý rằng vận tốc dòng chảy qua van được xác định bởi sự sai biệt trong áp suất thủy tĩnh $p_t + \rho g h$ tại mức của van và áp suất p_p trong ống dẫn.

Ở đây ta chỉ xét các dòng chảy dừng. Khi dòng chảy bắt đầu từ trạng thái đứng yên hay thay đổi theo thời gian, số hạng "không dừng" trong phương trình Bernoulli có thể có ý nghĩa.

Đo dòng chảy. Ta có thể đo tốc độ của dòng chảy trong ống dẫn. Bằng cách ép dòng chất lưu chảy qua vật thắt lại gắn bên trong ống, trong khi đó đo sự thay đổi áp suất do sự thắt lại này, ta có thể đo được tốc độ dòng thể tích cũng như dòng khối lượng của dòng chảy.



Hình 3.9: Sơ đồ một venturi kế.

Venturi kế là dụng cụ đo tốc độ dòng thể tích và khối lượng của dòng chảy, sơ đồ được cho trên hình 3.9, gồm một ống có diện tích tiết diện giảm dần từ A_1 ở điểm ngược dòng đến A_2 ở điểm xuôi dòng (diện tích bé nhất). Nếu áp suất được đo tại các vị trí này, thì từ phương trình Bernoulli áp dụng cho đường dòng trung tâm của dòng chảy có thể tính được tốc độ tại điểm ngược dòng theo sự thay đổi áp suất $p_1 - p_2$ và tỉ số vận tốc v_2/v_1:

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 &= \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho((v_2/v_1)^2 - 1)}} \end{aligned}$$

vì $z_1 = z_2$. Sự bảo toàn khối lượng đòi hỏi $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ nên

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho((A_2/A_1)^2 - 1)}}, \\ Q &= A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho((A_2/A_1)^2 - 1)}}, \\ \dot{m} &= A_1 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{(A_2/A_1)^2 - 1}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sự chênh lệch áp suất có thể được đo nhờ một áp kế nối với venturi kế như hình 3.9 và chứa đầy một chất lỏng có mật độ khối ρ_m lớn hơn mật độ khối của chất lưu hoạt động. vì chất lưu chuyển động không tăng tốc tại **1** và **2**, sự phân bố áp suất là thủy tĩnh giữa **1** – **3** và **2** – **4**:

$$\begin{aligned} p_1 + \rho g z_1 &= p_3 + \rho g z_3 \\ p_2 + \rho g z_2 &= p_4 + \rho g z_4. \end{aligned}$$

Trừ vế với vế hai phương trình trên, ta được

$$p_1 - p_2 = p_3 - p_4 + \rho g(z_3 - z_4)$$

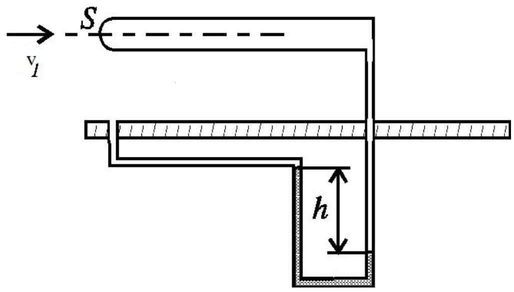
vì $z_1 = z_2$. Với chất lỏng trong áp kế

$$\begin{aligned} p_3 + \rho_m g z_3 &= p_4 + \rho_m g z_4 \\ p_3 - p_4 &= \rho_m g(z_4 - z_3). \end{aligned}$$

Vậy sự chênh lệch áp suất $p_1 - p_2$ trở thành

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho)gh.$$

Dụng cụ dùng để đo vận tốc tại một điểm trong dòng chảy là ống pitot, được minh họa trên hình 3.10. Nó gồm một ống rỗng được đặt thẳng hàng với dòng chảy đến và đóng kín một đầu bằng nút đậy có một lỗ nhỏ ở tâm. Chất lưu bên trong ống đứng yên, trong khi dòng chảy đến vòng quanh nó. Một phần tử chất lưu di chuyển dọc theo đường dòng trùng với trục của ống pitot dừng lại khi nó tiếp cận với đầu ống pitot (ký hiệu S) vì nó phải tách ra và qua cả hai mặt của ống. Khi nó dừng lại trong giây lát, áp suất của nó đạt giá trị p_S, gọi là áp suất đình trệ (stagnation pressure). Áp suất này liên



Hình 3.10: Sơ đồ ống pitot

hệ với vận tốc v_1 của điểm ngược dòng nhờ phương trình Bernoulli

$$\begin{aligned}\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1 &= \frac{v_S^2}{2}+\frac{p_S}{\rho}+gz_S\\ p_S &= p_1+\rho\frac{v_1^2}{2}\\ v_1 &= \sqrt{\frac{2(p_S-p_1)}{\rho}}\end{aligned}$$

vì $v_s = 0$ và $z_1 = z_S$. Áp suất của chất lưu đứng yên bên trong ống pitot bằng với áp suất đình trệ của dòng chảy bên ngoài. Sự chênh lệch áp suất $p_S - p_1$ có thể đo được bằng áp kế được sắp đặt như hình 3.10. Theo phân tích ở trên cho venturi kế, sự chênh lệch áp suất bằng $(\rho_m - \rho)gh$ và tốc độ cua dòng chảy đến là

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_m-\rho)gh}{\rho}}.$$

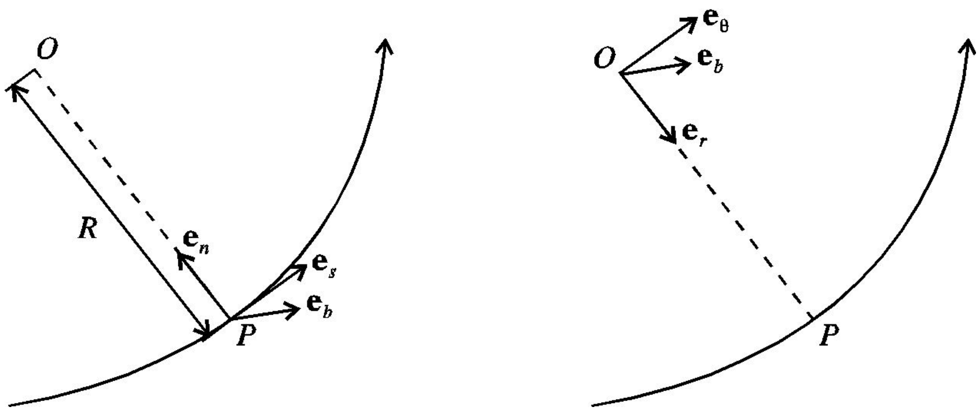
Để đo tốc độ dòng thể tích Q trong ống dẫn, ống pitot có thể di chuyển đến mọi vị trí bên trong tiết diện ngang của dòng, và tích phân vận tốc đo được

$$Q = \int v(x,y)dxdy.$$

3.4 Phương trình Euler trong tọa độ đường dòng

Đôi khi ta dùng hệ tọa độ cong trực giao mà các hướng địa phương được xác định bởi một đường dòng của dòng chảy. Tọa độ như vậy gọi là tọa độ đường dòng (streamline coordinate). Ba hướng đôi một trực giao tại một điểm trong dòng được xác định bởi hướng của tiếp tuyến (tangent), pháp tuyến (normal) và lưỡng pháp tuyến (binormal) với đường dòng đi qua điểm đó. Điều này được minh họa trên hình 3.11 cho một điểm P trên một đường dòng, trong đó các vectơ đơn vị của ba hướng được ký hiệu lần lượt là $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$. Pháp vectơ đơn vị $\mathbf{e}_n$ hướng về tâm cong (center of curvature) O của đường dòng tại điểm P, khoảng cách OP là bán kính cong (radius of curvature) R. Để phát triển phương trình Euler cho hệ tọa độ này, ta sẽ nhúng hệ tọa độ trụ với tâm tại O và với trục z cùng hướng với lưỡng pháp tuyến $\mathbf{e}_b$. Điểm P nằm ở bán kính $r = R$. Các vectơ đơn vị của tọa độ trụ liên hệ với các vectơ đơn vị đường dòng bởi $\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_b$, các thành phần vận tốc bởi $v_r = v_n$, $v_\theta = v$, $v_z = v_b$, và các đạo hàm riêng bởi $\partial/\partial r = -\partial/\partial n$, $\partial/r\partial\theta = \partial/\partial s$, $\partial/\partial z = \partial/\partial b$. Thay thế các giá trị này vào biểu thức của gia tốc trong hệ tọa độ trụ và chú ý rằng $v_n = 0$ và $v_b = 0$ tại mọi điểm của đường dòng, gia tốc của một chất điểm trong tọa độ đường dòng:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(-\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{R}\right)\mathbf{e}_n + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right)\mathbf{e}_s + \left(\frac{\partial v_b}{\partial t}\right)\mathbf{e}_b.$$



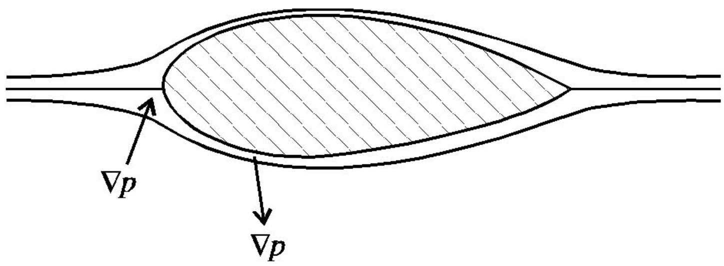
Hình 3.11: Vectơ đơn vị của tọa độ đường dòng.

Trong trường hợp dòng chảy dừng trong tọa độ đường dòng, phương trình Euler có dạng đặc biệt đơn giản:

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{R} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_n = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p*}{\partial n}\\ v\frac{\partial v}{\partial s} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_s = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p*}{\partial s}\\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_b = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p*}{\partial b}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Các phương trình này có một số khía cạnh đáng lưu ý. Phương trình thứ nhất của (3.14), biểu diễn chuyển động theo hướng pháp tuyến của đường dòng, chứng tỏ rằng lực thực theo hướng $\mathbf{e}_n$ gây ra gia tốc ly tâm v^2/R. Phương trình thứ hai, cho chuyển động dọc theo đường dòng, có thể được tích phân để nhận được phương trình Bernoulli cho dòng chảy dừng. Phương trình thứ ba mô tả chuyển động theo hướng lưỡng pháp tuyến cho phân bố áp suất theo hướng này vì gia tốc theo hướng này bằng không.

Phương trình chuyển động theo hướng pháp tuyến cho phép ta xác định cách thức áp suất thay đổi trong dòng chảy dừng nếu ta biết hình dạng của các đường dòng. Nếu gia tốc trọng trường không có thành phần theo hướng pháp tuyến ($\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_n$), thì áp suất giảm theo hướng của tâm cong của đường dòng. Chẳng hạn, xét dòng chảy dừng qua một vật thể như hình 3.12. Ở mặt trước vật, các đường dòng rời xa vật, và vì vậy áp suất ở đó phải cao hơn áp suất đều ở xa vật. Mặt khác, ở cạnh của vật, các đường dòng chạy theo dạng lồi của vật, và áp suất ở cạnh phải nhỏ hơn ở xa. Trong khi mô tả định tính chính xác sự phân bố áp suất trong dòng chảy, từ phương trình Euler ở dạng đường dòng lại không dễ dàng tính toán áp suất trong trường dòng trừ phi nó có dạng thật đơn giản.



Hình 3.12: Sơ đồ các đường dòng gần vật. Hướng của gradient áp suất phụ thuộc độ cong.

3.5 Dòng chảy không nhớt trong hệ quy chiếu không quán tính

Khi phân tích các dòng chảy, thỉnh thoảng việc dùng hệ tọa độ gắn với một hệ quy chiếu không quán tính lại rất tiện. Các thí dụ về hệ quy chiếu không quán tính là hệ quy chiếu gắn với máy nâng tên lửa chuyển động với gia tốc hướng lên từ bệ đặt tên lửa hoặc hệ quy chiếu quay gắn vào rôto của máy turbin. Trong những hệ quy chiếu như vậy, biểu thức cho phương trình Euler cần được hiệu chỉnh bằng cách tính đến chuyển động có gia tốc của hệ quy chiếu.

Thông thường ta xem hệ quy chiếu gắn với phòng thí nghiệm là hệ quy chiếu quán tính khi mô tả chuyển động của các chất lưu trong các thí nghiệm. Tuy nhiên, vì trái đất quay chung quanh trục của nó, nên hệ quy chiếu gắn với phòng thí nghiệm không chính xác là hệ quy chiếu quán tính, mặc dù nó có thể xem như vậy đối với các chất lưu có kích thước nhỏ và thang thời gian của các hệ kỹ thuật. Với các dòng chảy có kích thước lớn mà thay đổi chậm theo thời gian, chẳng hạn như khí quyển hay đại dương, cần phải tính đến tốc độ quay của trái đất khi dùng hệ quy chiếu gắn với trái đất. Nếu vận tốc góc của hệ quy chiếu quay là đủ lớn, việc dùng hệ quy chiếu không quán tính cần phải hiệu chỉnh.

Trong mục này, ta sẽ hiệu chỉnh các phương trình của dòng chảy không nhớt trong trường hợp hệ quy chiếu là không quán tính cho hai trường hợp đơn giản.

Hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến có gia tốc

Xét hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến có gia tốc đối với hệ quy chiếu quán tính. Ký hiệu vị trí và vận tốc của phần tử chất lưu trong hệ quy chiếu không quán tính là $\tilde{\mathbf{r}}$ và $\tilde{\mathbf{v}}$, tương ứng, để phân biệt chúng với $\mathbf{r}$ và $\mathbf{v}$ trong hệ quy chiếu quán tính. Ký hiệu vận tốc của hệ quy chiếu không quán tính bởi $\mathbf{v}_{ni}$, vận tốc của phần tử chất lưu trong hai hệ quy chiếu liên hệ với nhau bởi

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}_{ni}(t) + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{r}},t). \tag{3.15}$$

Để có liên hệ gia tốc của phần tử chất lưu ta lấy đạo hàm hai vế phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned}\frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{v}_{ni}}{dt} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\bigtriangledown}\right)\tilde{\mathbf{v}} & (3.16)\\ &= \mathbf{a}_{ni}(t) + \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{D}t}, & (3.17)\end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{a}_{ni}(t)$ là gia tốc của hệ quy chiếu không quán tính đối với hệ quy chiếu quán tính và đạo hàm vật chất $\tilde{D}/\tilde{D}t$ trong hệ quy chiếu không quán tính là

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}. \tag{3.18}$$

Phương trình Euler. Phương trình Euler bây giờ trở thành

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_{ni}(t) + \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{D}t} &= -\frac{1}{\rho}\tilde{\bigtriangledown} p + \mathbf{g} \\
\frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{D}t} &= -\frac{1}{\rho}\tilde{\bigtriangledown} p + \mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}(t). \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Ảnh hưởng thực của hệ quy chiếu có gia tốc là gia tốc trọng trường thay đổi một lượng là $-\mathbf{a}_{ni}(t)$. Đó là sự gia tăng mà ta cảm thấy khi, trong một thang máy, ta cảm thấy sự gia tăng hoặc giảm đi trọng lượng. Nếu một ly nước rơi tự do, gia tốc của ly nước $\mathbf{a}_{ni}(t)$ bằng $\mathbf{g}$, và vì không có chuyển động tương đối của nước đối với ly ($\tilde{\mathbf{v}} = 0$), phương trình Euler được thỏa nếu áp suất trong là đều ($\tilde{\bigtriangledown} p = \mathbf{0}$).

Phương trình Bernoulli. Để thiết lập phương trình Bernoulli cho hệ quy chiếu không quán tính ta tích phân phương trình Euler dọc theo một đường dòng trong hệ quy chiếu không quán tính. Với trường hợp đặc biệt mật độ khối là hằng dọc theo một đường dòng, phương trình tương ứng với (3.9) là

$$
\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot d\tilde{\mathbf{s}} + \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_2^2}{2} + \frac{p_2}{2} - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2 \right) \\
&\qquad - \left(\frac{\tilde{\mathbf{v}}_1^2}{2} + \frac{p_1}{2} - (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{ni}) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_1 \right) = 0. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

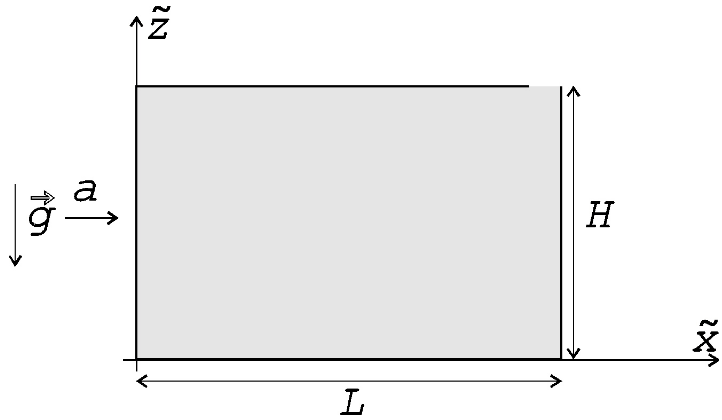
Thí dụ 3.5. Một xe tải, bị đụng từ phía sau với gia tốc $2g$. Trong bồn của nó, chứa đầy xăng có mật độ khối $\rho = 8,6 \times 10^2\ kg/m^3$, được mở ra không khí tại góc trên phía trước, như hình vẽ. Bồn dài $L = 1\ m$, cao $H = 0,6\ m$. Hãy tính vị trí và giá trị áp suất cực đại trong bồn.

Giải. Vì không có chuyển động tương đối trong bồn ($\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$), phương trình Bernoulli (3.20) cho hệ quy chiếu có gia tốc

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{\rho} + (\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in}) \cdot \tilde{\mathbf{r}} &= \frac{p_a}{\rho} - \mathbf{a}_{in}) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_1, \\
p &= p_a - \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}),
\end{aligned}
$$

trong đó $\tilde{\mathbf{r}}_1 = L\mathbf{e}_x + H\mathbf{e}_z$ là vị trí bồn mở ra không khí. Áp suất sẽ là cực đại khi $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, nghĩa là tại góc dưới bên trái của bồn ($\tilde{x} = \tilde{z} = 0$). Chú ý rằng $\mathbf{g} - \mathbf{a}_{in} = -g\mathbf{e}_z - 2g\mathbf{e}_x$, áp suất cực đại là

$$
\begin{aligned}
p &= p_a - \rho(-g\mathbf{e}_z - 2g\mathbf{e}_x) \cdot (L\mathbf{e}_x + H\mathbf{e}_z) \\
&= p_a + \rho(gH + 2gL) \\
&= p_a + (8,6 \times 10^2)(9,807)(0,6 + 2 \times 1,0) \\
&= p_a + 2,207 \times 10^4\ Pa \ \diamond
\end{aligned}
$$



Hình 3.13: Thí dụ 3.5.

Hệ quy chiếu quay đều

Ta chọn hệ tọa độ trụ (r, θ, z) cố định trong hệ quy chiếu quán tính và hệ tọa độ trụ khác $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{z})$ cố định trong hệ quy chiếu không quán tính, chuyển động quay đối với hệ quy chiếu quán tính. Quan hệ giữa các hệ tọa độ là

$$r = \tilde{r};\ \theta = \tilde{\theta} + \Omega t;\ z = \tilde{z}$$
$$v_r = \tilde{v}_r;\ v_\theta = \tilde{v}_\theta + \Omega\tilde{r};\ v_z = \tilde{v}_z \quad (\text{hay } \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \tag{3.21}$$

trong đó Ω là độ lớn của vectơ vận tốc góc $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ trong chuyển động quay của hệ quy chiếu không quán tính quanh trục z.

Ta có sau một số tính toán (?)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{D}t} - \Omega^2\tilde{r}\mathbf{e}_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}}. \tag{3.22}$$

Số hạng thứ hai bên vế phải của phương trình (3.22) là gia tốc hướng tâm quen thuộc của phần tử di chuyển với vận tốc tiếp $\Omega\tilde{r}$ tại bán kính $\tilde{r}$ quanh trục $\tilde{z}$. Số hạng thứ ba là gia tốc Coriolis mà hướng của nó vuông góc với cả vận tốc $\tilde{\mathbf{v}}$ và vận tốc góc $\boldsymbol{\Omega}$.

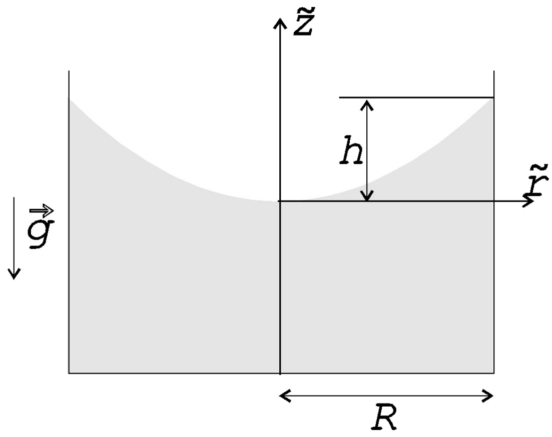
Phương trình Euler. Thay phương trình (3.22) vào phương trình (3.5), ta tìm được phương trình Euler cho hệ quy chiếu không quán tính

$$\frac{\tilde{D}\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{D}t} = -\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}p + \mathbf{g} + \Omega^2\tilde{r}\mathbf{e}_r - 2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}}. \tag{3.23}$$

Phương trình Bernoulli. Ta có thể lấy tích phân phương trình Euler, (3.23), dọc theo một đường dòng trong hệ quy chiếu không quán tính bởi chú ý rằng số hạng $2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{v}}$ không tham gia vào tích phân vì nó vuông góc với $d\tilde{\mathbf{s}}$ và số hạng gia tốc hướng tâm $\Omega^2 \tilde{r} \mathbf{e}_r \cdot d\tilde{\mathbf{s}} = \Omega^2 \tilde{r} d\tilde{r}$. Với trường hợp mật độ khối là hằng dọc theo đường dòng, phương trình Bernoulli có dạng

$$\int_1^2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot d\tilde{\mathbf{s}} + \left(\frac{\tilde{v}_2^2}{2} + \frac{p_2}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2 - \frac{(\Omega \tilde{r}_2)^2}{2} \right) - \left(\frac{\tilde{v}_1^2}{2} + \frac{p_1}{2} - \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_1 - \frac{(\Omega \tilde{r}_1)^2}{2} \right) = 0. \tag{3.24}$$

Thí dụ 3.6. Một bình chứa nước bán kính $R = 5\,cm$, được đặt trên một bàn xoay. Sau khi xoay đạt tốc độ không đổi 33 vòng trên phút trong một khoảng thời gian dài, nước không chuyển động ($\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$) trong hệ quy chiếu quay và mặt nước có hình dáng một paraboloid tròn xoay như hình 3.14, với mực nước tại gờ cao hơn tại tậm là h. Tính độ cao h.



Hình 3.14: Thí dụ 3.6.

Giải. Dùng phương trình Bernoulli (3.24) và lấy điểm 2 là $\tilde{r} = 0$, $\tilde{z} = 0$ và điểm 1 là $\tilde{r} = R$, $\tilde{z} = h$, trong khi chú ý rằng $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ và cả p_1 lẫn p_2 bằng áp suất không khí, ta tìm được

$$\begin{aligned} g\tilde{z}_2 - \left(g\tilde{z}_1 - \frac{(\Omega R)^2}{2} \right) &= 0 \\ h &= \frac{(\Omega R)^2}{2g} \\ &= \frac{((33 \times 2\pi : 60) \times 5,0 \times 10^{-2})^2}{2 \times 9,807} \\ &= 1,522 \times 10^{-3}\, m \diamond \end{aligned}$$

3.6 Các dòng chảy đặc biệt

Các tích phân của phương trình Euler giống như phương trình Bernoulli có thể được thiết lập cho những dòng chảy có các hạn chế nào đó. Trong một số bài toán việc dùng các tích phân như vậy thay cho phương trình Bernoulli có thể thích hợp hơn.

Dòng chảy áp hướng (barotropic flow)

Trong dòng chảy áp hướng mật độ khối ρ là hàm chỉ của áp suất p, nghĩa là $\rho = \rho(p)$. Với các chất lưu mà ta thường gặp, dòng chảy sẽ là áp hướng nếu entropy $\hat{s}$ là hằng dọc theo một đường dòng. Với dòng chảy áp hướng, tích phân thứ ba của phương trình (3.8) có thể đáng giá bằng cách chú ý rằng định luật thứ hai nhiệt động lực đòi hỏi

$$\bigtriangledown \hat{h} = \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + T \bigtriangledown \hat{s}. \tag{3.25}$$

Như vậy phương trình thứ ba của (3.8), đánh giá dọc theo một đường dòng, trở thành

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} \bigtriangledown p \right) \cdot \mathbf{s} &= \int_1^2 T \bigtriangledown \hat{h} \cdot \mathbf{s} - \int_1^2 T \bigtriangledown \hat{s} \cdot \mathbf{s} \\ &= \hat{h}_2 - \hat{h}_1 \end{aligned}$$

bằng cách dùng phương trình (3.25) và chú ý rằng $\bigtriangledown \hat{s} \cdot \mathbf{s} = 0$ vì $\hat{s}$ không thay đổi dọc theo đường dòng. Vậy biến đổi của phương trình (3.9) cho dòng chảy áp hướng tương ứng với phương trình Bernoulli là

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{s} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \hat{h}_2 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2 \right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \hat{h}_1 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1 \right) = 0. \tag{3.26}$$

Phương trình này hữu ích cho dòng chảy dừng, không nhớt, nén được vì số hạng đầu khó đánh giá khi dòng chảy không dừng.

Dòng chảy không xoáy (irrotational flow)

Dòng chảy không xoáy là dòng chảy mà $\bigtriangledown \times \mathbf{v}$ bằng không ở mọi nơi trong trường dòng chảy. Sau này, ta sẽ chứng minh rằng dòng chảy không nén được là dòng chảy không xoáy. Với mục đích hiện nay, ta sẽ xét dòng chảy mật độ khối hằng ($\bigtriangledown \rho = 0$) mà là không xoáy ($\bigtriangledown \times \mathbf{v} = 0$).

Từ phương trình (3.8), vế phải bằng không với dòng chảy không xoáy. Với dòng chảy mật độ khối hằng, tích phân chứa gradient áp suất có thể tích phân dọc theo đường cong bất kỳ, không cần phải là đường dòng. Vậy phương trình (3.8) có dạng

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{c} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1\right) = 0. \quad (3.27)$$

Chú ý rằng phương trình này tương đương với phương trình Bernoulli áp dụng dọc theo một đường bất kỳ nằm trong dòng chảy. Trong dòng chảy dừng, điều này có nghĩa là tổng $v^2/2 + p/g - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ có cùng giá trị tại mọi điểm của trường dòng. Vậy hiểu biết về trường vận tốc $\mathbf{v}$ cho phép ta tính được trường áp suất nhưng không ngược lại.

Dòng chảy trên mặt Bernoulli

Mặt Bernoulli là mặt trong dòng tại mọi điểm mặt tiếp xúc với nó chứa vectơ $\mathbf{v}$ và $\bigtriangledown \times \mathbf{v}$ tại điểm tiếp xúc. Một đường dòng nằm trong mặt Bernoulli khi là một "đường dòng" của trường vectơ, $\bigtriangledown \times \mathbf{v}$. Vectơ tích $\mathbf{v} \times (\bigtriangledown \times \mathbf{v})$ có hướng pháp tuyến với mặt Bernoulli. Nếu ta chọn đường cong C của phương trình (3.8) nằm trong mặt Bernoulli, thì tích vô hướng trong tích phân ở vế phải của (3.8) bằng không. Ký hiệu phần tử đường của đường cong như vậy bởi $d\mathbf{b}$, phương trình (3.8) có dạng

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{b} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1\right) = 0. \quad (3.28)$$

Với dòng chảy dừng, tổng $v^2/2 + p/g - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ có cùng giá trị tại mọi điểm trên mặt Bernoulli. Phương trình (3.28) đúng giữa các điểm nằm trên mặt Bernoulli, nhưng không nhất thiết nằm trên cùng một đường dòng, ngay cả khi dòng chảy là không xoáy.

Dòng chảy Beltrami

Dòng chảy Beltrami là dòng chảy mà $\mathbf{v}$ và $\bigtriangledown \times \mathbf{v}$ cùng phương, hay $\mathbf{v} \times (\bigtriangledown \times \mathbf{v}) = 0$, tại mọi điểm. Vế phải của phương trình (3.8) bằng không với bất kỳ đường cong C. Nếu mật độ khối ρ là hằng, thì phương trình (3.8) có dạng

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{c} + \left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_2\right) - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_1\right) = 0. \quad (3.29)$$

Dù là dòng chảy không xoáy, tổng $V^2/2 + p/g - \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$ là hằng trong toàn bộ dòng chảy Beltrami dừng. Dòng chảy Beltrami không thường gặp và chỉ tồn tại trong những trường hợp đặc biệt.

Mục lục

Dẫn nhập **1**
Chất lưu 1
Giả thiết liên tục và cơ học môi trường liên tục 2
Lực thể tích và lực mặt 2

1 Thủy tĩnh học **5**
1.1 Ứng suất trong chất lưu 5
1.2 Áp suất trong chất lưu tĩnh 6
1.3 Đo áp suất 10
1.4 Áp lực trên bề mặt vật rắn 13
1.5 Áp lực trên các vật nhúng trong chất lưu 18
1.5.1 Nguyên lý Archimedes 18
1.5.2 Cân bằng của vật chìm trong chất lưu 20
1.6 Chất lưu phân lớp 25
1.7 Hiện tượng bề mặt của chất lỏng 29
1.7.1 Cơ chế phân tử 29
1.7.2 Sự căng mặt ngoài 31
1.7.3 Sự dính ướt - Hiện tượng mao dẫn 32

2 Sự bảo toàn khối lượng **35**
2.1 Động học chất lưu 35
2.2 Tính nén được của chất lưu 42
2.3 Nguyên lý bảo toàn khối lượng 47
2.4 Các thể hiện của nguyên lý bảo toàn khối lượng 49
2.5 Phương pháp tính cho cơ học chất lưu 54
2.5.1 Phương pháp Euler 54

3 Dòng chảy không nhớt **58**
3.1 Tính nhớt 58
3.2 Phương trình Euler 63

3.3 Phương trình Bernoulli 65
3.4 Phương trình Euler trong tọa độ đường dòng 76
3.5 Dòng chảy không nhớt trong hệ quy chiếu không quán tính . . 78
3.6 Các dòng chảy đặc biệt 83
Tài liệu tham khảo 86

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong, *Nhập môn cơ học*, NXB Đại học Quốc gia TP. HCM,2003.

[2] Pozrikidis C., *FLUID DYNAMICS - Theory, Computation, and Numerical Simulation*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[3] Prieve D.C, *A Course in Fluid Mechanics with Vector Field Theory*, Department of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Fall, 2000.