TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHÊN
KHOA ĐIỆN TỬ - ViỄN THÔNG

Bài 3: Điều chế góc

Đặng Lê Khoa

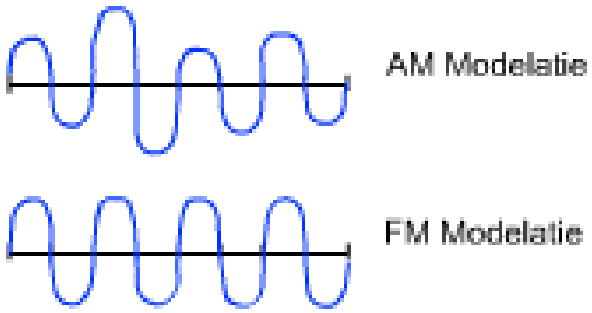
Bộ môn Viễn thông – Mạng

Nội dung

- Điều biến góc
- Điều biến FM
  - Nguyên lý
  - Tần phổ tín hiệu
- Tách sóng FM
  - Kỳ tần
  - Vòng khóa pha (PLL)
- Mạch điện tử điều biến và tách sóng FM

FM Basics

- VHF (30M-300M) quản bá chất lượng cao
- Wideband FM, (FM TV), narrow band FM (two-way radio)
- 1933 điều chế FM và góc được đề xuất bởi Armstrong, nhưng thành công vào năm 1949.
- Số: Frequency Shift Key (FSK), Phase Shift Key (BPSK, QPSK, 8PSK,…)
- AM/FM: Sóng ngang/Sóng dọc



Angle Modulation vs. AM

- Tóm tắt: tính chất của điều chế AM
  - Điều chế biên độ là tuyến tính
    - *Chỉ di chuyển sang một băng tần mới, dạng phổ không thay đổi. Không có tần số mới được tạo ra*
  - Phổ tần: S(f) được chuyển thành M(f)
  - Băng thông $\leq 2W$
- Tính chất của điều chế góc
  - Chúng không tuyến tính
    - *Dạng phổ tần thay đổi, tạo ra tần số mới*
  - S(f) không chuyển thành M(f)
  - Băng thông thường lớn hơn 2W

Angle Modulation Application

- Tại sao cần điều chế góc?
  - Giảm nhiễu tốt hơn
  - Cải thiện chất lượng hệ thống
- Bất lợi
  - Hiệu quả băng thông thấp
  - Thực hiện phức tạp
- Ứng dụng
  - Radio quảng bá FM
  - Tín hiệu âm thanh trong TV
  - Bộ đàm
  - Điện thoại tế bào
  - Thông tin Vi ba và vệ tinh

Instantaneous Frequency

•Điều chế góc có 2 dạng

- Frequency modulation (FM): thông tin được biểu diễn theo sự thanh đổi của tần số tức thời của sóng mang

- Phase modulation (PM): thông tin được biểu diễn theo sự thanh đổi của pha tức thời của sóng mang

$$s(t) = A_c \cos\left[\theta_i(t)\right],$$
where A_c : carrier amplitude, $\theta_i(t)$: angle (phase)

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

where $\phi(t)$ is a function of message signal $m(t)$.

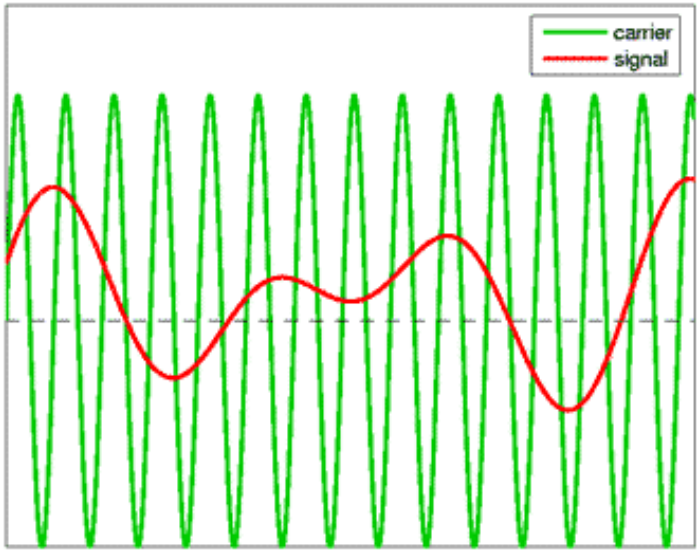
Phase Modulation

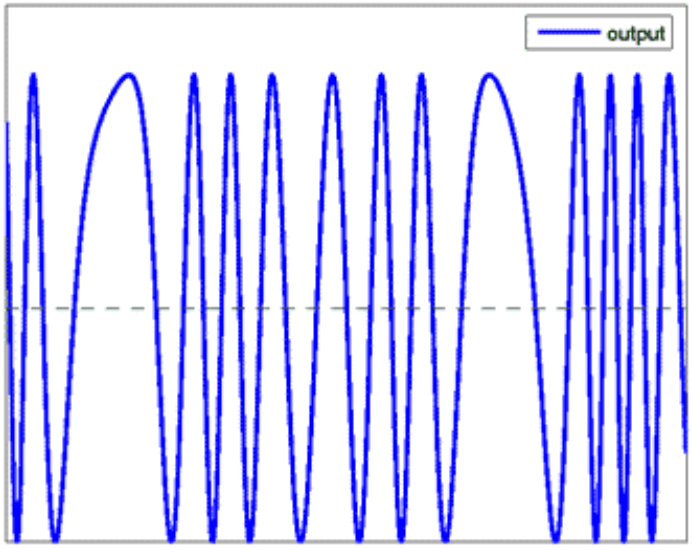
- PM (phase modulation) signal

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + k_p m(t)\right]$$

$$\phi(t) = k_p m(t), \quad k_p : \text{phase sensitivity}$$

$$\text{instantanous frequency } f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{dm(t)}{dt}$$





Frequency Modulation

- FM (frequency modulation) signal

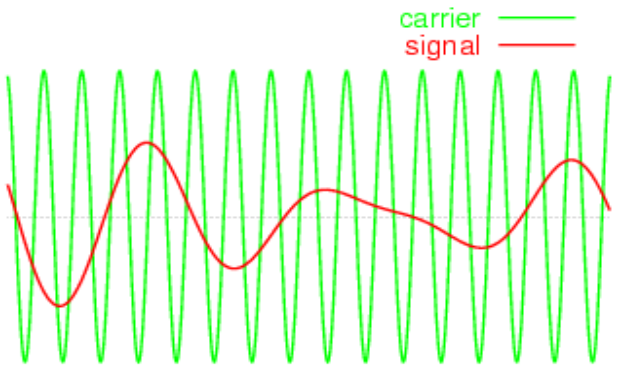
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

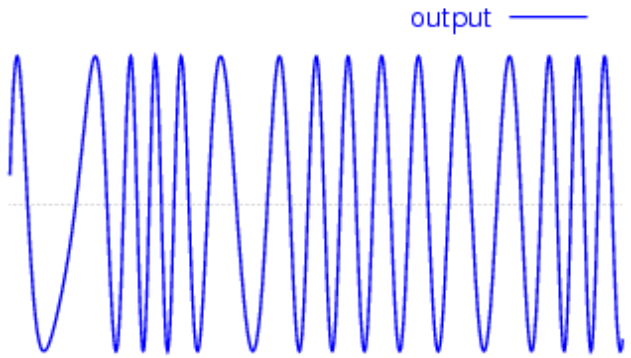
k_f : frequency sensitivity

instantanous frequency $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$

angle $\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau)d\tau$ (Assume zero initial phase)

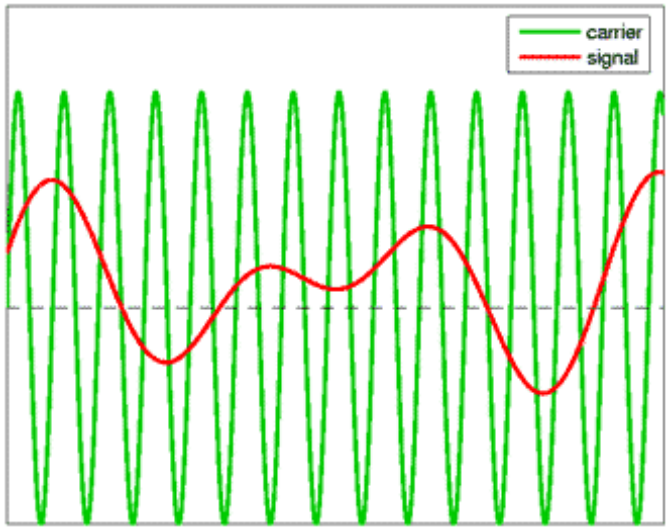
$$= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau$$

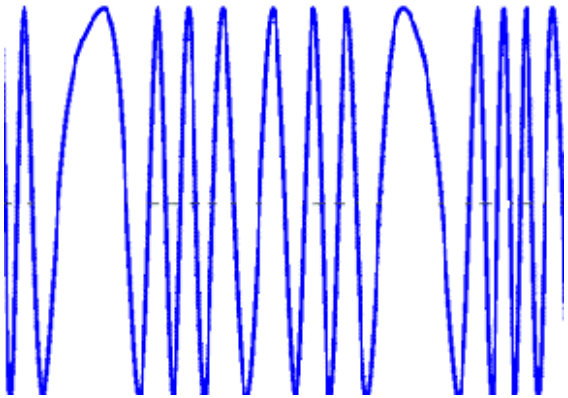


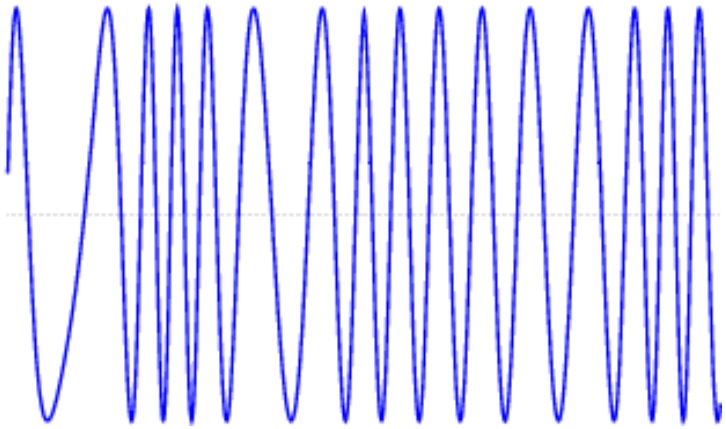


FM Characteristics

- Đặc tín của tín hiệu FM
  - Điểm zero không thường xuyên
  - Đường bao là hằng số
  - Tín hiệu FM và PM tương tự

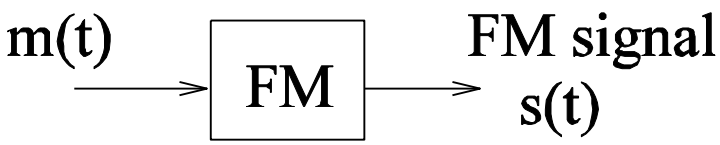


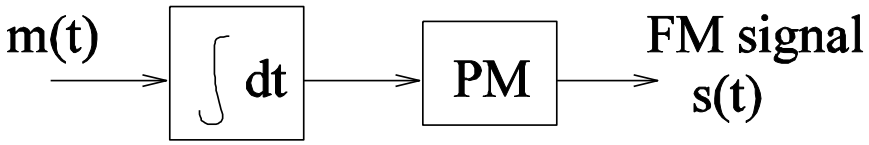




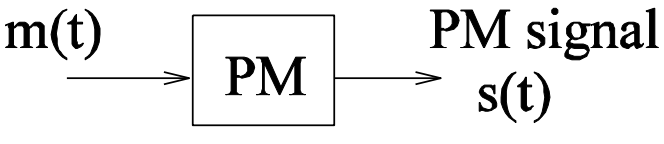
Relations between FM and PM

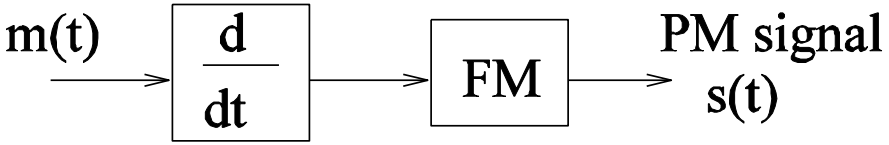
$$\text{FM of } m(t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{PM of } \int_0^t m(\tau)d\tau$$





$$\text{PM of } m(t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{FM of } \frac{dm(t)}{dt}$$





FM/PM Example (Time)

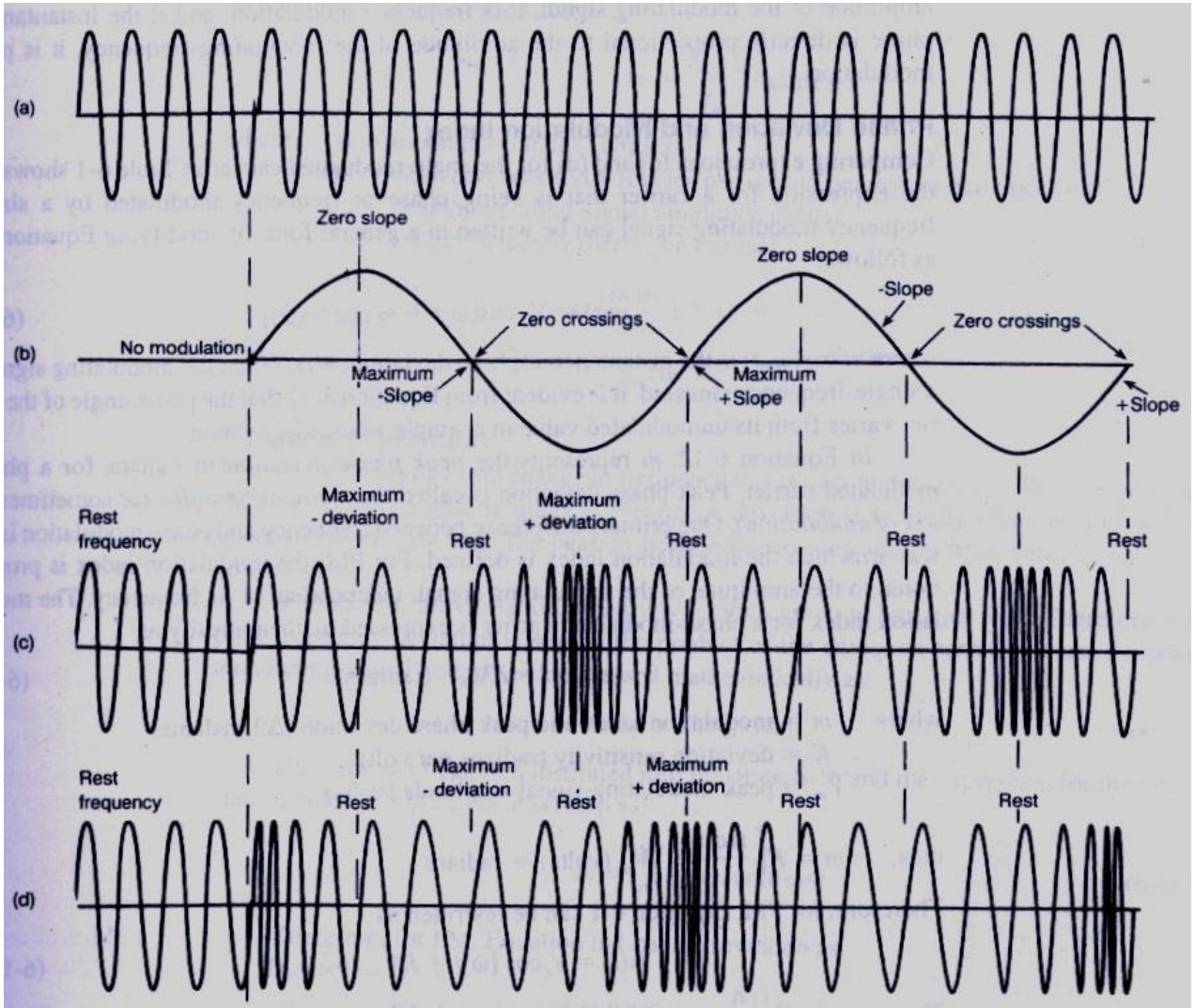
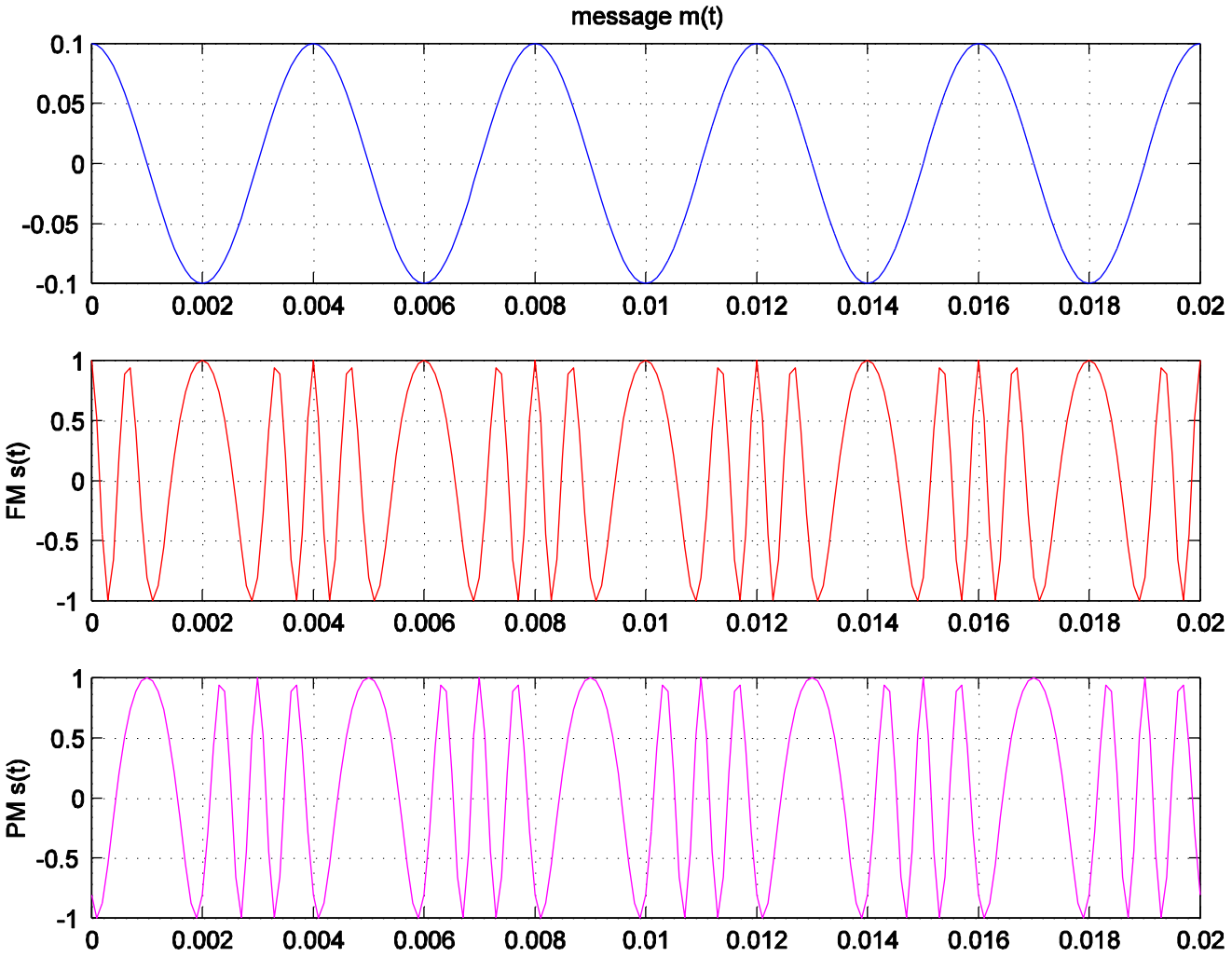
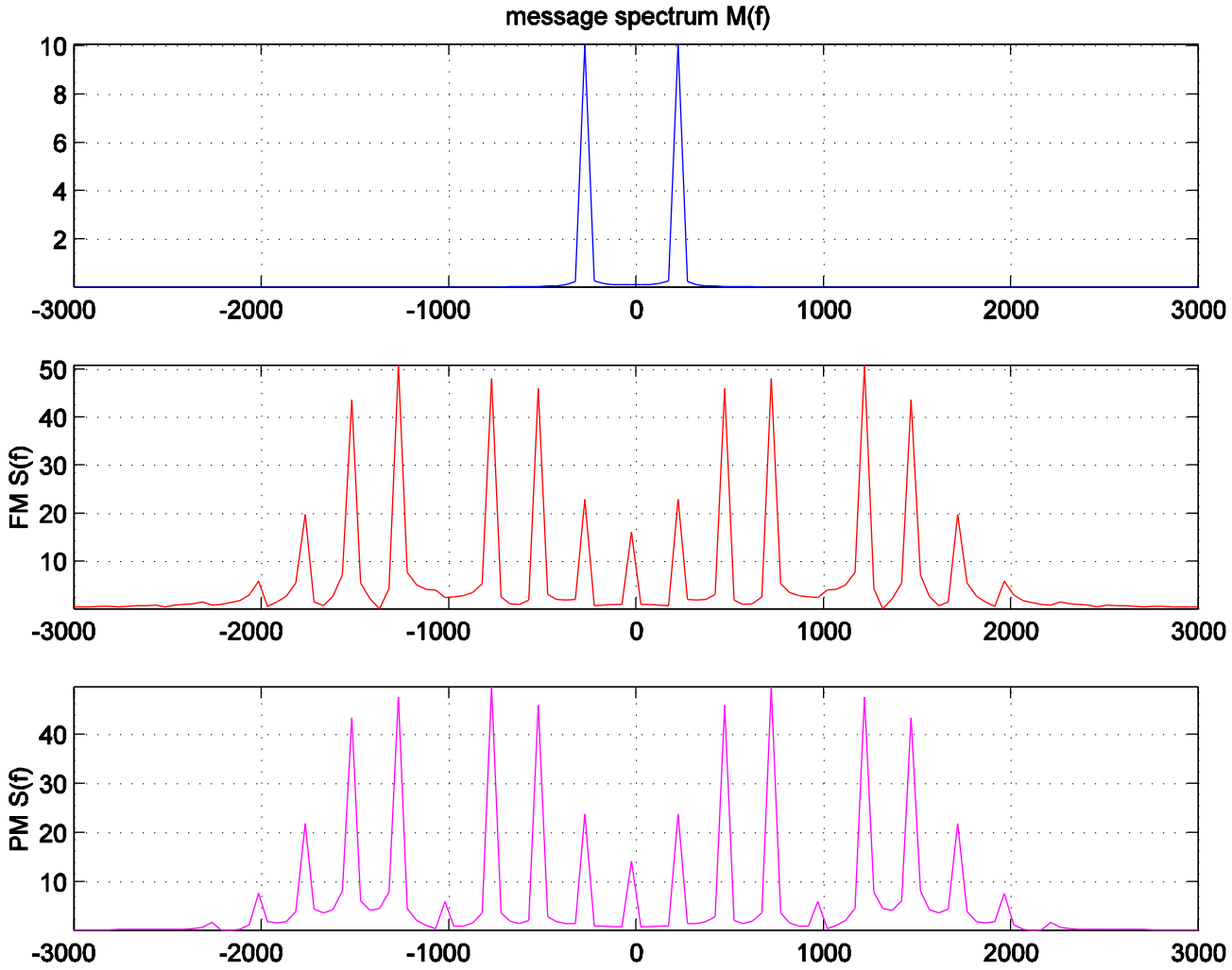


FIGURE 6-3 Phase and frequency modulation of a sine-wave carrier by a sine-wave signal: (a) unmodulated carrier; (b) modulating signal; (c) frequency-modulated wave; (d) phase-modulated wave.

FM/PM Example (Time)



FM/PM Example (Frequency)



Matlab

```
fc=1000; Ac=1;  % carrier frequency (Hz) and magnitude
fm=250; Am=0.1;   % message frequency (Hz) and magnitude
k=4;           % modulation parameter

% generage single tone message signal
t=0:1/10000:0.02;      % time with sampling at 10KHz
mt=Am*cos(2*pi*fm*t);   % message signal

% Phase modulation
sp=Ac*cos(2*pi*fc*t+2*pi*k*mt);

% Frequency modulation
dmt=Am*sin(2*pi*fm*t);              % integration
sf=Ac*cos(2*pi*fc*t+2*pi*k*dmt);    % PM

% Plot the signal
subplot(311), plot(t,mt,'b'), grid, title('message m(t)')
subplot(312), plot(t,sf,'r'), grid, ylabel('FM s(t)')
subplot(313), plot(t,sp,'m'), grid, ylabel('PM s(t)')
```

Matlab

```
% spectrum
w=((0:length(t)-1)/length(t)-0.5)*10000;
Pm=abs(fftshift(fft(mt)));     % spectrum of message
Pp=abs(fftshift(fft(sp)));     % spectrum of PM signal
Pf=abs(fftshift(fft(sf)));     % spectrum of FM signal

% plot the spectrums
figure(2)
subplot(311), plot(w,Pm,'b'),
axis([-3000 3000 min(Pm) max(Pm)]), grid, title('message spectrum M(f)'),
subplot(312), plot(w,Pf,'r'),
axis([-3000 3000 min(Pf) max(Pf)]), grid, ylabel('FM S(f)')
subplot(313), plot(w,Pp,'m'),
axis([-3000 3000 min(Pp) max(Pp)]), grid, ylabel('PM S(f)')
```

Frequency Modulation

- FM (frequency modulation) signal

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

k_f : frequency sensitivity

instantanous frequency $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$

angle $\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau)d\tau$ (Assume zero initial phase)

$$= 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau$$

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \qquad f_i = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\left[2\pi f_c t\right]}{dt} + \frac{1}{2\pi}\frac{d\left[2\pi k_f \int_0^t A_m \cos(2\pi f_m \tau)d\tau\right]}{dt}$$

$$= f_c + \frac{1}{2\pi} 2\pi k_f \left[A_m \cos(2\pi f_m \tau)\right]\Big|_{\text{Let } \tau = t}$$

Example

Consider m(t)- a square wave- as shown. The FM wave for this m(t) is shown below.

$$\varphi_{FM}(t) = A\cos(\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)d\lambda).$$

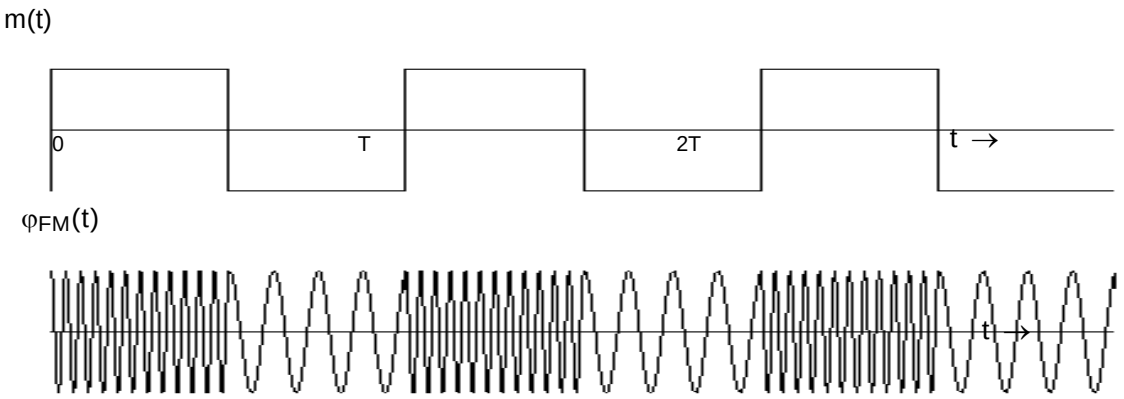
Assume m(t) starts at $t = 0$. For $0 \le t \le \frac{T}{2}$ $\quad m(t) = 1$, $\int_0^t m(\lambda)d\lambda = t$ and

for $\frac{T}{2} \le t \le T$ $\quad m(t) = -1$, $\int_0^t m(\lambda)d\lambda = \int_0^{\frac{T}{2}} m(\lambda)d\lambda + \int_{\frac{T}{2}}^t m(\lambda)d\lambda = \frac{T}{2} - (t - \frac{T}{2}) = T - t.$

The instantaneous frequency is $\omega_i(t) = \omega_c + k_f\, m(t) = \omega_c + k_f$ for $0 \le t \le \frac{T}{2}$

and $\omega_i(t) = \omega_c - k_f$ for $\frac{T}{2} \le t \le T$.

$\omega_{i\max} = \omega_c + k_f$ and $\omega_{i\min} = \omega_c - k_f$



Frequency Deviation

- Dịch tần Δf
  - Sự khác biệt giữa tần số tức thời lớn nhất và tần số sóng mang
  - Định nghĩa: $\Delta f = k_f A_m = k_f \max|m(t)|$
  - Mối quan hệ với tần số tức tời

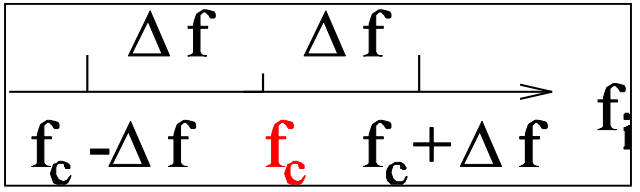
single-tone $m(t)$ case: $f_i = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$

general case: $f_c - \Delta f \le f_i \le f_c + \Delta f$

  - Câu hỏi: Băng thông của tín hiệu s(t) chỉ là 2Δf?

Không, tần số tức thời không bằng phổ tần số!

S(t) có phổ tần số tiến đến ∞.



Modulation Index

- Chỉ ra mức độ thay đổi của tín hiệu đã điều chế (tần số tức thời) thay đổi xung quanh tín hiệu chưa điều chế (tần số thông tin)

AM (envelope): $\frac{\max|m(t)|}{A}$,

FM (frequency): $\beta = \frac{\max|k_f m(t)|}{f_m}$

- Băng thông

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} m(\alpha) d\alpha$$

$$\varphi(t) = \mathrm{Re}(\varphi(t)) = A\left[\cos w_c t - k_f a(t) \sin w_c t - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) \cos w_c t + \frac{k_f^2}{3!} a^3(t) \sin w_c t \ldots\right]$$

Narrow Band Angle Modulation

Định nghĩa $\left|k_f a(t)\right| << 1$

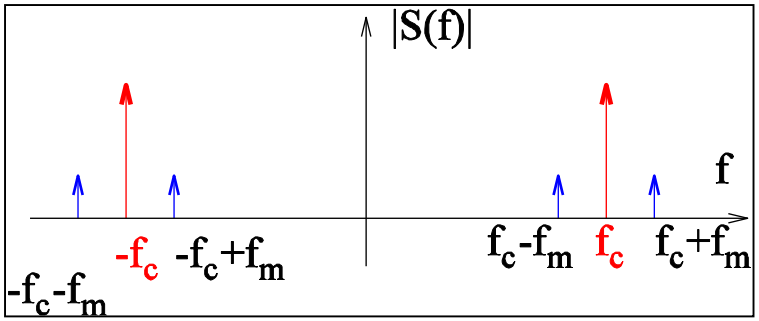
Phương trình $\varphi(t) = A\left[\cos w_c t - k_f a(t) \sin w_c t\right]$

So sánh với AM chỉ có sự khác biệt pha là Pi/2

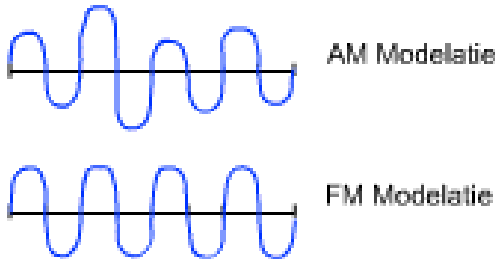
Tần số: tương tự

Thời gian: AM: tần số không đổi

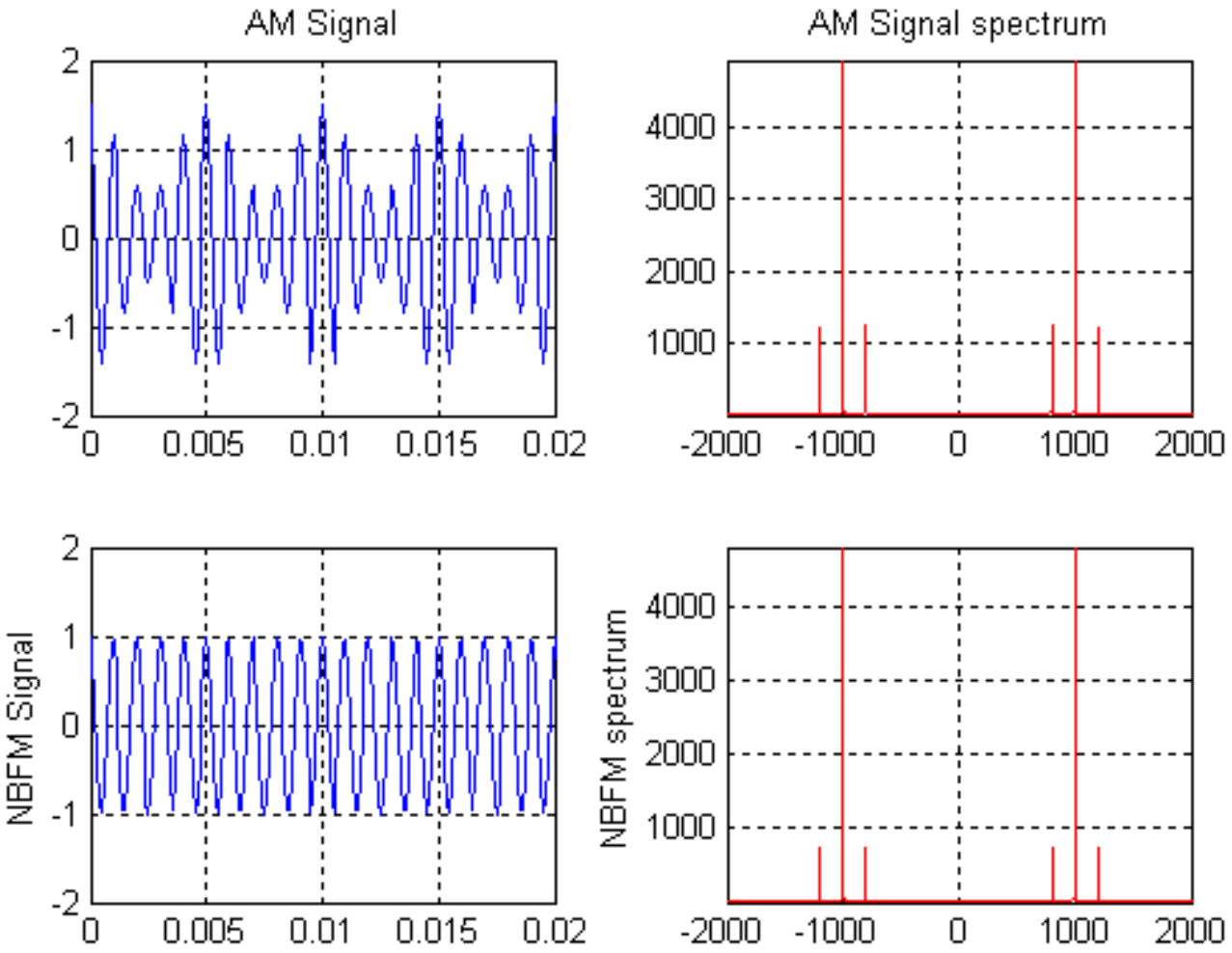
FM: biên độ không đổi



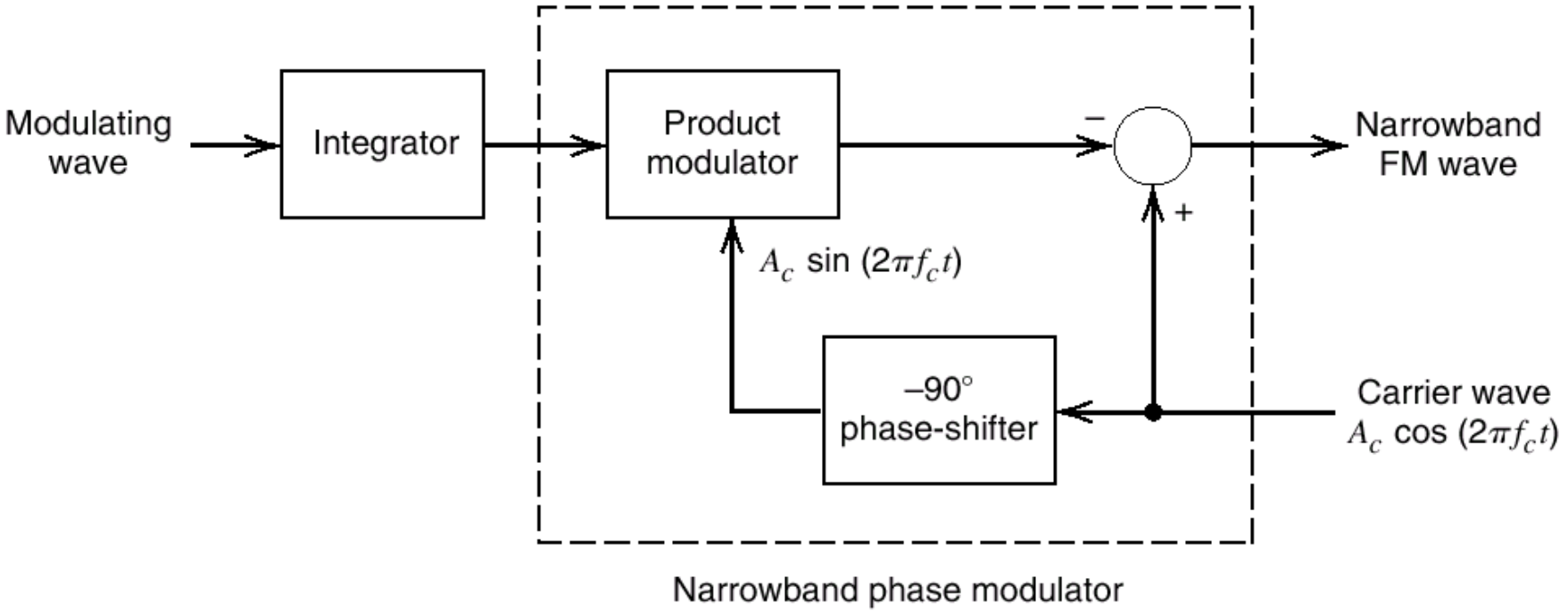
Kết luận: tín hiệu NBFM thì tương tự như tín hiệu AM. NBFM có băng thông 2W. (hai lần băng thông của tín hiệu thông tin)



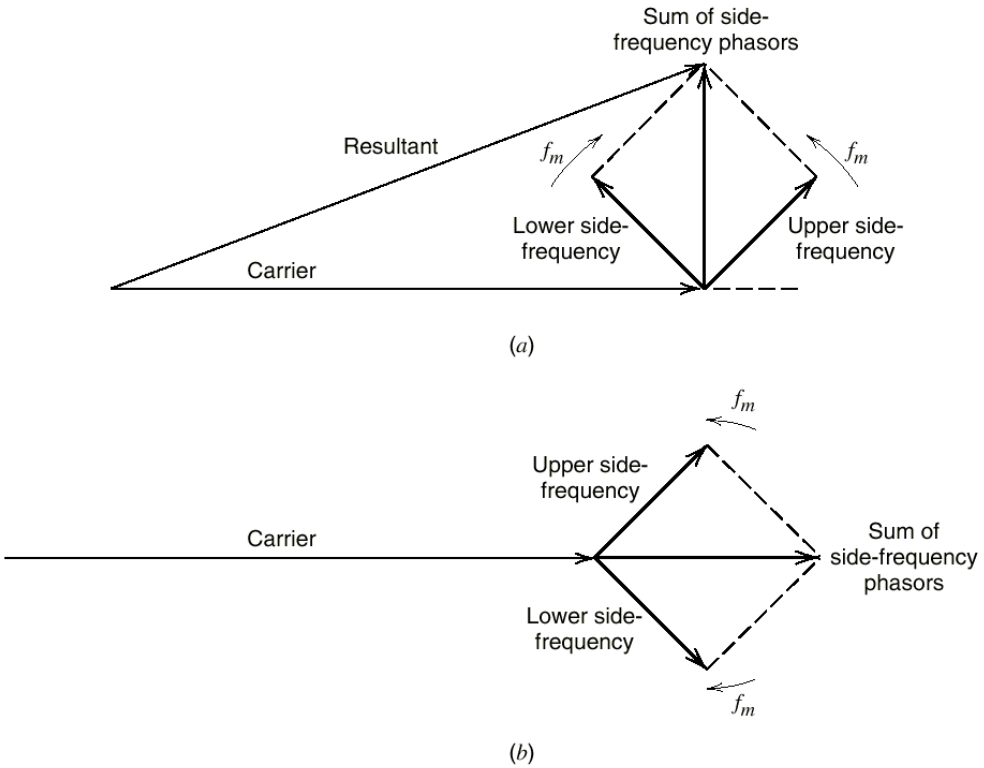
Example


AM Signal
AM Signal spectrum
NBFM Signal
NBFM spectrum
2
1
0
-1
-2
0
0.005
0.01
0.015
0.02
4000
3000
2000
1000
-2000
-1000
0
1000
2000

Block diagram of a method for generating a narrowband FM signal.



A phasor comparison of narrowband FM and AM waves for sinusoidal modulation. (a) Narrowband FM wave. (b) AM wave.



Wide Band FM

- Wideband FM signal

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right]$$

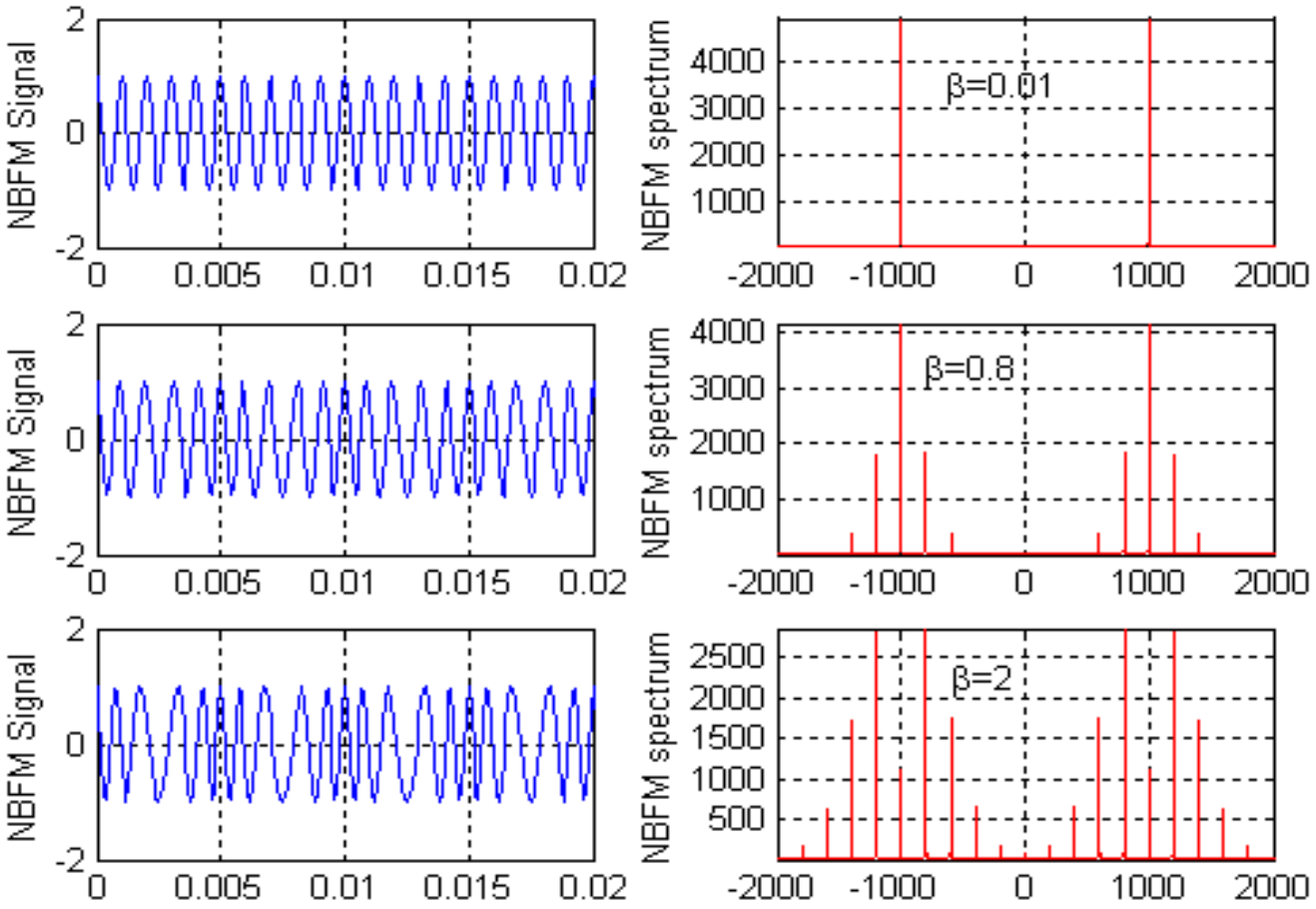
- Fourier series representation

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos\left[2\pi(f_c + n f_m)t\right]$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)\right]$$

$J_n(\beta)$: n-th order Bessel function of the first kind

Example


NBFM Signal
NBFM spectrum
β=0.01
β=0.8
β=2
0
0.005
0.01
0.015
0.02
-2000
-1000
1000
2000
500
1500
2500
3000
4000

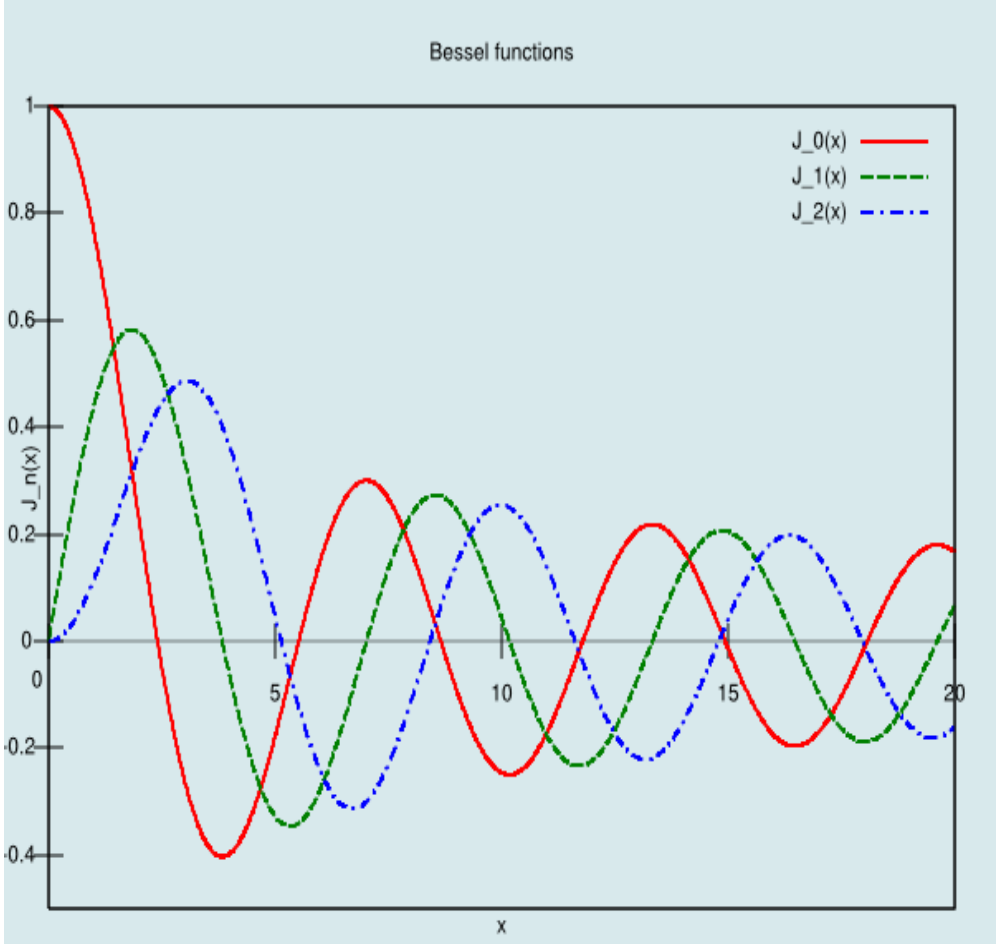
Bessel Function of First Kind

1. $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$
2. If β is small, then $J_0(\beta) \approx 1$,

$$J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2},$$

$$J_n(\beta) \approx 0 \quad \text{for all} \quad n > 2$$

3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$



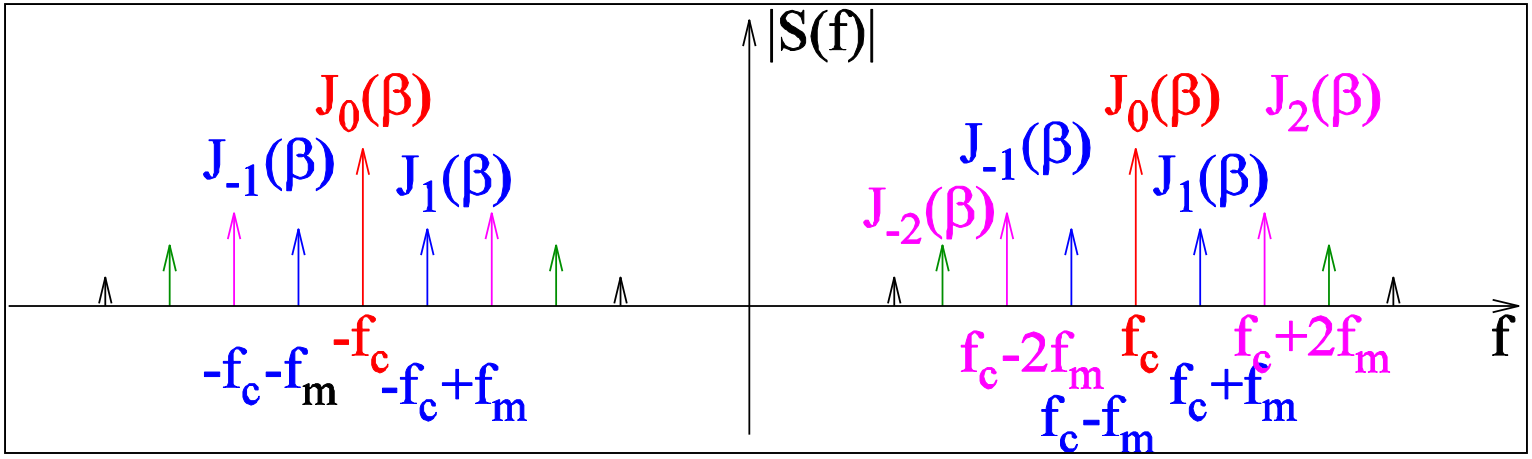
Spectrum of WBFM

- Spectrum when m(t) is single-tone

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos\left[2\pi (f_c + n f_m) t\right]$$

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)\right]$$

- Example 2.2



Spectrum Properties

1. frequencies: $f_c,\ f_c \pm f_m,\ f_c \pm 2f_m, \cdots,\ f_c \pm nf_m, \cdots$
   (for all n). Theoretically infinite bandwidth.

2. For $\beta << 1$ (NBFM), frequency: $f_c,\ f_c \pm f_m$
   $\because\ J_0(\beta) = 1,\ J_1(\beta) = -J_{-1}(\beta),\ J_n(\beta) = 0$ for all $n > 2$

3. Magnitude of $\pm f_c + nf_m$: $\frac{A_c}{2} J_n(\beta)$, depend on β

4. Carrier (f_c) magnitude $J_0(\beta)$ can be 0 for some β

5. Average power: $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c^2 \times \frac{1}{2} J_n^2(\beta) = \frac{1}{2} A_c^2$

Bandwidth of FM

- Yếu tố
  - FM có băng thông một phía tiến đến tần số vô hạn → về lý thuyết thì băng thông vô hạn
  - Nhưng các tần số ở cao rất nhỏ → về thực nghiệm thì băng thông hữu hạn
  - Băng thông của tín hiệu FM bằng với băng thông của yêu cầu của truyền dẫn (kênh truyền)
- Băng thông của tín hiệu FM được xấp xỉ bởi
  - Carson's Rule (cho biết sự ràng buộc)

Carson's Rule

- Gần như tất cả công suất nằm trong một băng thông
  - Đối với tín hiệu thông tin đơn tần có tần số f_m

$$B_T = 2\Delta f + 2f_m = 2(\beta + 1) f_m$$

  - Đối với tín hiệu tổng quá m(t) có băng thông (hoặc tần số cao nhất) W

$$B_T = 2\Delta f + 2W = 2(D+1)W$$

where $D = \dfrac{\Delta f}{W}$ is deviation ratio (equivalent to β),

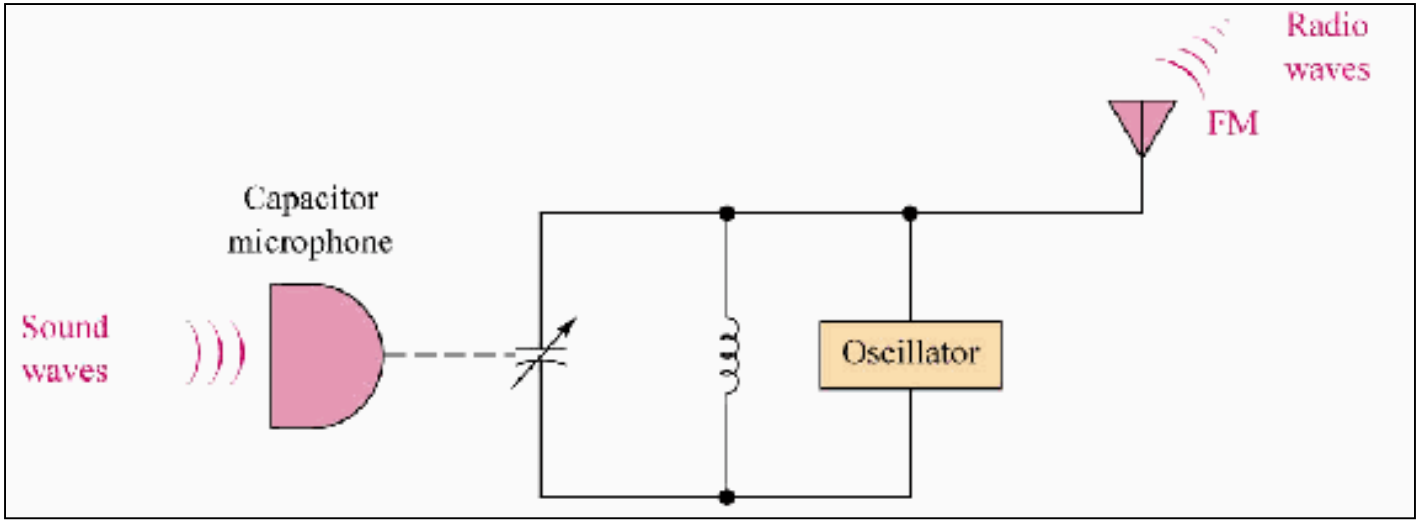
$$\Delta f = \max\left[k_f m(t)\right]$$

FM Modulator and Demodulator

- Điều chế FM
  - Direct FM
  - Indirect FM
- Giải điều chế FM
  - Direct: sử dụng bộ phân biệt tần số (frequency-voltage converter)
  - Tách sóng tỉ lệ
  - Bộ dò điểm Zero
  - Indirect: sử dụng PLL
- Bộ nhận superheterodyne (kỳ tần)

FM Direct Modulator

- Direct FM
  - Tần số sóng mang thay đổi trực tiếp với thông tin thông qua bộ dao động thế kiểm (voltage-controlled oscillator (VCO))
  - VCO: tần số ngõ ra thay đổi tuyến tín với điện thế ngõ vào
  - A simple VCO: thực hiện bởi "variable capacitor"
  - Máy phát FM dùng tụ và Microphone

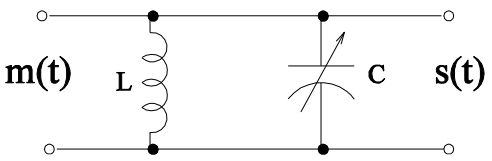


FM Direct Modulator cont.

- Phương pháp đơn giản, giá thấp, thiếu sự ổn định và chính xác, ứng dụng ở năng lượng thấp, không ổn định tại tần số sóng mang

Capacitance changes with the applied voltage:

$$C(t) = C_0 + \Delta C m(t)$$



LC oscillator frequency:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0 + L\Delta C m(t)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}\left[1 - \frac{\Delta C}{2C_0} m(t)\right] + O(t^2)$$

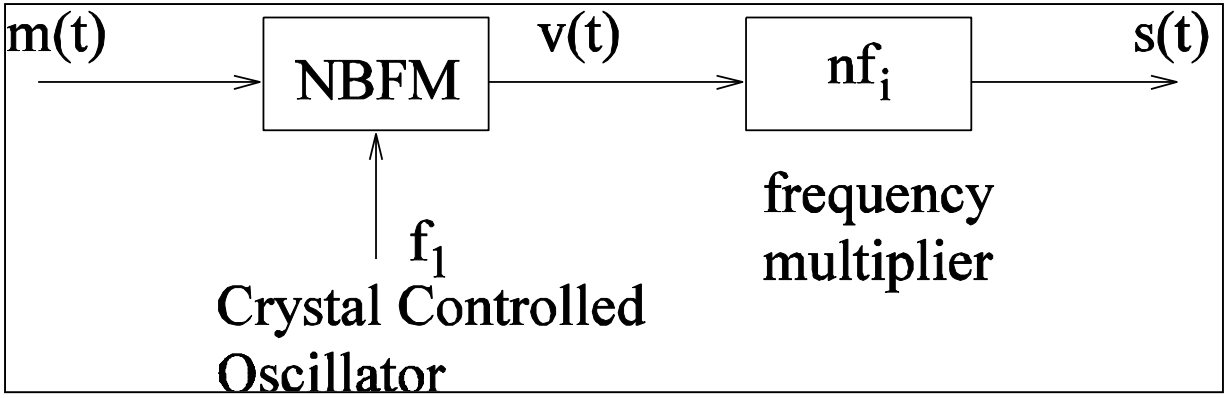
$$\approx f_0 - \frac{f_0 \Delta C}{2C_0} m(t)$$

$$= f_0 - \Delta f\, m(t)$$

- Bộ VCO hiện nay thường thực hiện như mộ IC PLL
- Tại sao VCO phát ra tín hiệu FM?

Indirect FM

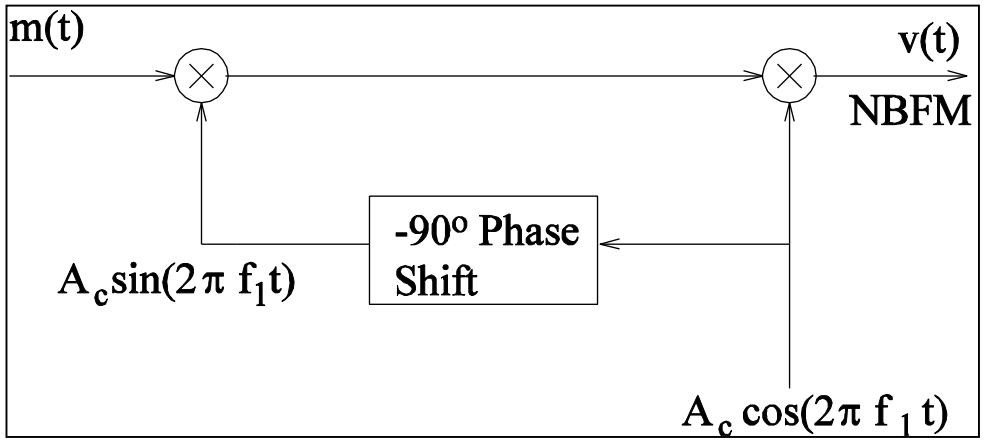
- Đầu tiên, tạo ra NBFM, sau đó nhân NBFM với Δf
- Tốt cho các yêu cầu về ổn định tần số sóng mang
- Trong FM thương mại, tất cả thiết bị dùng Indirect FM
- Thực hiện bộ Indiret FM: Armstrong FM
- Sơ đồ khối Indiret FM

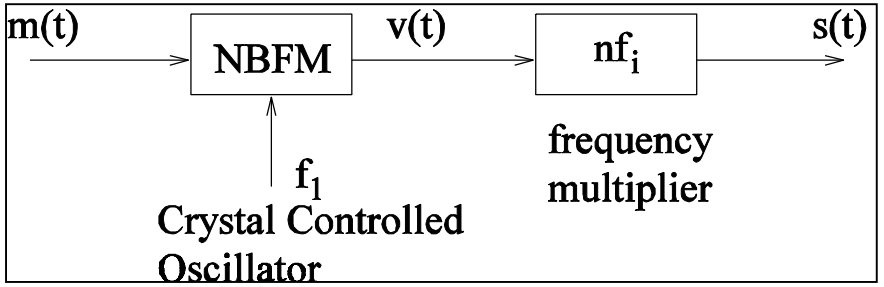


Indirect FM cont.

- Đầu tiên, phát ra tín hiệu NBFM với β_1 rất nhỏ

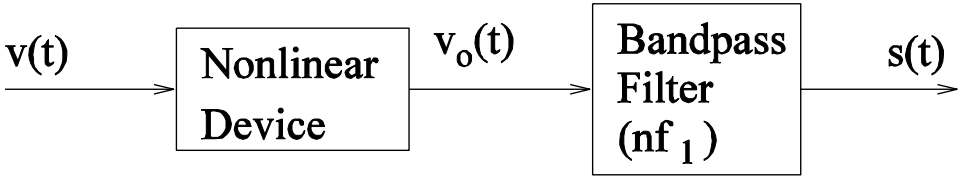
$$v(t) = A_c \cos(2\pi f_1 t) - \beta_1 A_c \sin(2\pi f_1 t)\ \text{m(t)}$$

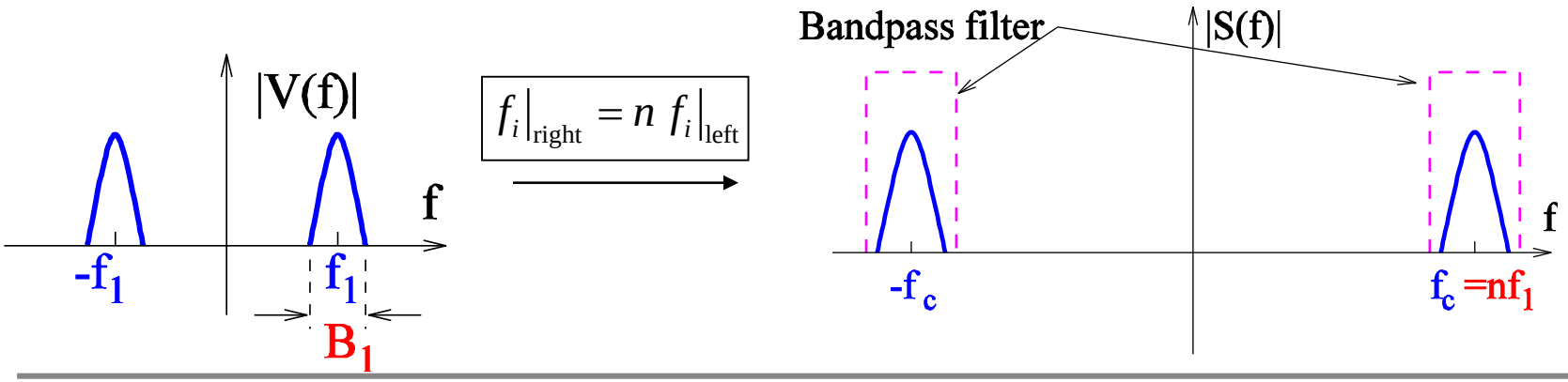




Indirect FM cont.

- Sau đó, đưa vào bộ nhân tần số với hệ số β
  - Tần số tức thời được nhân bởi n
  - Như vậy, tần số sóng mang Δf, và β
  - Băng thông bao nhiêu?





Analysis of Indirect FM

1. Input: $v(t) = A_c \cos\left[2\pi f_1 t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$,

where $f_i(t) = f_1 + k_f m(t), \quad \beta = \dfrac{\max|k_f m(t)|}{W}$

2. Nonlinear device outputs frequencies: $nf_1 + nk_f m(t)$

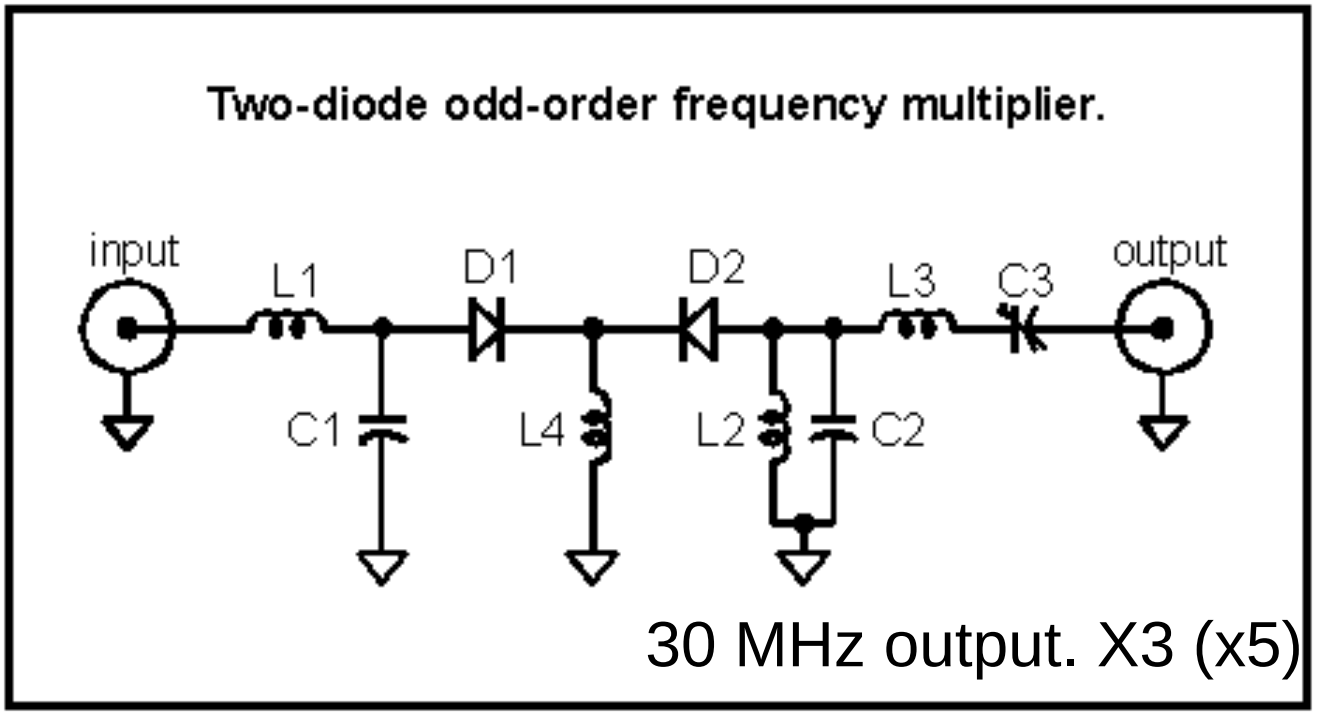
$$v_o(t) = a_1 v(t) + a_2 v^2(t) + \ldots + a_n v^n(t) + \ldots$$

3. Bandpass filter select new carrier $f_c = nf_1$

$$s(t) = \tilde{A}_c \cos\left[2\pi n f_1 t + 2\pi n k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

where new $f_i(t) = nf_1 + nk_f m(t), \quad \beta = \dfrac{\max|nk_f m(t)|}{W}$

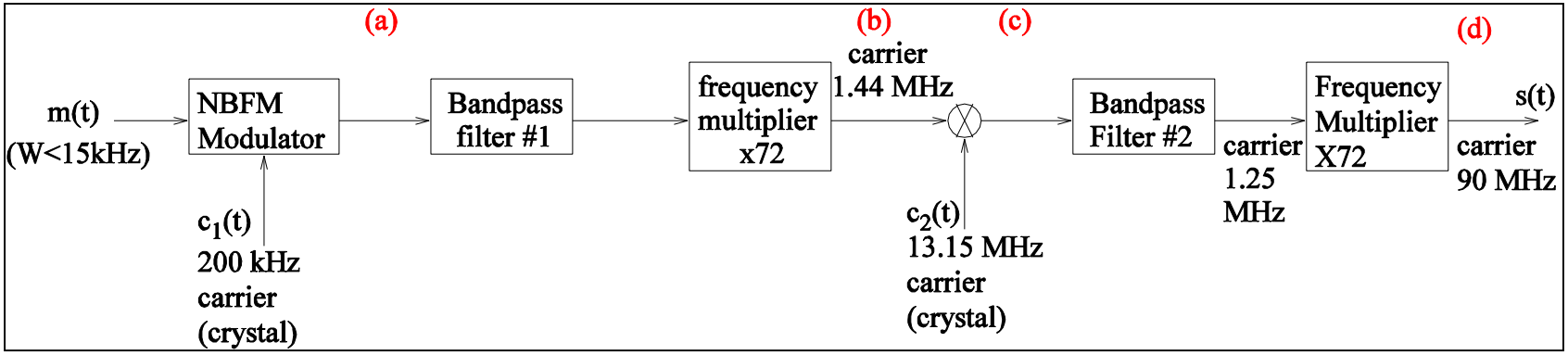
A simple electronic implementation of frequency multiplier



C1:100pF, L1:2.7µH. D:1N914
L2:.22µH, L3:1.8µH, L4:330µH
C2:120pF, C3:10pF.

Armstrong FM Modulator

- Phát minh bởi E. Armstrong, một bộ "indirect FM"
- Thực hiện phổ biến cho thương mại
- Thông số: message W=15 kHz, FM s(t): Δf=74.65 kHz.
- Các bạn có thể tính tần số ở (a)-(d)?



Solution:

(a) $\Delta f = 14.4$ Hz. (b) $\Delta f = 72 \times 14.4 = 1.036$ kHz.

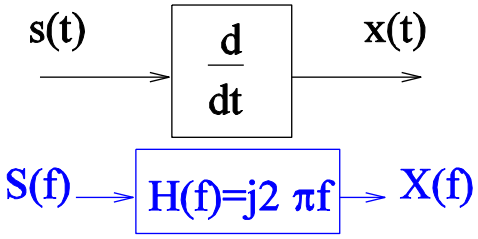
(c) $\Delta f = 1.036$ kHz. (d) $\Delta f = 72 \times 1.036 = 74.65$ kHz.

FM Demodulator

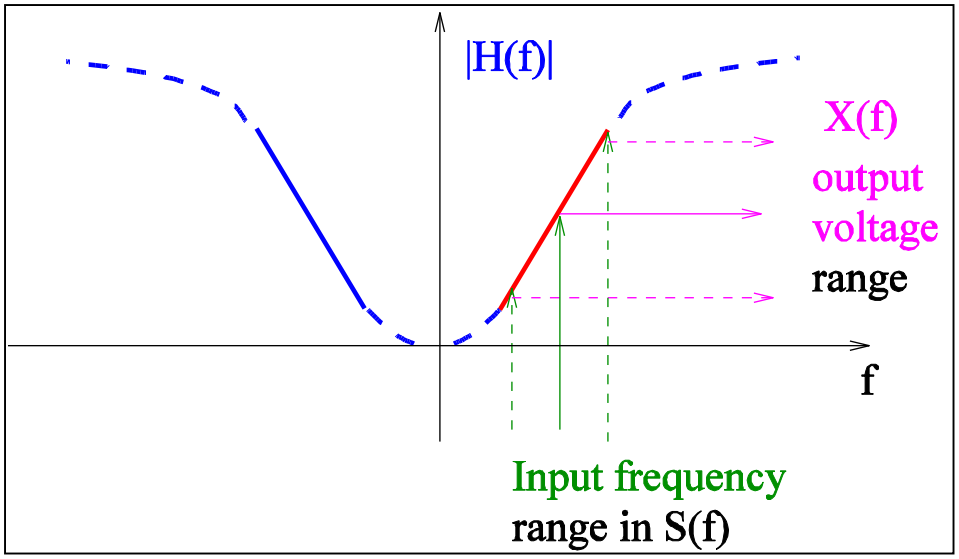
- Bốn phương pháp cơ bản
  - Khác biệt về đường bao/độ dốc
    - *Bộ chuyển FM sang AM*
  - Phân biệt sự dịch pha / Tách sóng tỉ lệ
    - *Ước lượng sự thay đổi*
  - Phát hiện điểm Zero
  - Hồi tiếp tần số
    - *Phase lock loops (PLL)*

FM Slope Demodulator

- Cơ bản: sử dụng bộ tách độ dốc (slope circuit) như là sự khác biệt tần số, điều này thực hiện việc đổi tần số sang điện thế (FVC)
  - Mạch độ dốc: điện thế ngõ ra tỉ lệ với tần số vào. Ví dụ: bộ lọc, vi phân

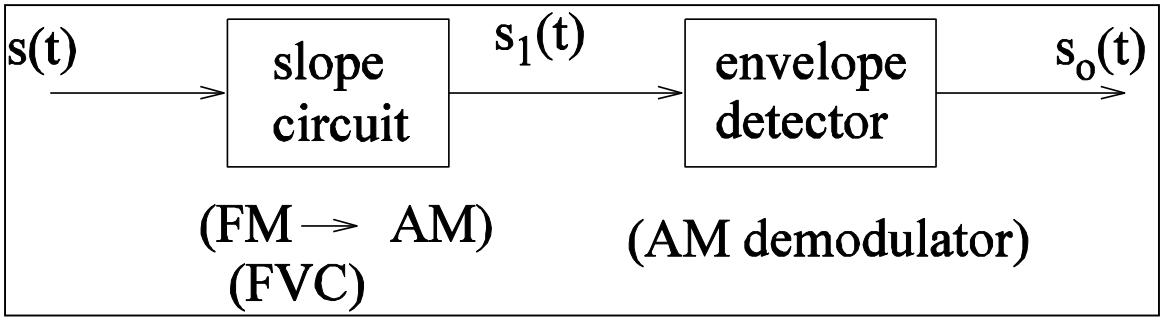


freqency in s(t)	voltage in x(t)
10 *Hz*	$j20\pi$
20 *Hz*	$j40\pi$
⋮	⋮



FM Slope Demodulator cont.

- Sơ đồ khối của phương pháp trực tiếp (slope detector = slope circuit + envelope detector)



$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right], \quad \text{where} \quad f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

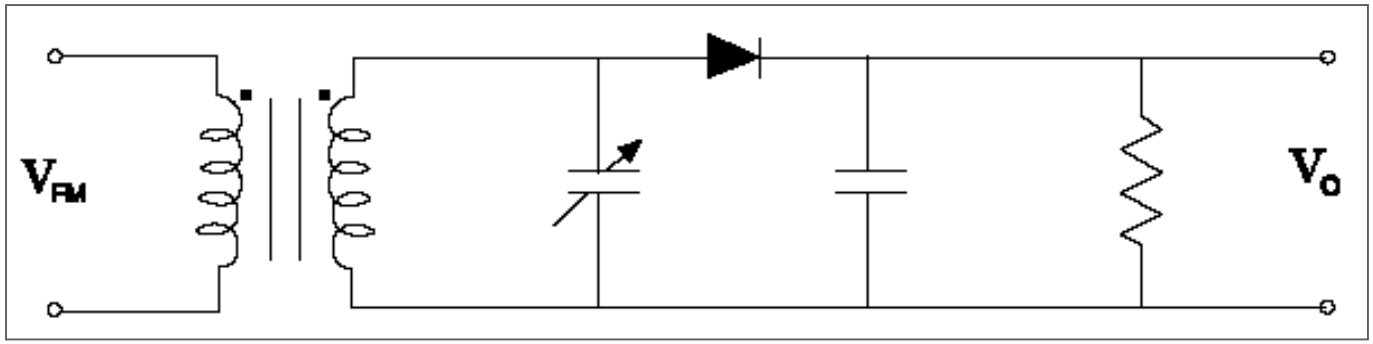
Let the slope circuit be simply differentiator:

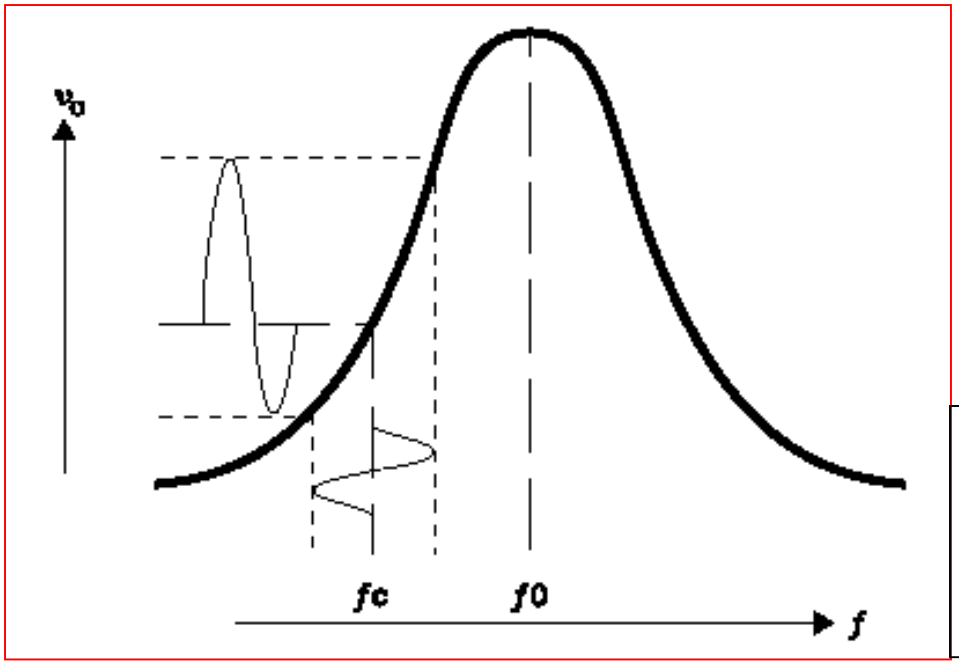
$$s_1(t) = -A_c\left[2\pi f_c + 2\pi k_f m(t)\right]\sin\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right]$$

$$s_o(t) \approx -A_c\left[2\pi f_c + 2\pi k_f m(t)\right]$$

$s_o(t)$ linear with m(t)

Slope Detector

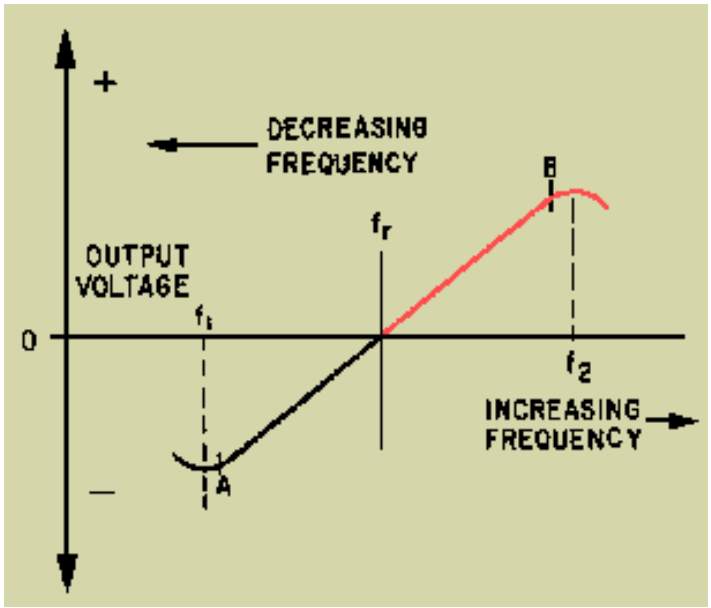


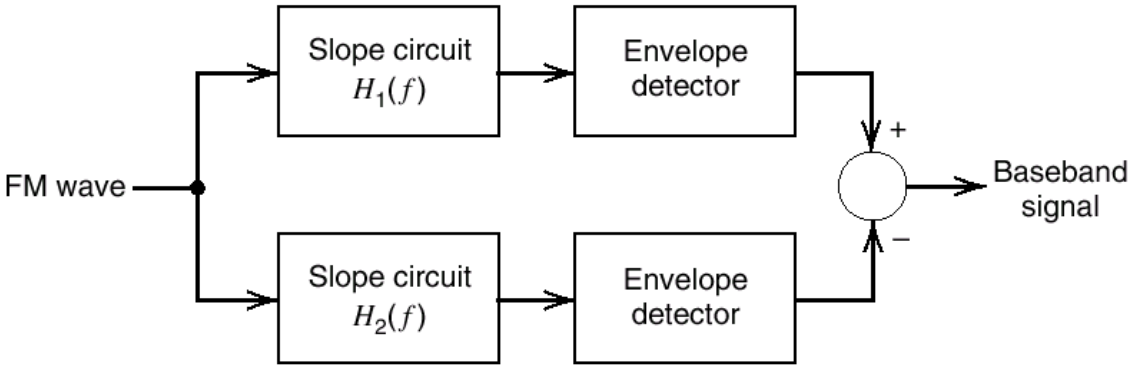


Magnitude frequency response of transformer BPF.

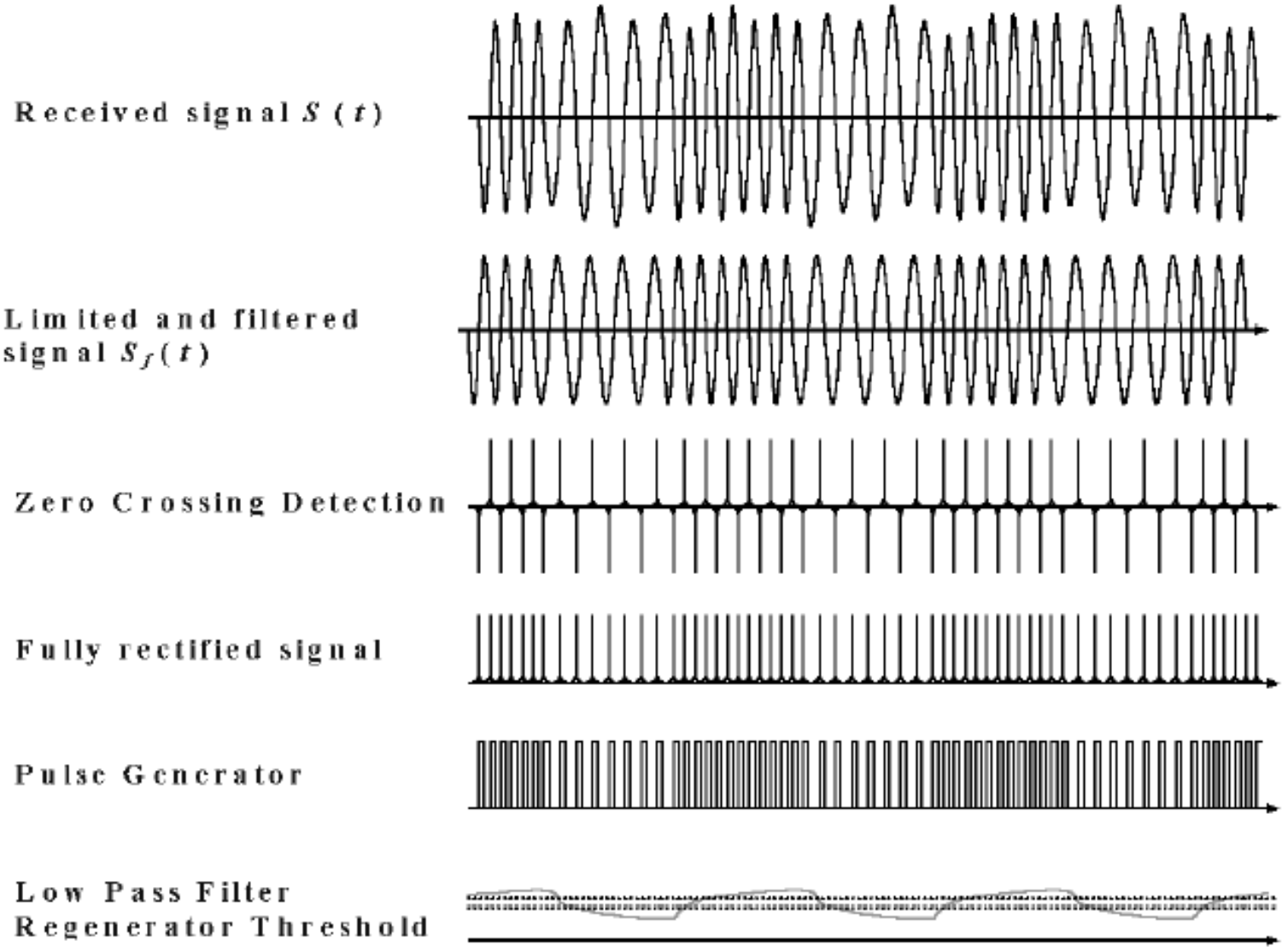
Ratio Detector

- Foster-Seeley/phát hiện sự dịch chuyển pha
  - Sử dụng hai bộ chuyển từ tần số tức thời sang biên độ tức thời. Biên độ thay đổi được hiệu chỉnh để tạo điện thế DC ở ngõ ra có biên độ và cực với tần số tín hiệu vào.
  - Ví dụ



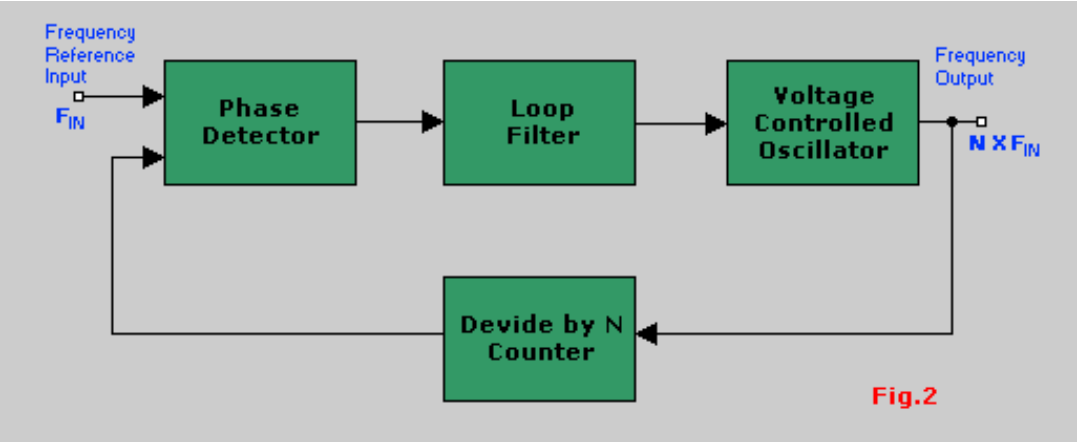


Zero Crossing Detector



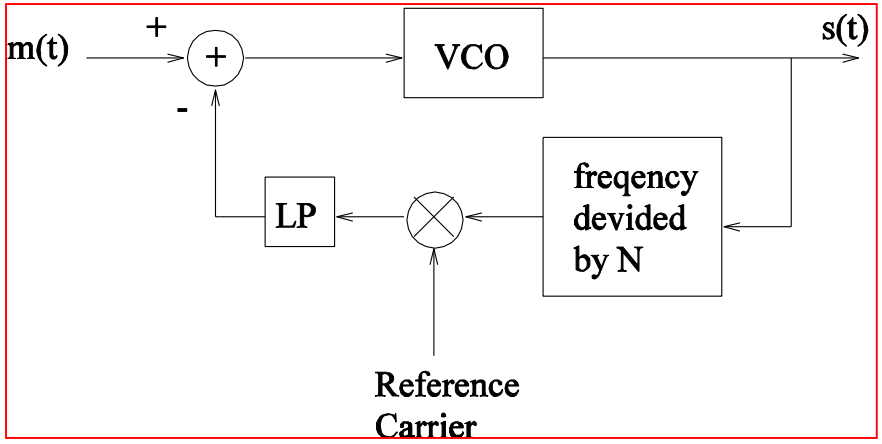
FM Demodulator PLL

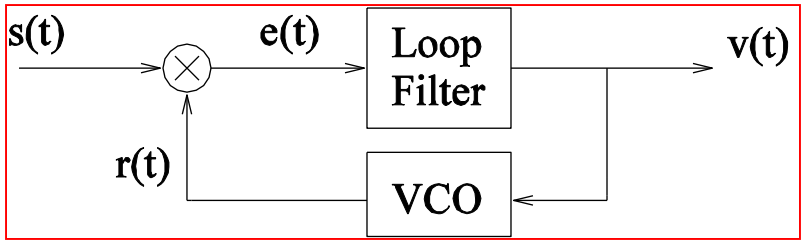
- Phase-locked loop (PLL)
  - Một mạch điều khiển hồi tiếp vòng, tạo một tín hiệu có pha (và tần số) liên quan đến tín hiệu tham chiếu
    - *Dò sự thay đổi tần số (hoặc pha) của ngõ vào*
    - *Hoặc thay đổi tần số (hoặc pha) theo ngõ vào*
  - PLL có thể sử dụng cả ở điều chế và giải điều chế FM
    - *Cũng là như IC điều chế cân bằng được dùng cho cả gỉ điều chế AM và FM*



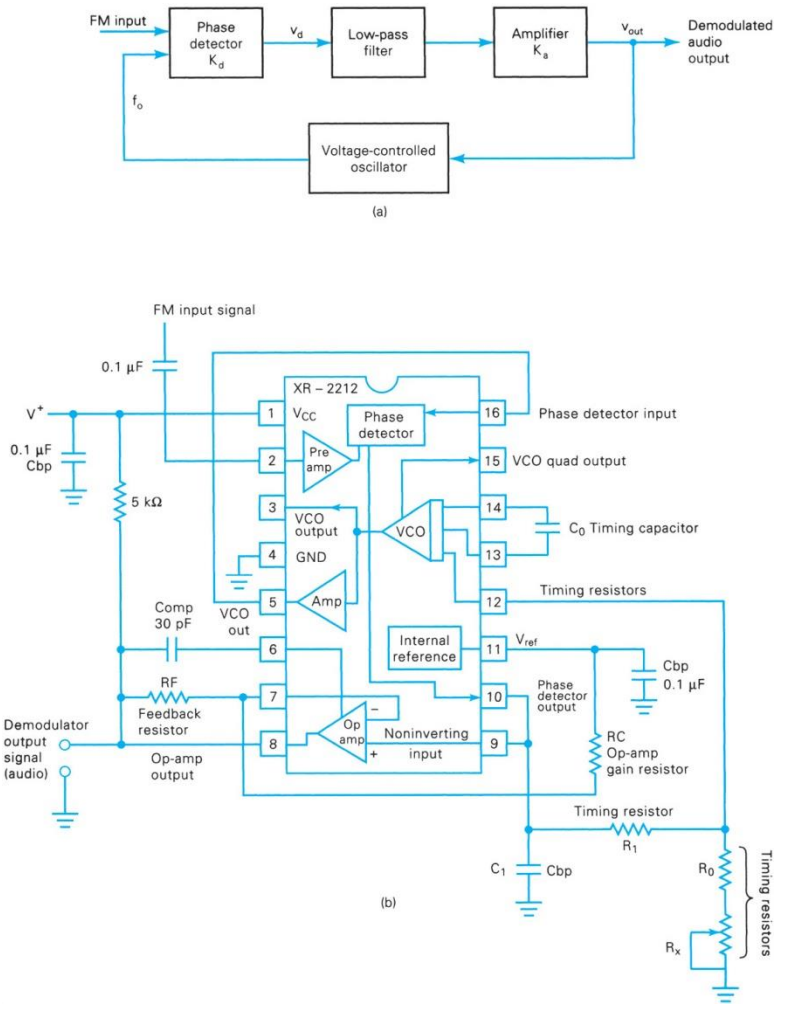
PLL FM

- Remember the following relations
  - $Si=A\cos(w_c t+\phi_1(t))$, $Sv=A_v\cos(w_c t+\phi_c(t))$
  - $Sp=0.5AA_v[\sin(2w_c t+\phi_1+\phi_c)+\sin(\phi_1-\phi_c)]$
  - $So=0.5AA_v\sin(\phi_1-\phi_c)=AA_v(\phi_1-\phi_c)$





Phase-Locked Loop Demodulator



(a) Block diagram for a PLL FM demodulator; (b) PLL FM demodulator using the XR-2212 PLL

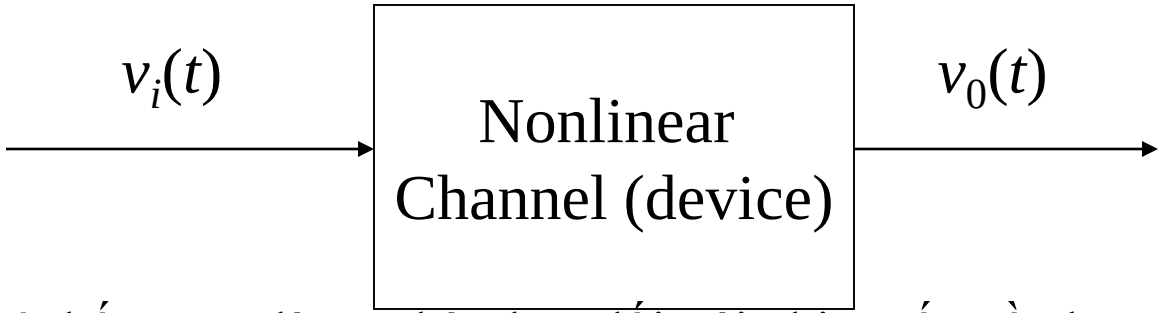
Nonlinear Effects in FM Systems

1. Phi tuyến mạnh, ..., điều chế luật bình phương, nhân tần

2.Phi tuyến yếu, ..., không hoàn hảo

mối quan hệ input-output phi tuyến

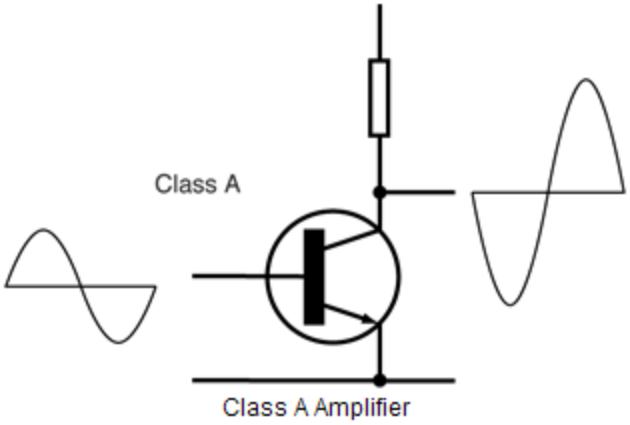
$$v_0(t) = a_1 v_i(t) + a_2 v_i^{\ 2}(t) + a_3 v_i^{\ 3}(t)$$

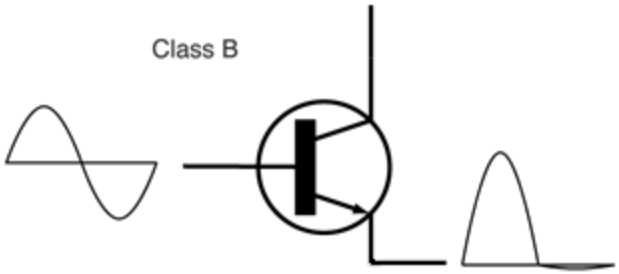


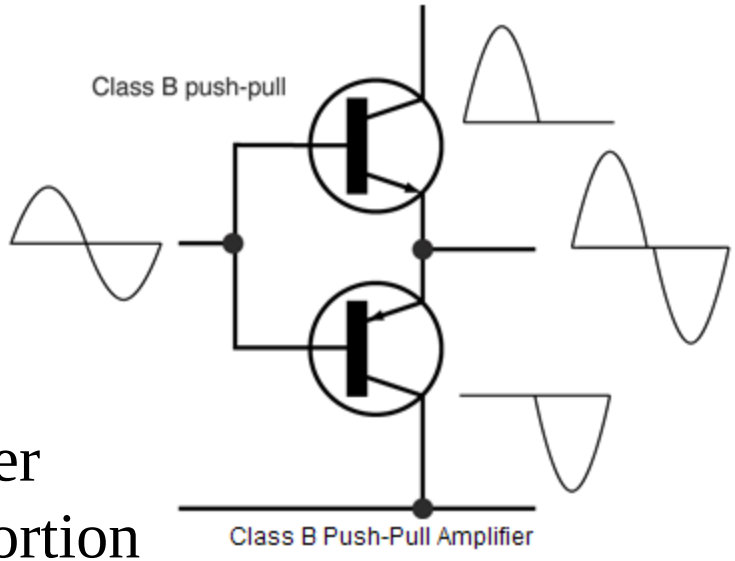
Một hệ thống FM là cực kỳ nhạy đối với phi tuyến về pha

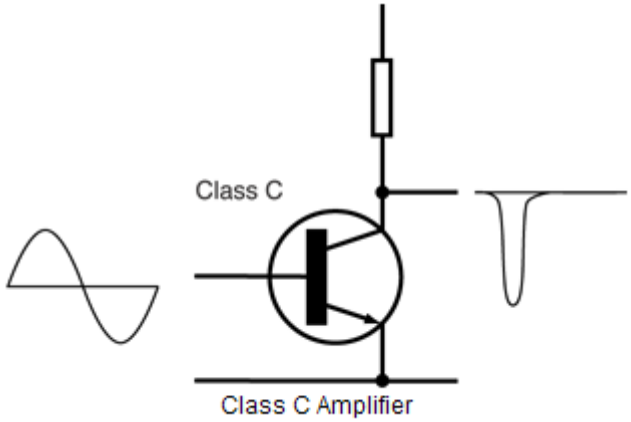
Những loại nguồn cơ bản : chuyển AM sang PM

Electronic Amplifier









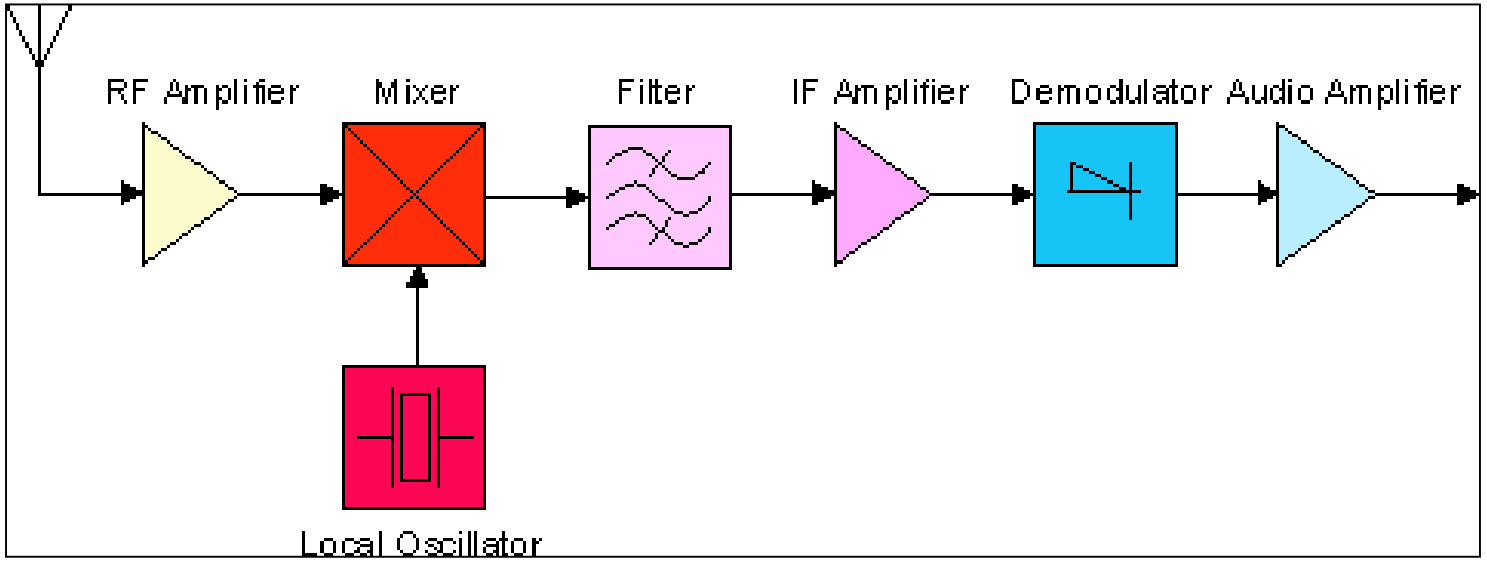
A: low power
B: high distortion
C: need a filter
but narrow band

Superheterodyne Receiver

- Chức năng chính của bộ nhận vô tuyến
  - Giải điều chế → lấy lại tín hiệu thông tin
  - Chỉnh tần số sóng mang → chọn đài
  - Filtering → bỏ nhiễu/can nhiễu
  - Amplification → chống lại suy hao công suất truyền
- Bộ thu Superheterodyne
  - Heterodyne: trộn hai tín hiệu để tạo ra tần số mới
  - Bộ thu superheterodyne: tín hiệu RF heterodyne có bộ chỉnh nội, chuyển sang IF
  - Phát minh bởi E. Armstrong năm 1918.
  - AM: RF 0.535MHz-1.605 MHz, Midband 0.455MHz
  - FM: RF 88M-108MHz, Midband 10.7MHz

Advantage of superheterodyne receiver

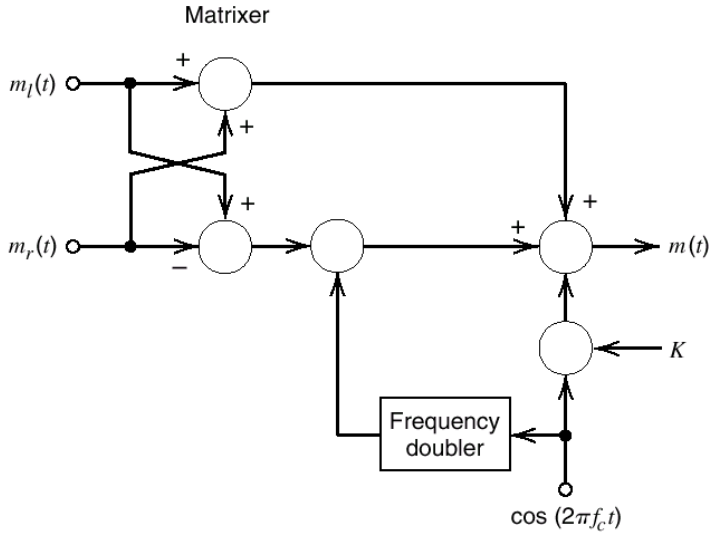
- Một khối tín hiệu (hoặc mạch điện) có thể thực hiện: chọn lọc, chất lượng tín hiệu, khuếch đại công suất
- Bộ nhận superheterodyne gồm nhiều khối khác nhau
- Khối RF : chọn lọc
- Khối IF: bộ lọc cho chất lượng tín hiệu cao, khuếch đại, sử dụng mạch điện hoạt động ở tần số cố định IF, không ở băng lớn



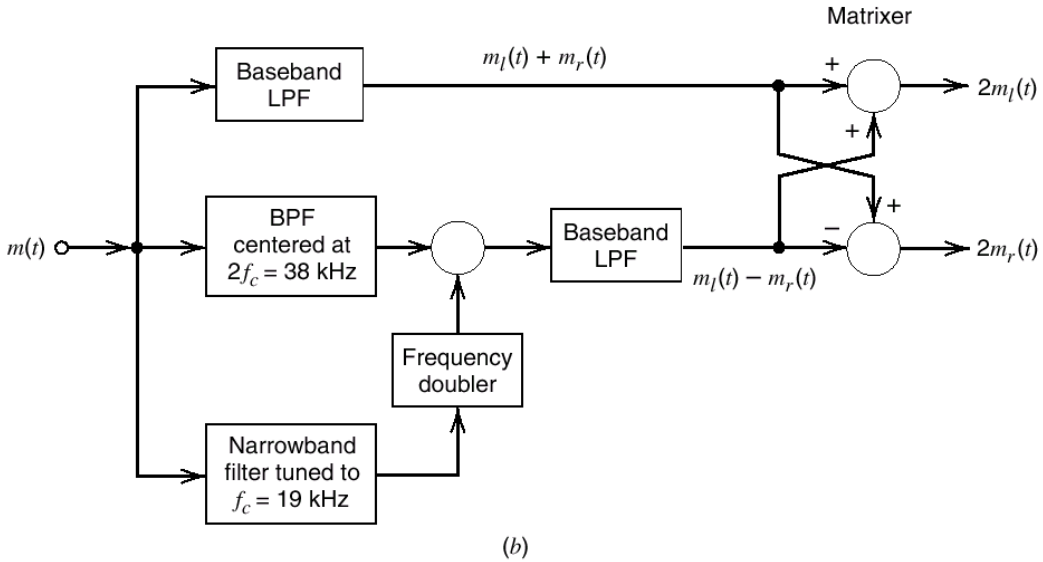
FM Broadcasting

- Tần số của một trạm phát sóng FM thường được nhân với 100 kHz và tạo dãi tần từ 87,5 đến 108,5 MHz.
- f_m=15KHz, Δf=75KHz, β=5, B=2(f_m+Δf)=180kHz
- Pre-emphasis and de-emphasis
  - Nhiễu ngẫu nhiên có phân phối phổ có hình "tam giác" trong hệ thống FM, ảnh hưởng của nhiễu xảy ra lớn ở tần số cao của tín hiệu dải gốc. Điều này có thể điều chỉnh để dạt đến một giới hạn nhất định bằng cách tăng cường tần số cao trước khi truyền và giảm chúng một lượng tương ứng ở bộ thu.

FM Stereo Multiplexing



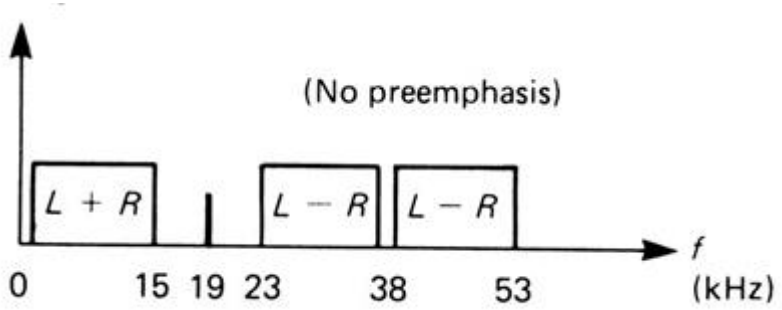
(a)



(b)

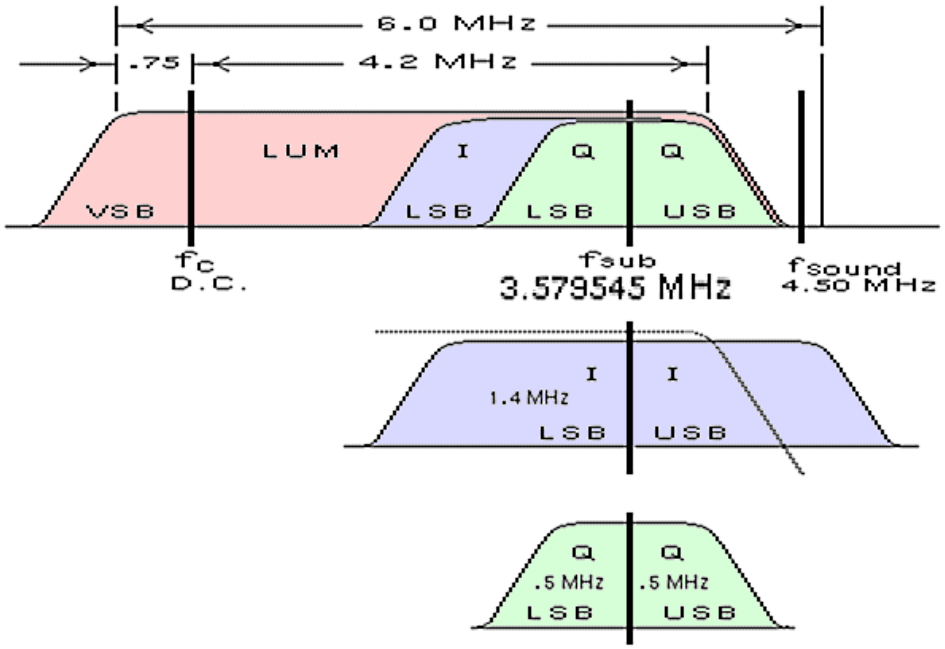
Fc=19KHz.
(a) Multiplexer in transmitter of FM stereo.
(b) Demultiplexer in receiver of FM stereo.

Backward compatible
For non-stereo receiver



TV FM broadcasting

- f_m=15KHz, Δf=25KHz, β=5/3, B=2(f_m+Δf)=80kHz
- Center f_c+4.5MHz



Phân tích tần số

- Sideband set ($f_c \pm f_m$, $f_c \pm 2f_m$,…, $f_c \pm nf_m$)
- First-order sidebands, second-order sidebands,…
- $J_1(m), J_2(m)$,…magnitudes of sidebands
- $J_n(m)$ can be solved by:

$$J_n(m) = \left(\frac{m}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{(m/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(m/2)^4}{2!(n+2)!} - \frac{(m/2)^6}{3!(n+1)!} + \ldots\right]$$

- Table 6-3
- *m* increases, the number of significant side freqs increase⇒bandwidth increases
- Example 6-2

Bessel functions of the First Kind

Modulation index	Carrier	Side freq pairs					
m	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
0	1.00	-	-	-	-	-	-
0.25	0.98	0.12	-	-	-	-	-
0.5	0.94	0.24	0.03	-	-	-	-
1	0.77	0.44	0.11	0.02	-	-	-
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01	-	-
2	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	-	-
2.4	0	0.52	0.43	0.2	0.06	0.02	-

Bessel function versus m

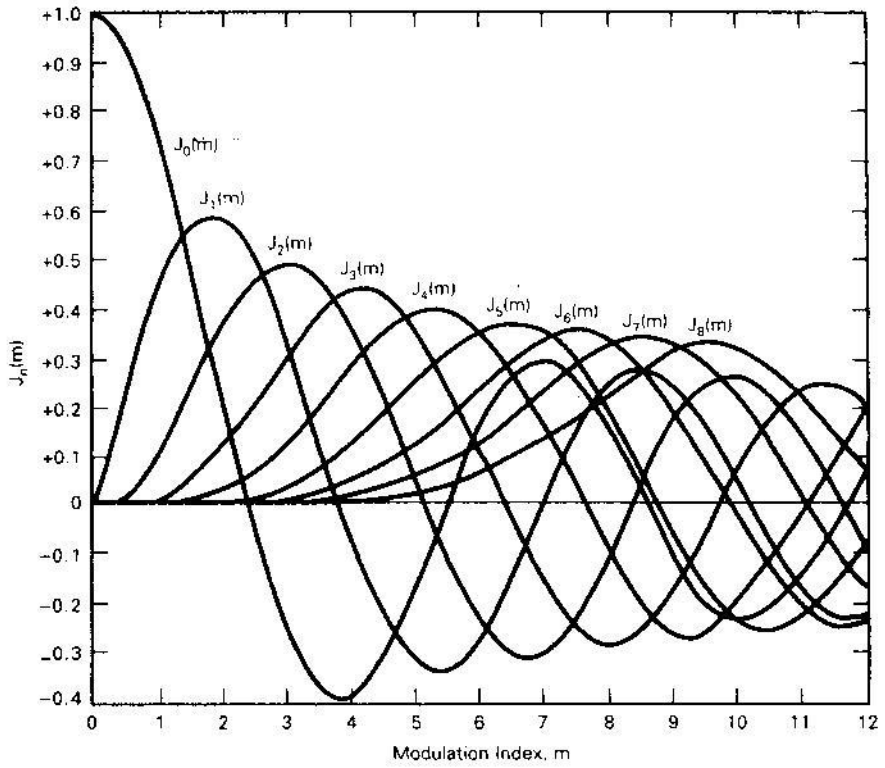


FIGURE 6-5 $J_n(m)$ versus m

- Ex5-5, 5.1-1, 5.1-2, 5.2-2